

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**О.Д. Онопрієнко, А.Г. Дем'яненко**

**РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ РАМ  
МЕТОДОМ СИЛ**

**Навчальний посібник**

Дніпро 2021

УДК 539.3 (075.8)

Розглянуто на засіданні кафедри теоретичної механіки, опору матеріалів та матеріалознавства. Протокол № 6 від 25 січня 2021 р.

Рекомендовано науково-методичною радою інженерно-технологічного факультету ДДАЕУ. Протокол № 6 від 26 січня 2021 р.

**Рецензент:** професор кафедри будівельної механіки та опору матеріалів Придніпровської державної академії будівництва та архітектури, доктор технічних наук, професор Красовський В. Л.

**Онопрієнко О.Д.** Розрахунок статично невизначених рам методом сил/ О.Д. Онопрієнко, А.Г. Дем'яненко; М-во освіти і науки України, Дніпровський державний аграрно-економічний університет. – Дніпро: ДДАЕУ, 2021. – 76 с.

Навчальний посібник призначений для практичних занять, самостійної роботи та виконання домашніх розрахунково-графічних завдань з механіки матеріалів і конструкцій, технічної механіки та опору матеріалів і будівельної механіки для студентів інженерних спеціальностей. Наведені теоретичні відомості та приклади розв'язування типових задач з розрахунків на міцність та жорсткість плоских рам. Розкриття статичної невизначеності рам виконане методом сил, деформації визначаються за допомогою інтегралів Мора, що обчислені методом Верещагіна. Наведені варіанти розрахункових завдань.

© Онопрієнко О.Д., Дем'яненко А.Г., 2021

## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА.....</b>	<b>4</b>
<b>Розділ 1. Статично визначені рами. Побудова епюр поздовжніх, поперечних сил та згинальних моментів.....</b>	<b>5</b>
<b>Розділ 2. Потенціальна енергія деформації пружної системи. Енергетичні методи визначення деформацій у пружних стержньових системах.....</b>	<b>11</b>
2.1 Загальний випадок навантаження.....	11
2.2 Теорема Кастіліано.....	14
2.3 Метод введення додаткової (фіктивної) сили.....	17
2.4 Інтеграл Мора та спосіб Верещагіна.....	19
<b>Розділ 3. Статично невизначені стержньові системи. Розрахунок статично невизначених рам методом сил.....</b>	<b>23</b>
<b>Розділ 4. Визначення узагальнених переміщень в статично визначених рамах енергетичним методом.....</b>	<b>27</b>
4.1 Побудова вантажної епюри.....	29
4.2 Побудова одиничних епюр.....	30
<b>Розділ 5. Статично невизначені рами. Метод сил.....</b>	<b>32</b>
5.1 Побудова епюр поздовжніх сил.....	40
5.2 Побудова епюри поперечних сил.....	40
5.3 Побудова епюри згинальних моментів.....	42
<b>Перелік основних питань з опору матеріалів та будівельної механіки.....</b>	<b>44</b>
<b>Рекомендована література.....</b>	<b>47</b>
<b>Додатки.....</b>	<b>48</b>

## Передмова

Надзвичайно важливою формою навчання студентів є практичні заняття та самостійна робота. В умовах дистанційної освіти частка останньої зростає, що викликає зрозумілі труднощі в засвоєнні матеріалу. В навчальному посібнику міститься теоретичний матеріал, що допоможе студентам розв'язати різноманітні завдання з розрахунку статично невизначених рам. Наведені приклади розрахунків типових задач.

Для виконання розрахунково-графічних робіт рекомендовано керуватися довідником Міжнародної системи одиниць (СІ).

<i>Величина</i>	<i>Одиниця виміру</i>	<i>Позначення</i>
довжина	метр	м
маса	кілограм	кг
час	секунда	с
статичний момент площі перерізу	кубічний метр	м <sup>3</sup>
момент опору плоского перерізу	кубічний метр	м <sup>3</sup>
момент інерції плоского перерізу	метр в четвертій степені	м <sup>4</sup>
сила	ньютон	Н
момент сили	ньютон · метр	Н·м
напруження	паскаль	Па = Н/м <sup>2</sup>

Міжнародна система одиниць (СІ) не має повного переліку потрібних при розрахунках величин, тому при виконанні розрахунково-графічних робіт рекомендовано використовувати наступні співвідношення:

<i>Величина</i>	<i>Одиниця та її позначення</i>		
	<i>В технічній системі</i>	<i>В системі СІ</i>	<i>Співвідношення одиниць</i>
сила	кілограм-сила (кгс)	ньютон (Н)	1 кгс ≈ 10 Н
момент сили	кгс·м	Н·м	1 кгс·м ≈ 10 Н·м

напруження	кгс/см <sup>2</sup>	Па = Н/м <sup>2</sup>	1 кгс/см <sup>2</sup> ≈ 10 <sup>5</sup> Па = 0,1 МПа
плоский кут	градус (...°)	радіан (рад.)	1° = π/180 рад
швидкість	оберт/хв	рад/с	1 об/хв = π/30 рад/с

## Розділ 1. СТАТИЧНО ВИЗНАЧЕНІ РАМИ. ПОБУДОВА ЕПЮР ПОЗДОВЖНИХ, ПОПЕРЕЧНИХ СИЛ ТА ЗГИНАЛЬНИХ МОМЕНТІВ

Стержньову конструкцію, елементи якої працюють на згин, називають рамою. Якщо усі елементи конструкції лежать в одній площині, яка водночас є і силовою площиною, раму називають плоскою. Досить часто стержні рами жорстко зв'язані у вузлах, при чому при плоскій деформації кути між стержнями у вузлах не змінюються. Як відомо з теоретичної механіки, рама буде статично визначеною, якщо опорні реакції а потім і внутрішні силові фактори у її поперечних перерізах можуть бути визначені за допомогою рівнянь статички на основі методу перерізів. Інакше кажучи, якщо опорні реакції і внутрішні силові фактори можуть бути знайдені з рівнянь статички, то рама буде статично визначеною. Якщо ж внутрішні силові фактори у поперечних перерізах її складових елементів або реакції в опорах не можуть бути визначені тільки за допомогою рівнянь статички, рама є статично невизначеною. На рис. 1 приведені приклади статично визначених (а, б) і статично невизначених (в, г) рам.

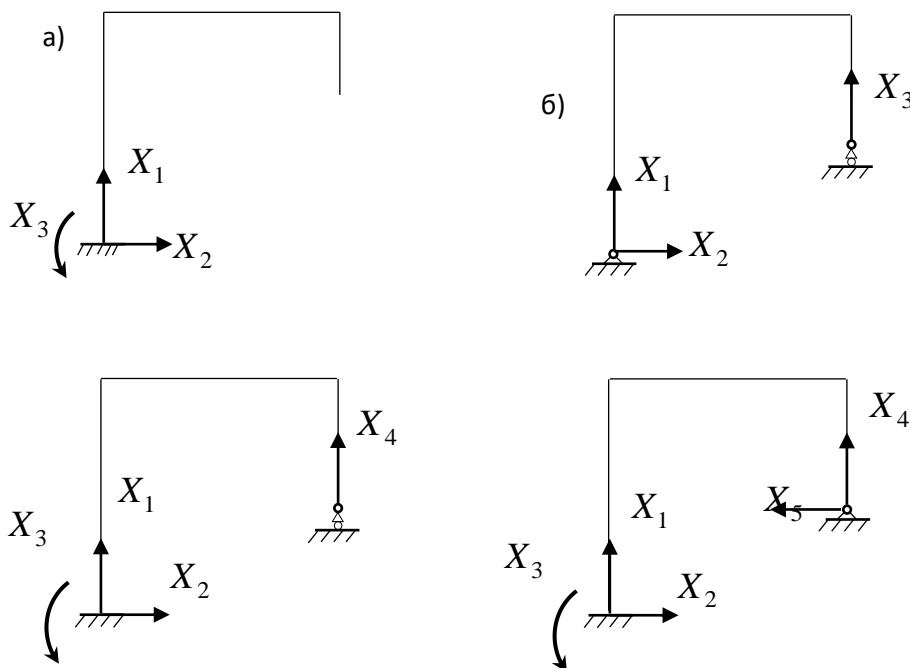


Рис. 1

Як відомо з теоретичної механіки, для плоскої довільної системи сил можна скласти три лінійно незалежних рівняння статички. Жорстке затиснення

містить три невідомі реакції, нерухомий шарнір – дві і рухомий шарнір – одну. Для визначення трьох невідомих реакцій для рам, представлених на рис. 1 а, б, можуть бути складені три необхідні рівняння статички. Трьох рівнянь статички недостатньо для визначення опорних реакцій рам, представлених на рис. 1 в, г – ці рами статично невизначені: один раз – рама представлена на рис. 1 в і двічі – рама, представлена на рис. 1 г.

Для визначення внутрішніх силових факторів використовуємо відомий з опору матеріалів метод перерізів, при цьому для визначення поперечної сили та згинального моменту можна керуватися правилами, які були отримані для балок у зв'язку з тим що елементами рами є балки. Нагадаємо їх:

внутрішня поздовжня сила  $N$  у довільному поперечному перерізі рами чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на поздовжню вісь усіх зовнішніх сил, прикладених до рами по одну сторону від проведеного перерізу;

внутрішня поперечна сила  $Q$  у довільному поперечному перерізі рами чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на площину перерізу всіх зовнішніх сил, прикладених до рами по одну сторону від проведеного перерізу;

внутрішній згинальний момент  $M$  у довільному поперечному перерізі рами чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, прикладених до рами по одну сторону від даного перерізу, відносно центру ваги цього перерізу.

Побудову епюр внутрішніх силових факторів для рам потрібно починати з визначення опорних реакцій. Для статично визначених рам, що мають жорстке закріплення на одному кінці, а інший кінець вільний, можна визначати внутрішні силові фактори і будувати епюри, рухаючись від вільного кінця до затисненого тобто задалегідь не визначені опорні реакції одержимо з епюр.

При побудові епюр внутрішніх силових факторів їх значення відкладають як відповідні ординати на перпендикулярах до осей стержнів рами.

Ординати епюри поздовжніх сил відкладають по обидві сторони від осі даного стержня. На епюрі поздовжніх сил обов'язково вказуємо знак (“+” відповідає розтягу, ”-“ – стиску).

Ординати епюри поперечних сил відкладають по напрямку дії рівнодіючої зовнішніх сил, прикладених зліва від даного перерізу (спостерігач знаходиться всередині контуру рами і повернений обличчям до даного стержня). Цим правилом користуються при русі по контуру рами за рухом годинникової стрілки і зліва направо. Якщо ж рух здійснюється в протилежному напрямі (проти руху годинникової стрілки і справа наліво), то ординати поперечної сили відкладають у напрямі, протилежному напрямку рівнодіючої зовнішніх сил, прикладених

праворуч від даного перерізу. Знаки на епюрі поперечних сил, як правило, не ставлять.

Ординати епюри згинальних моментів відкладають на стиснутих волокнах даного стержня. Знаки на епюрі  $M$  не ставлять. Побудову епюр  $N$ ,  $Q$  та  $M$  розглянемо на прикладах.

**Приклад 1.** Побудувати епюри поздовжніх  $N$ , поперечних сил  $Q$  і згинальних моментів  $M$  для рами, представленої на рис. 2 а.

**Розв'язування.** Оскільки рама має тільки жорстке затиснення в перерізі  $A$ , опорні реакції можемо заздалегідь не визначати.

### 1) Побудова епюр поздовжніх сил

У горизонтальному стержні (рігелі)  $BD$  поздовжні сили виникати не будуть, оскільки на раму не діють горизонтальні сили.

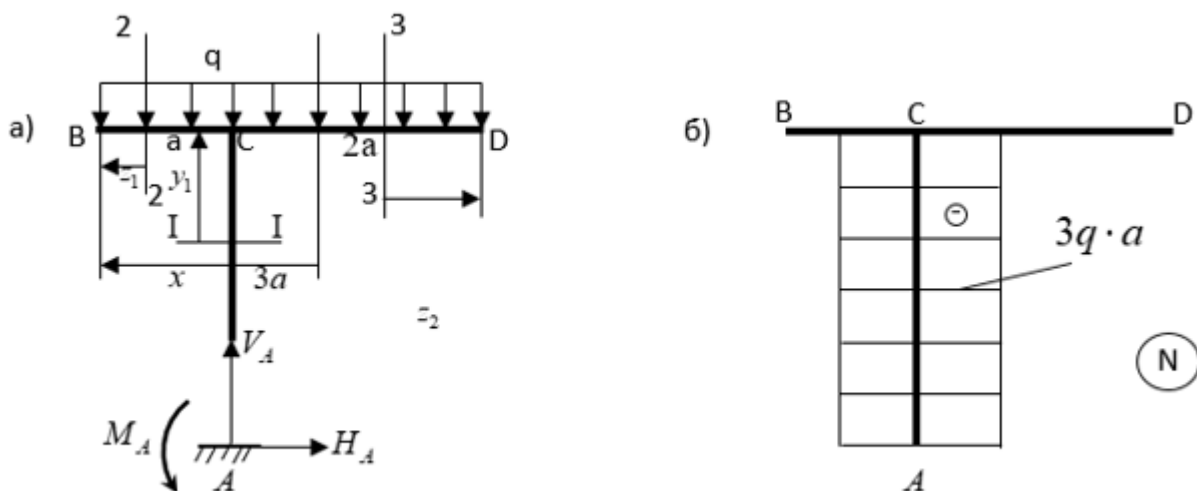
Стояк  $CA$  знаходиться під дією стискуючої сили  $3 \cdot q \cdot a$ . Розглядаючи переріз  $I - I$  на відстані  $y$ , від точки  $C$  і складаючи рівняння рівноваги верхньої частини стояка, одержимо:

$$3 \cdot q \cdot a + N = 0, \quad (1.1)$$

звідки

$$N = -3 \cdot q \cdot a. \quad (1.2)$$

Ординати епюри  $N$  відкладаємо по обидві сторони від осі стержня  $AC$ , при цьому обов'язково слід вказати знак (в даному випадку “-“, оскільки стержень  $AC$  стиснутий). Епюра поздовжніх сил наведена на рис. 2 б.



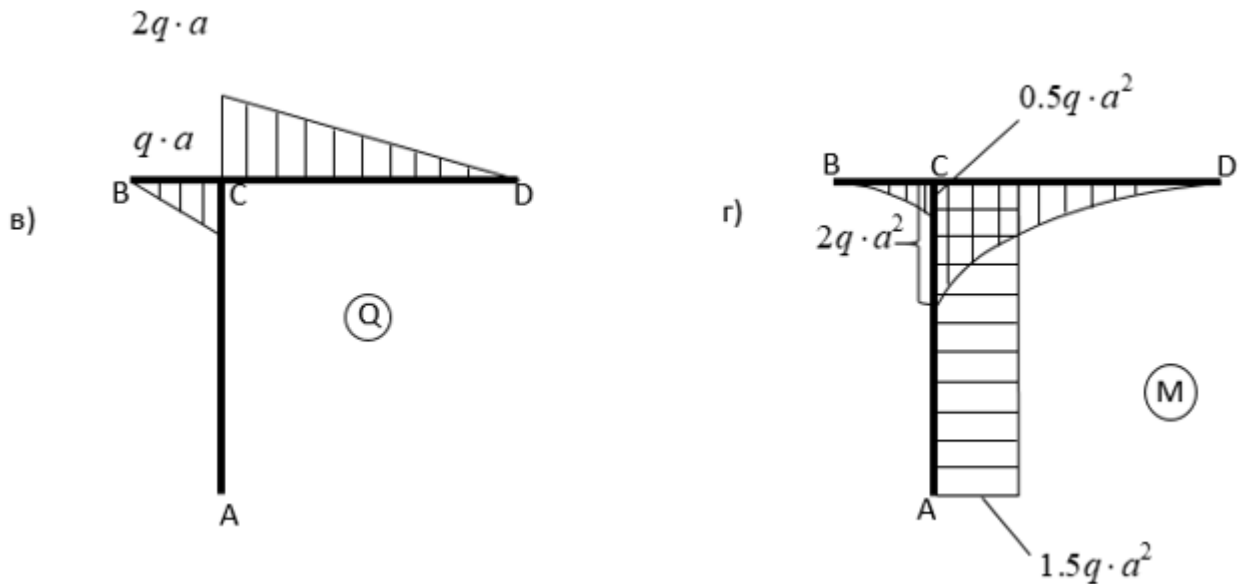


Рис. 2

## 2) Побудова епюри поперечних сил

На стоек **АС** зовнішні горизонтальні сили не діють, тому поперечні сили в його поперечних перерізах відсутні. Епюру поперечних сил в горизонтальному стержні **BD** будуватимемо, рухаючись від точок **B** і **D** до точки **C**.

Для перерізів 2 – 2 і 3 – 3 горизонтального стержня аналітичні вирази для поперечної сили мають вигляд:

$$Q(z_1) = -q \cdot z_1, \quad Q(z_2) = q \cdot z_2, \quad (1.3)$$

звідки випливає, що поперечні сили в перерізі **B** ( $Q_B$ ), в перерізі **C**, ліворуч ( $Q_C^n$ ) в перерізі **D** ( $Q_D$ ), в перерізі **C**, праворуч ( $Q_C^p$ ) дорівнюватимуть:

$$Q_B = 0, \quad Q_C^n = -q \cdot a, \quad Q_D = 0, \quad Q_C^p = q \cdot 2 \cdot a = 2 \cdot q \cdot a. \quad (1.4)$$

У точці **C** на епюрі поперечних сил має місце стрибок на величину поздовжньої сили  $V_A$  в стояку **АС**

$$q \cdot a + 2 \cdot q \cdot a = 3 \cdot q \cdot a. \quad (1.5)$$

Враховуючи значення поперечних сил у наведених перерізах за відомими правилами математики будують епюру поперечних сил  $Q$ , представлену на рис. 2 в.

Визначивши ж заздалегідь (за допомогою рівнянь рівноваги) реакції опори **A**:  $H_A = 0, V_A = 3 \cdot q \cdot a, M_A = 1.5 \cdot q \cdot a^2$ , можна було б визначати величину



поперечної сили в перерізах стержня **CD** за наведеним правилом наступним чином

$$Q(z) = -q \cdot z + V_A, \quad (1.6)$$

звідки

$$Q_C^n = -q \cdot a + 3 \cdot q \cdot a = 2 \cdot q \cdot a, \quad Q_D = -3 \cdot q \cdot a + 3 \cdot q \cdot a = 0.$$

### 3) Побудова епюри згинальних моментів

Аналітичні вирази згинальних моментів для перерізів **1 – 1**, **2 – 2** і **3 – 3** (рис. 2 а), за наведеними правилами мають вигляд

$$M(y_1) = 0.5 \cdot q \cdot (2 \cdot a)^2 - 0.5 \cdot q \cdot a^2 = 1.5 \cdot q \cdot a^2, \quad M(z_1) = \frac{q \cdot z_1^2}{2}, \quad M(z_2) = \frac{q \cdot z_2^2}{2}.$$

Відповідно до цих виразів, будуємо епюру згинальних моментів в перерізах стержнів рами, пам'ятаючи, що моменти відкладаємо на стиснутих (нижніх) волокнах. Епюра згинальних моментів **M** наведена на рис. 2 г. У поперечному перерізі *c* маємо стрибок на величину моменту  $M_A$ .

**Приклад.** Побудувати епюри поздовжніх, поперечних сил і згинальних моментів для рами, наведеної на рис 3 а.

**Розв'язування.** Визначаємо опорні реакції, склавши рівняння статички

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_A(F_i) &= 0, \quad M_0 - V_D \cdot 2 \cdot a = 0, \quad V_D = 0.5 \cdot M_0 / a, \\ \sum \text{mom}_D(F_i) &= 0, \quad M_0 - V_A \cdot 2 \cdot a = 0, \quad V_A = 0.5 \cdot M_0 / a. \end{aligned}$$

#### 1) Побудова епюри поздовжніх сил

Поздовжні сили виникають тільки в стояках **AB** і **CD**, оскільки зовнішні сили, а саме реакції  $V_A$  і  $V_D$  перпендикулярні осі стержня **BC**. Для перерізів **1 – 1** і **2 – 2**, що знаходяться від точок **A** і **D** на відстанях  $y_1$  і  $y_2$  відповідно, вирази поздовжніх сил мають вигляд:

$$N(y_1) = V_A = 0.5 \cdot M_0 / a, \quad N(y_2) = -V_D = -0.5 \cdot M_0 / a, \quad (1.7)$$

тобто стержень **AB** розтягується, а стержень **DC** – стискується. Епюра поздовжніх сил **N** представлена на рис. 3 б.

## 2) Побудова епюри поперечних сил

У стояках **AB** і **DC** поперечні сили не виникають оскільки діючі сили  $V_A$  і  $V_D$  мають вертикальний напрям. У ригелі **BC** поперечна сила виникатиме, вираз для неї має вигляд:

$$Q(z_1) = -V_A = -0.5 \cdot M_0 / a, \quad (1.8)$$

тобто поперечна сила є сталою, а епюра поперечних сил  $Q$  наведена на рис 3 в.

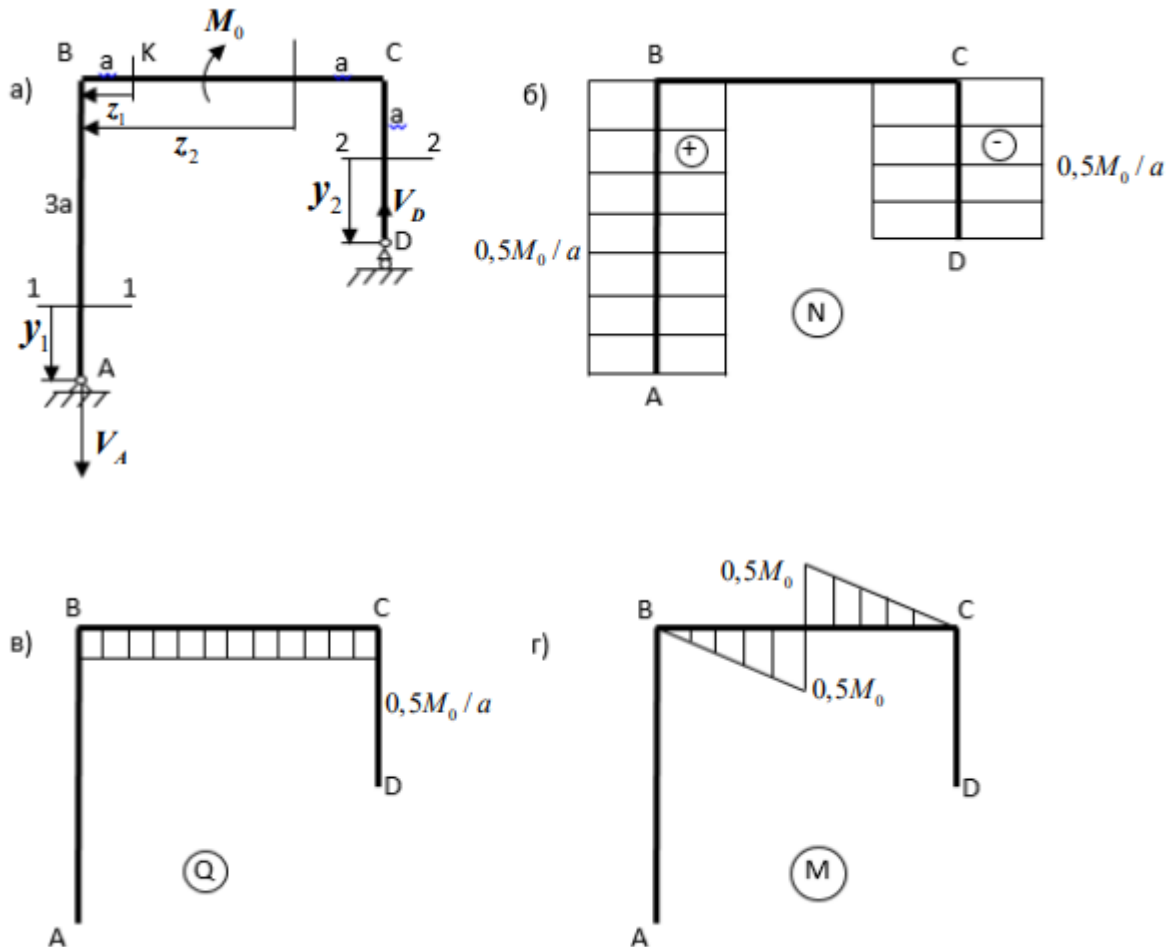


Рис. 3.

### 3) Побудова епюри згинальних моментів

Сили  $V_A$  і  $V_D$  не викликають згинальних моментів в стояках **AB** і **DC**, оскільки лінії їх дії співпадають з осями відповідних стержнів. Згинальний момент виникатиме тільки в поперечних перерізах горизонтального стержня **BC**.

Вирази для згинальних моментів для перерізів з координатами  $z_1$  і  $z_2$  мають вигляд:

$$M(z_1) = -V_A \cdot z_1 \quad z_1 \in [0, a], \quad M(z_2) = -V_A \cdot z_2 + M_0 \quad z_2 \in [a, 2 \cdot a], \quad (1.9)$$

Відповідно до (1.9) маємо:

$$\begin{aligned} M_B = M(z_1 = 0) &= 0, & M_K^n = M(z_1 = a) &= -V_A \cdot a = -0.5 \cdot M_0, \\ M_K^n = M(z_2 = a) &= -V_A \cdot a + M_0 = 0.5 \cdot M_0, & M_C = M(z_2 = 2 \cdot a) &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

По цих значеннях згинальних моментів за відомими правилами математики будемо графік функції  $M = M(z)$ , тобто епюру згинальних моментів, яка наведена на рис. 3 г.

## Розділ 2. ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ ДЕФОРМАЦІЇ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ. ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙ У ПРУЖНИХ СТЕРЖНЬОВИХ СИСТЕМАХ

### 2.1. Загальний випадок навантаження

Розглянемо загальний випадок навантаження довільного просторового стержня довільною просторовою системою сил, при якому в поперечних перерізах можуть виникати поздовжні, поперечні сили, крутні та згинальні моменти водночас. Крім того, окремі стержні пружної системи можуть бути не тільки прямими, мати малу кривизну, а й створювати як плоску, так і просторову систему. Знання методів визначення деформацій є необхідним не тільки для дослідження жорсткості конструкцій, а й для розрахунку статично не визначених конструкцій, дослідження питань динаміки пружних систем.

Найбільш простими методами визначення деформацій пружних систем є енергетичні методи, отримані на основі загального виразу потенціальної енергії деформації навантаженої пружної системи. Визначенню потенціальної енергії деформації передуює аналіз внутрішніх силових факторів у стержнях системи. Цей аналіз, як відомо, проводиться методом перерізів з подальшою побудовою епюр згинальних, крутних моментів, а за необхідності – побудовою епюр поздовжніх та поперечних сил.

Внутрішня поздовжня сила в довільному поперечному перерізі дорівнює сумі проєкцій усіх зовнішніх сил, що діють по один бік від перерізу, на поздовжню вісь

(на дотичну до кривої осі в даному перерізі). Внутрішні поперечні сили в довільному перерізі дорівнюють сумі проєкцій усіх зовнішніх сил, що діють по один бік від перерізу на площину цього перерізу. Внутрішній крутний момент у довільному поперечному перерізі дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють по один бік від перерізу, відносно поздовжньої осі. Внутрішній згинальний момент у довільному перерізі дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють по один бік від перерізу в тій чи іншій площині, відносно центра ваги цього перерізу.

Отже, розглянемо процес деформування пружного тіла з енергетичної точки зору. Зовнішні сили, прикладені до пружного тіла, виконують роботу на переміщеннях, викликаних цими силами. Позначимо цю роботу через  $W$ . Якщо процес деформування відбувається повільно, тобто сили прикладені статично і швидкості частинок пружного тіла малі, матеріал ідеально пружний, то робота зовнішніх сил повністю переходить у потенціальну енергію деформації  $U = W$ .

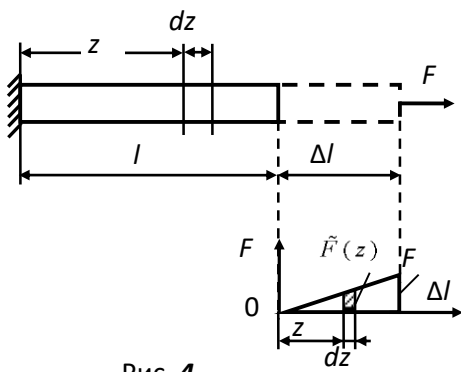


Рис. 4

При розвантажуванні пружної системи внутрішні сили опору виконують роботу, повертаючи пружну систему до початкового недеформованого стану.

Визначимо роботу однієї сили  $F$ , що розтягує стержень довжиною  $l$ , наведений на рис. 4. Його видовження  $\Delta l$  показано для кращого розуміння у збільшеному вигляді, внизу наведений графік зміни сили  $F$ .

Оскільки сила  $F$  змінюється від нуля до кінцевого значення  $F$ , то знайдемо спочатку елементарну роботу сили на нескінченно малому переміщенні  $dz$ . Вважаючи, що на цьому переміщенні сила  $\tilde{F}(z)$  залишається сталою, одержимо

$$dW = \tilde{F}(z) dz .$$

Враховуючи, що  $\tilde{F}(z) = \frac{F}{\Delta l} z$ ,

$$dW = \frac{F \cdot z}{\Delta l} dz ,$$

$$W = \int_0^{\Delta l} \frac{F \cdot z}{\Delta l} dz = \frac{F \Delta l}{2} .$$

Отже, потенціальна енергія деформації стержня, розтягнутого по всій довжині осьовою силою  $F$ , дорівнюватиме

$$U = \frac{F \Delta l}{2} . \tag{2.1}$$

Якби між силою  $F$  та переміщенням  $\Delta l$  не було прямо пропорційної залежності, то замість коефіцієнта  $\frac{1}{2}$  був би якийсь інший коефіцієнт. Зокрема, коли сила  $F$  стала, він дорівнює одиниці. З урахуванням закону Гуку за осьового розтягу стержня зі сталими параметрами  $\Delta l = Fl / EA$  формула (2.1) набере вигляду

$$U = \frac{F^2 l}{2EA}. \quad (2.2)$$

Підкреслимо, що вираз (2.2) справедливий тоді, коли поздовжня сила та площа поперечного перерізу по всій довжині є сталими. Якщо ж поздовжня сила змінюється уздовж осі, тобто є функцією  $N(z)$ , то потенціальна енергія визначається для елементарної ділянки довжиною  $dz$ , де поздовжню силу можна вважати сталою

$$dU = \frac{N^2 dz}{2EA}. \quad (2.3)$$

Для всього стержня

$$U = \int_0^l \frac{N^2(z) dz}{2EA}. \quad (2.4)$$

Якщо ж маємо декілька стержнів або декілька ділянок з різним законом зміни поздовжньої сили чи жорсткості поперечного перерізу  $EA(z)$ , то

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{N_i^2(z) dz}{2EA_i(z)}. \quad (2.5)$$

Аналогічним шляхом знаходять вирази для потенціальної енергії при згині у двох площинах

$$U = \sum \int \frac{M_x^2(z) dz}{2EI_x} + \sum \int \frac{M_y^2(z) dz}{2EI_y}, \quad (2.6)$$

при крученні

$$U = \sum \int \frac{T^2(z) dz}{2GI_p} \quad (2.7)$$

та при зсуві від поперечних сил у двох площинах

$$U = \sum \int \frac{k_y Q_y^2(z) dz}{2GA} + \sum \int \frac{k_x Q_x^2(z) dz}{2GA}, \quad (2.8)$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу;  $E$ ,  $G$  – модулі пружності першого та другого роду матеріалу;  $I_x$ ,  $I_y$  – осьові моменти інерції поперечного перерізу;  $I_p$  – полярний момент інерції поперечного перерізу стержня при крученні стержня

круглого поперечного перерізу;  $k_y, k_x$  – коефіцієнти, які залежать від геометричної форми поперечного перерізу.

У загальному випадку потенціальна енергія деформації стержнєвої системи може бути записана у вигляді

$$U = \sum \int \frac{N^2(z) dz}{2EA} + \sum \int \frac{M_x^2(z) dz}{2EI_x} + \sum \int \frac{M_y^2(z) dz}{2EI_y} + \sum \int \frac{T^2(z) dz}{2GI_p} + \sum \int \frac{k_y Q_y^2(z) dz}{2GA} + \sum \int \frac{k_x Q_x^2(z) dz}{2GA}. \quad (2.9)$$

Зауважимо, що в конкретних розрахунках у більшості випадків перша, а також дві останні суми, що виражають потенціальну енергію від дії поздовжньої та поперечних сил, не враховують, оскільки вони малі порівняно з іншими. Для плоских стержнєвих систем обчислення потенціальної енергії деформації частіше зводиться до розгляду лише однієї суми  $\sum \int \frac{M^2(z) dz}{2EI}$ , тобто до розгляду приймається тільки потенціальна енергія деформації від дії згинального моменту.

## 2.2. Теорема Кастіліано

В основу визначення переміщень у стержнєвій системі може бути покладена теорема Кастіліано, а саме: *частинна похідна від потенціальної енергії деформації пружної системи по силі дорівнює переміщенню точки прикладення сили в напрямку дії цієї сили, тобто  $\partial U / \partial F_i = \Delta F_i$ .*

Під переміщенням точки прикладення сили в напрямку сили розуміють проекцію повного переміщення цієї точки на напрямок дії сили.

Нехай маємо пружне тіло, закріплене так, що переміщення його як абсолютно твердого тіла відсутні. Навантажимо тіло довільною системою зовнішніх сил  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$ . У результаті робіт зовнішніх сил у пружному тілі накопичується потенціальна енергія деформації  $U(F_1, F_2, \dots, F_n)$ , яка є функцією від зовнішніх сил.

Надамо одній із сил, наприклад  $F_i$ , приріст  $dF_i$ . Тоді потенціальна енергія одержить приріст  $\frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i$  і буде мати величину

$$U + \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i.$$

Змінимо порядок прикладення сил. Спочатку прикладемо до тіла силу  $dF_i$ . Точка прикладення цієї сили переміститься в напрямку цієї сили на величину  $d\Delta F_i$ . Сила  $dF_i$  виконає роботу на переміщенні  $d\Delta F_i$ , що дорівнює  $\frac{1}{2} dF_i \cdot d\Delta F_i$ , оскільки сила змінюється від нуля до кінцевого значення.

Тепер прикладемо всю систему зовнішніх сил. Якби сила  $dF_i$  була відсутня, то потенціальна енергія системи прийняла б значення  $U$ . Але тепер її значення зміниться на величину роботи  $\frac{1}{2}dF_i \cdot d\Delta_{F_i}$ , крім того, сила  $dF_i$  виконає роботу на переміщенні  $\Delta_{F_i}$ , викликаному всією системою зовнішніх сил. Оскільки сила  $dF_i$  залишилася сталою на переміщенні  $\Delta_{F_i}$ , то робота її буде  $d\Delta_i \cdot \Delta_{F_i}$ .

Отже, потенціальна енергія деформації у цьому випадку набуде значення

$$U + dF_i \cdot \Delta_{F_i} + \frac{1}{2}dF_i \cdot d\Delta_{F_i}.$$

Прирівнявши вирази для потенціальної енергії деформації за прямого і оберненого порядках навантаження, нехтуючи величиною більш високого порядку малості  $\frac{1}{2}dF_i \cdot d\Delta_{F_i}$ , одержимо

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta_{F_i}.$$

Теорема доведена а саме: *частинна похідна від потенціальної енергії деформації пружної системи по силі дорівнює переміщенню точки прикладення сили в напрямку дії цієї сили.*

Наголосимо, що силу  $F_i$  можна розуміти як узагальнену силу, тоді  $\Delta_{F_i}$  буде узагальненим переміщенням, тобто таким геометричним параметром, на якому узагальнена сила виконує роботу. Наприклад, якщо під силою  $F_i$  розуміти зовнішній момент  $M_i$ , то  $\Delta_{M_i}$  буде кутом повороту площини прикладення моменту.

Доводячи теорему, брали до уваги принцип незалежності дії сил і лінійну залежність між силами та деформаціями, тобто справедливність закону Гуку. У протилежному випадку теорему Кастіліано буде непридатна.

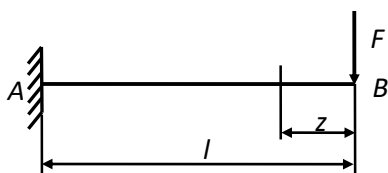


Рис. 5

Розглянемо деякі прості приклади застосування теорему Кастіліано.

**Приклад.** Визначити прогин попереченого перерізу  $B$  консольної балки (рис.5), навантаженої силою  $F$ . Жорсткість поперечного перерізу балки стала і дорівнює  $EI_x$ .

*Розв'язування.* Потенціальна енергія деформації балки при згині дорівнює  $U = \int_0^l \frac{M^2(z) dz}{2EI_x}$ . Згинальний момент у довільному перерізі  $M(z) = -Fz$ .

Отже, 
$$U = \int_0^l \frac{(-Fz)^2}{2EI_x} dz = \frac{F^2 l^3}{6EI_x}.$$

Переміщення  $\Delta_B$  поперечного перерізу  $B$  балки в напрямку дії сили  $F$ , згідно з теоремою Кастіліано, дорівнюватиме  $\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fl^3}{3EI_x}$ .

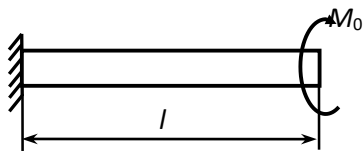


Рис. 6

**Приклад.** Визначити кут повороту правого торця вала (рис.№ 6), навантаженого скручуючим моментом  $M_0$ , якщо жорсткість поперечного перерізу на кручення  $GI_p$  стала по довжині.

*Розв'язування.* Потенціальна енергія деформації при крученні дорівнює

$$U = \int_0^l \frac{T^2(z) dz}{2GI_p},$$

крутний момент  $T(z) = M_0$  – сталий по довжині. Отже,

$$U = \int_0^l \frac{M_0^2 dz}{2GI_p} = \frac{M_0^2 l}{2GI_p}.$$

Взявши першу похідну від потенціальної енергії  $U$  по  $M_0$ , отримаємо

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{M_0 l}{GI_p},$$

що співпадає з відомим математичним виразом закону Гуку при крученні для визначення кута закручування вала сталої крутної жорсткості.

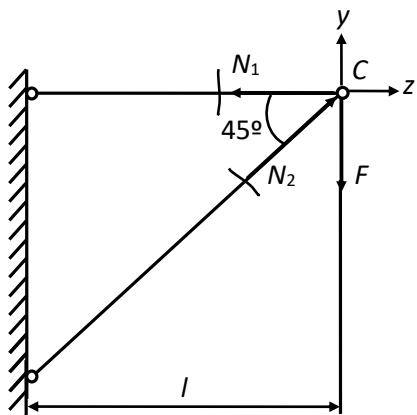


Рис. 7

**Приклад.** Знайти вертикальне переміщення  $\Delta_C$  вузла  $C$  кронштейна, навантаженого силою  $F$  (рис. 7), якщо жорсткості обох стержнів однакові і дорівнюють  $EA$ .

*Розв'язування.* Із рівнянь рівноваги вузла  $C$  знаходимо поздовжні сили в стержнях:

$$\Sigma Z = -N_1 + N_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\Sigma Y = N_2 \cos 45^\circ - F = 0;$$

$$N_1 = F, N_2 = F\sqrt{2}.$$

Потенціальна енергія деформації кронштейна дорівнюватиме



$$U = \int_0^{l_1} \frac{N_1^2 dz}{2EA} + \int_0^{l_2} \frac{N_2^2 dz}{2EA} = \int_0^l \frac{F^2 dz}{2EA} + \int_0^{l\sqrt{2}} \frac{(F\sqrt{2})^2 dz}{2EA} =$$

$$= \frac{F^2 l}{2EA} + EA \frac{F^2 l \sqrt{2}}{EA} = \frac{F^2 l (1 + 2\sqrt{2})}{2EA}.$$

Отже,

$$\Delta_c = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fl(1+2\sqrt{2})}{EA}.$$

### 2.3. Метод введення додаткової (фіктивної) сили

Визначення переміщень за допомогою теореми Кастіліано має той недолік, що дає можливість знайти узагальнені переміщення поперечних перерізів, у яких прикладені узагальнені сили, але тільки в напрямку дії цих сил. На практиці ж доводиться визначати узагальнені переміщення довільних поперечних перерізів і в довільному напрямку, в тому числі поперечних перерізів, у яких узагальнені сили не прикладені. У таких випадках застосовують метод введення додаткової (фіктивної) сили. Ідея методу введення додаткової (фіктивної) сили проста. Якщо треба знайти переміщення поперечного перерізу, в якому узагальнена сила не прикладена, тоді прикладають у потрібному перерізі і в потрібному напрямку додаткову фіктивну силу  $F_\delta$ . Складають вираз для потенціальної енергії деформації системи з урахуванням  $F_\delta$ . Знаходять частинну похідну  $\partial U / \partial F_\delta$  і в кінцевому виразі приймають  $F_\delta = 0$ . Таким чином одержують переміщення потрібного поперечного перерізу в потрібному напрямку. Підкреслимо, коли нас цікавить не лінійне переміщення поперечного перерізу, а кут повороту перерізу, як додаткову силу беруть не зосереджену силу, а пару сил  $M_\delta$ , тобто кутовому переміщенню відповідає узагальнена сила – пара сил з моментом  $M_\delta$ .

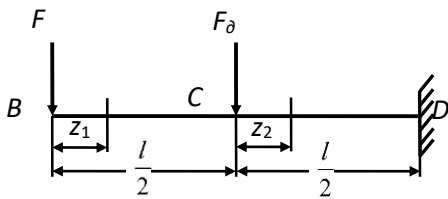


Рис. 8

**Приклад.** Визначити прогин та кут повороту поперечного перерізу  $C$  консольної балки  $y_C, \theta_C$ , якщо жорсткість на згин  $EI_x$  стала по її довжині (рис. 8).

*Розв'язування.* Для визначення прогину поперечного перерізу  $C$  балки прикладаємо у цьому перерізі додаткову фіктивну силу  $F_\delta$ . Тоді згинальний момент на першій ділянці балки дорівнюватиме  $M(z_1) = -Fz_1$  і відповідно на другій

$$M(z_2) = -F\left(\frac{l}{2} + z_2\right) - F_\delta z_2. \quad (2.10)$$

Потенціальна енергія деформації балки визначиться як

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^{l/2} \frac{M^2(z_1) dz_1}{2EI_x} + \int_0^{l/2} \frac{M^2(z_2) dz_2}{2EI_x} = \int_0^{l/2} \frac{(-Fz)^2 dz_1}{2EI_x} + \\
 &+ \int_0^{l/2} \frac{[-F(l/2 + z_2) - F_\delta z_2]^2 dz_2}{2EI_x} = \frac{F^2 z_1^3}{6EI_x} \Big|_0^{l/2} + \frac{1}{2EI_x} \times \\
 &\times \left[ \frac{F^2 l^2}{4} z_2 + \frac{F^2 l z_2^2}{2} + \frac{F^2 z_2^3}{3} + \frac{FF_\delta l z_2^2}{2} + \frac{2FF_\delta z_2^3}{3} + \frac{F_\delta^2 z_2^3}{3} \right] \Big|_0^{l/2} = \\
 &= \frac{F^2 l^3}{48EI_x} + \frac{7F^2 l^3}{48EI_x} + \frac{5FF_\delta l^3}{48EI_x} + \frac{F_\delta^2 l^3}{48EI_x} [8F^2 l^3 + 5FF_\delta l^3 + F_\delta^2 l^3].
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Знаходимо похідну від виразу потенціальної енергії деформації балки по фіктивній силі  $\frac{\partial U}{\partial F_\delta} = \frac{1}{48EI_x} (5Fl^3 + 2F_\delta l^3)$ .

І відповідно прогин поперечного перерізу  $C$  у напрямку дії додаткової зосередженої сили  $F_\delta$  становитиме

$$y_C = \Delta_{F_\delta} = \frac{\partial U}{\partial F_\delta} \Big|_{F_\delta=0} = \frac{5Fl^3}{48EI_x}. \tag{2.12}$$

Для визначення кута повороту  $\theta_C$  треба в точці  $C$  прикласти пару сил  $M_\delta$ . Тоді згинальний момент на першій ділянці балки дорівнюватиме  $M(z_1) = -Fz_1$ , а на другій  $M(z_1) = -F(\frac{l}{2} + z_2) - M_\delta$ .

Потенціальна енергія деформації визначиться як

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^{l/2} \frac{M^2(z_1) dz_1}{2EI_x} + \int_0^{l/2} \frac{M^2(z_2) dz_2}{2EI_x} = \int_0^{l/2} \frac{(-Fz)^2 dz_1}{2EI_x} + \\
 &+ \int_0^{l/2} \frac{[-F(l/2 + z_2) - M_\delta]^2 dz_2}{2EI_x} = \frac{F^2 z_1^3}{6EI_x} \Big|_0^{l/2} + \frac{1}{2EI_x} \times \\
 &\times \left[ \frac{F^2 l^2}{4} z_2 + \frac{F^2 l z_2^2}{2} + \frac{F^2 z_2^3}{3} + FM_\delta l z_2 + FM_\delta z_2^2 + M_\delta^2 z_2 \right] \Big|_0^{l/2} = \\
 &= \frac{F^2 l^3}{48EI_x} + \frac{1}{2EI_x} \left[ \frac{F^2 l^3}{8} + \frac{F^2 l^2}{8} + \frac{F^2 l^3}{24} + \frac{FM_\delta l^4}{4} + \frac{M_\delta^2 l}{2} \right] = \\
 &= \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{8F^2 l^3}{48} + \frac{3FM_\delta l^2}{8} + \frac{M_\delta^2 l}{4} \right].
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Знаходимо похідну  $\frac{\partial U}{\partial M_\delta} = \frac{3Fl^2}{8EI_x} + \frac{M_\delta l}{2EI_x}$ . Відповідно кут повороту

$$\theta_C = \Delta_{M_\theta} = \frac{\partial U}{\partial M_\theta} \Big|_{M_\theta=0} = \frac{3Fl^2}{8EI_x}.$$

## 2.4. Інтеграл Мора та спосіб Верещагіна

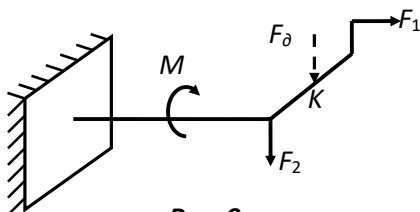


Рис. 9

Розглянемо стержньову конструкцію, навантажену довільною просторовою системою сил. У поперечних перерізах стержнів цієї конструкції в загальному випадку під дією зовнішніх сил можуть виникати усі шість внутрішніх силових факторів, а саме: поздовжня

сила  $N(z)$ , згинальні моменти  $M_x(z)$ ,  $M_y(z)$ , крутний момент  $T(z)$  та поперечні сили  $Q_y(z)$ ,  $Q_x(z)$ . Епюри внутрішніх силових факторів, які виникають у поперечних перерізах елементів конструкцій під дією зовнішніх сил, називають *вантажними епюрами*. Якщо в потрібному поперечному перерізі  $K$  у необхідному напрямку прикласти додаткову силу  $F_\delta$ , то величини внутрішніх силових факторів зміняться і відповідно дорівнюватимуть:

$$\begin{aligned} N(z) + N_\delta(z); \quad M_x(z) + M_{x\delta}(z); \quad M_y(z) + M_{y\delta}(z); \\ T(z) + T_\delta(z); \quad Q_y(z) + Q_{y\delta}(z); \quad Q_x(z) + Q_{x\delta}(z). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Додаткові складові величин внутрішніх силових факторів, які виникають від дії тільки додаткової фіктивної сили, представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} N_\delta = \bar{N} \cdot F_\delta; \quad M_{x\delta} = \bar{M}_x \cdot F_\delta; \quad M_{y\delta} = \bar{M}_y \cdot F_\delta; \\ T_\delta = \bar{T} \cdot F_\delta; \quad Q_{y\delta} = \bar{Q}_y \cdot F_\delta; \quad Q_{x\delta} = \bar{Q}_x \cdot F_\delta, \end{aligned} \quad (2.15)$$

де відповідно  $\bar{N}$ ,  $\bar{M}_x$ ,  $\bar{M}_y$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{Q}_y$ ,  $\bar{Q}_x$  – величини внутрішніх силових факторів, викликані одиничною додатковою силою  $\bar{F}_\delta = 1$ . Отже, повна додаткова величина внутрішнього силового фактора визначається як додаткова величина, викликана одиничною силою  $\bar{F}_\delta = 1$  та збільшена в  $F_\delta$  разів. Вираз для потенціальної енергії деформації з урахуванням дії додаткової фіктивної сили запишемо

$$\begin{aligned} U = \int_{(L)} \frac{(N + \bar{N} \cdot F_\delta)^2 dz}{2EA} + \int_{(L)} \frac{(M_x + \bar{M}_x \cdot F_\delta)^2 dz}{2EI_x} + \\ + \int_{(L)} \frac{(M_y + \bar{M}_y \cdot F_\delta)^2 dz}{2EI_y} + \int_{(L)} \frac{(T + \bar{T} \cdot F_\delta)^2 dz}{2GI_p} + \\ + \int_{(L)} \frac{k_y (Q_y + \bar{Q}_y \cdot F_\delta)^2 dz}{2GA} + \int_{(L)} \frac{k_x (Q_x + \bar{Q}_x \cdot F_\delta)^2 dz}{2GA}. \end{aligned}$$

У цьому виразі замість знаків  $\Sigma$  введено знак  $L$ , що означає інтегрування по довжині усіх стержнів системи. Після диференціювання виразу для  $U$  по  $F_\delta$  та поклавши  $F_\delta = 0$ , визначимо переміщення поперечного перерізу  $K$  у напрямку дії сили  $F_\delta$

$$\begin{aligned} \Delta_K = \frac{\partial U}{\partial F_\delta} \Big|_{F_\delta=0} &= \int_{(L)} \frac{N(z)\bar{N}(z)dz}{EA} + \int_{(L)} \frac{M_x(z)\bar{M}_x(z)dz}{EI_x} + \\ &+ \int_{(L)} \frac{M_y(z)\bar{M}_y(z)dz}{EI_y} + \int_{(L)} \frac{T(z)\bar{T}(z)dz}{GI_p} + \\ &+ \int_{(L)} \frac{k_y Q_y(z)\bar{Q}_y(z)dz}{GA} + \int_{(L)} \frac{k_x Q_x(z)\bar{Q}_x(z)dz}{GA}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Інтеграл (2.16) носять назву інтегралів Мора.

[Отто Мор (1835–1918) – німецький професор математики та механіки].

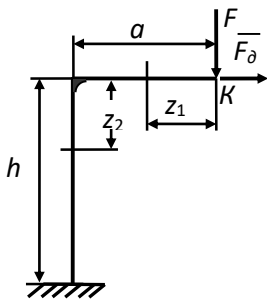


Рис. 10

**Приклад.** Визначити горизонтальне переміщення поперечного перерізу  $K$  рами, зображеної на рис. 10. Поперечна жорсткість на всіх ділянках рами однакова і дорівнює  $EI_x$ .

*Розв'язування.* У цій рамі основну роль відіграють переміщення за рахунок згину. Переміщення за рахунок стиску та зсуву малі порівняно з переміщеннями від згину, оскільки потенціальна енергія деформації від розтягу та зсуву мала порівняно з енергією згину. Отже, із шести інтегралів Мора розглядаємо один, який враховує згин у вертикальній площині. У точці  $K$  в горизонтальному напрямку прикладаємо одиничну додаткову силу  $\bar{F}_\delta = 1$ . Визначаємо згинальний момент від заданого навантаження  $F$ . На горизонтальній ділянці  $M(z_1) = -Fz_1$ , на вертикальній ділянці  $M(z_2) = -Fa$ . Згинальний момент від одиничної сили відповідно буде на горизонтальній ділянці  $\bar{M}(z_1) = 0$ , на вертикальній ділянці  $\bar{M}(z_2) = -\bar{F}_\delta \cdot z_2 = -1 \cdot z_2$ . Отже, на горизонтальній ділянці інтеграл Мора дорівнює нулю, а переміщення визначиться як

$$\Delta_K^{гориз} = \int_0^h \frac{M(z_2)\bar{M}(z_2)dz_2}{EI_x} = \int_0^h \frac{(-Fa)(-1 \cdot z_2)dz_2}{EI_x} = \frac{Fah^2}{2EI_x}. \quad (2.17)$$

У тому випадку, коли стержньова конструкція складається із прямих елементів зі сталою згинною жорсткістю в межах кожного стержня, операцію визначення інтегралу Мора можна спростити і замінити так званим перемноженням епюр. Під інтегралом маємо добуток двох функцій, одна з яких, наприклад  $M(z)$ , довільна, окреслюється кривою (вантажна епюра), а інша  $\bar{M}(z)$  – лінійна функція, епюра від одиничної сили, яка окреслюється прямою лінією

(рис. 11). Для визначення інтегралів типу  $\int_0^l M(z)\bar{M}(z)dz$  маємо  $M(z)dz = d\omega$ , яка є площею елементарної смужки вантажної епюри, а  $\bar{M}(z) = (h+z) \operatorname{tg}\alpha$ .

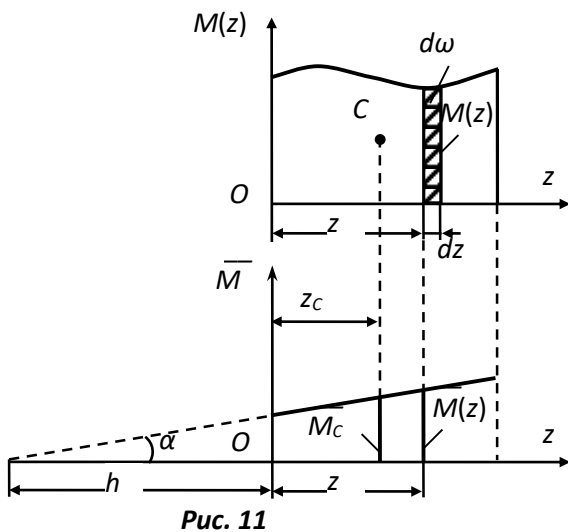
З урахуванням отриманих виразів матимемо

$$\int_0^l M(z)\bar{M}(z)dz = \int_{(\omega)} (h+z) \operatorname{tg}\alpha d\omega = h \operatorname{tg}\alpha \int_{(\omega)} d\omega + \operatorname{tg}\alpha \int_{(\omega)} z d\omega = \quad (2.18)$$

$$= (h+z_c)\omega \operatorname{tg}\alpha = \omega \cdot \bar{M}_c.$$

Таким чином, визначення інтегралу звелось до перемноження площі криволінійної (вантажної) епюри  $\omega$  на ординату прямолінійної епюри (одиночної епюри), що розташована під центром ваги криволінійної. Спосіб Верещагіна

можна застосувати до будь-якого із шести інтегралів Мора. Перемноження можна виконувати як епюр згинальних моментів, так і епюр поздовжніх сил, крутних моментів. Різниця полягає тільки в тому, що добуток епюр згинальних моментів ділиться на згинну жорсткість  $EI$ , добуток епюр поздовжніх сил ділиться на жорсткість при розтягу–стиску  $EA$ , а добуток епюр крутних моментів – на крутну жорсткість  $GI_P$ . Оскільки в практичних розрахунках вантажні епюри можна розбити на більш прості фігури у



вигляді прямокутників, трикутників, параболічних трикутників, для яких площі та положення центрів ваги відомі (Табл. 1), спосіб Верещагіна дає суттєве спрощення розрахунків при визначенні деформацій та обчисленні інтегралів Мора. Неважко довести, що у випадку, коли обидві функції  $M(z)$  і  $\bar{M}(z)$  є лінійними, то операція перемноження має властивість комутативності.

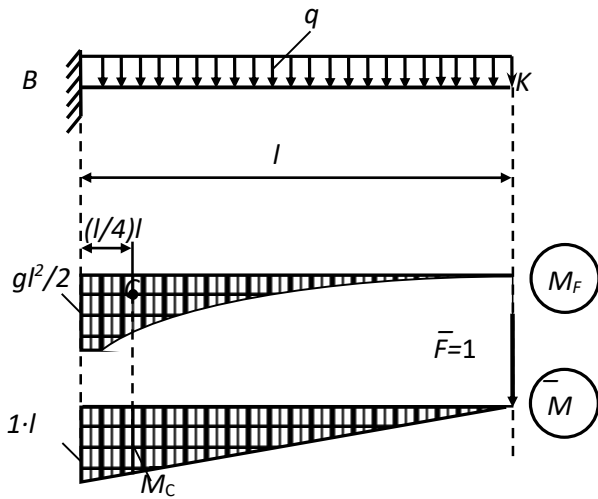


Рис. 12

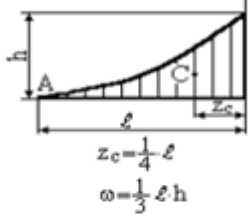
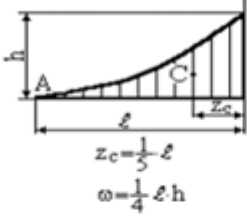
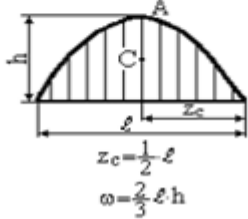
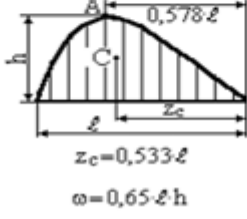
**Приклад.** Визначити прогин  $y_K$  перерізу  $K$  консольної балки, навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності  $q$ . Жорсткість поперечних перерізів стала по довжині і дорівнює  $EI$ .

*Розв'язування.* Будуємо епюру згинальних моментів від заданих сил (вантажну епюру) і епюру згинальних моментів від одиничної сили, прикладеної в точці  $K$ .

Площа параболічного трикутника вантажної епюри  $M_F$   $\omega = \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l$ . Центр ваги  $C$  параболічного трикутника знаходиться на відстані  $l/4$  від вершини прямого кута. Із геометричних міркувань знаходимо  $\frac{\bar{M}_C}{3l/4} = \frac{1 \cdot l}{l}$ , отже ордината одиничної епюри під центром ваги вантажної  $\bar{M}_C = 3l/4$ , а прогин поперечного перерізу  $K$   $y_K = \frac{\omega \cdot \bar{M}_C}{EI} = \frac{ql^3 3l}{6 \cdot 4EI} = \frac{ql^4}{8EI}$ .

Таблиця 1. Площі та координати центру ваги деяких плоских фігур

<p>Трикутник</p> <p><math>z_c = \frac{1}{3}(\ell + a)</math> <math>\omega = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot h</math></p>	<p>Трикутник</p> <p><math>z_c = \frac{1}{3} \ell</math> <math>\omega = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot h</math></p>
<p>Прямокутник</p> <p><math>z_c = \frac{1}{2} \ell</math> <math>\omega = \ell \cdot h</math></p>	<p>Парабола (квадратна) з вершиною в т. А</p> <p><math>z_c = \frac{3}{8} \ell</math> <math>\omega = \frac{2}{3} \ell \cdot h</math></p>

<p>Парабола (квадратна) з вершиною в т.А</p>	<p>Парабола (кубічна) з вершиною в т.А</p>
 <p><math>z_c = \frac{1}{4} \cdot l</math> <math>\omega = \frac{1}{3} \cdot l \cdot h</math></p>	 <p><math>z_c = \frac{1}{5} \cdot l</math> <math>\omega = \frac{1}{4} \cdot l \cdot h</math></p>
<p>Парабола (квадратна) з вершиною в т.А</p>	<p>Парабола (кубічна) з вершиною в т.А</p>
 <p><math>z_c = \frac{1}{2} \cdot l</math> <math>\omega = \frac{2}{3} \cdot l \cdot h</math></p>	 <p><math>z_c = 0,533 \cdot l</math> <math>\omega = 0,65 \cdot l \cdot h</math></p>

### Розділ 3. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ СТЕРЖНЬОВІ СИСТЕМИ. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ

Стержньові системи, для яких число невідомих зусиль більше від числа лінійно незалежних рівнянь рівноваги, які можемо скласти для їх визначення, називають *статично невизначеними*. Стержньову систему називають  $n$  разів статично невизначеною, якщо число невідомих сил на  $n$  одиниць більше від числа лінійно незалежних рівнянь рівноваги, які можемо скласти для їх визначення. Ступінь статичної невизначеності системи визначають ще і за числом так званих “зайвих” в’язей, тобто в’язей, усунення яких не приводить до геометричної змінюваності системи, тобто не порушує її положення як твердого тіла. Нагадаємо, що *геометрично незмінюваною* називається система, зміна форми якої можлива лише за рахунок деформації її елементів. Термін “зайві” в’язі вживається в тому розумінні, що ці в’язі не потрібні для забезпечення рівноваги системи як абсолютно твердого тіла. Для забезпечення ж міцності і жорсткості реальної пружної конструкції ці в’язі необхідні. “Зайвими” можуть бути як зовнішні, так і внутрішні в’язі. Тому розрізняють статично невизначені системи зовнішнім і внутрішнім чином. При статичній невизначеності зовнішнім чином “зайвими” в’язями є опорні в’язі (рис.12,14), а при статичній невизначеності внутрішнім чином “зайвими” в’язями є елементи самої системи (рис. 13).

Для визначення внутрішніх сил із умов рівноваги відсіченої частини (рис.13) маємо тільки три рівняння статички, а число невідомих – шість:  $N_1, N_2, Q_1, Q_2, M_1, M_2$ . Отже, замкнений контур є системою тричі статично невизначеною. Якщо

система складається із  $K$  замкнених контурів, її ступінь статичної невизначеності буде  $3K$ .

Найбільш універсальним методом розрахунку статично невизначених систем є метод сил. Він полягає в тому, що в статично невизначеній системі усувають “зайві” в’язі. Усунуті в’язі замінюються їх реакціями – невідомими силами. Отриману у такий спосіб статично визначену і геометрично незмінну систему називають *основною системою*. Щоб основна система відповідала початковій системі, на її переміщення накладаються такі обмеження, які б вона зазнавала за наявності усунутих в’язей. Інакше кажучи, величини реакцій усунутих в’язей визначаються так, щоб деформації основної системи відповідали тим обмеженням, які накладалися на початкову систему усунутими в’язями. Складають рівняння, які виражають умови еквівалентності основної системи (навантаженої зовнішнім навантаженням і реакціями усунутих в’язей) і початкової системи. Ці рівняння складають за єдиним правилом і називають їх *канонічними рівняннями методу сил*. Визначивши коефіцієнти канонічних рівнянь і розв’язавши систему канонічних рівнянь, визначають реакції усунутих в’язей. Подальше розв’язування проводиться як для статично визначеної стержньової системи. Невідомими в канонічних рівняннях є реакції в’язей, тобто сили, звідси і назва – метод сил.

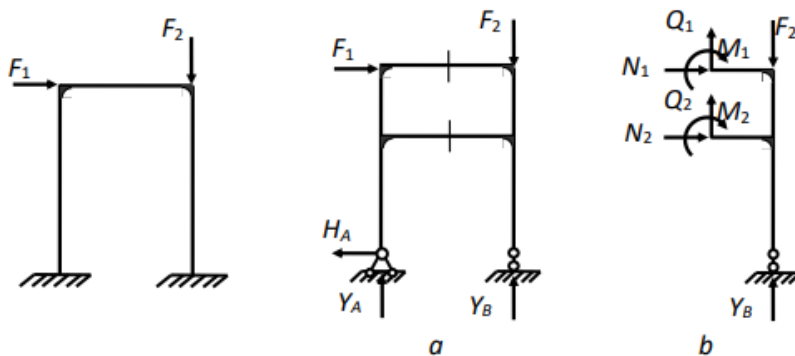


Рис.13

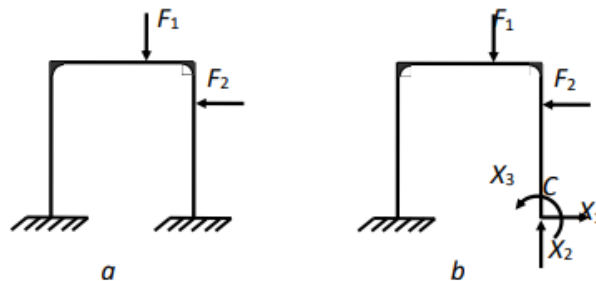


Рис. 14

Не порушуючи загальність міркувань, проаналізуємо суть методу сил на конкретному прикладі. Розглянемо раму (рис.14), яка три рази статично невизначена зовнішнім чином. Звільнившись від “зайвої” в’язі, тобто жорсткого



затиснення, замінимо її відповідними реакціями, які позначимо  $X_1, X_2, X_3$ . У цій рамі відкинута опора  $C$  – жорстке затиснення. Це означає, що в перерізі  $C$  горизонтальне переміщення, вертикальне переміщення і кут повороту дорівнюють нулю (рис. 14 *a, b*):

$$\begin{aligned}\Delta_{1[X_1, X_2, X_3, F]} &= 0; \\ \Delta_{2[X_1, X_2, X_3, F]} &= 0; \\ \Delta_{3[X_1, X_2, X_3, F]} &= 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

де перший індекс 1 означає, що йдеться про переміщення перерізу  $C$  в напрямку сили  $X_1$ , а другий індекс  $[X_1, X_2, X_3, F]$  показує, що переміщення викликане системою усіх сил, заданих  $F$  і невідомих –  $X_1, X_2, X_3$  і т.д. Вирази для переміщень (3.1) з урахуванням принципу додавання та незалежності дії сил (принципу суперпозиції) можна записати у розгорнутому вигляді

$$\Delta_{i[X_1, X_2, X_3, F]} = \Delta_{iX_1} + \Delta_{iX_2} + \Delta_{iX_3} + \Delta_{iF} = 0, \quad (i = 1, 2, 3).\tag{3.2}$$

Кожна із складових  $\Delta_{iX_k}$ , що входять в рівняння (3.2), означає переміщення в напрямку дії сили з першим індексом під дією сил, які позначені другим індексом. Оскільки кожне переміщення є пропорціональним відповідній силі, то величину  $\Delta_{iX_k}$  можна представити у вигляді

$$\Delta_{iX_k} = \delta_{ik} X_k,\tag{3.3}$$

де  $\delta_{ik}$  – переміщення точки прикладення  $i$ -ої сили в напрямку  $i$ -ої сили під дією одиничної  $k$ -ої сили  $\bar{X}_k = 1$ , прикладеної замість сили  $X_k$ .

У переміщеннях  $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}$  та інших під індексом  $F$  розуміють не просто одну зовнішню силу  $F$ , а всю систему зовнішніх діючих сил. Тому величини  $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \dots$ , в рівняннях (3.2) запишемо незмінними, а інші запишемо з урахуванням (3.3). Система рівнянь (3.2) набирає такого розгорнутого вигляду:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} &= 0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Ці рівняння носять назву канонічних рівнянь методу сил. Число їх дорівнює ступеню статичної невизначеності системи. Для  $n$  раз статично невизначеної стержнєвої конструкції система канонічних рівнянь методу сил має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1i}X_i + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0; \\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2i}X_i + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0; \\
&\text{-----} \\
&\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{ii}X_i + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{iF} = 0; \\
&\text{-----} \\
&\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{ni}X_i + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Коефіцієнти, які мають однакові індекси  $\delta_{11}, \delta_{22}, \dots, \delta_{nn}$ , називаються головними. Вони завжди додатні. Коефіцієнти з різними індексами  $\delta_{12}, \delta_{23}, \dots$  називаються побічними. Вони можуть бути додатними, від’ємними і рівними нулю. Відповідно до теореми про взаємність переміщень  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ . Вільні члени  $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \dots$ , називають вантажними членами канонічних рівнянь методу сил. Підкреслимо, що геометричний зміст кожного із канонічних рівнянь методу сил полягає в тому, що сумарне переміщення точки прикладення невідомої сили, прикладеної замість усунутої в’язі, у напрямку цієї ж сили під дією заданого навантаження та невідомих сил, дорівнює нулю. Для визначення коефіцієнтів і вантажних членів у канонічних рівняннях використовують інтеграли Мора. У розрахунках статично невизначених систем з криволінійними елементами безпосередньо обчислюють інтеграли Мора, а для систем з прямолінійними елементами для їх обчислення застосовують спосіб Верещагіна. Якщо при визначенні переміщень враховують, наприклад, тільки згинальні моменти, то

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI_x} dz; \quad \Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F}{EI_x} dz. \tag{3.6}$$

Для прямолінійних елементів, як зазначено раніше, обчислення інтегралів у виразах (3.6) замінюється перемноженням епюр  $\bar{M}_i$  на  $\bar{M}_k$  або  $\bar{M}_i$  на  $M_F$  та діленням отриманих результатів на величину згинної жорсткості поперечних перерізів відповідної ділянки і подальшим підсумовуванням результатів.

Визначивши коефіцієнти і вантажні члени канонічних рівнянь, розв’язують систему канонічних рівнянь і знаходять величину реакцій “зайвих” в’язей.

Тепер основна система, на яку діють задані навантаження, а також визначені із канонічних рівнянь реакції “зайвих” в’язів, є статично визначеною системою, еквівалентною початковій системі. Наступні етапи розрахунків проводяться так само, як і для статично визначеної системи. Наприклад, для побудови епюр згинальних моментів необхідно із рівнянь рівноваги визначити величину реакцій опор, що залишилися невизначеними, а потім скласти аналітичні вирази для  $M(z)$  у перерізах і побудувати їх епюри. У розрахунках складних систем побудову епюр зручно проводити, використовуючи принцип додавання та незалежності дії сил. На етапі визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь епюри  $\bar{M}_i$  від одиничних сил, а також епюри  $M_F$  від заданих навантажень для основної системи

уже були побудовані. Враховуючи викладене і принцип додавання та незалежності дії сил, повні значення внутрішніх силових факторів у перерізі дорівнюватимуть

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3. \quad (3.7)$$

Інакше кажучи, для побудови кінцевих епюр необхідно скласти вантажні епюри з одиничними, збільшеними в  $X_1, X_2, \dots, X_n$  разів.

#### **Розділ 4. ВИЗНАЧЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ В СТАТИЧНО ВИЗНАЧЕНИХ РАМАХ ЕНЕРГЕТИЧНИМ МЕТОДОМ**

Для визначення узагальнених переміщень поперечних перерізів рами необхідно заздалегідь побудувати епюри згинальних моментів:

- 1) вантажну – від зовнішніх навантажень, що діють на раму; вантажну епюру зручніше будувати в «розшарованому» вигляді, тобто від кожної сили окремо;
- 2) одиничні – від одиничної сили при визначенні прогинів, або від одиничного моменту при визначенні кута повороту поперечного перерізу, які прикладають в тому перерізі, узагальнене переміщення якого визначаємо.

Заздалегідь, якщо у цьому є необхідність, визначають опорні реакції.

Як уже наведено при обчисленні інтегралу Мора способом Верещагіна переміщення у напрямі прикладеної одиничної сили визначаємо за формулою

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \cdot h_i}{E \cdot J_{xi}}, \quad (4.1)$$

де  $\omega_i$  - площа ділянки вантажної епюри;

$h_i$  - ордината одиничної епюри під центром ваги вантажної епюри;

$E \cdot J_{xi}$  - жорсткість поперечного перерізу на даній ділянці при згині. Одержані вирази слід підсумувати для усіх ділянок рами.

Нагадаємо, що при застосуванні способу Верещагіна маємо на увазі наступне: 1) епюри згинальних моментів повинні бути розбиті на такі ділянки, в межах яких одна з перемножуваних епюр лінійна і жорсткість перерізу стержня стала; 2) якщо вантажна і одинична епюри знаходяться по різні сторони від осі епюри, то результат беремо зі знаком “-”.

Розглянемо приклади визначення переміщень поперечних перерізів рами за допомогою способу Верещагіна.

**Приклад.** Визначити прогин перерізу А лівої консолі рами, наведеної на рис. 14 а, під дією сили **F**, прикладеної у перерізі **c** за способом Верещагіна.

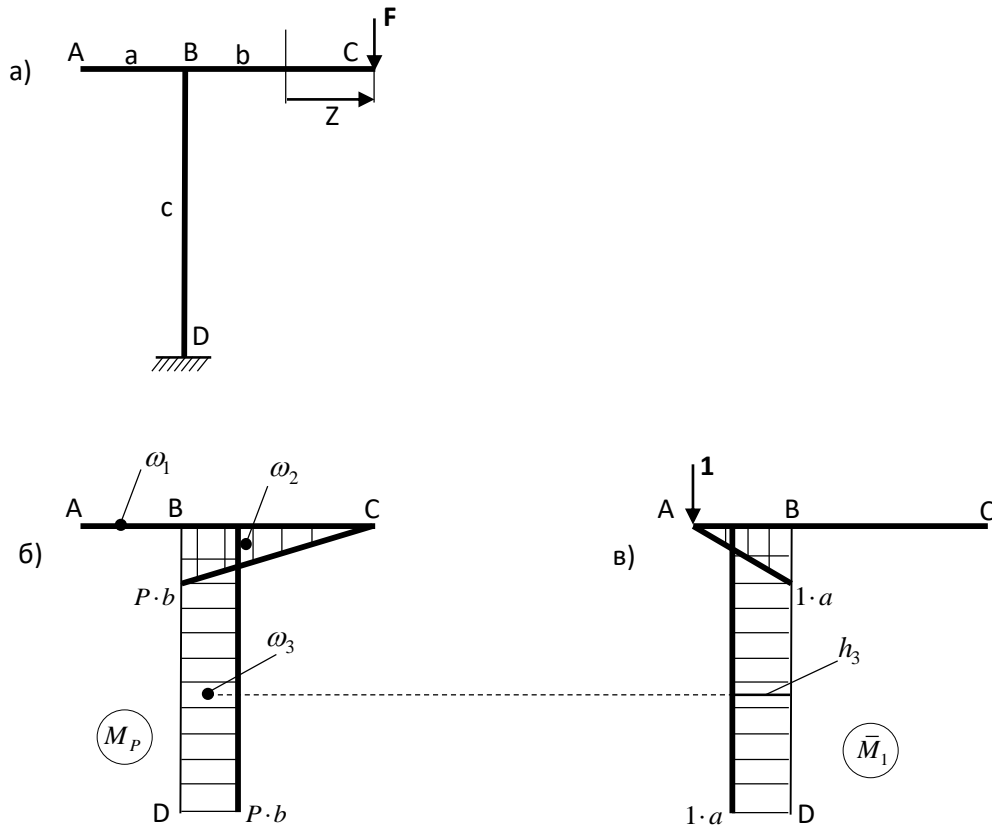


Рис. 14

**Розв'язування.** Будуємо вантажну епюру згинальних моментів від зосередженої сили **F**.

Згинальні моменти виникатимуть на ділянках **BC** і **BD**. Аналітичний вираз для згинального моменту на ділянці **BC** рами має вигляд:

$$M(z) = F \cdot z \quad (4.2)$$

звідси  $M_C = 0$ ,  $M_B = F \cdot b$ . Між точками **C** і **B** епюра обмежена прямою лінією.

У перерізах стояка **BD** згинальний момент буде сталим і рівним  $F \cdot b$ .

Ординати епюри згинальних моментів відкладаємо на стиснутих волокнах. Епюра згинальних моментів наведена на рис. 4 б.

Побудуємо одиничну епюру від дії одиничної сили, прикладеної в точці А. Ця епюра будується аналогічно попередній (рис. 4 в).

За правилом Верещагіна прогин поперечного перерізу А лівої консолі рами визначимо наступним чином

$$f_A = (\omega_1 \cdot h_1 + \omega_2 \cdot h_2 + \omega_3 \cdot h_3) / (E \cdot J); \quad (4.3)$$

оскільки і вантажна і одинична епюри на кожній з ділянок обмежені прямими лініями, то байдуже, якої епюри брати площу  $\omega_i$ , а якої відповідну ординату  $h_i$ . Для визначеності беремо площі вантажних епюр:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0.5 \cdot b \cdot F \cdot b = 0.5 \cdot F \cdot b^2, \quad \omega_3 = c \cdot F \cdot b = F \cdot b \cdot c,$$

ординати одиничних епюр, під центрами ваги площ вантажних епюр, будуть відповідно рівні:  $h_2 = 0$ ,  $h_3 = a$ , ординату  $h_1$  немає сенсу визначати, оскільки  $\omega_1 = 0$ . Отже

$$f_A = (0 \cdot h_1 + \omega_2 \cdot 0 - F \cdot b \cdot c \cdot a) / (E \cdot J) = -F \cdot a \cdot b \cdot c / (E \cdot J). \quad (4.4)$$

При перемножуванні епюр, які розташовані по різні сторони від осі епюр, результат маємо зі знаком “-”, що свідчить про те що поперечний переріз А переміщується вгору тобто у напрямку протилежному одиничній силі .

**Приклад .** Для приведеної нижче схеми навантаження рами сталого поперечного перерізу (рис. 15 а) визначити величину вертикального переміщення  $f$ , горизонтального переміщення  $\Delta_c$  і кута повороту  $\theta_c$  перерізу С.

**Розв’язування.** Для визначення вказаних переміщень за способом Верещагіна необхідно побудувати вантажну епюру і одиничні епюри від вертикальної, горизонтальної одиничних сил і одиничного моменту, що прикладені у перерізі С рами.

#### 4.1. Побудова вантажної епюри

У горизонтальному стержні ВС згинальний момент виникає тільки від сили F (рис. 15 а), вираз для згинального моменту у стійці А від рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю q, має вигляд:

$$M(y) = 0.5 \cdot q \cdot y^2, \quad (4.5)$$

тобто епюра від дії q обмежена параболою. Окрім того у поперечних перерізах стійки виникає сталий згин, сталий момент від сили F ( $m = F \cdot a$ ).

Остаточні значення згинальних моментів в перерізах В і А дорівнюватимуть:

$$M_B = F \cdot a, \quad M_A = F \cdot a + 0.5 \cdot q \cdot h^2. \quad (4.6)$$

Вантажна епюра  $M_F$  представлена на рис. 15 б.

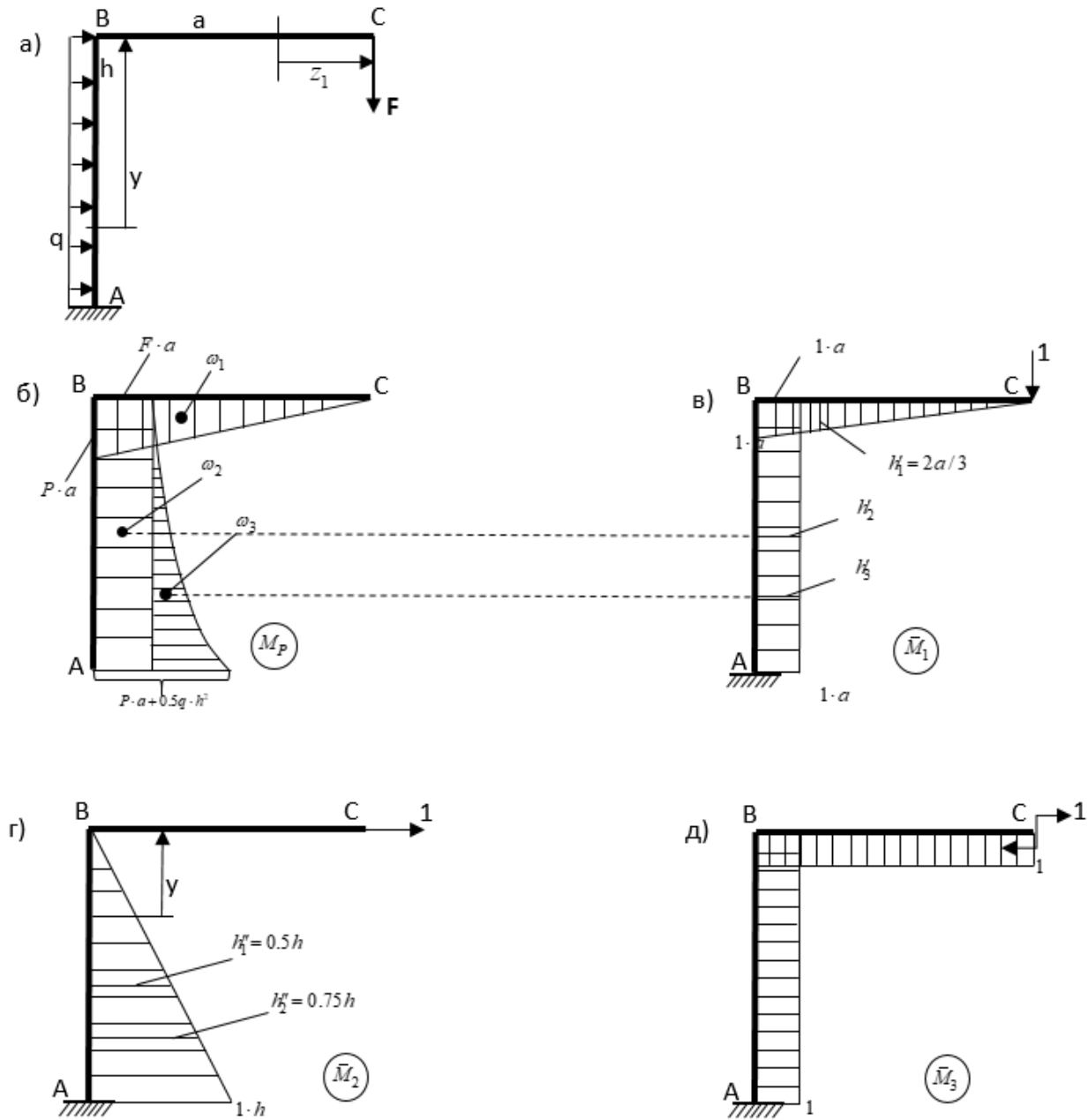


Рис. 15.

#### 4.2. Побудова одиничних епюр

Епюра згинальних моментів від вертикальної одиничної сили будується аналогічно попередньому прикладу і має вигляд (рис. 15 в).

Від горизонтальної одиничної сили згинальний момент виникає тільки в стояку **АВ**. Для перерізу на відстані  $y$  від точки **В** (рис. 15 г) вираз для згинального моменту має вигляд

$$M_2(y) = 1 \cdot y, \quad (4.7)$$

звідки  $M_{2B} = 0$ ,  $M_{2A} = h$ .

Епюра від одиничного моменту, прикладеного у перерізі С, представлена на рис. 15 д – в будь-якому перерізі рами виникає момент, рівний одиниці, якій відкладаємо на стиснутих волокнах.

Всі епюри будуємо на стиснутих волокнах.

Оскільки одиничні епюри на ділянках ригеля і стояка окреслюється прямими лініями, то ординати братимемо на цих епюрах, а площі на вантажних епюрах. Всі епюри розташовані по одну сторону від осі, тому усі доданки будуть додатними.

Застосовуючи спосіб Верещагіна, вертикальне переміщення поперечного перерізу С визначаємо у вигляді (рис. 15 б, в):

$$f_C = (\omega_1 \cdot h'_1 + \omega_2 \cdot h'_2 + \omega_3 \cdot h'_3) / (E \cdot J); \quad (4.8)$$

де

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0.5 \cdot a \cdot F \cdot a = 0.5 \cdot P \cdot a^2, & h'_1 &= (2/3) \cdot a, \\ \omega_2 &= h \cdot F \cdot a = F \cdot a \cdot h, & h'_2 &= a, \\ \omega_3 &= (1/3) \cdot h \cdot 0.5 \cdot q \cdot h^2 = q \cdot h^3 / 6, & h'_3 &= a. \end{aligned}$$

$$f = \left[ 0.5 \cdot F \cdot a^2 \cdot (2/3) \cdot a + F \cdot a \cdot h \cdot a + (1/6) \cdot q \cdot h^3 \cdot a \right] / (E \cdot J) =$$

$$= (F \cdot a^3 / 3 + F \cdot a^2 \cdot h / 6) / (E \cdot J).$$

Для горизонтального переміщення перерізу С отримаємо вираз (рис. 15б, г):

$$\Delta_C = (\omega_2 \cdot h''_2 + \omega_3 \cdot h''_3) / (E \cdot J), \quad (4.9)$$

де

$$h''_2 = 0.5 \cdot h, \quad h''_3 = (3/4) \cdot h$$

$$\Delta = \left[ F \cdot a \cdot h \cdot 0.5 \cdot h + (1/6) \cdot q \cdot h^3 \cdot (3/4) \cdot h \right] / (E \cdot J) =$$

$$= 0.5 \cdot (F \cdot a \cdot h^2 + 0.25 \cdot q \cdot h^4) / (E \cdot J).$$

де  $h''_1$ ,  $h''_2$  і  $h''_3$  - ординати одиничної епюри (рис. 15 д), відповідні положенням центрів ваги складових площ вантажної епюри (рис. 15 б)  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  і  $\omega_3$ .

Для визначення кута повороту перерізу С маємо  $h'''_1 = h'''_2 = h'''_3 = 1$ , а відповідно

$$\theta_C = (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \cdot 1 / (E \cdot J) = (0.5 \cdot F \cdot a^2 + F \cdot a \cdot h + q \cdot h^3 / 6) / (E \cdot J)$$

## Розділ 5. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ РАМИ. МЕТОД СИЛ

Нагадаємо, що рама є статично невизначеною, якщо реакції в опорах та внутрішні силові фактори в поперечних перерізах її стержнів не можуть бути визначені за допомогою тільки рівнянь статички.

Для розкриття статичної невизначеності рами складаються рівняння сумісності деформацій, які виражають той факт, що переміщення опорних точок рами у вказаних напрямках або відносно переміщення точок в перерізах відомі, зокрема, рівні нулю. Звідси ми приходимо до системи канонічних рівнянь методу сил, число яких відповідає ступеню статичної невизначеності рами.

Приступаючи до розрахунку статично невизначеної рами, слід встановити ступінь її статичної невизначеності. Наприклад, рама, зображена на рис. 16 а, є тричі статично невизначеною: число невідомих реактивних сил дорівнює шести (у кожному закріпленні по три), а рівнянь статички для плоскої довільної системи сил можна записати тільки три. Число невідомих перевищує число рівнянь статички (6-3=3). Таким чином, дана рама має три «зайві» в'язі. Ступінь статичної невизначеності дорівнює трьом. Відкинувши ці «зайві» в'язі, одержимо основну систему (рис. 16 б).

Для кожної статично невизначеної системи можна підібрати, як правило, декілька основних систем.

Якщо до основної системи прикласти задане навантаження і невідомі реакції відкинутих «зайвих» в'язів і зажадати виконання умов переміщень поперечного перерізу  $\mathbf{D}$ :  $\Delta_1 = 0$ ,  $\Delta_2 = 0$ ,  $\Delta_3 = 0$  (тут  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  - переміщення перерізу  $\mathbf{D}$  в напрямках сил  $X_1$  і  $X_2$  відповідно  $\Delta_3$  - поворот перерізу у напрямі моменту  $X_3$ ), то ми одержимо основну еквівалентну систему (рис. 16 в), яка за деформаціями і напруженнями, що виникають в перерізах стержнів рами, буде еквівалентна початковій, заданій системі.

Невідомі реакції відкинутих в'язей визначаються з канонічних рівнянь. Для рами, представленої на рис. 16 а, система канонічних рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1P} = 0, \\ \Delta_2 &= \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2P} = 0, \\ \Delta_3 &= \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3P} = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

тут  $X_1, X_2, X_3$  - реакції відкинутих «зайвих» в'язей.



Два індекси при кожному з переміщень означають: перший – напрям переміщення точки прикладання сили, другий – під впливом якої сили виникло переміщення. Так, для приведеної вище рами:  $\delta_{11}$  - переміщення точки прикладання сили  $X_1$  (переріз **D**) в напрямі цієї же сили від одиничної сили  $X_1$  (одиничні сили, що прикладаються у напрямі сил  $X_1, X_2, X_3$  позначатимемо  $X_1, X_2, X_3$ );  $\delta_{13}$  - переміщення того ж перерізу в напрямі сили  $X_1$  під дією одиничної сили, прикладеної замість сили  $X_3$ ; тобто від одиничного моменту  $X_3 = 1$ ;  $\delta_{21}$  - переміщення точки прикладання сили  $X_2$  по її напрямі від дії одиничної сили  $X_1$ ,  $\Delta_{1F}$  - переміщення точки прикладання сили  $X_1$  (переріз **D**) по її напрямі від заданого навантаження і т. інше.

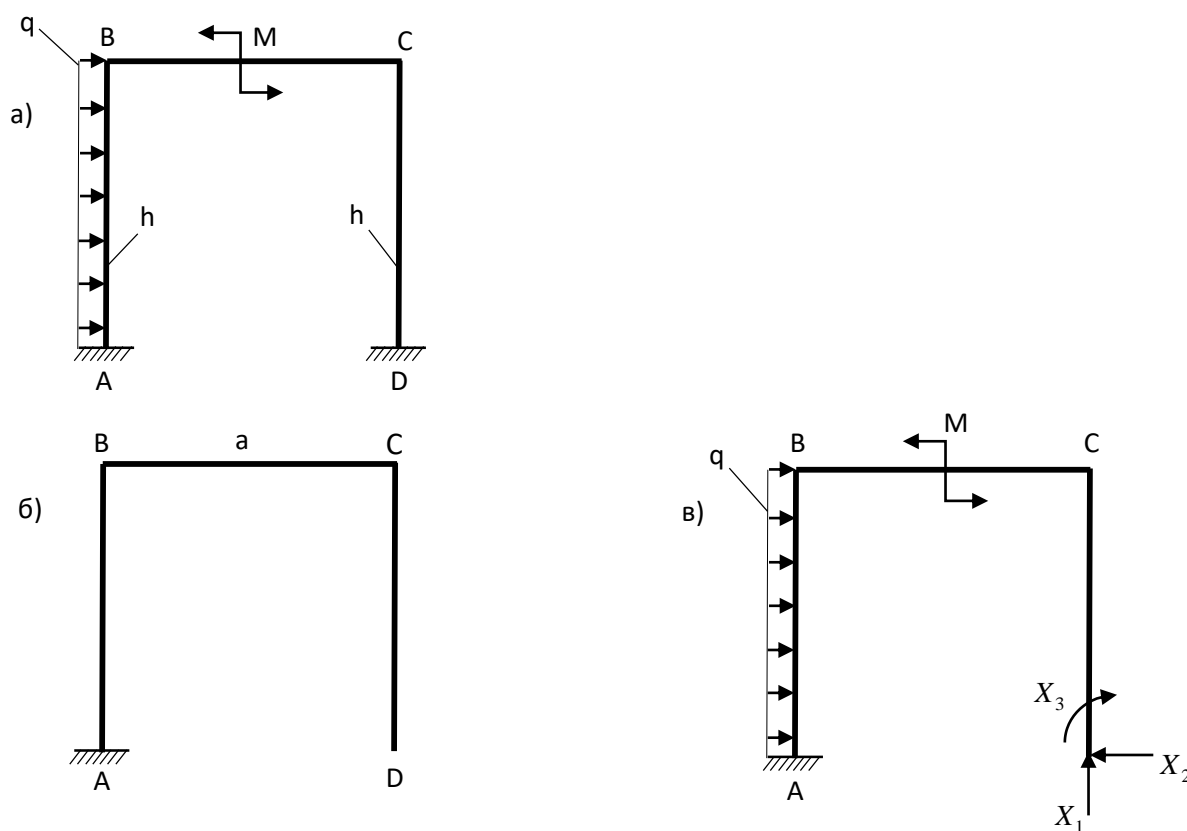


Рис. 16.

За теоремою про взаємність переміщень  $\delta_{21} = \delta_{12}$ ,  $\delta_{31} = \delta_{13}$ ,  $\delta_{32} = \delta_{23}$ . Отже, визначенню підлягають тільки переміщення  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{33}, \Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \Delta_{3F}$ .

Переміщення  $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}$  (з однаковими обома індексами) називають головними переміщеннями, вони завжди додатні. Переміщення з різними

індексами називають побічними, а переміщення  $\Delta_{1F}$ ,  $\Delta_{2F}$ ,  $\Delta_{3F}$  - вантажними. Побічні і вантажні переміщення можуть бути додатними, від'ємними і рівними нулю.

Переміщення, що входять в канонічні рівняння, визначають, користуючись інтегралами Мора безпосередньо або обчислюючи їх способом Верещагіна.

Індекси переміщень указують також, які епюри згинальних моментів, побудовані для основної системи, слід перемножувати, щоб одержати дане переміщення.

Розглянемо приклади.

**Приклад 1.** Розкрити статичну невизначеність і побудувати епюру згинальних моментів для рами, зображеної на рис. 17 а.

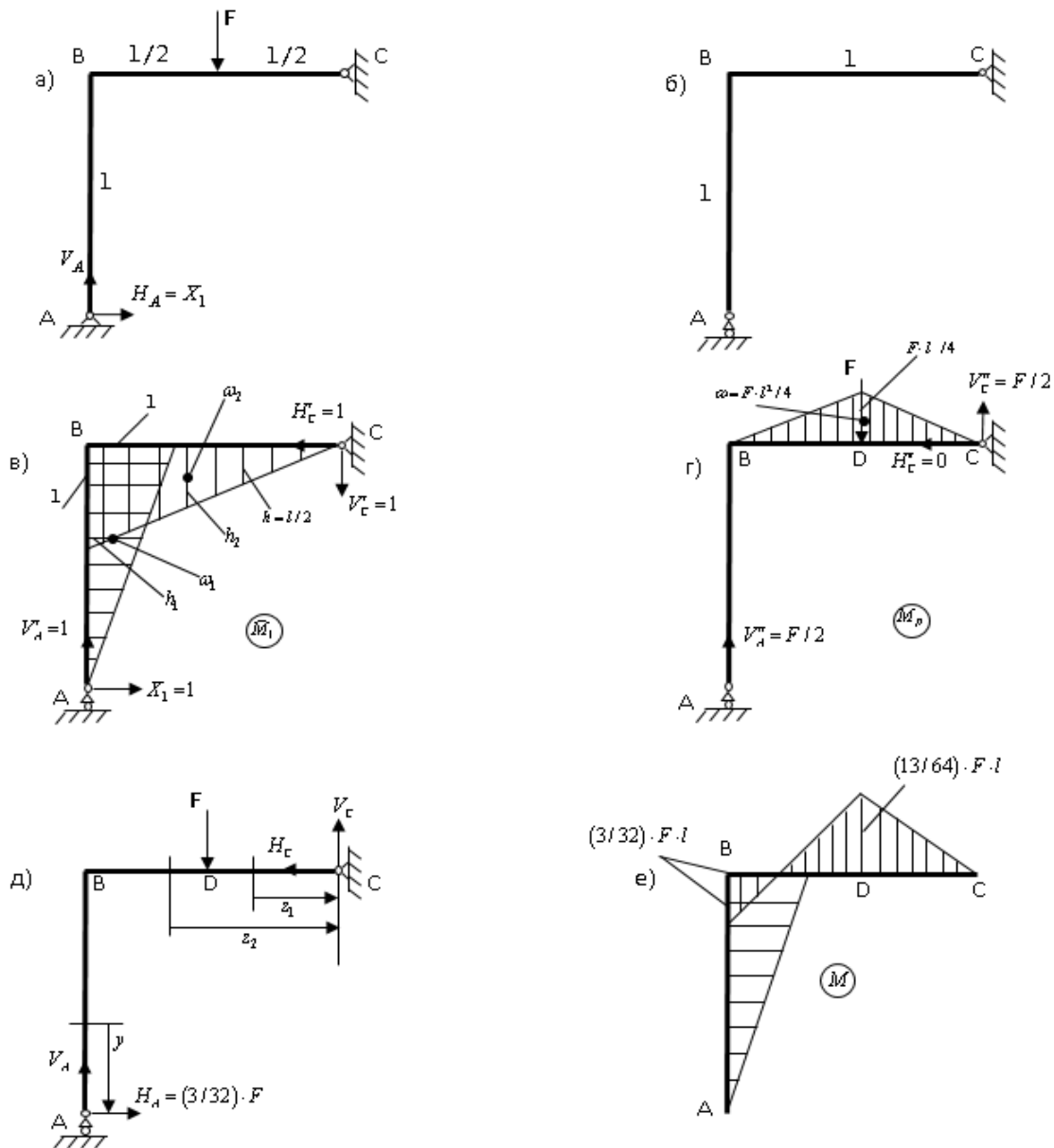


Рис. 17

**Розв’язання.** В опорах А і С є по дві невідомих складових реакцій. Оскільки для плоскої довільної системи сил можна скласти тільки три рівняння статички, то наведена рама один раз статично невизначена ( $2+2-3=1$ ).

Основну систему виберемо як показано на рис. 17 б, тобто прийнявши за «зайву» горизонтальну складову реакції  $H_A = X_1$ .

Канонічне рівняння для цього випадку матиме вигляд:

$$\Delta_1 = \delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0 \quad (5.2)$$

Основну систему завантажуюмо в точці А в горизонтальному напрямі одиночною силою і, визначивши реакції опор від цієї сили ( $V'_A = 1, H'_C = 1, V'_C = 1$ ), будуюмо епюру згинальних моментів – одиничну епюру (рис. 17 в).

Для обчислення головного переміщення  $\delta_{11}$  способом Верещагіна треба перемножити епюру  $\bar{M}_1$  (рис. 17 в) саму на себе, тобто

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= (\omega_1 \cdot h_1 + \omega_2 \cdot h_2) / (E \cdot J) = [0.5 \cdot l^2 (2/3) \cdot l + 0.5 \cdot l^2 \cdot (2/3) \cdot l] / (E \cdot J) = \\ &= (2/3) \cdot l^3 / (E \cdot J) \end{aligned}$$

Для обчислення вантажного переміщення  $\Delta_{1F}$  слід, заздалегідь, визначивши реакції опор ( $V''_A = V''_C = 0.5 \cdot P, H''_C = 0$ ), побудувати вантажну епюру – епюру згинальних моментів від заданого навантаження (сили **F**), прикладеного до основної системи.

Виконуючи перемножування площі вантажної епюри  $\omega$  (рис.17 г) на ординату **h** одиничної епюри, відповідної положенню центра тяжіння вантажної епюри (рис. 17 в), одержуємо

$$\Delta_{1F} = -\omega h / (E \cdot J) = -(1/8) \cdot F \cdot l^2 \cdot 0,5 \cdot l / (E \cdot J) = -F \cdot l^3 / (16 \cdot E \cdot J) \quad (5.3)$$

Знак “-“ узятий у зв’язку з тим, що вантажна і одинична епюри розташовані по різні сторони від осі.

Підставляючи  $\delta_{11}$  і  $\Delta_{1F}$  у канонічне рівняння, одержуємо:

$$(2/3) \cdot l^3 \cdot X_1 / (E \cdot J) - F \cdot l^3 / (16 \cdot E \cdot J) = 0,$$

звідси

$$X_1 = (3/32) \cdot F \quad (5.4)$$

Оскільки одна з чотирьох невідомих реакцій опор визначена (і тим самим розкрита статична невизначуваність рами), решту невідомих реакцій визначимо, розглядаючи рівновагу статично визначуваної рами, представленої на рис. 17 д:

$$\begin{aligned}
\sum m_C &= 0, \quad V_A \cdot l - H_A \cdot l - F \cdot 0,5 \cdot l = 0, \\
V_A &= H_A + 0,5 \cdot F = (3/32) \cdot F + 0,5 \cdot F = (19/32) \cdot F, \\
\sum X &= 0, \quad H_A - H_C = 0, \quad H_C = H_A = (3/32) \cdot F, \\
\sum Y &= 0, \quad V_A - F + V_C = 0, \\
V_C &= F - V_A = F - (19/32) \cdot F = (13/32) \cdot F,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Побудуємо епюри згинальних моментів. Згинальний момент у стояку **AB** викликається дією сили  $H_A$ . В перерізі на відстані  $y$  від точки **A** маємо

$$M(y) = H_A \cdot y = (3/32) \cdot F \cdot y,$$

звідси

$$M_A = 0, \quad M_B = (3/32) \cdot F \cdot l. \tag{5.6}$$

При побудові епюри згинальних моментів в рігелі **BC** рухатимемося від точки **C** до точки **B**. У перерізі з координатою  $x_1$  вираз для згинального моменту має вигляд

$$M(x_1) = V_C \cdot x_1$$

звідси

$$M_A = 0, \quad M_B = (3/32) \cdot F \cdot l \tag{5.7}$$

При побудові епюри згинальних моментів в рігелі **BC** рухатимемося від точки **C** до точки **B**. У перерізі з координатою  $x_1$  вираз для згинального моменту має вигляд

$$M(x_1) = V_C \cdot x_1$$

звідси

$$M_C = 0, \quad M_D = V_C \cdot 0,5 \cdot l = (13/32) \cdot F \cdot 0,5 \cdot l = (13/64) \cdot F \cdot l. \tag{5.8}$$

Згинальний момент в перерізі з координатою  $x_2$

$$M(x_2) = V_C \cdot x_2 - F \cdot (x_2 - 0,5 \cdot l)$$

звідси

$$M_D = V_C \cdot 0,5 \cdot l = (13/64) \cdot F \cdot l, \quad M_B = V_C \cdot l - F \cdot (l - 0,5 \cdot l) = -(3/32) \cdot F \cdot l$$

Оскільки значення згинальних моментів в точках **D** і **B** мають протилежні знаки, то при побудові епюри вони повинні бути відкладені по різні сторони від

осі стержня. Підкреслимо, що епюри згинальних моментів будуються нами на стиснутих волокнах.

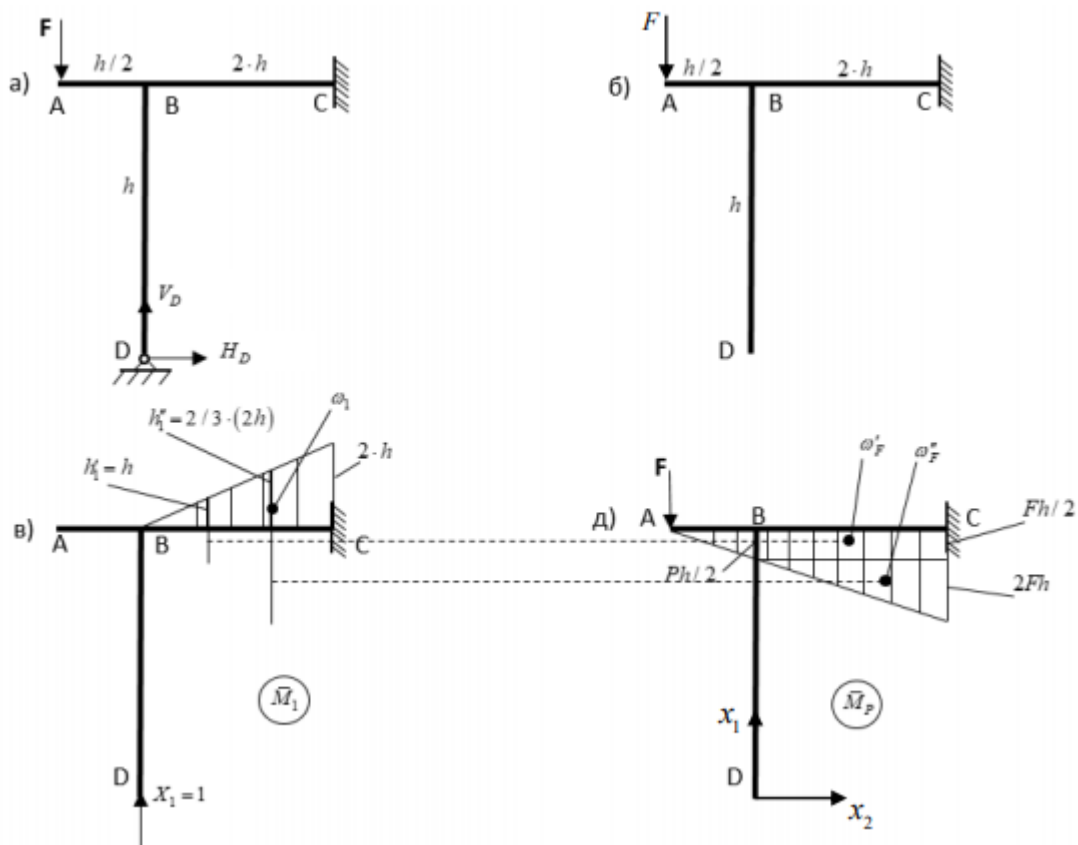
Результуюча епюра показана на рис. 17 е.

**Приклад 2.** Розкрити статичну невизначеність і побудувати епюру згинальних моментів, поперечних і поздовжніх сил для рами, наведеної на рис. 18 а.

**Розв'язування.** Рама двічі статично невизначувана. За основну приймаємо статично визначувану систему, показану на рис. 18 б.

Канонічні рівняння методу сил мають вигляд:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} = 0, \quad \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} = 0 \quad (5.9)$$



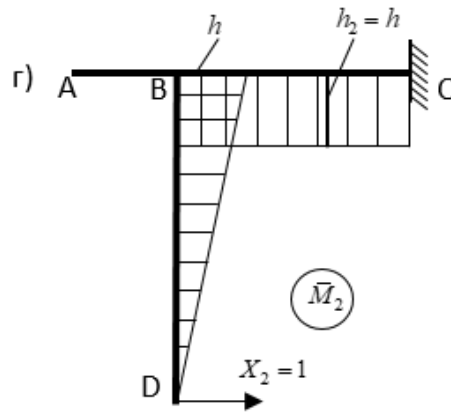


Рис. 18

Будуємо в основній системі епюри згинальних моментів від сил  $X_1 = 1$  (рис. 18 в)  $X_2 = 1$  (рис. 18 г) і заданого навантаження (рис.18 д).

Переміщення  $\delta_{11}$  визначимо шляхом перемножування способом Верещагіна епюри  $\bar{M}_1$  самої на себе, тобто

$$\delta_{11} = 0,5 \cdot 2 \cdot h \cdot 2 \cdot h \cdot (2/3) \cdot (2 \cdot h) / (E \cdot J) = (8/3) \cdot h^3 / (E \cdot J).$$

Аналогічно, для визначення  $\delta_{22}$  потрібно епюру  $\bar{M}_2$  перемножити саму на себе

$$\delta_{22} = [0,5 \cdot h \cdot h \cdot (2/3) \cdot h + 2 \cdot h \cdot h \cdot h] / (E \cdot J) = (7/3) \cdot h^3 / (E \cdot J) \quad (5.10)$$

Перемноживши епюри  $\bar{M}_1$  і  $\bar{M}_2$  способом Верещагіна, визначимо переміщення  $\delta_{12}$

$$\delta_{12} = -\omega_1 \cdot h_2 / (E \cdot J) = -0,5 \cdot 2 \cdot h \cdot 2 \cdot h \cdot h / (E \cdot J) = -2 \cdot h^3 / (E \cdot J) \quad (5.11)$$

Знак “-“ взятий тому, що перемножуванні епюри розташовані по різні сторони від осьової лінії.

Для визначення вантажних переміщень слід площу вантажної епюри на ділянці **BC** рігеля помножити на ординати одиничних епюр  $h_1$  і  $h_2$  відповідних положенню центра тяжіння площі вантажної епюри.

При визначенні переміщення  $\Delta_{1F}$  площа ділянки вантажної епюри для рігеля (рис.18 д) розбиваємо на складові  $\omega'_F$  (на одиничній епюрі  $\bar{M}_1$  центру ваги цієї площі відповідає ордината  $h'_1 = h$  і  $\omega''_F$  (на одиничній епюрі її центру ваги відповідає ордината  $h''_1 = (2/3) \cdot (2 \cdot h) = 4 \cdot h / 3$ ).

$$\Delta_{1F} = (-\omega'_F \cdot h'_1 - \omega''_F \cdot h''_2) / (E \cdot J) = [-F \cdot h^2 \cdot h - 2 \cdot F \cdot h^2 \cdot (4/3) \cdot h] / (E \cdot J) =$$

$$= -(11/3) \cdot F \cdot h^3 / (E \cdot J)$$

При визначенні переміщення  $\Delta_{2F}$  площу вантажної епюри (рис. 1 8 д) на ділянці рігеля ( $\omega_p = 3 \cdot F \cdot h^3$ ) перемножуємо на ординату  $h_2 = h$  (рис. 18 г), - оскільки на даній ділянці всі ординати мають постійне значення, то немає необхідності визначати центр ваги ділянки вантажної епюри, тобто

$$\Delta_{1F} = \omega_F \cdot h_2 / (E \cdot J) = 3 \cdot F \cdot h^2 \cdot h / (E \cdot J) = 3 \cdot F \cdot h^3 / (E \cdot J) \quad (5.12)$$

Після підстановки одержаних виразів для коефіцієнтів канонічних рівнянь  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22}, \Delta_{1F}, \Delta_{2F}$  і скорочення на загальний множник канонічні рівняння приймають вигляд

$$(8/3) \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 - (11/3) \cdot F = 0, \quad -2 \cdot X_1 + (7/3) \cdot X_2 + 3 \cdot F = 0. \quad (5.13)$$

Розв'язавши цю систему алгебраїчних рівнянь, одержуємо

$$X_1 = 1,15 \cdot F, \quad X_2 = -0,3 \cdot F.$$

З метою перевірки правильності визначення реакцій опори **D** необхідно по-іншому вибрати основну систему. Наприклад так, як показано на рис. 19 а. Тоді еквівалентна система матиме вигляд, представлений на рис. 19 б. Канонічні рівняння матимуть той же вигляд, але  $X_1$  і  $X_2$  тепер означають горизонтальну реакцію і момент в затисненні **C**, а  $\delta_{11}, \delta_{22}, \Delta_{1F}$  - переміщення перерізу **C** у напрямі сили  $X_1$ , викликані одиничною горизонтальною силою  $X_1$ , одиничним моментом  $X_2$  і зовнішнім навантаженням – силою **F** відповідно, а  $\delta_{21}, \delta_{22}, \Delta_{2F}$  - переміщення того ж перерізу у напрямі сили  $X_2$ , викликане дією тих же чинників – одиничної сили  $X_1$ , одиничного моменту  $X_2$ , зовнішнього навантаження (сили **F**).

Для визначення переміщень, що входять в канонічні рівняння, побудуємо епюри  $\bar{M}_1, \bar{M}_2, M_p$  (рис. 19 в, г, д). Перед побудовою цих епюр у кожному випадку заздалегідь визначаємо реакції опор.

Перемножуючи відповідні епюри за правилом Верещагіна, одержуємо:

$$\delta_{11} = [0,5 \cdot 2 \cdot h \cdot h \cdot (2/3) \cdot h + 0,5 \cdot h \cdot h \cdot (2/3) \cdot h] / (E \cdot J) = h^3 / (E \cdot J),$$

$$\delta_{12} = 0,5 \cdot 2 \cdot h \cdot h \cdot (1/3) \cdot h / (E \cdot J) = h^2 / (3 \cdot E \cdot J),$$

$$\delta_{22} = 0,5 \cdot 2 \cdot h \cdot 1 \cdot (2/3) / (E \cdot J) = 2 \cdot h / (3 \cdot E \cdot J),$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1F} &= -0,5 \cdot 2 \cdot h \cdot 0,5 \cdot F \cdot h \cdot (2/3) \cdot h / (E \cdot J) = -F \cdot h^3 / (3 \cdot E \cdot J), \\ \Delta_{2F} &= -0,5 \cdot 2 \cdot h \cdot 0,5 \cdot F \cdot h \cdot (1/3) / (E \cdot J) = -F \cdot h^2 / (6 \cdot E \cdot J).\end{aligned}\quad (5.14)$$

Знак “-“ в останніх виразах взятий у зв’язку з тим, що перемножуються епюри, розташовані по різні сторони від осьової лінії.

Після підстановки цих переміщень в канонічні рівняння і скорочення на відповідний множник одержуємо:

$$h \cdot X_1 + (1/3) \cdot X_2 - (1/3) \cdot F \cdot h = 0, \quad h \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 - 0,5 \cdot F \cdot h = 0, \quad (5.15)$$

звідки

$$X_1 = 0,3 \cdot F, \quad X_2 = 0,1 \cdot F \cdot h$$

Використовуючи рівняння статички, знайдемо реакції в опорі **D** (рис. 20):

Значення реакцій  $H_D$  і  $V_D$  співпадають з раніше одержаними, тому можна вважати, що вони визначені правильно.

Побудуємо тепер епюри поздовжніх і поперечних сил, згинальних моментів для статично визначеної рами, представленої на рис. 21 а.

$$\sum Z = 0, \quad 0,3 \cdot F + H_D = 0, \quad H_D = -0,3 \cdot F,$$

$$\sum \text{mom}_C(\bar{F}_i) = 0, \quad F \cdot 2,5 \cdot h - V_D \cdot 2 \cdot h + H_D \cdot h + 0,1 \cdot F \cdot h = 0, \quad V_D = 1,15 \cdot F.$$

### 5.1. Побудова епюр поздовжніх сил

Користуючись правилом визначення поздовжньої сили в перерізі, що витікає з методу перерізів, встановлюємо, що стержень **BD** стискується зусиллям  $1,15 \cdot F$ , а стержень **BC** – розтягується зусиллям  $0,3 \cdot F$ . У стержні **AB** поздовжні зусилля не виникають. Епюра поздовжніх сил представлена на рис. 21 б.

### 5.2. Побудова епюри поперечних сил

Поперечні сили виникають в усіх перерізах рами. Переміщуючись вздовж стержня **AC**, виявляємо, що в поперечних перерізах ділянки **AB** виникатиме поперечна сила, рівна **P**, у вузлі **B** матимемо стрибок вгору на величину реакції  $V_D = 1,15 \cdot F$ , а в перерізах ділянки **BC** поперечна сила дорівнюватиме  $0,15 \cdot F$ . У перерізах стержня **BD** поперечна сила дорівнює реакції  $H_D = 0,3 \cdot F$ . Епюра поперечних сил представлена на рис. 21 в.



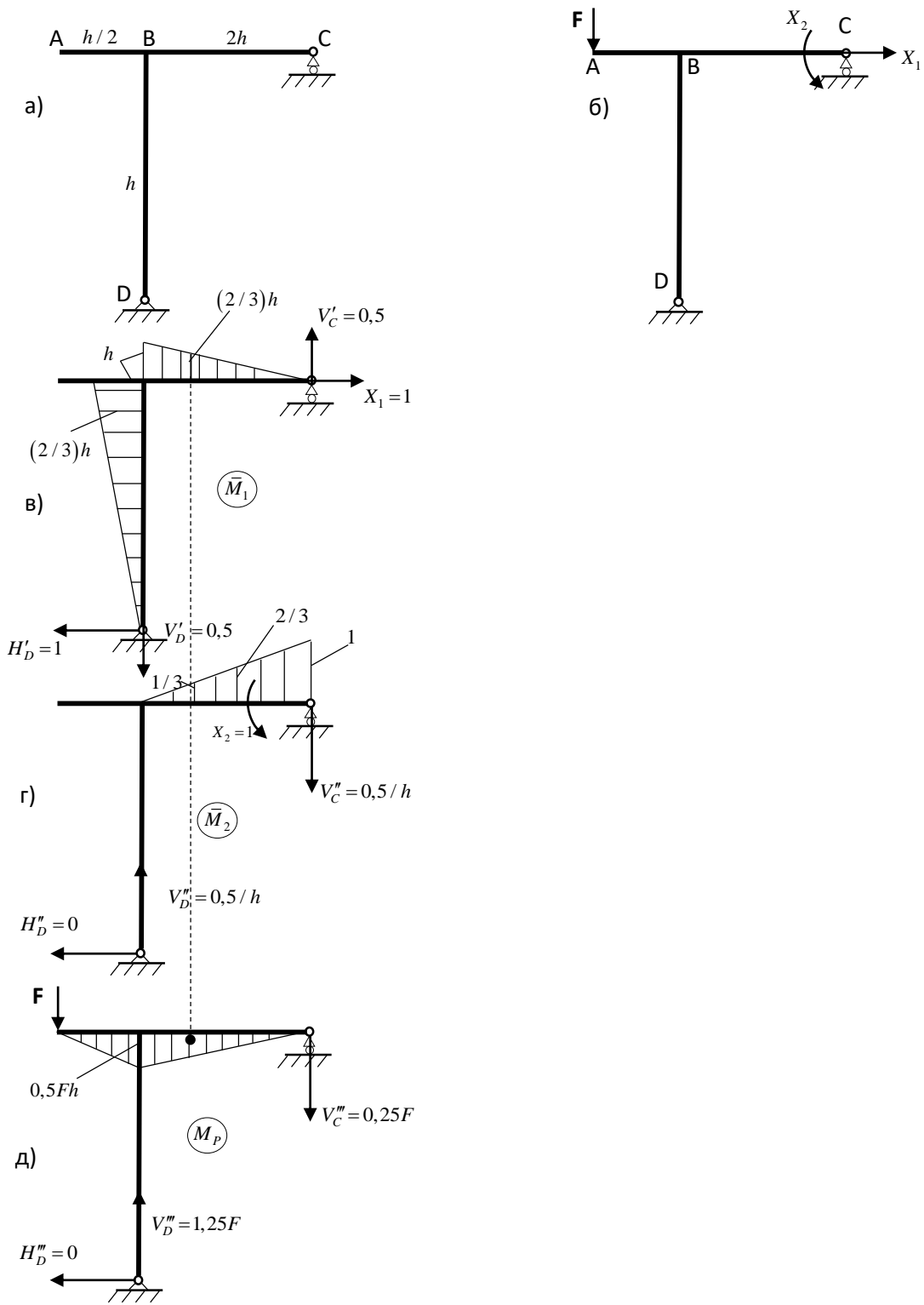


Рис. 19

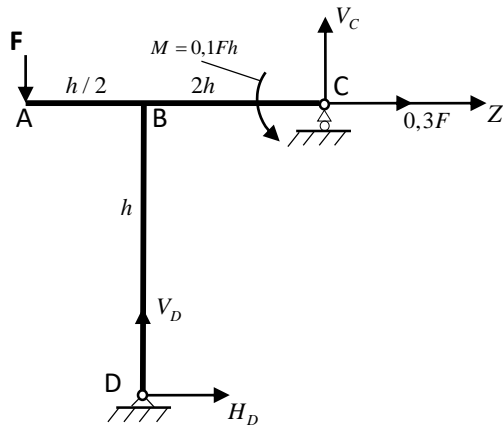


Рис. 20

### 5.3. Побудова епюри згинальних моментів

Нагадаємо, що епюра будується на стиснутих волокнах. Для ділянки **АВ** рігеля (рис. 21 а) вираз для згинального моменту має вигляд:

$$M(z_1) = -F \cdot z_1, \quad z_1 \in [0, 0,5 \cdot h),$$

звідси

$$M_A = 0, \quad M_B^n = -0,5 \cdot F \cdot h. \quad (5.16)$$

У точці **В** має місце стрибок на величину моменту  $H_D \cdot h = 0,3 \cdot F \cdot h$ , тому після точки **В** згинальний момент буде дорівнювати

$$M_B^n = -0,5 \cdot F \cdot h + 0,3 \cdot F \cdot h = -0,2 \cdot F \cdot h. \quad (5.17)$$

У перерізах ділянки **ВС** рігеля вираз для згинального моменту має вигляд

$$M(z_2) = -P \cdot z_2 + 0,3 \cdot F \cdot h + 1,15 \cdot F \cdot (z_2 - 0,5 \cdot h), \quad z_2 \in (0,5 \cdot h, 2,5 \cdot h],$$

Із цього виразу визначаємо значення згинальних моментів в перерізах **В** і **С**

$$\begin{aligned} M_B^n &= -0,5 \cdot F \cdot h + 0,3 \cdot F \cdot h = -0,2 \cdot F \cdot h, \\ M_C &= -2,5 \cdot F \cdot h + 0,3 \cdot F \cdot h + 2,3 \cdot F \cdot h = 0,1 \cdot F \cdot h. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Відкладаючи на перпендикулярах до осі рігеля в точках **А**, **В** і **С** значення згинальних моментів і з'єднуючи прямими лініями кінці відповідних ординат, одержимо епюру **М** для рігеля.

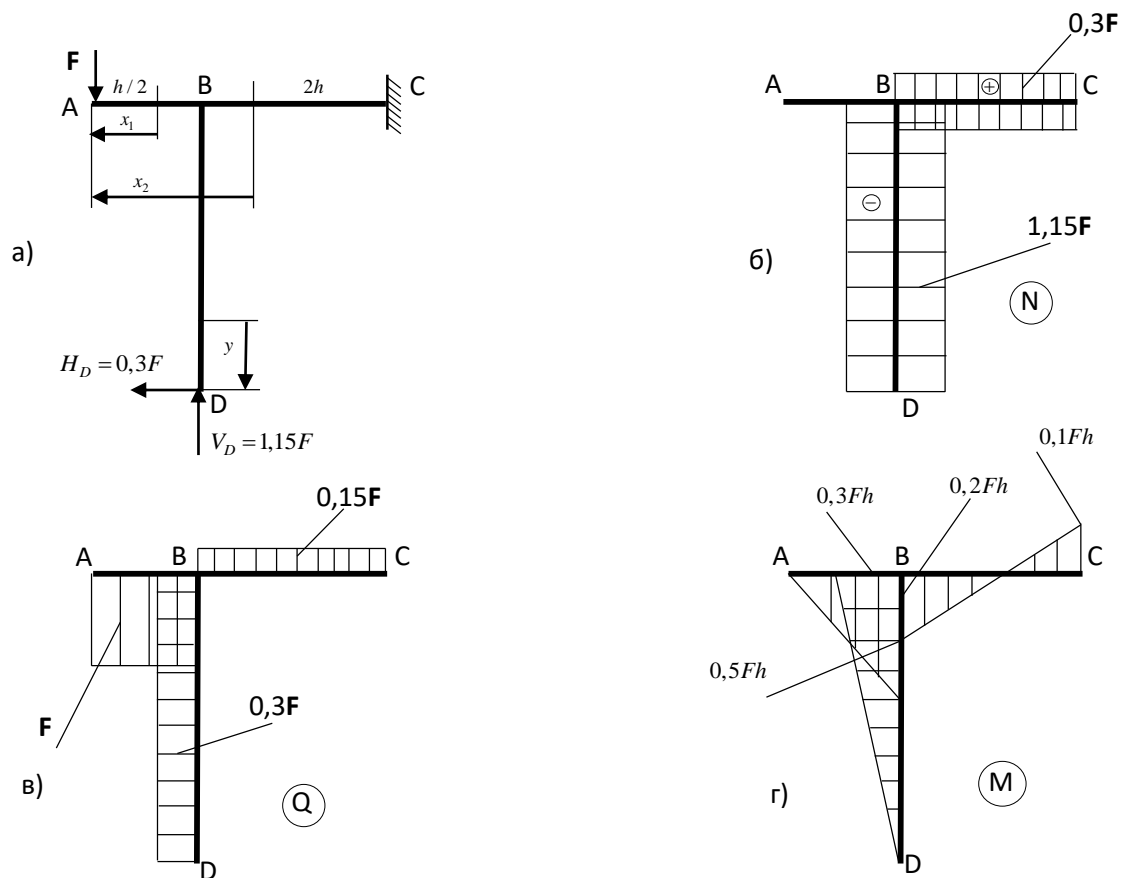


Рис.21

У перерізах стояка **BD** також виникають згинальні моменти відповідно до виразу

$$M(y) = H_D \cdot y$$

звідси

$$M_D = 0, M_B = 0,3 \cdot F \cdot h.$$

У точці **B** сума моментів повинна дорівнювати нулю –

$$-0,5 \cdot F \cdot h + 0,3 \cdot F \cdot h + 0,2 \cdot F \cdot h = 0.$$

Сумарна епюра згинальних моментів представлена на рис. 11 г.

## **Перелік основних питань з опору матеріалів та будівельної механіки**

1. Опір матеріалів і будівельна механіка, їх місце і значення в справі розв'язання питань і задач будівництва, промисловості і сільського господарства, зв'язок з іншими науками.
2. Об'єкти дослідження. Реальний об'єкт і розрахункова схема. Основні гіпотези.
3. Зовнішні і внутрішні сили. Метод перерізів. Види навантаження.
4. Поняття напруження. Повне, нормальне і дотичне напруження. Напружений стан у точці, тензор напружень.
5. Поняття деформації. Деформований стан у точці. Тензор деформацій. Пружні та пластичні деформації.
6. Основні конструктивні елементи конструкцій, машин і споруд. Загальні принципи розрахунку елементів конструкцій на міцність та жорсткість.
7. Геометричні характеристики плоских фігур. Статичні моменти площі перерізу відносно осей. Центр ваги перерізу і його визначення. Центральні осі перерізу.
8. Моменти інерції плоских перерізів: осьові, полярний і відцентровий.
9. Залежність між моментами інерції відносно паралельних осей.
10. Залежність між моментами інерції при повороті осей. Головні осі інерції і головні моменти інерції та їх властивості.
11. Визначення моментів інерції складних перерізів.
12. Осьовий розтяг-стиск. Поздовжня сила та її епюра. Напруження в поперечних перерізах. Умова міцності за нормальними напруженнями.
13. Діаграма розтягу пластичного матеріалу. Механічні характеристики матеріалу і їх визначення. Допустимі напруження. Особливості випробувань матеріалів на стиск.
14. Деформація стержня при осьовому розтягу, стиску. Закон Гука. Поперечна деформація. Закон Пуасона.
15. Розрахунок на міцність та жорсткість елементів конструкцій і споруд сільськогосподарського призначення. Два типи (три види) розрахунків. Коефіцієнт запасу міцності.
16. Статично невизначені стержньові системи при розтягу-стиску і їх розрахунок.
17. Температурні деформації і напруження. Монтажні напруження.

18. Напруження і деформації при розтягу-стиску з урахуванням власної ваги.
19. Напружений стан у точці і його види. Напруження на нахилених перерізах при осьовому розтягу-стиску. Закон парності дотичних напружень.
22. Деформований стану точці. Головні деформації. Узагальнений і об'ємний закон Гуку.
23. Розрахунок на міцність при плоскому напруженому стані. Теорії міцності для крихкого і пластичного матеріалів.
25. Кручення валів круглого поперечного перерізу. Деформація кручення. Основні гіпотези.
26. Дотичні напруження і їх визначення для валу круглого поперечного перерізу. Умова міцності. Розрахунок валів на міцність. Два типи задач.
27. Деформації валу при крученні. Закон Гука. Умова жорсткості. Два типи задач.
28. Статично невизначені задачі при крученні.
29. Циліндричні гвинтові пружини з малим кутом нахилу витків. Визначення напружень і деформацій. Умова міцності та жорсткості. Кручення стержнів не круглого поперечного перерізу.
30. Згин деталей машин, елементів конструкцій та споруд. Плоский поперечний згин. Визначення поперечної сили і згинального моменту. Правило знаків  $Q$  і  $M$ . Побудова епюр  $Q$  і  $M$ . Диференціальні залежності між  $M$ ,  $Q$  і  $q$ . Правила контролю епюр  $Q$  і  $M$ .
31. Чистий згин. Визначення нормальних напружень. Умова міцності за нормальними напруженнями. Розрахунок балок на міцність.
32. Поперечний згин. Дотичні напруження при згині. Формула Журавського. Умова міцності за дотичними напруженнями. Перевірка міцності балок за головними напруженнями. Небезпечні точки перерізу і небезпечні перерізи балки.
33. Деформації балок при згині. Повне і наближене диференціальні рівняння зігнутої осі балки. Інтегрування наближеного диференціального рівняння зігнутої осі балки при одній та двох ділянках.
34. Метод початкових параметрів. Універсальні рівняння для визначення прогинів і кутів повороту поперечних перерізів балки. Визначення початкових параметрів  $y_0$  і  $\theta_0$ . Розрахунок балок на жорсткість.

35. Розрахунки статично невизначених балок.
36. Аналіз геометричної незмінюваності плоских систем. Ступінь геометричної змінюваності. Формула Чебишева.
37. Миттєво змінні системи. Принципи створення геометрично незмінюваних систем.
39. Розрахунок статично визначених систем при рухомому навантаженні. Поняття про лінії впливу. Побудова ліній впливу реакцій опор.
40. Визначення зусиль за допомогою ліній впливу.
41. Ферми та їх розрахунки.
42. Енергетичні методи визначення деформацій в пружних системах
43. Потенціальна енергія деформації стержня за довільного навантаження.
44. Теорема Кастіліано. Інтегралі Мора. Способи обчислення інтегралів Мора. Спосіб Верещагіна.
45. Теореми про взаємність робіт і переміщень.
46. Статично невизначені стержньові системи. Зайві в'язі зовнішні і внутрішні. Метод сил.
47. Канонічні рівняння методу сил. Розрахунки статично невизначених рам за методом сил.
48. Підпірні стінки, їх види та розрахунки.
49. Розрахунки конструкцій за дії динамічних навантажень. Коефіцієнт динамічності.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Дарков А.В. Строительная механика / А.В. Дарков. М.: Высшая школа, 1976. – 600 с.
2. Кагадій С.В. Основи механіки матеріалів і конструкцій/ С.В. Кагадій, А.Г. Дем'яненко, В.О. Гурідова. Дніпропетровськ: «А.Л. Свідлер», 2011. – 411 с.
3. Кагадій С.В. Будівельна механіка найпростіших стержньових систем/ С.В. Кагадій. ДДАУ, 2005. – 168 с.
4. Писаренко Г.С. Опір матеріалів/ Г.С. Писаренко. К.: «Вища школа», 1996. – 775 с.
5. Швайко В.М. Розрахунок статично невизначених рам/ В.М. Швайко. ДДАЕУ, 2011. – 91 с.
6. Шевченко В.Д., Будівельна механіка металевих конструкцій/ В.Д. Шевченко, В.Г. Піскунов. К.: «Вища школа», 2004. – 438 с.
7. Яценко Е.А. Курс лекцій з будівельної механіки/ Е.А. Яценко. К.: «Вища школа», 1995. – 264 с.

Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський державний аграрно-економічний університет

*Кафедра теоретичної механіки, опору матеріалів  
та матеріалознавства*

Опір матеріалів  
Будівельна механіка

**Розрахунково-графічна робота №**

*Розрахунки статично невизначених рам методом сил*

Перевірив: проф. Іванов І.І.  
Виконав: студент гр. М-\*\*- \*\*  
Петров М.П.

Дніпро  
20\*\*



**Розрахунково-графічна робота №**  
**з опору матеріалів та будівельної механіки**  
**РОЗРАХУНКИ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ РАМ**

**Завдання**

Для заданої статично невизначеної рами (рис. 1 д, 2 д) необхідно:

1. Встановити ступінь статичної невизначеності рами.
2. Вибрати основну систему.
3. Написати (у загальному вигляді) канонічні рівняння.
4. Побудувати епюри згинальних моментів від зовнішнього навантаження і від одиничних сил, прикладених до основної системи, обчислити (за способом Верещагіна) всі переміщення, що входять в канонічні рівняння (коефіцієнти канонічних рівнянь).
5. Знайти величини реакцій «зайвих» в'язей, розв'язавши канонічні рівняння, перевірити правильність визначення цих реакцій, вибравши основну систему по-іншому.
6. Побудувати епюри згинальних моментів, поперечних і повздовжніх сил, що виникають в перерізах рами.
7. Перевірити правильність побудови епюри згинальних моментів шляхом перемноження її на кожну з одиничних епюр.
8. Підібрати поперечний переріз стержнів рами у вигляді двотавра, якщо  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$

Дані взяти з наступної таблиці, вибираючи номер рядка в таблиці по передостанній цифрі номера студентського квитка або залікової книжки, номер схеми – по останній.

№№ пп	F, кН	q, кН/м	h, м	l, м	№№ пп	P, кН	q, кН/м	h, м	l, м
<b>0</b>	100	20	2	4	<b>5</b>	30	20	5	3
<b>1</b>	80	10	3	5	<b>6</b>	50	15	4	4
<b>2</b>	60	5	4	2	<b>7</b>	70	5	3	6
<b>3</b>	40	20	5	4	<b>8</b>	90	8	6	3
<b>4</b>	20	10	6	5	<b>9</b>	60	5	4	6

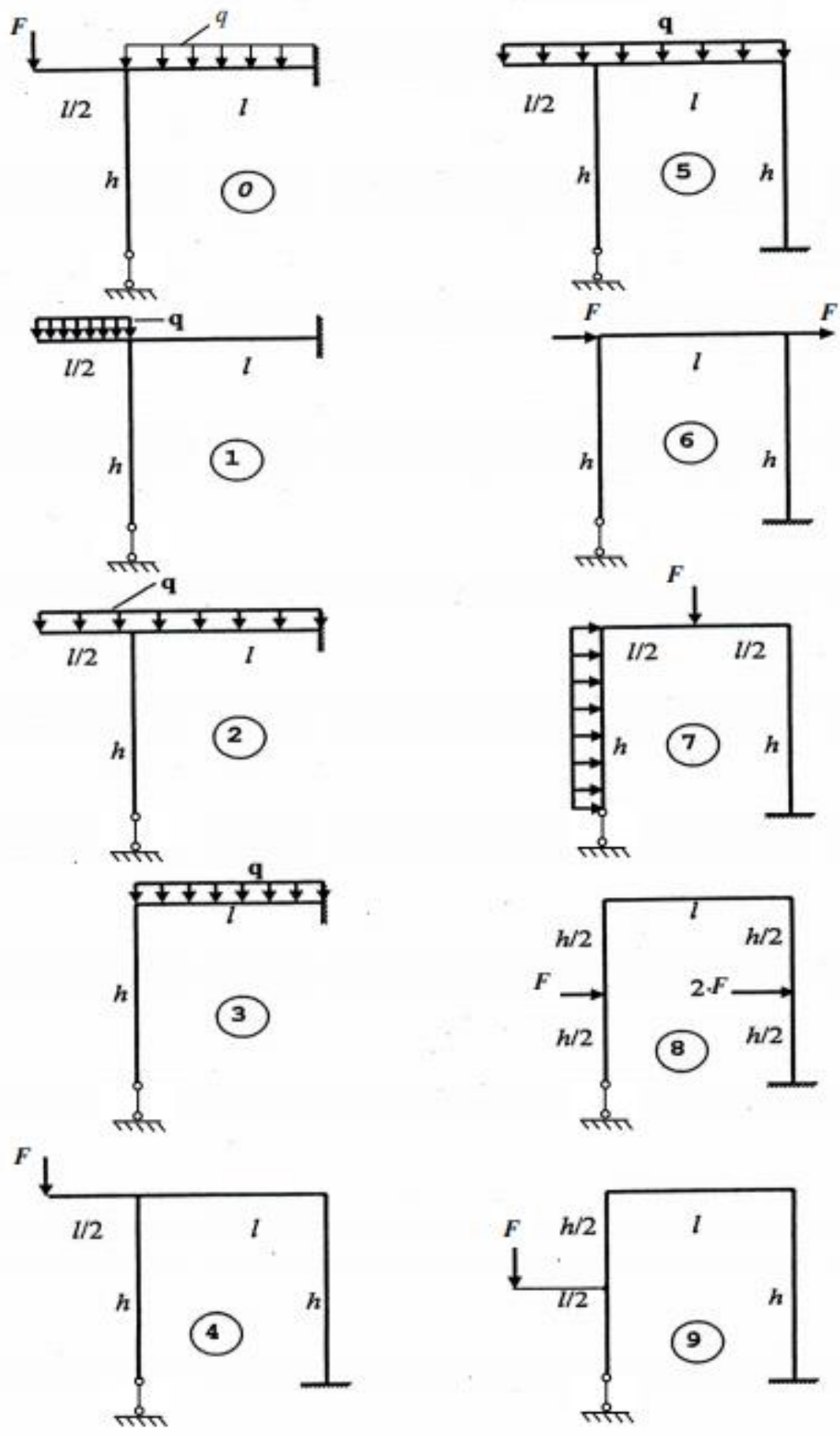


Рис. 1 д.

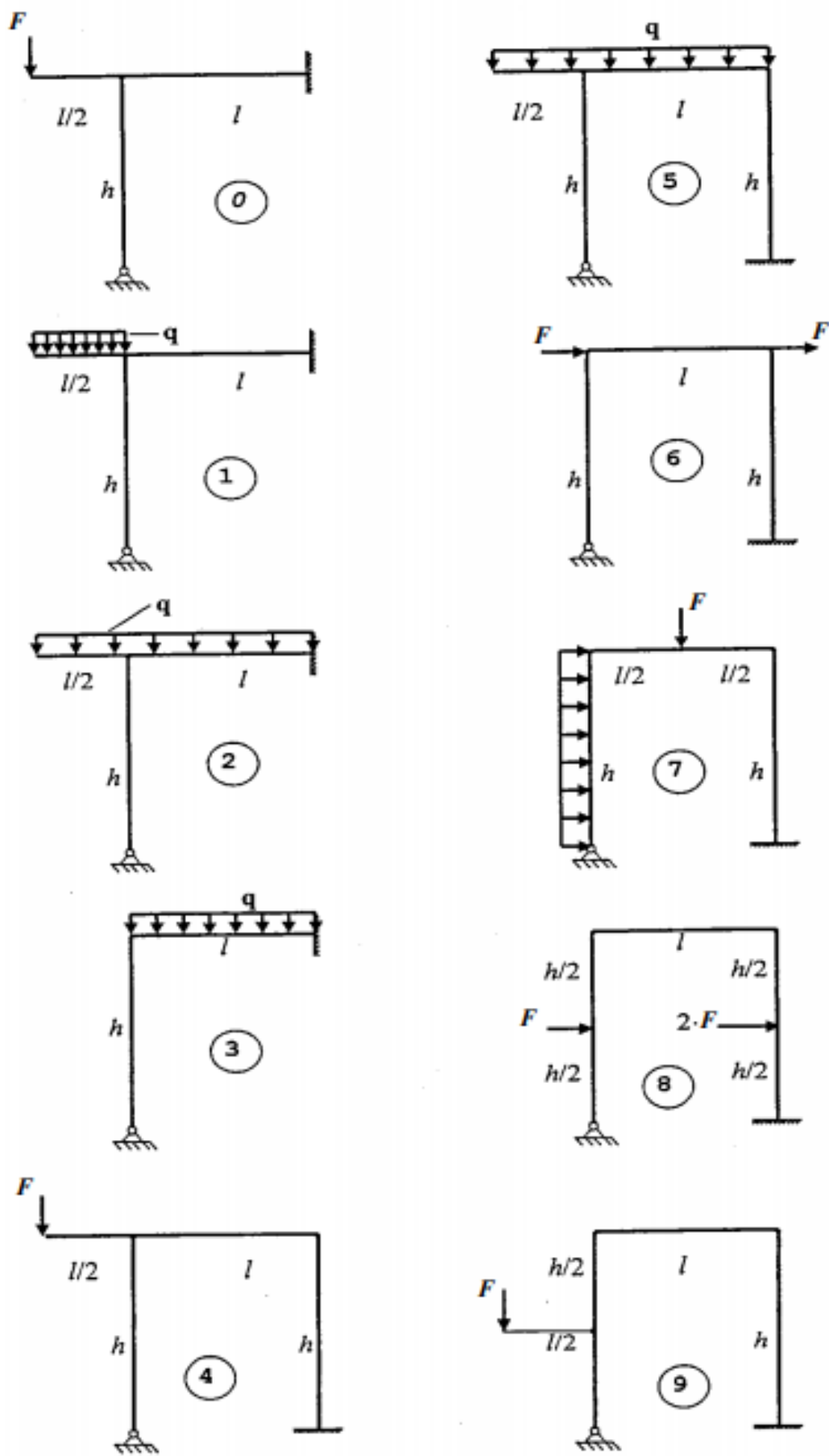
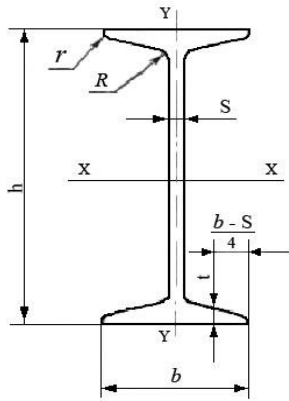


Рис. 2 д.

<i>Деформації деяких балок</i>				
№	Схема навантаження	$EI_x \cdot y_{\max}$	$EI_x \cdot \theta_A$	$EI_x \cdot \theta_B$
1		$\frac{Fl^3}{48}$	$-\frac{Fl^2}{16}$	$\frac{Fl^2}{16}$
2		$\frac{5ql^4}{384}$	$-\frac{ql^3}{16}$	$\frac{ql^3}{16}$
3		$\frac{Fl^3}{3}$	0	$-\frac{Fl^2}{2}$
4		$\frac{ql^4}{8}$	0	$-\frac{ql^3}{6}$
5		$\frac{Ml^2}{2}$	0	$-Ml$



**Балки двотаврові гарячекатані сталеві з нахилом внутрішніх  
граней полиць (ГОСТ 8239-89)**

$h$  – висота двотавра;

$b$  – ширина полиці;

$s$  – товщина стінки;

$t$  – середня товщина полиці;

$r$  – радіус закруглення полиці;

$I$  – момент інерції;

$W$  – момент опору;

$S$  – статичний момент півперерізу;

$A$  – площа поперечного перерізу;  $i$  – радіус інерції;

$R$  – радіус внутрішнього закруглення.

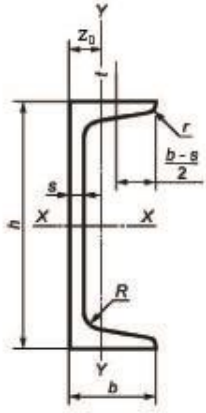
Таблиця 1.

№	$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$	$A$ , см <sup>2</sup>	Маса 1 м, кг	Довідкові величини для осей						
									X – X				Y – Y		
									$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,8	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88

Закінчення таблиці 1

18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,90	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90	5500	407	11,3	229	337	50	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

**Швелера гарячекатані сталеві з нахилом внутрішніх граней полиць  
(ГОСТ 8240-89)**



$h$  – висота швелера;

$b$  – ширина полиці;

$s$  – товщина стінки;

$t$  – середня товщина полиці;

$R$  – радіус внутрішнього закруглення;

$r$  – радіус закруглення полиці;

$A$  – площа поперечного перерізу;

$z_0$  – відстань від осі  $Y-Y$  до зовнішньої грані стінки;

$I$  – момент інерції;

$W$  – момент опору;

$i$  – радіус інерції;

$S$  – статичний момент пів перерізу.

Таблиця 2.

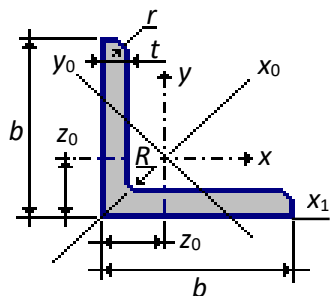
№	$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$	$A$ , см <sup>2</sup>	Маса 1 м, кг	Довідкові значення для осей							$z_0$ , см
									$X - X$				$Y - Y$			
									$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	
мм																
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,9	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	23,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,6	12,3	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,0	13,3	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80

## Закінчення таблиці 2

16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,2	19,8	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,7	21,0	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,8	22,6	2330	212	8,99	121	187	30	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	24,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,9	25,8	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,5	31,8	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75



### Кутник рівнополічний (ГОСТ 8509-93)



$b$  – ширина полиці;  $i$  – радіус інерції;  
 $t$  – товщина полиці;  $z_0$  – відстань від осі  $y$  до зовнішньої грані стінки.  
 $A$  – площа поперечного перерізу;  
 $I$  – момент інерції;

Таблиця 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
Номер кутника а	$b$	$t$	$R$	$r$	$A$ , см <sup>2</sup>	Довідкові значення для осей									Маса 1м довжини профіля кг	
						$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$		$I_{xy}$		$z_0$
						$I_x$	$i_x$	$I_{x_0}^{\max}$	$i_{x_0}^{\max}$	$I_{y_0}^{\min}$	$i_{y_0}^{\min}$	$I_{x_1}$				
						см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>	см		
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,23	0,60	0,89	
		4			1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,28	0,64	1,15	
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,47	0,73	1,12	
		4			1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,59	0,76	1,46	
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,2	0,68	0,80	1,27	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	1,03	0,89	1,46
		4			2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	1,37	0,99	1,65
		4			2,17	3,01	1,21	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,75	1,04	2,16
4,0	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	2,08	1,09	1,85
		4			3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	2,68	1,13	2,42
		5			3,79	5,53	1,21	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	3,22	1,17	2,97
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,09	3,00	1,21	2,08
		4			3,48	6,63	1,38	10,52	1,74	2,74	0,89	12,1	3,89	1,26	2,73
		5			4,29	8,03	1,37	12,74	1,72	3,33	0,88	15,3	4,71	1,30	3,37
5,0	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	12,4	4,16	1,33	2,32
		4			3,89	9,21	1,54	14,63	1,94	3,80	0,99	16,6	5,42	1,38	3,05
		5			4,80	11,20	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	20,9	6,57	1,42	3,77
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	23,3	7,69	1,52	3,44
		5			5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,10	29,2	9,41	1,57	4,25
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,1	11,00	1,69	3,90
		5			6,13	23,10	1,94	36,80	2,44	9,52	1,25	41,5	13,70	1,74	4,81

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		6			7,28	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	50	15,90	1,78	5,72
7,0	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	2,16	46,03	2,72	12,04	1,39	51	17,000	1,880	4,87
		5			6,86	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	56,7	18,700	1,900	5,38
		6			8,15	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	68,4	22,100	1,940	6,39
		7			9,42	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	80,1	25,200	1,990	7,39
		8			10,67	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	91,9	28,200	2,020	8,37
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	69,6	23,100	2,020	5,80
		6			8,78	46,57	2,30	73,87	2,90	19,28	1,48	83,9	27,300	2,060	6,89
		7			10,15	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	98,3	31,200	2,100	7,96
		8			11,50	59,84	2,28	94,89	2,87	24,80	1,47	113	35,000	2,150	9,02
		9			12,83	66,10	2,27	104,7 2	2,86	27,48	1,46	127	38,600	2,180	10,07
8,0	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	2,47	83,56	3,11	21,80	1,59	93,2	30,900	2,170	6,78
		6			9,38	56,97	2,47	90,40	3,11	23,54	1,58	102	33,400	2,190	7,36
		7			10,85	65,31	2,45	103,6 0	3,09	26,97	1,58	119	38,300	2,230	8,51
		8			12,30	73,36	2,44	116,3 9	3,08	30,32	1,57	137	43,000	2,270	9,65

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
9,0	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	2,78	130,0 0	3,50	33,97	1,79	145	48,100	2,430	8,33
		7			12,28	94,30	2,77	149,6 7	3,49	38,94	1,78	169	55,400	2,470	9,64
		8			13,93	106,1 1	2,76	168,4 2	3,48	43,80	1,77	194	62,300	2,510	10,93
		9			15,60	118,0 0	2,75	186,0 0	3,46	48,60	1,77	219	68,000	2,550	12,20
10,0	100,0	6,5	12,0	4,0	12,82	122,1 0	3,09	193,4 6	3,89	50,73	1,99	214	71,400	2,680	10,06
		7			13,75	130,5 9	3,08	207,0 1	3,88	54,16	1,98	231	76,400	2,710	10,79
		8			15,60	147,1 9	3,07	233,4 6	3,87	60,92	1,98	265	86,300	2,750	12,25
		10			19,24	178,9 5	3,05	283,8 3	3,84	74,08	1,96	333	110,00 0	2,830	15,10
		12			22,80	208,9 0	3,03	330,9 5	3,81	86,84	1,95	402	122,00 0	2,910	17,90
		14			26,28	237,1 5	3,00	374,9 8	3,78	99,32	1,94	472	138,00 0	2,990	20,63

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		16			29,68	263,8 2	2,98	416,0 4	3,74	111,61	1,94	542	152,00 0	3,060	23,30
11,0	110,0	7	12,0	4,0	15,15	175,6 1	3,40	278,5 4	4,29	72,68	2,19	308	106,00 0	2,960	11,89
		8			17,20	198,1 7	3,39	314,5 1	4,28	81,83	2,18	353	116,00 0	3,000	13,50
12,5	125,0	8	14,0	4,6	19,69	294,3 6	3,87	466,7 6	4,87	121,98	2,49	516	172,00 0	3,360	15,46
		9			22,00	327,4 8	3,86	520,0 0	4,86	135,88	2,48	582	192,00 0	3,400	17,30
		10			24,33	359,8 2	3,85	571,0 4	4,84	148,59	2,47	649	211,00 0	3,450	19,10
		12			28,89	422,3 2	3,82	670,0 2	4,82	174,43	2,46	782	248,00 0	3,530	22,68
		14			33,37	481,7 6	3,80	763,9 0	4,78	199,62	2,45	916	282,00 0	3,610	26,20
		16			37,77	538,5 6	3,78	852,8 4	4,75	224,29	2,44	1051	315,00 0	3,680	29,65
14,0	140,0	9	14,0	4,6	24,72	465,7 2	4,34	739,4 2	5,47	192,03	2,79	818	274,00 0	3,780	19,41

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		10			27,33	512,2 9	4,33	813,6 2	5,46	210,96	2,78	911	301,00 0	3,820	21,45
		12			32,49	602,4 9	4,31	956,9 8	5,43	248,01	2,76	1097	354,00 0	3,900	25,50

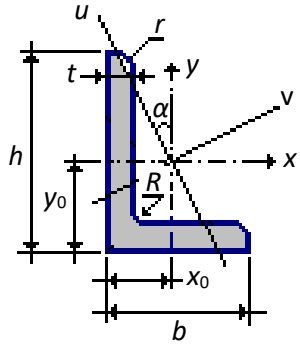
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16,0	160,0	10	16,0	5,3	31,43	774,2 4	4,96	1229, 10	6,25	319,38	3,19	1356	455,00 0	4,300	24,67
		11			34,42	844,2 1	4,95	1340, 06	6,24	347,77	3,18	1494	496,00 0	4,350	27,02
		12			37,39	912,8 9	4,94	1450, 00	6,23	375,78	3,17	1633	537,00 0	4,390	28,35
		14			43,57	1046, 47	4,92	1662, 13	6,20	430,81	3,16	1911	615,00 0	4,470	33,97
		16			49,07	1175, 19	4,89	1865, 73	6,17	484,64	3,14	2191	690,00 0	4,550	38,52
		18			54,79	1290, 24	4,87	2061, 03	6,13	537,46	3,13	2472	771,00 0	4,630	43,01
		20			60,40	1418,	4,85	2248,	6,10	589,43	3,12	2756	830,00	4,700	47,44

						85		26					0		
18,0	180,0	11	16,0	5,3	38,80	1216,44	5,60	1933,10	7,06	499,78	3,59	2128	716,00	4,850	30,47
		12			42,19	1316,62	5,59	2092,78	7,04	540,45	3,58	2324	776,00	4,890	33,12
20,0	200,0	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	6,22	2896,16	7,84	749,40	3,99	3182	1073,00	5,370	36,97
		13			50,85	1960,77	6,21	3116,18	7,83	805,35	3,98	3452	1156,00	5,420	39,92
		14			54,60	2097,00	6,20	3333,00	7,81	861,00	3,97	3722	1236,00	5,460	42,80
		16			61,98	2362,57	6,17	3755,39	7,78	969,74	3,96	4264	1393,00	5,540	48,65
		20			76,54	2871,47	6,12	4560,42	7,72	1181,92	3,93	5355	1689,00	5,700	60,08
		25			94,29	3466,21	6,06	5494,04	7,63	1438,38	3,91	6733	2028,00	5,890	74,02
		30			111,54	4019,60	6,00	6351,05	7,55	1698,16	3,89	8130	2332,00	6,070	87,56
22,0	220,0	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	6,83	4470,15	8,60	1158,56	4,38	4941	1655,00	5,910	47,40

		16			68,58	3175,44	6,80	5045,37	8,58	1305,52	4,36	5661	1869,00	6,020	53,83
25,0	250,0	16	24,0	8,0	78,40	4717,10	7,76	7492,10	9,78	1942,09	4,98	8286	2775,00	6,750	61,55
		18			87,72	5247,24	7,73	8336,69	9,75	2157,78	4,96	9342	3089,00	6,830	68,86
		20			96,96	5764,87	7,71	9159,73	9,72	2370,01	4,94	10401	3395,00	6,910	76,11
		22			106,12	6270,32	7,09	9961,60	9,69	2579,04	4,93	11464	3691,00	7,000	83,31
		25			119,71	7006,39	7,65	11125,52	9,64	2887,26	4,91	13064	4119,00	7,110	93,97
		28			133,12	7716,86	7,61	12243,84	9,59	3189,89	4,90	14674	4527,00	7,230	104,50
		30			141,96	8176,52	7,59	12964,66	9,56	3388,98	4,89	15753	4788,00	7,310	111,44



### Кутник нерівнополічний (ГОСТ 8510-93)



$b$  – ширина малої полиці;

$i$  – радіус інерції;

$h$  – ширина великої полиці;

$\alpha$  – кут нахилу головної центральної осі;

$t$  – товщина полиці;

$z_0$  – відстань від осі  $u$  до зовнішньої грані стінки.

$A$  – площа поперечного перерізу;

$I$  – момент інерції;

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Номер кутника	$h$	$b$	$t$	$r_1$	$r_2$	$A$	Довідкові значення для осей									$I_{xy}$	$x_0$	$y_0$	$tg \alpha$	Маса 1м довжини профіля
							$x-x$			$y-y$			$u-u$							
							$I_x$	$W_x$	$i_x$	$I_y$	$W_y$	$i_y$	$I_u$	$W_u$	$i_u$					
							мм						см <sup>2</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>					
2,5x1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,22	0,42	0,86	0,392	0,91
3,0x2	30	20	3	3,5	1,2	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,43	0,51	1,00	0,427	1,12
			4			1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	0,54	1,04	0,421	1,45
3,2x2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,47	0,49	1,08	0,382	1,17
			4			1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,50	0,53	1,12	0,374	1,52

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
4x2,5	40	25	3	4	1,3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,96	0,59	1,32	0,385	1,48
			4			2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	1,22	0,63	1,37	0,281	1,94
4,5x2,8	45	28	3	5	1,7	2,14	4,41	1,45	1,48	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	1,38	0,64	1,47	0,382	1,68
			4			2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	1,77	0,68	1,51	0,379	2,20
5x3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	2,01	0,72	1,60	0,403	1,90
			4			3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	2,59	0,76	1,65	0,401	2,40
5,6x3,6	56	36	4	6	2	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	3,74	0,84	1,82	0,406	2,81
			5			4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	4,50	0,88	1,87	0,404	3,46
6,3x4	63	40	4	7	2,3	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	5,25	0,91	2,03	0,397	3,17
			5			4,98	19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	6,41	0,95	2,08	0,396	3,91
			6			5,90	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	7,44	0,90	2,12	0,393	4,63
			8			7,68	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	9,27	1,07	2,20	0,386	6,03
6,5x5	65	50	5	6	2	5,56	23,41	5,20	2,05	12,08	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	9,77	1,26	2,00	0,576	4,36
			6			6,60	27,46	6,16	2,04	14,12	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	11,46	1,30	2,04	0,575	5,18
			7			7,62	31,32	7,08	2,03	16,05	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	12,94	1,34	2,08	0,571	5,93
			8			8,62	35,00	7,99	2,02	18,88	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	13,61	1,37	2,12	0,570	6,77

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
7x4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	9,12	1,05	2,28	0,406	4,30
7,5x5	75	50	5	8	2,7	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	12,00	1,17	2,39	0,436	4,79
			6			7,25	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	14,10	1,21	2,44	0,435	5,69
			7			8,37	46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	16,18	1,25	2,48	0,435	6,57
			8			9,47	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	17,80	1,29	2,52	0,430	7,43
8x5	80	50	5	8	2,7	6,36	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,00	13,20	1,13	2,60	0,387	4,49
			6			7,55	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	15,50	1,17	2,65	0,386	5,92
8x6	80	60	6	8	2,7	8,15	52,06	9,42	2,53	25,18	5,58	1,76	13,61	4,66	1,29	20,98	1,49	2,47	0,547	6,39
			7			9,42	59,61	10,87	2,52	28,74	6,43	1,75	15,58	5,34	1,29	24,01	1,53	2,52	0,546	7,39
			8			10,67	66,88	12,38	2,50	32,15	7,26	1,74	17,49	5,99	1,28	26,83	1,57	2,56	0,544	8,37
9x5,6	90	56	5,5	9	3	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	20,54	1,26	2,92	0,384	6,17
			6			8,54	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	22,23	1,28	2,95	0,384	6,70
			8			11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	16,29	5,32	1,21	28,33	1,36	3,04	0,380	8,77
10x6,3	100	63	6	10	3,3	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	5,27	1,38	31,50	1,42	3,23	0,393	7,53
			7			11,09	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	20,83	6,06	1,37	36,10	1,46	3,28	0,392	8,70
			8			12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	40,50	1,50	3,32	0,391	9,87

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
			10			15,47	153,95	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	48,60	1,58	3,40	0,387	12,14
10x6,5	100	65	7	10	3,3	11,23	114,05	16,87	3,19	38,32	7,70	1,85	22,77	6,43	1,41	38,00	1,52	3,24	0,415	8,81
			8			12,73	128,31	19,11	3,18	42,96	8,70	1,84	25,24	7,26	1,41	42,64	1,56	3,28	0,414	9,99
			10			15,67	155,52	23,45	3,15	51,68	10,64	1,82	30,60	8,83	1,40	51,18	1,64	3,37	0,410	12,30
11x7	110	70	6,5	10	3,3	11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	26,94	7,05	1,53	46,80	1,58	3,55	0,402	8,98
			8			13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	55,90	1,64	3,61	0,400	10,93
12,5x8	125	80	7	11	3,7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	74,70	1,80	4,01	0,407	11,04
			8			15,98	225,62	30,26	4,00	80,95	13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	84,10	1,84	4,05	0,406	12,58
			10			19,70	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	102,00	1,92	4,14	0,404	15,47
			12			23,36	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	118,00	2,00	4,22	0,400	18,34
14x9	140	90	8	12	4	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	14,39	1,58	121,00	2,03	4,49	0,411	14,13
			10			22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,58	85,51	17,58	1,96	147,00	2,12	4,58	0,409	17,46
16x10	160	100	9	13	4,3	22,87	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	194,00	2,24	5,19	0,391	17,96

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
			10			25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	22,02	2,19	213,00	2,28	5,23	0,390	19,85
			12			30,04	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	249,00	2,36	5,32	0,388	23,58
			14			34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	232,00	2,43	5,40	0,385	27,26
18x11	180	110	10	14	4,7	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	29,96	2,42	295,00	2,44	5,88	0,376	22,20
			12			33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	348,00	2,52	5,97	0,374	26,40
20x12,5	200	125	11	14	4,7	34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	465,00	2,79	6,50	0,392	27,37
			12			37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	503,00	2,83	6,54	0,392	29,74
			14			43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	575,00	2,91	6,62	0,390	34,43
			16			49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	643,00	2,99	6,71	0,388	39,07

## Фізико-механічні та пружні характеристики деяких матеріалів

Матеріал, марка	Границя міцності при розтягу/ стиску, МПа	Границя текучос- ті, МПа	Модуль пружності E, МПа	Модуль пружності G, МПа	Коеф-т Пуассона $\mu$	Границя витривало- сті при згині $\sigma_{-1}$ , МПа	Температурни й коефіцієнт лінійного розширення, $\frac{1}{\text{град}}$
1	2	3	4	5	6	7	8
Сталь вуглецева звичайної якості Ст.3	380 – 470 –	240	$2 \cdot 10^5$	$7,8 \cdot 10^4$	0,24 – 0,28	170 – 220	$(119 – 142) \cdot 10^{-7}$
Сталь вуглецева якісна конструкційна Ст.45	600 –	340	$2,1 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	0,24 – 0,28	250 – 340	$(119 – 142) \cdot 10^{-7}$
Сталь хромиста 40X	1000 –	800	$2,2 \cdot 10^5$	$8,5 \cdot 10^4$	0,25 – 0,30	350 – 380	$(134 – 148) \cdot 10^{-7}$
	1100	900	$2,2 \cdot 10^5$	$8,5 \cdot 10^4$	0,25 – 0,28	550	$118 \cdot 10^{-7}$

Сталь хромо- нікельова 50ХН	1100						
Пружинні сталі	1400 – 1750	950– 1600	$(2,1-2,3) \cdot 10^5$	$(7,6-8,3) \cdot 10^4$	–	$\tau_0 = 450-600$ границя вигр. при віднульовом у циклі	–
Чавун модифікований СЧ 21-40	210	–	$(0,9-1,6) \cdot 10^5$	$4,8 \cdot 10^4$	0,23 – 0,27	100	$(100-120) \cdot 10^{-7}$
	450 – 950						
Чавун ковкий КЧ 30-3	300	200	$(0,8-1,6) \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	0,23	120	$105 \cdot 10^{-7}$
Мідь прокатана			$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,31 – 0,34		$(165-170) \cdot 10^{-7}$
Мідь холоднотягнута			$1,3 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^4$	–		$170 \cdot 10^{-7}$
Дюралюмін Д6	180 – 500	50 – 380	0,7	$3,7 \cdot 10^4$	0,31		$220 \cdot 10^{-7}$
	–	–					
Алюміній			$0,69 \cdot 10^5$	$2,65 \cdot 10^4$	0,32 – 0,36		$(220-240) \cdot 10^{-7}$
	–	–	$7 \cdot 10^5$	–			

Спеціальний карболовий сплав	6500						
Сосна вздовж волокон	80	-	$(0,1 - 0,12) \cdot 10^5$	$(0,045 - 0,065) \cdot 10^4$	0,49	-	$37 \cdot 10^{-7}$
	40						
Сосна поперек волокон	-	-	$0,005 \cdot 10^5$	-		-	-
	50						
Дуб вздовж волокон	128	-	$(0,073 - 0,15) \cdot 10^5$	$0,065 \cdot 10^4$	0,43	-	$49 \cdot 10^{-7}$
	52						
Дуб поперек волокон	-	-	-	-			-
	15						
Бетон	-	-	$(0,146 - 0,232) \cdot 10^5$	-	0,16 - 0,18		$(100 - 140) \cdot 10^{-7}$
	5 - 35						
Граніт	3	-	$(0,42 - 0,49) \cdot 10^5$	-			-
	190						
Мрамур	-		$0,56 \cdot 10^5$	-			-
	100 - 180						
Цегляне	-	-		-			$(40 - 70) \cdot 10^{-7}$



мурування	50 – 90		$(0,025 – 0,03) \cdot 10^5$				
Лід	–	–	$0,1 \cdot 10^5$	$0,33 \cdot 10^4$			$507 \cdot 10^{-7}$

Скло	30 – 90	–	$0,56 \cdot 10^5$	$2,2 \cdot 10^4$	0,25		$(5 – 15) \cdot 10^{-7}$
	500 – 2000						
<u>Пластмаси:</u>							
Волокніт	30 – 130	–	$(0,05 – 0,118) \cdot 10^5$	–	–	7 – 32	–
	100 – 150					25 – 37	
Текстоліт	45 – 110		$(0,06 – 0,1) \cdot 10^5$	$0,25 \cdot 10^4$	–	11 – 27	$(33 – 41) \cdot 10^{-7}$
	120 – 250					30 – 62	
Капрон	60		$0,0144 \cdot 10^5$	$0,045 \cdot 10^4$	–	17	$(6 – 15) \cdot 10^{-7}$
	70						
Склопласт	260 – 400	–	$(0,18 – 0,22) \cdot 10^5$	$(0,35 – 0,4) \cdot 10^4$	0,035 – 0,062	65 – 100	$(4,5 – 8,3) \cdot 10^{-7}$
	100 – 300					25 – 75	
Полікарбонат	70	–				10	
	77						

Каучук	16 – 38		$0,00008 \cdot 10^5$	–	0,47		$0,18 \cdot 10^{-7}$
Кінська кістка	125		$0,12 \cdot 10^5$				
	145						
Людська кістка	124		$0,12 \cdot 10^5$				
	170						

*Характеристики міцності та жорсткості  
деяких сільськогосподарських рослин*

<i>Матеріал</i>	<i>Відносне видовження, %</i>	<i>Модуль пропорційності, МПа</i>	<i>Статична міцність</i>	
			<i>Зусилля на розрив одного стебла, Н</i>	<i>Напруження, МПа</i>
Пшениця	0,35	$0,4 \cdot 10^5$	98	238
Жито	–	–	133	315
Овес	–	–	86	218
Ячмінь	–	–	35	83
Льон	1,25	$0,24 \cdot 10^5$	95	260
Картопля (стеблі)	1,3	$0,25 \cdot 10^5$	325	79

Навчальне видання

О.Д. ОНОПРИЄНКО, А.Г. ДЕМ'ЯНЕНКО

## **РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ**

**Навчальний посібник**

Видано в редакції авторів.

Підписано до друку \_\_\_\_\_ Формат 60x84/16  
Умовно-друк. арк. 4,4. Тираж 25 пр.  
Папір офсетний. Зам. № \_\_\_\_\_

Підготовлено до друку та видруковано  
у Дніпровському державному аграрно-економічному університеті  
49600, Дніпро, вул. Сергія Єфремова, 25  
Телефони: (056) 713-51-75, 713-51-57