МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Н.К. ДЬЯЧЕНКО

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Дніпро
2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Н.К. ДЬЯЧЕНКО

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Дніпро
2022

УДК 517
Д 99
Рекомендовано до друку Вченою радою Дніпровського державного аграрно-економічного університету (протокол №8 від 26.05. 2022 р.)

Рецензенти:
О.І. Нестеренко, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри енергетики УДХТУ;
О.В. Білова, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики Українського державного університету науки і технологій.
О.Ю.Береза, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теоретичної механіки , опору матеріалів та матеріалознавства Дніпровського державного аграрно-економічного університету;

Н.К.Дьяченко
Інтегральне числення функції однієї змінної: навчальний посібник. – Дніпро, ДДАЕУ, 2022. – 124 с.

Матеріал видання включає розділи: «Невизначений інтеграл» і «Визначений інтеграл». У навчальному посібнику в доступній формі викладені основні теоретичні положення, наведено достатню кількість прикладів знаходження інтегралів, а також проілюстровані математичні моделі різноманітних прикладних задач.

Посібник містить питання для самоперевірки і задачі для самостійної роботи.

Розраховано на здобувачів вищої освіти за спеціальностями 073 «Менеджмент», 075 «Маркетинг». Може бути також використаний здобувачами вищої освіти інженерно-технологічних спеціальностей: 208 «Агроінженерія», 181 «Харчові технології».

ISBN ……………….

ЗМІСТ

ВСТУП

Докорінне підвищення якості підготовки фахівців у нашій країні потребує глибокого вивчення фундаментальних дисциплін і, зокрема, математики з її різноманітними прикладними аспектами: математичними моделями в різних галузях науки, промисловості та аграрному секторі. Математика, як наука, створює універсальні аналітичні інструменти дослідження зв'язків і отримання на цій основі нової інформації про навколишній світ. Це перетворює математичний апарат в універсальний інструмент розв'язування багатьох задач, з якими зустрічаються вчені, що працюють в різноманітніших галузях знань.

Математика слугує теоретичною базою для подальшого вивчення інших загальноосвітніх, технічних та економічних дисциплін. Основні математичні ідеї, методи та поняття, такі як поняття функції та її графіка, поняття диференціала, інтеграла та ін., мають стати необхідним надбанням кожної освіченої людини, кожного спеціаліста.

Інтегральне числення спочатку розвивалося незалежно від теорії диференціювання. Лише наприкінці XVII ст., коли навчилися розв'язувати задачі з геометрії і механіки як за допомогою тільки диференціального числення, так і за допомогою тільки інтегрального числення, було розкрито глибокий зв'язок між цими розділами математики. З цього часу інтегральне числення почало розвиватися дуже швидко і перейшло від розв'язку окремих задач до створення потужних загальних методів.

Запропонований навчальний посібник складається з двох розділів «Невизначений інтеграл» і «Визначений інтеграл», які пов'язані між собою загальним підходом та методологією викладення матеріалу. Теоретична частина, наведена у посібнику, характеризується прикладною спрямованістю, відзначається доступним стилем викладання при збереженні високого навчального, методичного та наукового рівнів.

РОЗДІЛ 1
НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Поняття первісної та невизначеного інтеграла

Однією із задач диференціального числення є така: для даної функції треба знайти її похідну або диференціал. Розглянемо обернену задачу: для даної функції $f(x)$ треба знайти таку функцію $F(x)$, похідна від якої дорівнює заданій функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Означення. *Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на даному проміжку, якщо в усіх точках цього проміжку $f(x)$ є похідною для функції $F(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.* *(1.1)*

Наприклад, первісною для функції $f(x) = 4x^3$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ є функція $F(x) = x^4$, оскільки $\left(x^4\right)' = 4x^3$. Але первісною для функції $f(x) = 4x^3$ буде також функція $F(x) = x^4 + 1$ або $F(x) = x^4 - 10$ і $F(x) = x^4 + C$, де C – довільна стала. Отже, для заданої функції існує безліч первісних, які відрізняються одна від одної на сталу величину.

Теорема. *Дві різні первісні однієї й тієї ж функції, визначеної на деякому проміжку, відрізняються одна від одної на цьому проміжку лише на сталу.*

Означення. *Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на проміжку називається **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначають $\int f(x)dx$.*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (1.2)$$

де $f(x)$ *– підінтегральна функція;*

$f(x)dx$ *– підінтегральний вираз;*

$F(x)$ *– первісна функції* $f(x)$:

C *– довільна стала.*

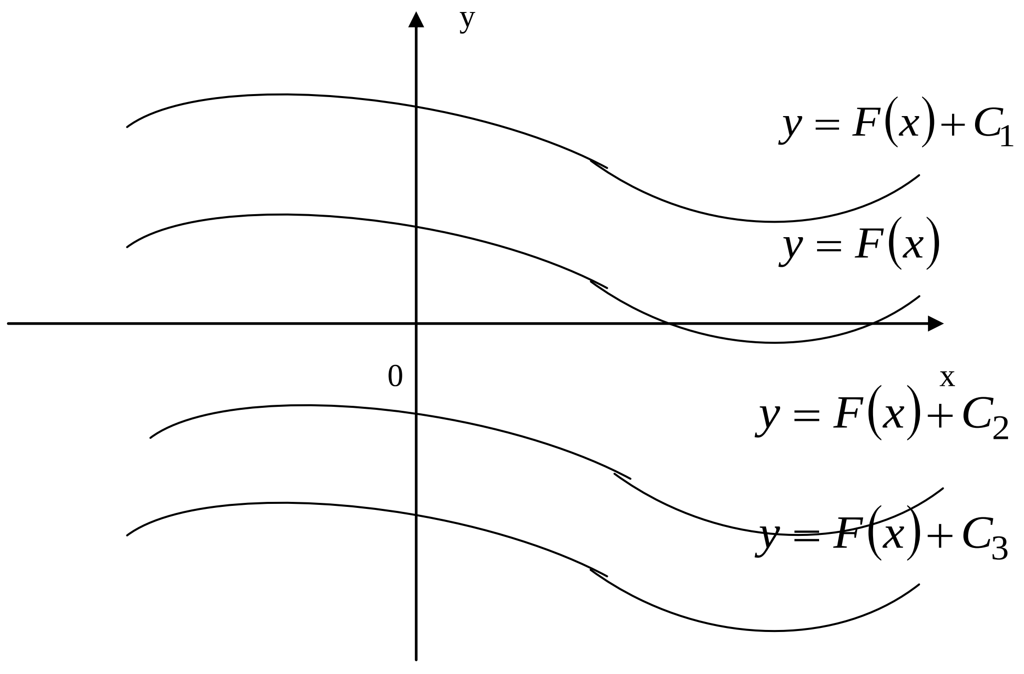
Операція знаходження невизначеного інтеграла від функції називається ***інтегруванням.***

Теорема. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на деякому проміжку, то вона на цьому проміжку має первісну.*

Означення. *Графік первісної функції від* $f(x)$ *називається* ***інтегральною кривою.***

Отже, якщо $F'(x) = f(x)$, то графік функції $y = F(x)$ – інтегральна крива.

Невизначений інтеграл геометрично – сукупність інтегральних кривих. Усі криві цієї сукупності $y = F(x) + C$ можуть бути одержані з однієї інтегральної кривої шляхом паралельного перенесення вздовж осі $\boldsymbol{Oy}$:



1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла

Основні властивості невизначеного інтеграла випливають із його означення за умови, що функція $f(x)$ має первісну.

1.Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x).$$

2.Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = dF(x) = f(x)dx.$$

3.Невизначений інтеграл від диференціала неперервно диференційовної функції дорівнює самій цій функції з точністю до сталого доданка:

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

4.Сталий множник можна винести за знак невизначеного інтеграла:

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx, \text{ де } k = const \neq 0.$$

5.Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми кінцевого числа неперервних функцій дорівнює алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від цих функцій:

$$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

6.Властивість інваріантності форми невизначеного інтеграла: якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$ і $U = \varphi(x)$ – функція, яка має неперервну похідну, то

$$\int f(U)dU = F(U)+C.$$

1.3. Таблиця основних інтегралів

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $(x \neq 0)$.

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

6. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$, $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z \right)$.

7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$, $(x \neq \pi n, \quad n \in Z)$.

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C. \end{cases}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C, \quad (-1 < x < 1). \end{cases}$

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1)$.

11. $\int e^x dx = e^x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$.

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $(a \neq 0)$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $(a > 0)$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, $(a \neq 0)$.

Ці формули називаються ***таблицею інтегралів***. А самі інтеграли – ***табличними.*** Усі формули таблиці інтегралів справедливі лише в області визначення підінтегральних функцій.

Зауваження. *Треба відмітити, що результатом диференціювання елементарної функції є функція елементарна, тобто диференціювання* *не виводить функцію з класу елементарних, чого не можна сказати про операцію інтегрування. Інтеграли від деяких функцій вже не будуть елементарними функціями.*

Прикладами можуть бути такі:

$\int e^{-x^2}dx$ – інтеграл Пуассона;

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм;

$\int \frac{\sin x}{x}dx$ – інтегральний синус;

$\int \frac{\cos x}{x}dx$ – інтегральний косинус, тощо.

Кожен із цих інтегралів не є елементарною функцією, але вони відіграють важливу роль у прикладних науках. Так, інтеграл Пуассона – це один з найважливіших у теорії ймовірностей та статистиці. Такі інтеграли можна з будь-яким степенем точності обчислити або оцінити.

1.4. Основні методи інтегрування

Більшість інтегралів не є табличними. Розглянемо методи, які дозволяють привести задані інтеграли до табличних: інтегрування розкладанням, метод підстановки (або заміни змінної) та інтегрування частинами.

1.4.1. Метод розкладання

Цей метод базується на використанні основних властивостей та таблиці інтегралів.

Приклад1. Знайти $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt[5]{x}}{x}-\frac{4}{x}+5\cdot 3^{x}\right)dx.$

Розв'язання. Використаємо властивості 4 і 5 невизначеного інтеграла, а також властивості степенів:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt[5]{x}}{x}-\frac{4}{x}+5\cdot 3^x\right)dx=\int\frac{1}{x^{1/3}}dx+$$

$$+\int\frac{x^{1/5}}{x}dx-4\int\frac{1}{x}dx+5\int 3^x dx=$$

$$=\int x^{-\frac{1}{3}}dx+\int x^{1/5\;\;-1}dx-4\int\frac{1}{x}dx+5\int 3^x dx=$$

$$=\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\frac{x^{-\frac{4}{5}+1}}{-\frac{4}{5}+1}-4\ln|x|+5\frac{3^x}{\ln 3}+C=$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{5}}-4\ln|x|+5\frac{3^x}{\ln 3}+C.$$

Приклад 2. $\int\frac{\left(x^3+3\right)^2}{x^2}dx=\int\frac{x^6+6x^3+9}{x^2}dx=$

$$=\int\left[\frac{x^6}{x^2}+6\frac{x^3}{x^2}+\frac{9}{x^2}\right]dx=\int\left[x^4+6x+9x^{-2}\right]dx=$$

$$=\int x^4dx+6\int xdx+9\int x^{-2}dx=\frac{x^5}{5}+6\frac{x^2}{2}+9\frac{x^{-1}}{-1}+C.$$

Приклад 3. $\int\frac{x^4dx}{1+x^2}=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx=$

$$=\int\left[\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right]dx=\int\left(x^2-1\right)dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-x+arctgx+C.$$

Приклад 4. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx =$

$$= \int \left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right] dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$
$$= -ctgx - tgx + C.$$

1.4.2. Метод підстановки (метод заміни змінної)

Метод заміни змінної полягає в тому, щоб змінну інтегрування x в інтегралі $\int f(x)dx$ замінити іншою змінною t, яка пов'язана з x формулою $x = \varphi(t)$ так, щоб знов одержаний інтеграл виявився б більш простим для інтегрування. Нехай $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a; b)$ і $x = \varphi(t)$ – неперервно диференційовна на інтервалі (α, β); причому функція φ відображає інтервал (α, β) в інтервал $(a; b)$.

Тоді, з урахуванням того, що $dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt$ і керуючись властивістю інваріантності форми невизначеного інтеграла, маємо

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \,. \qquad (1.3)$$

Загального правила, яке вказує в будь-яких випадках на зручну заміну змінної, не існує. Але в деяких випадках можна дати чіткі рекомендації, яким чином зробити заміну змінної.

До таких випадків відносяться інтеграли виду:

$$1)\ \int f(ax+b)dx;\quad 2)\ \int f[g(x)]\cdot g'(x)dx;\quad 3)\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx.$$

1) Нехай потрібно знайти $\int f(ax+b)dx$, $a \neq 0$, причому первісна для функції $f(x)$ відома, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,.$$

Тоді лінійну комбінацію $ax+b$ треба замінити новою змінною t:

$ax+b=t$. Продиференцюємо ліву і праву частини: $adx=dt$, $\Rightarrow$ $dx=\frac{1}{a}dt$.

Тепер дістанемо $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(t)dt=\frac{1}{a}F(t)+C$.

В одержаному результаті треба повернутися до старої змінної, після чого буде:

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C. \qquad (1.4)$$

Приклад 5. $\int e^{-\frac{1}{3}x+4}dx=-3e^{-\frac{1}{3}x+4}+C$.

Приклад 6. $\int\frac{dx}{(5x-4)^3}=\int(5x-4)^{-3}dx=$

$$=\frac{1}{5}\int t^{-3}dt=\frac{1}{5}\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{10}(5x-4)^{-2}+C,$$

де $5x-4=t$; $5dx=dt$; $dx=\frac{1}{5}dt$.

2) Розглянемо $\int f[g(x)]\cdot g'(x)dx$, тобто під знаком інтеграла складена функція помножена на похідну внутрішньої функції.

Якщо первісна для функції $f(x)$ відома, тобто

$\int f(x)dx=F(x)+C$, то треба зробити заміну $g(x)=t$; $g'(x)dx=dt$.

Після підстановки матимемо:

$\int f[g(x)]g'(x)dx=\int f(t)dt=F(t)+C=F(g(x))+C$.

Треба зауважити, що в таких випадках під знаком інтеграла шукають ***функцію*** та ***її похідну***. ***Сама функція*** *позначається новою змінною* t.

Приклад 7. Знайти $\int\sqrt[5]{1+x^3}\cdot x^2dx$.

Розв'язання. Перш за все треба підготуватися до інтегрування.

$$\sqrt[5]{1+x^3} = \left(1+x^3\right)^{\frac{1}{5}}. \quad \int \sqrt[5]{1+x^3} \cdot x^2 dx = \int \left(1+x^3\right)^{1/5} \cdot x^2 dx.$$

Бачимо, що $\left(1+x^3\right)' = 3x^2$. Зробимо підстановку: $1+x^3 = t$, тоді $3x^2 dx = dt$, або $x^2 dx = \frac{1}{3} dt$.

$$\int \sqrt[5]{1+x^3} \cdot x^2 dx = \int \left(1+x^3\right)^{1/5} \cdot x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{5}} dt = \frac{1}{3} \frac{t^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + C = \frac{1}{3} \frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C =$$

$$= \frac{5}{18} \left(1+x^3\right)^{6/5} + C.$$

Приклад 8. Знайти $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$.

Розв'язання. Оскільки $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, то зробимо підстановку: $\frac{1}{x} = t$, диференціюємо ліву і праву частини: $-\frac{1}{x^2} dx = dt$; $\frac{1}{x^2} dx = -dt$.

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

3) Нехай потрібно знайти $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$, де $f(x) \neq 0$. Зробимо заміну: $f(x) = t$, $f'(x)dx = dt$, тоді $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$.

Отже, якщо підінтегральна функція така, що в чисельнику – похідна знаменника, то невизначений інтеграл дорівнює натуральному логарифму модуля знаменника:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C. \qquad (1.5)$$

Приклад 9. Знайти $\int \frac{x^2}{3x^3-1}dx$.

Розв'язання. Похідна знаменника: $\left(3x^3-1\right)' = 9x^2$, отже в чисельнику – похідна знаменника з точністю до сталої.

$$\int \frac{x^2}{3x^3-1}dx = \frac{1}{9}\int \frac{9x^2}{3x^3-1}dx = \frac{1}{9}\ln\left|3x^3-1\right| + C.$$

Приклад 10. Знайти $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}dx$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}dx}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right| + C$.

1.4.3. Метод інтегрування частинами

Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ неперервно диференційовні по змінній x. Користуючись правилом знаходження диференціала добутку, маємо:

$$d(u \cdot v) = udv + vdu, \text{ звідси}$$

$$udv = d(u \cdot v) - vdu.$$

Проінтегруємо обидві частини останньої рівності:

$$\int udv = \int d(u \cdot v) - \int vdu.$$

З урахуванням $\int d(u \cdot v) = u \cdot v + C$, маємо

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu. \qquad (1.6)$$

У цій формулі можна не писати довільну сталу $\boldsymbol{C}$, оскільки в правій частині залишився невизначений інтеграл, який містить довільну сталу.

Формула *(1.6)* називається ***формулою інтегрування частинами.*** Ця формула дає змогу обчислення інтеграла $\int udv$, звести до обчислення інтеграла

$\int v du$, який в багатьох випадках є більш простим. Практика показує, що більшість інтегралів, які обчислюються за допомогою формули інтегрування частинами, можна розбити на три типи.

1. Інтеграли виду :

$$\int P(x)\cdot e^{kx}dx; \quad \int P(x)\cdot \sin kxdx; \quad \int P(x)\cdot \cos kxdx,$$

де $P(x)$ – многочлен; k – деяке число.

У цих інтегралах через u позначаємо $P(x)$, тобто $u = P(x)$, ця функція спрощується після диференціювання.

Для одержання остаточного результату формулу інтегрування частинами треба застосувати послідовно стільки разів, який степінь многочлена $P(x)$. Після кожного інтегрування степінь буде на одиницю знижуватись.

Приклад 11. Знайти $\int (2x+1)\cos 3xdx$.

Розв'язання. Позначимо $u = 2x+1$, тоді $\cos 3xdx = dv$.

Першу рівність диференцюємо, другу – інтегруємо:

$$du = 2dx; \quad v = \int \cos 3xdx = \frac{1}{3}\sin 3x.$$

$$\int (2x+1)\cos 3xdx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\int \sin 3xdx =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)\sin 3x - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cos 3x + C =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C.$$

Приклад 12. Знайти $\int (x^2+3x-1)e^{4x}dx$.

Розв'язання. $u = x^2+3x-1$, $dv = e^{4x}dx$; тоді $du = (2x+3)dx$, $v = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}$.

Застосовуючи формулу інтегрування частинами, одержимо:

$$\int\left(x^2+3x-1\right)\cdot e^{4x}dx=\left(x^2+3x-1\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{4x}-\frac{1}{4}\int(2x+3)e^{4x}dx.$$

Інтеграл, що залишився, знов інтегруємо методом інтегрування частинами:

$$u=2x+3,\ v=e^{4x}dx;\ du=2dx;\ v=\frac{1}{4}e^{4x}.$$

Маємо

$$\int(2x+3)\cdot e^{4x}dx=(2x+3)\cdot\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{4}\cdot 2\int e^{4x}dx=\frac{1}{4}(2x+3)e^{4x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}e^{4x}+C.$$

Остаточно шуканий інтеграл

$$\int\left(x^2+3x-1\right)\cdot e^{4x}dx=\frac{1}{4}\left(x^2+3x-1\right)e^{4x}-$$
$$-\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{4}(2x+3)e^{4x}-\frac{1}{8}e^{4x}+C\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\left(x^2+3x-1\right)e^{4x}-\frac{1}{16}(2x+3)\cdot e^{4x}+\frac{1}{32}e^{4x}+C=$$
$$=\frac{1}{4}e^{4x}\cdot\left[\left(x^2+3x-1\right)-\frac{1}{4}(2x+3)+\frac{1}{8}\right]+C=$$
$$=\frac{1}{4}e^{4x}\cdot\left(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{13}{8}\right)+C.$$

2. Інтеграли виду:

$\int P(x)\cdot\ln xdx$; $\int P(x)\cdot\arcsin xdx$; $\int P(x)\cdot\arccos xdx$; $\int P(x)\cdot arctgxdx$; $\int P(x)\cdot arcctgxdx$, де $P(x)$ – многочлен відносно змінної x.

Як бачимо, підінтегральна функція містить як множник або логарифмічну, або одну з обернених тригонометричних функцій.

У цих інтегралах за u позначають функцію, яка є множником при $P(x)$.

Приклад 13. Знайти $\int x^2\cdot\ln xdx$.

Розв'язання. Логарифмічну функцію позначимо через u, тобто $u = \ln x$, тоді $x^2dx = dv$; $du = \frac{1}{x}dx$; $v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}$.

$$\int x^2 \cdot \ln xdx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C =$$
$$= \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C.$$

Приклад 14. Знайти $\int \arcsin xdx$.

Розв'язання. $\arcsin x = u$; $dv = dx$; $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = du$; $v = \int dx = x$.

$$\int \arcsin xdx = \arcsin x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

До інтеграла $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ треба застосовувати метод заміни змінної.

$1 - x^2 = t$, тоді $-2xdx = dt$, $xdx = -\frac{1}{2}dt$.

Тепер матимемо:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot xdx = \int t^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -t^{\frac{1}{2}} + C = -\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Остаточно $\int \arcsin xdx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

3. Інтеграли виду: $\int e^{ax}\cos bxdx$; $\int e^{ax}\sin bxdx$; $\int \sin(\ln x)dx$; $\int \cos(\ln x)dx$,

де a, b – деякі числа. Нема різниці, яку з функцій позначити через u.

Після двократного застосування формули інтегрування частинами, в правій частині дістанемо заданий інтеграл. Це дає змогу визначити шуканий інтеграл як розвязок рівняння.

Приклад 15. Знайти $\int e^x \sin 4x dx$.

Розв'язання. Позначимо $e^x = u$, $\sin 4x dx = dv$,

звідси $du = e^x dx$, $v = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x$.

Тоді $\int e^x \sin 4x dx = e^x \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\cos 4x - \left(-\frac{1}{4}\right)\int e^x \cdot \cos 4x dx$.

Останній інтеграл знов інтегруємо методом інтегрування частинами:

$u = e^x$, $dv = \cos 4x dx$, тоді $du = e^x dx$. $v = \int \cos 4x dx = \frac{1}{4}\sin 4x$.

$$\int e^x \cos 4x dx = e^x \cdot \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\int e^x \sin 4x dx + C.$$

Таким чином,

$$\int e^x \sin 4x dx = -\frac{1}{4}e^x \cdot \cos 4x + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}e^x \sin 4x - \frac{1}{4}\int e^x \sin 4x dx\right] + C =$$
$$= -\frac{1}{4}e^x \cos 4x + \frac{1}{16}e^x \sin 4x - \frac{1}{16}\int e^x \sin 4x dx + C.$$

У правій частині останнього співвідношення знаходиться шуканий інтеграл. Перенесемо його в ліву частину:

$$\int e^x \sin 4x dx + \frac{1}{16}\int e^x \sin 4x dx = -\frac{1}{4}e^x \cos 4x + \frac{1}{16}e^x \sin 4x + C.$$

$$\frac{17}{16}\int e^x \sin 4x dx = -\frac{1}{4}e^x \cos 4x + \frac{1}{16}e^x \sin 4x + C.$$

$$\int e^x \sin 4x dx = \frac{16}{17}\cdot\frac{1}{4}e^x \cdot \left(-\cos 4x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C_1$$

$$\int e^x \sin 4x dx = \frac{4}{17}e^x\left(-\cos 4x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C_1.$$

Приклад 16. Знайти $\int \sin(\ln x)dx$.

Розв'язання. До цього інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами.

$\sin(\ln x) = u$; $dx = dv$, тоді $\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx = du$, $v = \int dx = x$.

$$\int \sin(\ln x)dx = \sin(\ln x)\cdot x - \int x\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx = \sin(\ln x)\cdot x - \int \cos(\ln x)dx.$$

Інтеграл $\int \cos(\ln x)dx$ знов інтегруємо частинами.

$\cos(\ln x) = u$, $dv = dx$; $-\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx = du$, $v = x$.

$$\int \cos(\ln x)dx = \cos(\ln x)\cdot x + \int x\cdot\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx.$$

Остаточно $\int \sin(\ln x)dx = x\cdot\sin(\ln x) - \left[x\cdot\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx\right] + C$.

$$\int \sin(\ln x)dx = x\cdot\sin(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx + C;$$

$$2\int \sin(\ln x)dx = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C;$$

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}\cdot[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C_1.$$

Зауваження. *Означені вище три типи інтегралів не вичерпують усі без винятку інтеграли, що обчислюються частинами.*

Приклад 17. Знайти $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$, $a > 0$.

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{a^2 - x^2} = u$, $dv = dx$;

звідси $du = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$; $v = x$.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \sqrt{a^2 - x^2}\cdot x - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \sqrt{a^2 - x^2}\cdot x - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = x\cdot\sqrt{a^2 - x^2} -$$

$$-\left[\int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right] = x\cdot\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}dx + a^2\cdot\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Звідси:

$$2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\cdot\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}+C\,.$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right]+C_1\,.$$

1.5. Інтегрування раціональних дробів

1.5.1. Поняття раціонального дробу

Означення. *Функція виду*

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

де n *– натуральне число;* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *– деякі дійсні числа, називається цілою раціональною функцією (або многочленом).*

Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *– коефіцієнти многочлена, натуральне число* n *– степінь многочлена.*

Означення. *Дробово–раціональною функцією або раціональним дробом називається відношення двох многочленів*

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}.$$

Означення. *Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь многочлена у чисельнику строго менше степеня многочлена в знаменнику* $(n<m)$*, і – неправильним, якщо степінь многочлена в чисельнику дорівнює або більший за степінь многочлена в знаменнику* $(n\geq m)$.

Наприклад, $\dfrac{x+1}{x^2-3x+4}$ – правильний дріб, а $\dfrac{x^3-3}{x^3+x}$ і $\dfrac{x^4-2x^2+5}{2x^2+1}$ – неправильні дроби.

1.5.2. Виділення правильного раціонального дробу

Зауважимо перш за все, що будь–який неправильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу.

Нехай $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – неправильний раціональний дріб, тобто степінь $P(x)$ дорівнює або більший степеня $Q(x)$.

Розділимо чисельник на знаменник, одержимо $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=L(x)+\dfrac{r(x)}{Q(x)}$, де $L(x)$, $r(x)$ – многочлени; $r(x)$ – залишок, степінь якого менший за степінь знаменника дробу $Q(x)$, а, отже, раціональний дріб $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ – правильний.

Наприклад, $\dfrac{x^3+3x^2+3x+4}{x+1}$ – неправильний раціональний дріб. Розділимо чисельник на знаменник:

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^3+3x^2+3x+4 & x+1 \\
 & \underline{x^3+x^2} & x^2+2x+1 \\
- & +2x^2+3x+4 & \\
 & \underline{2x^2+2x} & \\
- & +x+4 & \\
 & \underline{x+1} & \\
 & +3 &
\end{array}
$$

Отже, $\dfrac{x^3+3x^2+3x+4}{x+1}=x^2+2x+1+\dfrac{3}{x+1}$, де $L(x)=x^2+2x+1$; $r(x)=3$ – залишок; раціональний дріб $\dfrac{3}{x+1}$ – правильний.

Таким чином, інтегрування неправильного раціонального дробу $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ зводиться до інтегрування многочлена $L(x)$ і правильного раціонального дробу $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \right] dx = \int L(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx .$$

Оскільки многочлени ми інтегрувати можемо, то залишається розглянути інтегрування правильних раціональних дробів.

1.5.3. Деякі відомості про многочлени

Означення. *Коренем многочлена $P(x)$ називається число α (дійсне або комплексне), яке обертає многочлен у нуль, тобто $P(\alpha)=0$.*

Теорема. *Якщо число α є коренем многочлена $P(x)$, то цей многочлен ділиться без остачі на $(x-\alpha)$.*

Теорема. *Якщо многочлен $P(x)$ степеня n має попарно різні корені $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то цей многочлен ділиться без остачі на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\times\ldots\times(x-\alpha_n)$.*

Отже, будь-який многочлен степеня n $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ можна представити у вигляді добутку n лінійних множників виду $(x-\alpha)$ і сталого числа α_0 – коефіцієнта при старшому степені x:

$$P(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n), \tag{1.7}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корені многочлена $P(x)$.

Легко перевірити, що

$$2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 2(x-1)(x+1)(x-3);$$

$$x^3 + x^2 + 9x + 9 = (x+1)(x-3i)(x+3i).$$

Серед лінійних множників, на які розкладено многочлен, можуть бути однакові. Об'єднаємо однакові співмножники, одержимо

$$P(x) = a_0 (x-a)^{k_1} (x-b)^{k_2} \dots (x-l)^{k_s} , \qquad (1.8)$$

де всі корені $a, b, \dots, l$ – різні; $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$.

Корінь a многочлена $P(x)$, для якого лінійний множник $(x-a)$ у розкладанні *(1.7)* зустрічається k_1 разів, називається ***коренем кратності*** k_1. Корінь кратності 1 називається ***простим.***

Наприклад, многочлен $P(x) = -3(x+5)^3 (x-2)^2 (x+1)$ має корені: $a = -5$ кратності 3, $b = 2$ – кратності 2 і $c = -1$ – простий корінь.

Теорема. *Якщо многочлен з дійсними коефіцієнтами має коренем комплексне число* $\gamma = \alpha + i\beta$ *кратності* k*, то спряжене комплексне число* $\overline{\gamma} = \alpha - i\beta$ *також буде коренем многочлена тієї самої кратності.*

Звідси випливає, що, якщо в розкладанні многочлена на множники присутній множник $(x-\gamma)^k$, відповідний комплексному кореню $\gamma = \alpha + i\beta$, то у цьому розкладанні є також множник $(x-\overline{\gamma})^k$, який відповідає комплексному кореню $\overline{\gamma} = \alpha - \beta\, i$. Перемножимо два множники, що відповідають спряженим кореням:

$$(x-\gamma)^k (x-\overline{\gamma})^k = [x-(\alpha+i\beta)]^k \cdot [x-(\alpha-i\beta)]^k =$$

$$= ([(x-\alpha)-\beta i]\cdot[(x-\alpha)+\beta i])^k = [(x-\alpha)^2 - (\beta i)^2]^k =$$

$$= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^k = (x^2 + px + q)^k,$$

де $p = -2\alpha$; $q = \alpha^2 + \beta^2$.

Отже, добуток лінійних множників, що відповідають спряженим кореням, можна замінити квадратним тричленом з дійсними коефіцієнтами.

Таким чином, будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами можна представити у такому вигляді:

$$P(x) = a_0 (x-a)^{t_1} \cdot (x-b)^{t_2} \ldots \left(x^2 + p_1 x + q\right)^{k_1} \left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{k_2} \ldots$$

У цьому розкладанні лінійні множники відповідають дійсним кореням, а квадратні тричлени – комплексним кореням многочлена.

Сталі $a_0, a, b, \ldots, p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ – дійсні числа.

1.5.4. Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування

Найпростіші раціональні дроби такі:

1) $\dfrac{A}{x-a}$;

2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n = 2, 3, \ldots$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

4) $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, $n = 2, 3, \ldots$,

де A, a, p, q, M, N – дійсні числа;

n – натуральне число, $n > 1$; тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $D = p^2 - 4q < 0$.

Покажемо, як інтегруються найпростіші раціональні дроби.

1. $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t| + C = \qquad \left| \begin{array}{l} x-a=t \\ dx=dt \end{array} \right.$$
$$= A\ln|x-a| + C$$

$$\boxed{\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C}$$

2. Розглянемо $\dfrac{A}{(x-a)^n}dx$, $n \in N$, $n > 1$.

Зробимо підстановку: $x - a = t$, тоді $dx = dt$.

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}dx = A\int t^{-n}dx = A\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C =$$

$$= A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$$

$$\boxed{\int \frac{A}{(x-a)^n} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C}$$

Проінтегруємо тепер раціональний дріб

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$$

Знаменник $x^2 + px + q$ доповнимо до повного квадрата:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}\cdot x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Оскільки за умовою тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, то вираз $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$. Позначимо $q - \dfrac{p^2}{4} = a^2$.

Зробимо заміну змінної в інтегралі. Позначимо $t = x + \dfrac{p}{2}$ (нова змінна t дорівнює половині похідної від знаменника), звідси $dx = dt$,

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=t^2+a^2.$$

Будемо мати:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\int\frac{Mt-M\frac{p}{2}+N}{t^2+a^2}dt=\int\left[\frac{Mt}{t^2+a^2}+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{t^2+a^2}\right]dt=$$

$$=M\int\frac{t}{t^2+a^2}dt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a}+C.$$

Повертаємося тепер до старої змінної $x: t=x+\frac{p}{2}$;

замість a^2 підставляємо вираз $\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$, $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Одержимо:

$$\boxed{\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\times \times arctg\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.}$$

Приклад 18. Знайти $\int\frac{dx}{x^2+3x+3}$.

Розв'язання. Введемо нову змінну t, яка дорівнює половині похідної знаменника, тоді:

$$t = \frac{1}{2}\left(x^2 + 3x + 3\right)' = \frac{1}{2}\left(2x + 3\right) = x + \frac{3}{2},\ x = t - \frac{3}{2},\ dx = dt.$$

$$x^2 + 3x + 3 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(t - \frac{3}{2}\right) + 3 = t^2 + \frac{3}{4};$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{x + \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x + 3}{\sqrt{3}} + C.$$

Приклад 19. Знайти $\int \frac{4x - 1}{x^2 - 4x + 8} dx.$

Розв'язання. $\left(x^2 - 4x + 8\right)' = 2x - 4.$ Зробимо підстановку:

$$t = \frac{2x - 4}{2} = x - 2;\ x = t + 2;\ dx = dt.$$

$$x^2 - 4x + 8 = (t + 2)^2 - 4(t + 2) + 8 = t^2 + 4t + 4 - 4t - 8 + 8 =$$
$$= t^2 + 4.$$

Тепер маємо:

$$\int \frac{4x - 1}{x^2 - 4x + 8} dx = \int \frac{4(t + 2) - 1}{t^2 + 4} dt = \int \frac{4t + 8 - 1}{t^2 + 4} dt =$$
$$= 4\int \frac{t}{t^2 + 4} dt + 7\int \frac{dt}{t^2 + 2^2} = \frac{4}{2} \ln\left(t^2 + 4\right) + 7 \cdot \frac{1}{2} \times$$
$$\times arctg \frac{t}{2} + C = 2\ln\left(x^2 - 4x + 8\right) + \frac{7}{2} arctg \frac{x - 2}{2} + C.$$

Розглянемо інтегрування раціонального дробу

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx\,.$$

Позначимо новою змінною t вираз $x+\dfrac{p}{2}$:

$$t = x+\frac{p}{2}\text{, тоді } x = t-\frac{p}{2},\ dx = dt,$$

$$x^2+px+q = t^2+a^2\text{, де } a = q-\frac{p^2}{4}.$$

Після підстановки матимемо

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt =$$

$$= \int \frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt = M\int \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt + \qquad (1.9)$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}.$$

Перший інтеграл співвідношення *(1.9)* обчислити легко. Застосуємо метод заміни змінної.

$$\int \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^n} = \frac{1}{2}\int z^{-n}dz =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z^{-n+1}}{-n+1}+C = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)\cdot z^{n-1}}+C =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+C.$$

$$\left\|\begin{aligned} & t^2+a^2 = z \\ & 2tdt = dz \\ & tdt = \frac{dz}{2} \end{aligned}\right.$$

Залишилось обчислити інтеграл $I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$.

Під знаком інтеграла виконаємо перетворення

$$I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{t^2+a^2}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt - \int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt\right].$$

Оскільки

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} = I_{n-1}, \text{ то маємо}$$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \int \frac{t^2\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}\right]. \tag{1.10}$$

Для того щоб проінтегрувати $\int \frac{t^2\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$, застосуємо формулу інтегрування частинами: $\int u dv = u \cdot v - \int v du.$ Позначимо $u = t$, тоді $du = dt$,

$$dv = \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n},\ v = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}.$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{t}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{t}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \cdot I_{n-1}.$$

Підставимо одержаний результат у формулу *(1.10)*, тоді

$$I_n=\frac{1}{a^2}\left[I_{n-1}-\frac{t}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2(1-n)}\cdot I_{n-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\frac{3-2n}{2-2n}\cdot I_{n-1}+\frac{t}{2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\right].$$

Отже,

$$I_n=\frac{1}{a^2}\left[\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}+\frac{t}{2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\right]. \qquad (1.11)$$

Приклад 20. Знайти $I_3=\int\frac{dt}{\left(t^2+4\right)^3}$.

Розв'язання. У цьому прикладі $a=2,\ n=3.$

Застосовуємо рекурентну формулу *(1.11)*

$$I_3=\frac{1}{4}\left[\frac{6-3}{6-2}\cdot I_2+\frac{t}{2\cdot 2\cdot\left(t^2+4\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{3}{16}I_2+\frac{t}{16\left(t^2+4\right)^2}.$$

За цією самою формулою *(1.11)*:

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+4\right)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{4-3}{4-2}\cdot I_1+\frac{t}{2(2-1)\left(t^2+4\right)^1}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot I_1+\frac{t}{8\cdot\left(t^2+4\right)};$$

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+4}=\int\frac{dt}{t^2+2^2}=\frac{1}{2}arctg\,\frac{t}{2}+C.$$

Тепер

$$I_2=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}arctg\,\frac{t}{2}+\frac{t}{8\left(t^2+4\right)}+C;$$

$$I_3 = \frac{3}{16}\left[\frac{1}{16} arctg\frac{t}{2} + \frac{t}{8\left(t^2+4\right)}\right] + \frac{t}{16\left(t^2+4\right)^2} + C =$$

$$= \frac{3}{16^2} arctg\frac{t}{2} + \frac{3}{16}\cdot\frac{t}{8\left(t^2+4\right)} + \frac{t}{16\left(t^2+4\right)^2} + C.$$

Отже, як інтегрувати найпростіші раціональні дроби ми з'ясували. Залишається відповісти на запитання, як правильний раціональний дріб можна розкласти на суму найпростіших.

1.5.5. Розклад правильного раціонального дробу на найпростіші дроби

Раніше було показано, що інтегрування раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена і правильного раціонального дробу. З'ясуємо, як правильний раціональний дріб розкласти на найпростіші дроби.

При розкладі правильного раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на найпростіші дроби має суттєве значення розклад знаменника дробу $Q(x)$ на добуток лінійних і квадратичних множників.

Нехай $Q(x) = (x-a)^k\cdot(x-b)^l\cdot\left(x^2+px+q\right)^m$, причому квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів.

Теорема. *Правильний раціональний дріб* $\frac{P(x)}{Q(x)}$,

де $Q(x) = (x-a)^k\cdot(x-b)^l\cdot\left(x^2+px+q\right)^m$, *можна розкласти на суму найпростіших дробів, причому єдиним способом:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots +$$
$$+ \frac{B_l}{(x-b)^l} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+px+q\right)^m}, \qquad (1.12)$$

де A_i, B_i, M_i, N_i *– дійсні числа* $(i = 1, 2, \ldots)$.

Множнику	Відповідає дріб (сума дробів)
$(x-a)$	$\dfrac{A}{x-a}$,
$(x-b)^l$	$\dfrac{B_1}{x-b}+\dfrac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\dfrac{B_l}{(x-b)^l}$,
x^2+px+q	$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$,
$(x^2+px+q)^m$	$\dfrac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\dfrac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\dfrac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}$.

1.5.6. Метод невизначених коефіцієнтів

Для визначення коефіцієнтів у розкладі правильного раціонального дробу на найпростіші застосовують метод невизначених коефіцієнтів.
У чому полягає цей метод, показано на прикладах.

Приклад 21. Розкласти на найпростіші дроби

$$\frac{3x^2-x+8}{(x-1)(x^2+x+3)}.$$

Розв'язання. Застосуємо формулу *(1.12)*:

$$\frac{3x^2-x+8}{(x-1)(x^2+x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+3}, \qquad (1.13)$$

A, M, N – невідомі, що підлягають визначенню.

У рівнянні *(1.13)* зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\frac{3x^2-x+8}{(x-1)(x^2+x+3)}=\frac{A\cdot(x^2+x+3)+(Mx+N)\cdot(x-1)}{(x-1)(x^2+x+3)}.$$

У цій тотожності знаменники дробів рівні, а, отже, і чисельники мають бути рівними:

$$3x^2-x+8=A(x^2+x+3)+(Mx+N)(x-1).$$

У правій частині розкриємо дужки та зведемо подібні:

$$3x^2-x+8=(A+M)\cdot x^2+(A-M+N)\cdot x+3A-N.$$

Два многочлени тоді і лише тоді тотожно рівні, коли коефіцієнти при однакових степенях x рівні.

Прирівняємо коефіцієнти многочленів при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь:

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{при}\quad x^2 & : & A+M=3 \\ \textit{при}\quad x^1 & : & A-M+N=-1 \\ \textit{вільний член} & : & 3A-N=8 \end{array}\right\} .$$

Оскільки розклад правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів можливий і єдиний, то система рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів розкладу завжди має єдиний розв'язок.

Розв'язавши систему, одержимо: $A=2;\ M=1;\ N=-2.$

Таким чином,

$$\frac{3x^2-x+8}{(x-1)(x^2+x+3)}=\frac{2}{x-1}+\frac{x-2}{x^2+x+3}.$$

Приклад 22. Розкласти раціональний дріб на найпростіші дроби

$$\frac{-4x^2-29x-65}{(x+3)^2\cdot(x-4)}.$$

Розв'язання. Оскільки знаменник має тільки дійсні корені, то розклад дробу має вид:

$$\frac{-4x^2-29x-65}{(x+3)^2\cdot(x-4)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{x-4}.$$

Праву частину приведемо до спільного знаменника.

$$\frac{-4x^2-29x-65}{(x+3)^2\cdot(x-4)}=\frac{A(x+3)(x-4)+B(x-4)+C(x+3)^2}{(x+3)^2\cdot(x-4)}.$$

Прирівняємо чисельники:

$$-4x^2-29x-65=A(x+3)(x-4)+B(x-4)+C(x+3)^2.$$

Перетворимо праву частину:

$$\begin{aligned}&A(x+3)(x-4)+B(x-4)+C(x+3)^2=\\&=A(x^2-x-12)+B(x-4)+C(x^2+6x+9)=\\&=(A+C)\cdot x^2+(-A+B+6C)\cdot x+(-12A-4B+9C).\end{aligned}$$

Тепер маємо:

$$-4x^2-29x-65=(A+C)\cdot x^2+(-A+B+6C)x+(-12A-4B+9C).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x.

$$\left.\begin{array}{lll}x^2 & : & A+C=-4\\ x^1 & : & -A+B+6C=-29\\ x^0 & : & -12A-4B+9C=-65\end{array}\right\}.$$

Розв’язавши цю систему, визначимо $A=1;\quad B=2;\quad C=-5.$

Тепер

$$\frac{-4x^2-29x-65}{(x+3)^2\cdot(x-4)}=\frac{1}{x+3}+\frac{2}{(x+3)^2}+\frac{-5}{x-4}.$$

Приклад 23. Розкласти на найпростіші дроби

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)}.$$

Розв’язання. Застосуємо формулу *(1.12)*, тоді:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2};$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}.$$

Прирівняємо чисельники:

$$1=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

$$1=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x+(-2A).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=0 \\ A+2B-C=0 \\ -2A=1 \end{array}\right\} .$$

Розв’язок цієї системи: $A=-\frac{1}{2};\ B=\frac{1}{3};\ C=\frac{1}{6}.$

Остаточно

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{-\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{\frac{1}{6}}{x+2}$$

або

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)}=-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{6(x+2)}.$$

Коефіцієнти розкладу можна знайти більш простим способом.

Повернемося до тотожності

$$1=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

Ця тотожність справедлива за будь-якого значення змінної x. Як значення x зручно підставляти дійсні корені знаменника.

Нехай $x=0$, тоді $1=-2A, \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{2}$

$$x = 1, \text{ тоді } 1 = 3B, \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{3}$$

$$x = -2, \text{ тоді } 1 = 6C, \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{6}.$$

Указаний метод особливо зручний, якщо знаменник $Q(x)$ правильного раціонального дробу має лише дійсні прості корені.

На практиці часто комбінують розглянуті вище методи.

1.5.7. Схема інтегрування раціональних дробів

Сформулюємо тепер основні правила інтегрування раціональних дробів.

1. Якщо раціональний дріб неправильний, то треба виділити цілу частину і представити неправильний раціональний дріб у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу.
2. Знаменник правильного раціонального дробу розкласти на множники.
3. Правильний раціональний дріб розкласти на суму найпростіших дробів.
4. Застосувати один із методів знаходження невизначених коефіцієнтів або, комбінуючи їх, знайти невизначені коефіцієнти.
5. Проінтегрувати отриману суму найпростіших дробів і цілу частину, якщо вона є.

Приклад 24. Знайти $\int \frac{dx}{x^3 + 8}$.

Розв'язання. Дріб $\frac{1}{x^3 + 8}$ – правильний.

Знаменник $(x^3 + 8)$ розкладемо на співмножники, користуючись формулою,

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4),$$

отже,

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}.$$

Правильний раціональний дріб розкладемо на суму найпростіших дробів:

$$\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Mx+N}{x^2-2x+4};$$

$$1=A(x^2-2x+4)+(Mx+N)(x+2),$$

остання тотожність справедлива для будь-яких значень x.

Нехай $x=-2$, тоді $1=A((-2)^2-2\cdot(-2)+4);\quad 1=12A,\quad \Rightarrow\quad A=\frac{1}{12};$

Прирівняємо коефіцієнти при x^2 і при x^1:

$$1=(A+M)x^2+(-2A+2M+N)x+(4A+2N)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & A+M=0 \\ x^1: & -2A+2M+N=0 \end{array}\right\}$$

Враховуючи, що $A=\frac{1}{12}$, визначаємо $M=-\frac{1}{12}, N=\frac{1}{3}$.

Таким чином, $\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{\frac{1}{12}}{x+2}+\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4};$

$$\int\frac{dx}{x^3+8}=\int\left[\frac{\frac{1}{12}}{x+2}+\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x+2|+\int\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}dx.$$

Проінтегруємо $\int \frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}dx.$ Застосуємо метод заміни змінної.

$$\left(x^2-2x+4\right)'=2x-2\ ;\ t=\frac{2x-2}{2}=x-1;\ x=t+1;\ dx=dt$$

$$x^2-2x+4=(t+1)^2-2(t+1)+4=t^2+2t+1-2t-2+4=t^2+3;$$

$$\int \frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}dx=\int \frac{-\frac{1}{12}(t+1)+\frac{1}{3}}{t^2+3}dt=$$

$$=\int \frac{-\frac{1}{12}t-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}}{t^2+3}dt=-\frac{1}{12}\int \frac{t}{t^2+3}dt+\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+3}=$$

$$=-\frac{1}{24}\ln\left(t^2+3\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=-\frac{1}{24}\ln\left(x^2-2x+4\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Остаточно

$$\int \frac{dx}{x^3+8}=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\ln\left(x^2-2x+4\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Приклад 25. Знайти $\int \frac{x^3+1}{x^2+5x+6}dx$.

Розв'язання. Раціональний дріб $\frac{x^3+1}{x^2+5x+6}$ – неправильний. Виділимо цілу частину, для цього многочлен, що стоїть у чисельнику , розділимо на многочлен, який знаходиться в знаменнику,

матимемо: $\frac{x^3+1}{x^2+5x+6}=x-5+\frac{19x+31}{x^2+5x+6}$.

Знаменник правильного раціонального дробу x^2+5x+6 можна розкласти на лінійні співмножники:

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3).$

$$\int\frac{x^3+1}{x^2+5x+6}dx=\int\left[x-5+\frac{19x+31}{(x+2)(x+3)}\right]dx=$$

$$=\int(x-5)dx+\int\frac{19x+31}{(x+2)(x+3)}dx=\frac{x^2}{2}-5x+\int\frac{19x+31}{(x+2)(x+3)}dx;$$

$$\frac{19x+31}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3};$$

$$19x+31=A(x+3)+B(x+2)$$

Нехай $x=-3$, тоді

$19\cdot(-3)+31=B(-3+2);\ -26=-B;\ B=26.$

Нехай $x=-2$, тоді

$19\cdot(-2)+31=A(-2+3);\ -7=A;\ A=-7.$

Таким чином, $\dfrac{19x+31}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{-7}{x+2}+\dfrac{26}{x+3};$

$$\int\frac{19x+31}{(x+2)(x+3)}dx=\int\frac{-7}{x+2}dx+\int\frac{26}{x+3}dx=$$
$$=-7\ln|x+2|+26\ln|x+3|+C.$$

Остаточно,

$$\int\frac{x^3+1}{x^2+5x+6}dx=\frac{x^2}{2}-5x-7\ln|x+2|+26\ln|x+3|+C.$$

Приклад 26. Проінтегрувати $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2\left(x^2-2x+5\right)}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб, розкладемо його на суму найпростіших дробів:

$$\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2\left(x^2-2x+5\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2-2x+5};.$$

$$\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2\left(x^2-2x+5\right)}=\frac{A(x-1)\left(x^2-2x+5\right)+B\left(x^2-2x+5\right)+(Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2-2x+5\right)},$$

Прирівнявши чисельники, одержимо тотожність

$$x^2-3x+1=A(x-1)\left(x^2-2x+5\right)+B\left(x^2-2x+5\right)+(Mx+N)(x-1)^2. \qquad (1.14)$$

Ця тотожність справедлива для будь-якого значення x. Нехай $x=1$, тоді

$1^2-3\cdot1+1=B\left(1^2-2\cdot1+5\right)$;

$-1=4B$. Звідси, $B=-\frac{1}{4}$.

У тотожності *(1.14)* розкриємо дужки та зведемо подібні, одержимо:

$$x^2-3x+1=(A+M)x^3+(-3A+B-2M+N)x^2+$$
$$+(7A-2B+M-2N)x+(-5A+5B+N).$$

Прирівняємо коефіцієнти при x^3; x^2; x^1:

$$\left.\begin{array}{lll} x^3 & : & A+M=0 \\ x^2 & : & -3A+B-2M+N=1 \\ x^1 & : & 7A-2B+M-2N=-3 \end{array}\right\}$$

. Оскільки $B=-\frac{1}{4}$, то

$$\begin{cases} A+M=0 \\ -3A-2M+N=\frac{5}{4} \\ 7A+M-2N=-\frac{7}{2}. \end{cases}$$

Розв’язавши систему, маємо $A=-\frac{1}{4}$; $M=\frac{1}{4}$; $N=1$.

Таким чином:

$$\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}=\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2-2x+5}.$$

$$\int\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+$$

$$+\int\frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2-2x+5}dx=-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)}+\int\frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2-2x+5}dx+C.$$

Окремо проінтегруємо $\int\frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2-2x+5}dx$.

Зробимо підстановку:

$$t=\frac{1}{2}\left(x^2-2x+5\right)'=\frac{2x-2}{2}=x-1;\ \Rightarrow x=t+1;\ dx=dt;$$

$$x^2-2x+5=(t+1)^2-2(t+1)+5=t^2+2t+1-2t-2+5=t^2+4.$$

$$\int\frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{\frac{1}{4}(t+1)+1}{t^2+4}dt=\int\frac{\frac{1}{4}t+\frac{5}{4}}{t^2+4}dt=\frac{1}{4}\int\frac{tdt}{t^2+4}+\frac{5}{4}\int\frac{dt}{t^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left(t^2+4\right)+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{8}\ln\left(x^2-2x+5\right)+\frac{5}{8}arctg\frac{x-1}{2}+C.$$

Тепер

$$\int\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}dx=-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+$$

$$+\frac{1}{8}\ln\left(x^2-2x+5\right)+\frac{5}{8}arctg\frac{x-1}{2}+C.$$

1.6. Інтегрування тригонометричних функцій

1.6.1. Інтеграли виду $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$, де m і n – цілі числа

Розглянемо випадок, коли одне із чисел ***m* або *n* непарне**. У цьому випадку інтеграли можна привести до інтегралів від раціональних функцій. Від непарного степеня треба відділити один множник і кофункцію до нього позначити новою змінною.

Приклад 27. Знайти $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Розв'язання. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx$. Нехай $\cos x = t$, тоді $-\sin x dx = dt$. Нагадаємо також, що із основної тригонометричної тотожності $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, отже

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx =$$
$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^2 x \cdot \sin x dx = -\int \left(1 - t^2\right) t^2 dt =$$
$$= -\int \left(t^2 - t^4\right) dt = -\int t^2 dt + \int t^4 dt == -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Приклад 28. Знайти $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.

Розв'язання. $\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x$, тепер кофункцію до $\cos x$ позначимо новою змінною t, тобто $\sin x = t$, тоді $\cos x dx = dt$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \cos x dx =$$
$$= \int \frac{\left(1 - \sin^2 x\right)}{\sin^2 x} \cdot \cos x dx = \int \frac{1 - t^2}{t^2} dt = \int \left[\frac{1}{t^2} - 1\right] dt = \int t^{-2} dt - \int dt =$$
$$= \frac{t^{-1}}{-1} - t + C = -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

Зауваження. *Означений вище метод можна застосовувати і тоді, коли одне з чисел* m *або* n *непарне і додатне, а друге – будь-яке дійсне число.*

Приклад 29. Знайти $\int \sqrt[5]{\sin^3 x} \cdot \cos^3 x dx$.

Розв'язання. $\int \sqrt[5]{\sin^3 x} \cdot \cos^3 x dx =$

$= \int (\sin x)^{\frac{3}{5}} \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx$. Нехай $\sin x = t$, тоді $\cos x dx = dt, \quad \Rightarrow$

$$\int \sqrt[5]{\sin^3 x} \cdot \cos^3 x dx = \int t^{\frac{3}{5}} \cdot \left(1 - t^2\right) dt =$$

$$= \int t^{\frac{3}{5}} dt - \int t^{\frac{3}{5}} \cdot t^2 dt = \int t^{\frac{3}{5}} dt - \int t^{\frac{13}{5}} dt =$$

$$= \frac{t^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} - \frac{t^{\frac{13}{5}+1}}{\frac{13}{5}+1} + C = \frac{5}{8} t^{\frac{8}{5}} - \frac{5}{18} t^{\frac{18}{5}} + C =$$

$$= \frac{5}{8} (\sin x)^{\frac{8}{5}} - \frac{5}{18} (\sin x)^{\frac{18}{5}} + C.$$

Розглянемо випадок, коли обидва показники степеня m *і* n – ***парні невід'ємні*** числа (у частинному випадку, одне з них може бути рівним нулю).

У таких випадках слід застосувати формули пониження степеня через подвійний аргумент:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

тоді добуток $\sin^n x \cos^m x$ заміниться сумою добутків подібного виду, але з меншими показниками степеня.

Приклад 30. Знайти $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$.

Розв'язання. Застосуємо формули пониження степеня, тоді

$$\int \sin^2 x \cos^2 x = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\int [1+\cos 4x]dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

1.6.2. Раціональні функції двох змінних

Уточнимо визначення ***раціональної*** функції $R(u,v)$ від двох змінних. Многочленом відносно двох змінних $\boldsymbol{u}$ і $\boldsymbol{v}$ називається сума добутків виду $Au^n v^m$, де $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{n}$ – цілі невід'ємні числа.

Частка від ділення двох многочленів відносно $\boldsymbol{u}$ і $\boldsymbol{v}$ називається раціональною функцією від $\boldsymbol{u}$ і $\boldsymbol{v}$.

Раціональну функцію від u і v позначають $R(u, v)$.

Наприклад, функції $R(u, v) = \dfrac{u+3v^2}{uv^3}$; $R(u, v) = \dfrac{5}{u^5 + uv^4}$ – раціональні.

Сума, різниця, добуток і частка кількох раціональних функцій від $\boldsymbol{u}$ і $\boldsymbol{v}$ є також раціональною функцією від $\boldsymbol{u}$ і $\boldsymbol{v}$.

Нехай змінні $\boldsymbol{u}$ і $\boldsymbol{v}$ є функціями змінної x: $u = \varphi(x)$, $v = g(x)$, тоді функція $R[\varphi(x), g(x)]$ називається раціональною функцією від $\varphi(x)$ і $g(x)$.

Наприклад, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4} + x^2}{x - 3\left(\sqrt{x+4}\right)^5}$ – раціональна функція відносно x і $\sqrt{x+4}$;

$f(x) = \dfrac{\cos^3 x - 4\sin x}{\sin^2 x + 3\cos x}$ – раціональна функція відносно $\sin x$ і $\cos x$.

1.6.3. Інтеграли виду $\int R(\sin x; \cos x)dx$

Розглянемо метод знаходження інтегралів виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де $R(\sin x, \cos x)$ раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$, тобто над цими функціями проводять раціональні операції: додавання, віднімання, множення, ділення.

Такими інтегралами є, наприклад,

$$\int \frac{dx}{\cos x}; \qquad \int \frac{\sin^3 x + \cos x}{3\sin x + 2}dx; \qquad \int \frac{dx}{1 + 3\cos x}.$$

Довільний інтеграл від тригонометричної функції $\int R(\sin x, \cos x)dx$ можна звести до інтеграла від раціональної функції. Для цього треба зробити заміну змінної

$$\boxed{tg\frac{x}{2} = t}. \tag{1.15}$$

Ця підстановка називається ***«універсальною» тригонометричною підстановкою.***

При цьому:

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2};$$

$$\frac{x}{2} = arctgt, \qquad \frac{1}{2}dx = \frac{dt}{1 + t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Отже, якщо $tg\frac{x}{2}=t$, тоді

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}. \tag{1.16}$$

Підставимо вирази $\sin x$, $\cos x$, dx через t, одержимо

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt.$$

Приклад 31. $\int\frac{dx}{\cos x}$.

Розв'язання. З використанням формул *(1.16)* маємо:

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \text{тоді}$$

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{1-t^2}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right|+C=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

Приклад 32. Знайти $\int\frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

Розв'язання. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку: $tg\frac{x}{2}=t$, тоді з урахуванням *(1.16)* одержимо

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+10t+3-3t^2}{1+t^2}}=\int \frac{2dt}{10t+6}=$$

$$=\int \frac{2dt}{2(5t+3)}=\int \frac{dt}{5t+3}=\frac{1}{5}\ln|5t+3|+C=$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|5tg\frac{x}{2}+3\right|+C.$$

Універсальна тригонометрична підстановка часто приводить до громіздких раціональних дробів. Тому в деяких частинних випадках інтеграли від тригонометричних функцій знаходять іншими способами.

1. $\int R(tgx)dx$ підстановкою $t=tgx$ приводиться до $\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$.

2. $\int R(\sin x)\cos xdx$ підстановкою $t=\sin x$ приводиться до $\int R(t)dt$.

3. $\int R(\cos x)\sin xdx$ підстановкою $t=\cos x$ приводиться до $\int R(t)dt$.

Приклад 33. Знайти $\int tg^3xdx$.

Розв'язання. Зробимо «напівуніверсальну» підстановку: $tgx=t$,

тоді $x=arctgt$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

$$\int tg^3xdx=\int t^3\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{t^3}{1+t^2}dt=\int \frac{t^3+t-t}{1+t^2}dt=\int \frac{t(t^2+1)-t}{1+t^2}dt=$$

$$=\int\left[t-\frac{t}{1+t^2}\right]dt=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C=$$

$$=\frac{1}{2}tg^2x-\frac{1}{2}\ln(tg^2x+1)+C.$$

Зауваження. *Підстановкою* $tgx = t$ користуються для знаходження $\int R(\sin x;\, \cos x)dx$*, якщо* $\sin x$ *і* $\cos x$ *містяться лише в парних степенях, оскільки* $\sin^2 x$ *і* $\cos^2 x$ *виражаються раціонально через* tgx *:*

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+ctg^2 x} = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}.$$

Якщо треба знайти інтеграли типів $\int \sin px \cos qx\, dx$, $\int \sin px \sin qx\, dx$, $\int \cos px \cos qx\, dx$, то застосовують тригонометричні формули:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$

які в підінтегральній функції перетворюють добуток на суму.

Приклад 34. Знайти $\int \sin 3x \sin 5x dx$.

Розв'язання. $\int \sin 3x \sin 5x dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\cos(3x-5x)-\cos(3x+5x)\right]dx = \frac{1}{2}\int\cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\sin 8x + C = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

1.7. Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій

Основним методом інтегрування ірраціональних функцій є метод заміни змінної, який приводить підінтегральну функцію до раціонального вигляду, якщо це можливо.

1.7.1. Інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt[m]{x^n}, \sqrt[l]{x^s}, \dots\right)dx$

Інтеграл $\int R\left(x, \sqrt[m]{x^n}, \sqrt[l]{x^s}, \dots\right)dx$ приводять до інтегралу від раціональної функції за допомогою підстановки: $x = t^N$, де N – найменше спільне кратне показників коренів $m, l, \dots$.

Приклад 35. Знайти $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}dx$.

Розв'язання. Найменше спільне кратне показників коренів 3 і 6 є $N = 6$. Зробимо підстановку $x = t^6$, тоді $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} = \left(t^6\right)^{2/3} = t^4$, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3} = \left(t^6\right)^{1/3} = t^2$, $\sqrt[6]{x} = x^{1/6} = \left(t^6\right)^{1/6} = t$.

Одержимо:

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}dx = \int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6\left(1 + t^2\right)} 6t^5 dt =$$

$$= 6\int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1 + t^2}dt = 6\int \frac{t^3\left(t^2 + 1\right) + 1}{1 + t^2}dt =$$

$$= 6\int \left[t^3 + \frac{1}{1 + t^2}\right]dt = 6\frac{t^4}{4} + 6arctgt + C =$$

$$= \frac{3}{2}x^{2/3} + 6arctg\sqrt[6]{x} + C.$$

1.7.2. Інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax + b}\right)dx$, *n* – ціле число

Зробимо в інтегралі заміну змінної: $ax + b = t^n$, тоді $x = \frac{t^n - b}{a}$; $dx = \frac{1}{a}\left(n \cdot t^{n-1}\right)dt$; $\sqrt[n]{ax + b} = t$, матимемо

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}; t\right)\frac{nt^{n-1}}{a}dt.$$

У правій частині – інтеграл від раціональної функції відносно змінної інтегрування $\boldsymbol{t}$.

1.7.3. Дробово-лінійні ірраціональності

Розглянемо інтеграли більш загального виду $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[l]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\right)dx$, де $m, l, \ldots$ – натуральні числа;

a, b, c, d – дійсні числа, причому $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ (оскільки, якщо $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, то відношення $\frac{ax+b}{cx+d}$ є сталим, а підінтегральна функція у цьому випадку є раціональною функцією від x).

Зробимо підстановку: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$, де N – найменше спільне кратне показників коренів $m, l, \ldots$, яка приводить даний інтеграл до інтегралу від раціональної функції відносно t,

$$t^N = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad x = \frac{b - dt^N}{ct^N - a} = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt,$$

де $\varphi(t)$ та її похідна $\varphi'(t)$ – раціональні функції від t.

Приклад 36. Знайти $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

Розв'язання. Зробимо підстановку:

$$\frac{x-1}{x+1} = t^2; \quad t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}; \quad x = -\frac{1+t^2}{t^2-1};$$

$dx = \frac{4tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$, тоді $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = -4\int \frac{t^2dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}$.

Під знаком інтеграла – правильний раціональний дріб. Розкладемо його на суму простих дробів :

$$\frac{t^2}{(t+1)(t-1)\left(t^2+1\right)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1} \;;$$

$$t^2 = A(t--1)\left(t^2+1\right) + B(t+1)\left(t^2+1\right) + (Ct+D)\left(t^2-1\right) \,,$$

при $t=1$: $1 = 4B$, $\Rightarrow B = \frac{1}{4}$;

при $t=-1$: $1 = -4A$, $\Rightarrow A = -\frac{1}{4}$.

Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів – прирівняємо коефіцієнти при t^3 і t^0:

$$\begin{array}{l|ll} t^3 & 0 = A+B+C, & \Rightarrow C = 0 \\ t^0 & 0 = -A+B-D, & \Rightarrow D = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Тепер дістанемо

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = -\int\left(\frac{2}{t^2+1} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1}\right)dt =$$
$$= -2arctgt + \ln|t+1| - \ln|t-1| + C =$$
$$= -2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln\left|-x-\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

1.7.4. Квадратичні ірраціональності

Інтеграл виду	Рекомендації, щодо інтегрування
1. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Із квадратного тричлена треба виділити повний квадрат, після чого даний інтеграл приводиться до табличних інтегралів : $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2+\lambda}\right\|+C$.
2. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$	У чисельнику треба виділити похідну квадратного тричлена, що стоїть під знаком кореня, і розкласти інтеграл на суму двох інтегралів, перший з яких – табличний інтеграл $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+C$, а другий – виду 1.
3. $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Підстановка $x-a=\frac{1}{t}$ приводить цей інтеграл до інтеграла виду 2.
4. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ $a \neq 0$.	Можливі два випадки: 1) тричлен ax^2+bx+c має дійсні та різні корені x_1 і x_2 : $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} =$ $= \sqrt{\frac{a(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x-x_1)}} = \|x-x_1\|\sqrt{a\cdot\frac{x-x_2}{x-x_1}}$, тоді $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R_1\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right)$; останній інтеграл – інтеграл від дробово-лінійної

	ірраціональності (підрозд. 1.7.3) ; 2) тричлен ax^2+bx+c не має дійсних коренів, тоді інтеграл раціоналізується підстановками: при $a>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm ax+t$ *(1.17)* при $c>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$ *(1.18)* ***Зауваження.*** *Підстановки (1.17) і (1.18) називаються* ***підстановками Ейлера****.* Це досить сильний метод обчислення інтегралів, але приводить до громіздких викладок. Більш зручний спосіб – введення ***тригонометричних підстановок***. Доповнюючи квадратний тричлен ax^2+bx+c до повного квадрату, інтеграл виду 4 можна перетворити на один із інтегралів: $\int R\left(x,\sqrt{q^2-x^2}\right)dx$; $\int R\left(x,\sqrt{q^2+x^2}\right)dx$; $\int R\left(x,\sqrt{x^2-q^2}\right)dx$. Вони зводяться до інтегралів від раціональних функцій відносно тригонометричних функцій відповідно підстановками: $x=q\sin\varphi$; $x=qtg\varphi$; $x=q\sec\varphi$. *(1.19)*

Приклад 37. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}$.

Розв'язання. Із квадратного тричлена виділимо повний квадрат

$$x^2+4x+7=x^2+2\cdot 2\cdot x+4-4+7=(x+2)^2+3,$$

тоді

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+3}}=\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+3}}=$$

$$=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+7}\right|+C.$$

Приклад 38. Знайти інтеграл $\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+3}}dx$.

Розв'язання. У чисельнику одержимо похідну від підкореневого виразу

$$\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+3}}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+3)-\frac{9}{2}+2}{\sqrt{x^2+3x+3}}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+3}}dx-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+3}}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+3x+3}-\frac{5}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=$$

$$=3\sqrt{x^2+3x+3}-\frac{5}{2}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+C.$$

Приклад 39. Знайти інтеграл $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Розв'язання. Зробимо тригонометричну підстановку:

$$x=2\sin\varphi,\quad dx=2\cos\varphi d\varphi;$$

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\varphi}=2\cos\varphi\text{, тепер}$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = 4\int \sin^2 \varphi d\varphi = 4\int \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= 2\int [1-\cos 2\varphi] d\varphi = 2\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right] + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

1.7.5. Інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$$

Вираз $x^m\left(a + bx^n\right)^p$, де $a \neq 0$, $a, b \in R$, $m, n, p \in Q$, називається ***диференціальним біномом***.

Можливі такі випадки:

1) ***p*** – ціле число, тоді треба зробити підстановку $x = t^k$,

де k – найменше спільне кратне знаменників дробів ***m*** і ***n*** ;

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число, тоді підстановка $a + bx^n = t^s$,

де ***s*** – знаменник дробу ***p***, перетворює інтеграл в інтеграл від раціональної функції;

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – ціле число, у цьому випадку зробимо підстановку $ax^{-n} + b = t^s$, де ***s*** – знаменник дробу ***p***.

Якщо не виконується жодна з умов $p \in Z$, $\dfrac{m+1}{n} \in Z$, $\dfrac{m+1}{n} + p \in Z$, то інтеграл від диференціального бінома у скінченому вигляді не обчислюється, тобто не є елементарною функцією.

Приклад 40. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^5}}$.

Розв'язання. $\frac{1}{x\sqrt[4]{1+x^5}} = x^{-1} \cdot \left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{4}}$

$m=-1$, $n=5$, $p=-\frac{1}{4}$; $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{5} = 0$ – ціле число.

Зробимо підстановку : $1+x^5 = t^4$, $x^5 = t^4 - 1$,

$x = \left(t^4-1\right)^{\frac{1}{5}}$; $dx = \frac{1}{5}\left(t^4-1\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot 4t^3 dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^5}} = \int \frac{4t^3 dt}{5\left(t^4-1\right)^{\frac{1}{5}} \cdot t \cdot \left(t^4-1\right)^{\frac{4}{5}}} = \frac{4}{5}\int \frac{t^3 dt}{t\left(t^4-1\right)} = \frac{4}{5}\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)} =$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{2t^2}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}dt = \frac{2}{5}\int \frac{t^2+1+t^2-1}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}dt =$$

$$= \frac{2}{5}\int \left[\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1}\right]dt = \frac{2}{5}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + arctgt\right] + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^5}-1}{\sqrt[4]{1+x^5}+1}\right| + \frac{2}{5}arctg\sqrt[4]{1+x^5} + C.$$

.Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення первісної функції.
2. Дайте означення невизначеного інтеграла від заданої функції.
3. Який геометричний зміст невизначеного інтеграла?
4. Сформулюйте властивості невизначеного інтегралу.
5. Напишіть таблицю основних інтегралів.
6. Перелічіть основні методи інтегрування.
7. У чому полягає метод заміни змінної ?
8. Запишіть формулу інтегрування частинами.
9. Дайте означення раціональної функції, дробово-раціональної.
10. Який раціональний дріб називається правильним; неправильним?
11. Що таке найпростіші раціональні дроби?
12. Як інтегрують найпростіші раціональні дроби?
13. Сформулюйте теорему про розклад правильного раціонального дробу на найпростіші дроби.
14. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів?
15. За якою схемою інтегрують раціональні дроби?
16. Як знаходять інтеграли від тригонометричних функцій?
17. Розкажіть про раціональні функції двох змінних.
18. У чому полягає «універсальна» тригонометрична підстановка?
19. Як знаходять інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt[m]{x^n}, \sqrt[l]{x^s}, \dots\right)dx$?
20. Що таке дробово-лінійні ірраціональності? Як їх проінтегрувати?
21. Розкажіть про квадратичні ірраціональності. Які рекомендації можна дати, щодо їх інтегрування?
22. Що таке інтеграл від диференціального бінома?

Задачі для самостійної роботи

Знайти невизначені інтеграли.

1. 1) $\int\left(2x^3+\frac{3}{x^2}+2\sqrt[5]{x^3}\right)dx$; 2) $\int\frac{3x^3+e^x}{x^4+e^x}dx$;

3) $\int\frac{arctg^2 2x}{1+4x^2}dx$; 4) $\int(x+1)\sin 4xdx$;

5) $\int\frac{3}{2x-7}dx$; 6) $\int\frac{3x+5}{x^2-4x+8}dx$;

7) $\int\frac{x}{x^3+1}dx$; 8) $\int\frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx$;

9) $\int\sin^2 4xdx$; 10) $\int\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[2]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

2. 1) $\int\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x}dx$; 2) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

3) $\int\frac{\ln(x+5)}{x+5}dx$; 4) $\int(2x-1)\cos 4xdx$;

5) $\int\frac{dx}{(2x+1)^2}$; 6) $\int\frac{3x-1}{x^2+2x+5}dx$;

7) $\int\frac{x-4}{x^3-27}dx$; 8) $\int\frac{x^3+2x+1}{x^2-4x+3}dx$;

9) $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$; 10) $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{1+x}}$.

3. 1) $\int\left(2-\frac{4}{x^5}+\frac{5}{\sqrt[5]{x^4}}\right)dx$; 2) $\int\frac{x^3dx}{1+x^6}$;

3) $\int e^{\sin x}\cos xdx$; 4) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$;

5) $\int \frac{x+1}{(x+2)^2}dx$;

6) $\int \frac{5x+8}{x^2+4x+8}dx$;

7) $\int \frac{2x+3}{x(x^2+1)}dx$;

8) $\int \frac{x^3-3x-5}{2x^3-x^2-10x}dx$;

9) $\int tg^3 x dx$;

10) $\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+1)^2}$.

4. 1) $\int \frac{2x+3}{\sqrt[5]{x^2}}dx$;

2) $\int e^{-x^3}x^2 dx$;

3) $\int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}dx$;

4) $\int x^2 \ln x dx$;

5) $\int \frac{2x}{(x-3)^4}dx$;

6) $\int \frac{12x-1}{x^2+6x+10}dx$;

7) $\int \frac{2x+5}{x^3+2x}dx$;

8) $\int \frac{x^4+3x}{x^3-x}dx$;

9) $\int \cos^4 x dx$;

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

5. 1) $\int \left(2x^5-\frac{4}{x^3}+2\sqrt{x}\right)dx$;

2) $\int \sqrt[3]{2-\sin 2x}\cos 2x dx$;

3) $\int \frac{dx}{x\ln^4 x}$;

4) $\int (x+1)e^{2x}dx$;

5) $\int \frac{x-1}{(2x+5)^3}dx$;

6) $\int \frac{3x+7}{x^2-4x+5}dx$;

7) $\int \frac{x-3}{x^3+4x}dx$;

8) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x-6}dx$;

9) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$;

10) $\int \frac{4x-1}{\sqrt{x^2-6x+10}}dx$.

6. 1) $\int \frac{(x+2)^3}{x^2}dx$;

2) $\int ctg 5x dx$;

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

4) $\int x5^x dx$;

5) $\int \frac{-2dx}{5-2x}$;

6) $\int \frac{10x-9}{x^2-6x+10}dx$;

7) $\int \frac{4x+21}{(x-1)(x^2+2)}dx$;

8) $\int \frac{x^3+2x-1}{x^2-3x+2}dx$;

9) $\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$.

7\. 1) $\int \left(4x^3+\frac{4}{x^5}+\frac{7}{\sqrt[7]{x^5}}\right)dx$;

2) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$;

3) $\int \sqrt[5]{2-\cos x}\sin x dx$;

4) $\int x\, arctg\, x dx$;

5) $\int \frac{11dx}{(3x-5)^3}$;

6) $\int \frac{2x-7}{x^2-8x+10}dx$;

7) $\int \frac{7x-2}{(x+3)(x^2+1)}dx$;

8) $\int \frac{x^3+4}{x^2+5x-6}dx$;

9) $\int \sin^2 x\cos^2 x dx$;

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$.

8\. 1) $\int \left(4x^2-\frac{2}{x^8}+6\sqrt[5]{x}\right)dx$;

2) $\int \frac{3x^2+\sin x}{x^3-\cos x}dx$;

3) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

4) $\int (3x-1)e^{\frac{x}{2}}dx$;

5) $\int \frac{2x+3}{(x+5)^2}dx$;

6) $\int \frac{11x-2}{x^2+8x+17}dx$;

7) $\int \frac{2x+11}{(x-1)(x^2+9)}dx$;

8) $\int \frac{x^3+2}{x^2+x-6}dx$;

9) $\int \sin 3x \sin x dx$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

9. 1) $\int\left(6x^4-\frac{1}{x}+11\sqrt[8]{x^3}\right)dx$;

2) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$;

3) $\int\frac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)}dx$;

4) $\int(x-3)\sin 4xdx$;

5) $\int\frac{3x}{(x-11)^8}dx$;

6) $\int\frac{2x+5}{x^2-2x+5}dx$;

7) $\int\frac{x}{(x+1)(x^2+2)}dx$;

8) $\int\frac{2x^3+x-2}{(x-1)(x+5)}dx$;

9) $\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$;

10) $\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$.

10. 1) $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)^2dx$;

2) $\int\frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$;

3) $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

4) $\int\sqrt[3]{x}\ln xdx$;

5) $\int\frac{2x+4}{(3x-5)^{11}}dx$;

6) $\int\frac{4x-3}{x^2+6x+13}dx$;

7) $\int\frac{2x-3}{x^3-8}dx$;

8) $\int\frac{x^4-x^2+x+2}{(x+3)(2x^2-3x-2)}dx$;

9) $\int\sin^4 x\cos^3 xdx$;

10) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

11. 1) $\int\left(5x^4-\frac{4}{x^3}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$;

2) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int\frac{x}{5x^2+3}dx$;

4) $\int x\cdot 3^x dx$;

5) $\int\frac{x-3}{(x+7)^8}dx$;

6) $\int\frac{x+1}{x^2+10x+29}dx$;

7) $\int\frac{4x+7}{(x-2)(x^2+3)}dx$;

8) $\int\frac{x^3}{x^3-2x^2-3x}dx$;

9) $\int \cos 2x \cos 4x dx$;

10) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$.

12\. 1) $\int \frac{(x-3)(x+5)}{x^2} dx$;

2) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$;

3) $\int \frac{\ln x + 3}{x} dx$;

4) $\int x \cos 5x dx$;

5) $\int \frac{5}{x-3} dx$;

6) $\int \frac{3x+2}{x^2+6x+13} dx$;

7) $\int \frac{6x-7}{x^3+8} dx$;

8) $\int \frac{x^3-1}{x^2-5x+6} dx$;

9) $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$;

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

13\. 1) $\int \left(7x^6 - \frac{3}{x^4} + 3\sqrt{x}\right) dx$;

2) $\int \arcsin^2 x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $\int \frac{\sqrt[5]{\ln x + 1}}{x} dx$;

4) $\int arctgx dx$;

5) $\int \frac{-8}{(3-4x)^5} dx$;

6) $\int \frac{7x-2}{x^2-8x+20} dx$;

7) $\int \frac{x-2}{(x-1)(x-2)(x+5)} dx$;

8) $\int \frac{x^2-3x-1}{x^2+3x-4} dx$;

9) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;

10) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}}$.

14\. 1) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$;

2) $\int x^2 e^{x^3+1} dx$;

3) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$;

4) $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$;

5) $\int \frac{x+2}{(2x-3)^5} dx$;

6) $\int \frac{4x-17}{x^2-16x+68} dx$;

7) $\int \frac{2x+5}{x^3-4x}dx$; 8) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x-2}dx$;

9) $\int \frac{\sin^3 x+1}{\cos^2 x}dx$; 10) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$.

15.1) $\int\left(8x^3+\frac{1}{5x^2}+12\sqrt[3]{x^5}\right)dx$ 2) $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$;

3) $\int \frac{\sin 3x}{\cos^5 3x}dx$; 4) $\int \arcsin 2x dx$;

5) $\int \frac{x+1}{x-2}dx$; 6) $\int \frac{5x+1}{x^2+2x+17}dx$;

7) $\int \frac{x+2}{(x+5)(x^2+3)}dx$; 8) $\int \frac{x^4-2x^3+5}{(x-1)(x-2)(x+4)}dx$;

9) $\int \frac{dx}{1+tgx}$; 10) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$.

16. 1) $\int \frac{x^4+2x-3}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$;

3) $\int tgx dx$; 4) $\int \ln x dx$;

5) $\int \frac{2x}{(5x-11)^3}dx$; 6) $\int \frac{3x-11}{x^2-8x+20}dx$;

7) $\int \frac{2x-5}{(x-3)(x^2-4)}dx$; 8) $\int \frac{x^3+3}{x^2-5x+4}dx$;

9) $\int \sin^3 x\cos^3 x dx$; 10) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$.

17. 1) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$; 2) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$;

3) $\int \frac{x^2dx}{4x^3+1}$; 4) $\int (x+2)e^{-4x}dx$;

5) $\int \frac{x}{(x-4)^4}dx$;

6) $\int \frac{3x-4}{x^2-12x+40}dx$;

7) $\int \frac{x-3}{(x+2)(x^2+7)}dx$;

8) $\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx$;

9) $\int \frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin 2x}dx$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$.

18. 1) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$;

2) $\int \sqrt[3]{1+3x^2}\cdot xdx$;

3) $\int \sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$;

4) $\int \arccos 4xdx$;

5) $\int \frac{7}{4x+1}dx$;

6) $\int \frac{2x+13}{x^2+16x+65}dx$;

7) $\int \frac{x-2}{(x+1)(x^2-16)}dx$;

8) $\int \frac{x^3-x+2}{x^2+2x-3}dx$;

9) $\int \sin 2x\cos 5xdx$;

10) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+6x+2}}dx$.

19. 1) $\int\left(4-\frac{1}{x^7}+\frac{6}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;

2) $\int e^{-x^2}xdx$;

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x(2ctgx+1)}$;

4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ln xdx$;

5) $\int \frac{dx}{(x+7)^4}$;

6) $\int \frac{5x-3}{x^2-2x+17}dx$;

7) $\int \frac{x}{x^3-27}dx$;

8) $\int \frac{x^3+4}{(x^2-4)(x+1)}dx$;

9) $\int (1+3\cos x)^3 dx$;

10) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

20.1) $\int\left(x+\frac{5x}{\sqrt[4]{x^3}}-x\sqrt[5]{x}\right)dx$;

2) $\int \frac{\cos 2x}{4+\sin 2x}dx$;

3) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$;

4) $\int arctg\,2x\,dx$;

5) $\int \frac{7x+1}{(2x-3)^7}dx$;

6) $\int \frac{\frac{x}{2}+1}{x^2-4x+8}dx$;

7) $\int \frac{x-4}{(x-2)(x+3)(x+1)}dx$;

8) $\int \frac{x^2-x+5}{(x-4)(x+7)}dx$;

9) $\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x}dx$;

10) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

РОЗДІЛ 2

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

2.1.1. Задача про площу криволінійної трапеції

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a; b]$, $b > a$. Розглянемо плоску фігуру $ABCD$, обмежену зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу – віссю Ox, зліва і справа – прямими $x = a$, $x = b$.

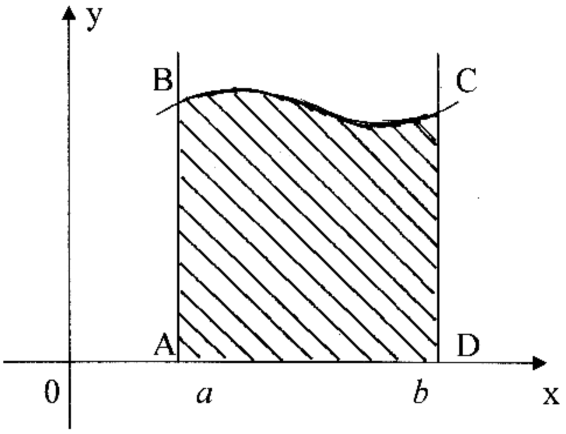


Рис. 1.

Така фігура називається ***криволінійною трапецією*** (рис. 1). Для наближеного обчислення площі S цієї трапеції зробимо так: відрізок $[a; b]$ розіб'ємо точками довільним чином на ***n*** частин

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b.$$

Довжину кожного з отриманих відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$ позначимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $(i = \overline{1,n})$. Через точки ділення проведемо вертикальні прямі до перетину з графіком функції $y = f(x)$.

При цьому криволінійну трапецію буде розбито на ***n*** частинних криволінійних трапецій (рис. 2).

Площа всієї криволінійної трапеції дорівнює сумі площ частинних криволінійних трапецій. Нехай S – площа всієї криволінійної трапеції $ABCD$, ΔS_i – площа i – тої частинної криволінійної трапеції, в основі якої частинний відрізок $[x_{i-1}, x_i]$. Тоді $S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_i + \ldots + \Delta S_n$, або $S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Обчислити площу частинної криволінійної трапеції так само важко, як і площу всієї криволінійної трапеції $ABCD$.

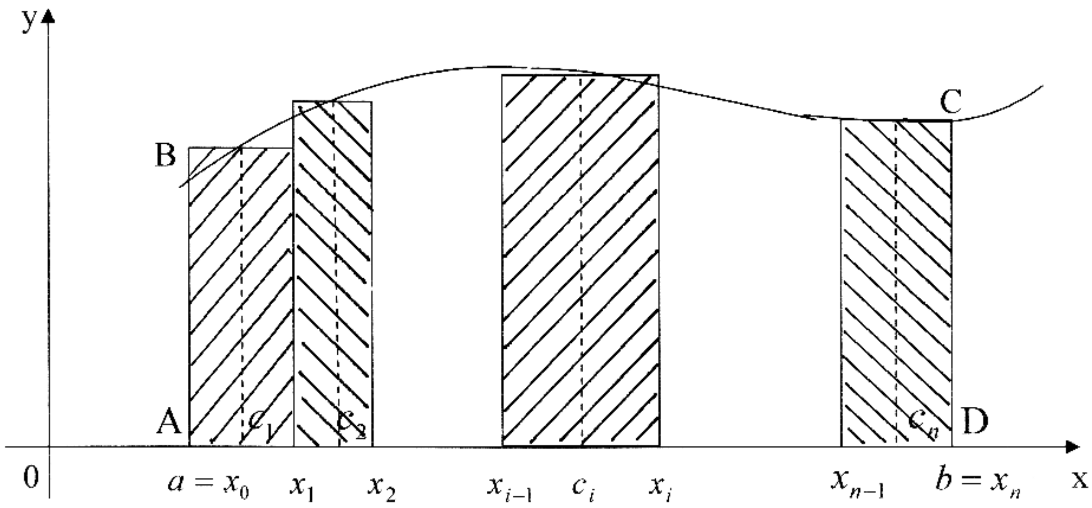


Рис. 2.

Зробимо так: на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ виберемо довільну точку c_i, $x_{i-1} \le c_i \le x_i$, $i = \overline{1, n}$ і замінимо кожну частинну криволінійну трапецію прямокутником, висотою $f(c_i)$,в основі якого відрізок $[x_{i-1}, x_i]$ – рис. 3.

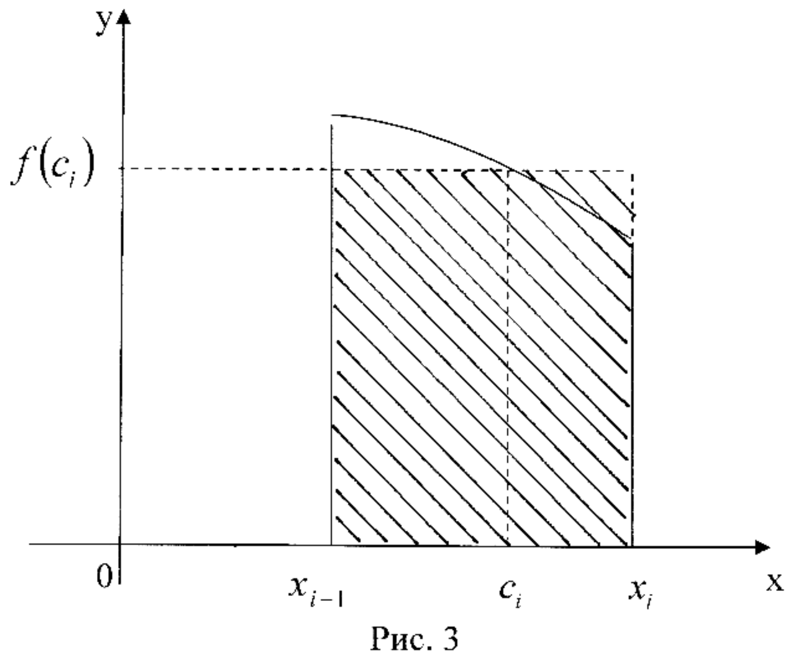


Рис. 3

Площа цього прямокутника дорівнює $f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$.

Площа i – тої частинної криволінійної трапеції наближено дорівнює площі i – того прямокутника.

$\Delta S_i \approx f(c_i)(x_i - x_{i-1})$, а площа S всієї криволінійної трапеції $ABCD$:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot(x_i - x_{i-1}). \qquad (2.1)$$

Сума *(2.1)* називається ***інтегральною сумою***.

Позначимо через λ найбільшу довжину частинних проміжків $[x_{i-1}, x_i]$: $\lambda = \max_i \Delta x_i$.

Точність формули *(2.1)* тим більша, чим менше λ.
Таким чином,

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i. \qquad (2.2)$$

Як бачимо, обчислення площі криволінійної трапеції привело до знаходження границі інтегральної суми.

2.1.2. Задача про роботу змінної сили

Якщо матеріальна точка під дією сили F, що не змінюється за величиною та напрямком, перемістилась на відстань ℓ у напрямку дії сили, то робота сили дорівнює добутку величини сили F на переміщення ℓ:

$$E = F\cdot\ell. \qquad (2.3)$$

Розглянемо випадок, коли сила F змінює числове значення, але зберігає сталий напрямок. Нехай під дією цієї сили матеріальна точка переміщається по прямій, що напрямлена вздовж лінії дії сили. Треба обчислити роботу сили F.

Нехай вісь Ox – пряма, вздовж якої рухається матеріальна точка, a і b – початкова і кінцева точки шляху $(a < b)$. У кожній точці проміжку $[a; b]$

величина сили має визначене значення, тобто є деякою функцією від абсциси x: $F = f(x)$. Будемо вважати цю функцію неперервною. Відрізок $[a; b]$ розіб'ємо довільно на n частинних відрізків (рис. 4), довжини яких $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

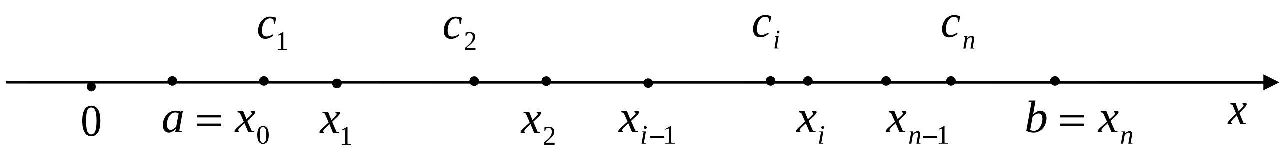


Рис. 4

Робота на всьому відрізку $[a; b]$ дорівнює сумі робіт на частинних сегментах шляху. Позначимо шукану роботу на всьому шляху через E, а роботу на відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ – через ΔE_i і матимемо $E = \sum_{i=1}^{n} \Delta E_i$.

Визначити роботу на частинному відрізку так само важко, як і на всьому шляху, оскільки сила змінюється. Але, якщо частинні відрізки $[x_{i-1}; x_i]$ брати достатньо малими і враховувати, що функція $F = f(x)$ неперервна, то сила на кожному малому сегменті буде змінюватися досить мало.

На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ довільно виберемо точки c_i, $x_{i-1} \le c_i \le x_i$, $i = \overline{1, n}$.

Припустимо, що в кожному малому сегменті величина сили має стале значення, яке дорівнює її значенню в точці c_i: $F_i = f(c_i)$. Тоді робота сили на відрізку $[x_{i-1}; x_i]$, згідно з формулою *(2.3,)* буде дорівнювати $F_i \Delta x_i = f(c_i) \Delta x_i$. Вираз $f(c_i) \Delta x_i$ наближено дорівнює значенню роботи на i – тому частинному відрізку, тобто

$\Delta E_i \approx f(c_i)\cdot \Delta x_i$, а на всьому шляху $E \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i$.

Ця наближена рівність тим точніша, чим менше Δx_i. За точне значення роботи приймають границю останньої суми за умови, що найбільша довжина λ малих переміщень прямує до нуля

$$E = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i \; . \qquad (2.4)$$

2.2. Інтегральна сума. Визначений інтеграл

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана функція $y = f(x)$.

Виконаємо таке:

1. Відрізок $[a;b]$ розіб'ємо довільним чином на n частинних відрізків точками

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

2. На кожному сегменті $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$ виберемо довільну точку c_i, $x_{i-1} \le c_i \le x_i$ і помножимо значення функції $f(x)$ у точці c_i на довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ відповідного сегмента: $f(c_i)\cdot \Delta x_i$.

3. Складемо суму всіх таких добутків: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i$. *(2.5)*

Сума виду *(2.5)* називається ***інтегральною сумою***.

4. Найбільшу довжину сегментів $[x_{i-1}; x_i]$ позначимо λ: $\lambda = \max\limits_{i} \Delta x_i$.

Означення. *Якщо існує границя інтегральної суми* $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i$ *при* $\lambda \to 0$ *і вона не залежить від розбиття* $[a;b]$ *на частинні відрізки та від* *вибору точок c_i на кожному частинному відрізку, то ця границя називається* ***визначеним інтегралом*** *функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається*

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.6}$$

При цьому, a *– нижня межа інтегрування;* b *– верхня межа; $f(x)$ – підінтегральна функція; x – змінна інтегрування.*

Функція $f(x)$, для якої на $[a;b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, називається ***інтегровною*** на цьому відрізку.

Теорема існування визначеного інтеграла.

Будь-яка неперервна на відрізку $[a;b]$ функція інтегровна на цьому відрізку, тобто для такої функції існує границя інтегральних сум при $\lambda\to 0$.

Отже, для інтегровності функції достатньо, щоб вона була неперервною на даному відрізку, але визначений інтеграл може існувати і для деяких розривних функцій.

Теорема. *(необхідна умова інтегровності функції).*

Якщо функція $y=f(x)$ інтегровна на $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Повертаючись до наведених вище задач, бачимо:

1) площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$, $f(x)\ge 0$ $x\in[a;b]$:

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \tag{2.7}$$

цей факт виражає ***геометричний зміст визначеного інтеграла;***

2) робота E змінної сили, величина якої $F=f(x)$, дорівнює визначеному інтегралу від сили

$$E = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

3) ***біологічний зміст визначеного інтеграла:***

якщо $v = v(t)$ – швидкість зростання популяції, то приріст її чисельності за час від t_0 до T становить

$$P = \int_{t_0}^{T} v(t) dt.$$

2.3. Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$, то вона буде інтегровною і на відрізку $[b; a]$, причому

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$$

2. Визначений інтеграл з рівними межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

3. Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx, \qquad C = const.$$

4. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кількості інтегровних на відрізку $[a; b]$ функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів на $[a; b]$ цих функцій:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

5. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

6. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$ і $c \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. Визначений інтеграл від невід'ємної функції на відрізку $[a; b]$ є невід'ємним, тобто, якщо $f(x) \geq 0$ для $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

8. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на $[a; b]$ і для будь–якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx,$$

тобто більшій на відрізку $[a; b]$ функції відповідає більше значення її визначеного інтеграла.

9. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a; b]$, то функція $|f(x)|$ також інтегровна на цьому відрізку і справедлива така нерівність:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

10. Особливості інтегрування парної функції на симетричному відносно початку координат відрізку (рис. 5)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

11. Особливості інтегрування непарної функції на симетричному відносно початку координат відрізку (рис. 6)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

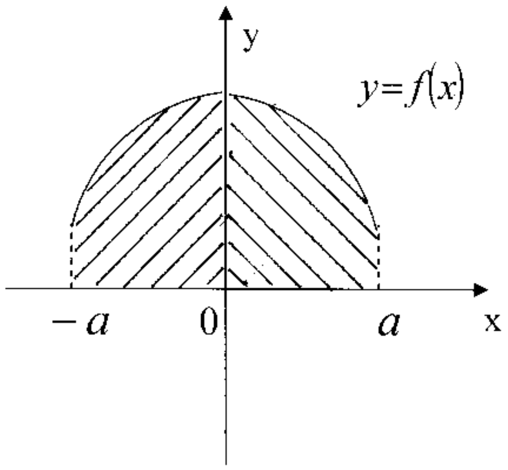


Рис. 5

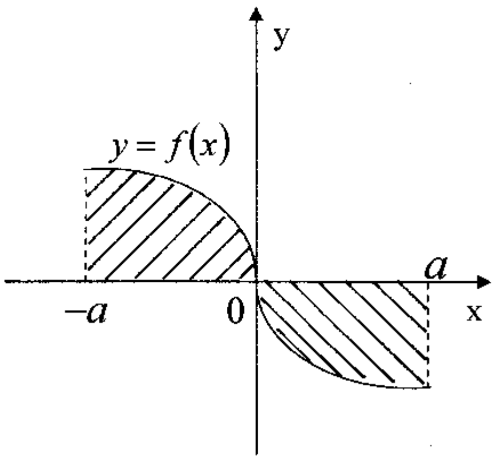


Рис. 6

12. ***Теорема (про оцінку визначеного інтеграла).***

Якщо функція $y = f(x)$ *інтегровна на* $[a; b]$, *а* m *і* M *– відповідно найменше і найбільше значення цієї функції на відрізку* $[a; b]$, *тобто* $m \le f(x) \le M$ *для* $x \in [a; b]$, *то* $m(b-a) \le \int_{a}^{b} f(x)dx \le M(b-a)$.

Доведення. За умовою теореми для будь–якого значення $x \in [a; b]$ маємо $m \le f(x) \le M$. Проінтегруємо почленно цю нерівність (застосуємо властивість, викладену в п. 8), дістанемо $m\int_{a}^{b} dx \le \int_{a}^{b} f(x)dx \le M\int_{a}^{b} dx.$

З урахуванням $\int\limits_a^b dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = b-a$, отримаємо

$$m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

Геометричний зміст теореми. Якщо $f(x)\ge 0$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком підінтегральної функції, віссю Ox, прямими $x=a$, $x=b$, знаходиться між площами прямокутників з основою $b-a$ і висотами, відповідно рівними m і M .

13. ***Теорема (про середнє значення).***

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку існує точка $c\in[a;b]$, для якої

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Доведення. Оскільки $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то на цьому відрізку функція досягає свого найменшого m і найбільшого M значень, тобто $m\le f(x)\le M$. Згідно з теоремою про оцінку визначеного інтеграла, маємо

$$m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

Отже, $$m\le\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}\le M.$$

Позначимо $$\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}=\mu,\ m\le\mu\le M.$$

Число μ знаходиться між найменшим і найбільшим значеннями неперервної функції $f(x)$ на $[a;b]$, тоді існує точка $c\in[a;b]$ така, що $f(c)=\mu.$

Тому $\dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$, а, отже, $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$.

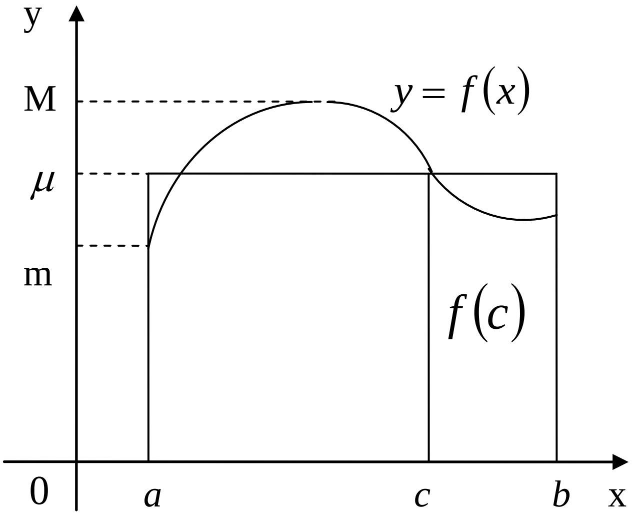


Рис. 7

Остання рівність називається ***формулою середнього значення***, а $f(c)$ – ***середнім значенням функції*** $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. ***Геометричний зміст теореми:*** величина визначеного інтеграла при $f(x) \geq 0$ дорівнює площі прямокутника, висота якого $f(c)$, а основа $b-a$ (рис. 7).

2.4. Обчислення визначеного інтеграла

2.4.1. Формула Ньютона-Лейбніца

Обчислення визначеного інтеграла, як границі інтегральних сум, трудомістке навіть для найпростіших функцій. Але є метод, який дає можливість обчислити визначений інтеграл без знаходження границі інтегральних сум. Цей метод виражається формулою Ньютона-Лейбніца.

Теорема. *Визначений інтеграл неперервної функції дорівнює різниці значень будь-якої її первісної, обчислених у верхній та нижній межах інтегрування.*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (2.8)$$

Формула *(2.8)* називається ***формулою Ньютона-Лейбніца***.

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx.$

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx. = \frac{1}{2} \sin 2x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \sin 2 \cdot 0 \right) = \frac{1}{2}\left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

Розв'язання. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$

Зауваження. Формула Ньютона-Лейбніца справедлива, якщо підінтегральна функція $f(x)$ неперервна. Для розривних функцій формула Ньютона-Лейбніца може і не мати місце.

2.4.2. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Розглянемо спочатку приклад.

Приклад 3. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{x^2 + 4} dx.$

Розв'язання. Визначимо первісну для підінтегральної функції. Зробимо заміну змінної за формулою $x^2+4=t$. Продиференцюємо ліву і праву частини, одержимо $2xdx=dt$, звідси $xdx=\frac{1}{2}dt$.

$$\int x\sqrt{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Отже, однією із первісних буде функція $\frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}$. Застосовуючи тепер формулу Ньютона-Лейбніца, одержимо

$$\int_0^{\sqrt{5}} x\cdot\sqrt{x^2+4}dx.=\frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\left[\left(\left(\sqrt{5}\right)^2+4\right)^{\frac{3}{2}}-\left(0^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[9^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{1}{3}\left[27-8\right]=\frac{19}{3}.$$

Покажемо тепер, що можна спростити обчислення визначеного інтеграла, не повертаючись від нової змінної t до старої змінної x.

Теорема. *Нехай виконуються такі умови:*

1) *функція* $f(x)$ *неперервна на* $[a;b]$;
2) *функція* $x=\varphi(t)$ *неперервна і має неперервну похідну* $x'=\varphi'(t)$ *на відрізку* $[\alpha;\beta]$;
3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ *і значення функції* $x=\varphi(t)$ *не виходять за межі відрізка* $[a;b]$ *при* $t\in[\alpha;\beta]$, *тоді справедлива рівність:*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (2.9)$$

Формула *(2.9)* називається ***формулою заміни змінної або підстановки у визначеному інтегралі.***

Доведення: Нехай $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$.

Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

З іншого боку розглянемо на відрізку $[\alpha;\beta]$ складну функцію змінної t: $\Phi(t)=F[\varphi(t)]$. За правилом диференціювання складної функції $\Phi'(t)=F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$. Отже, $\Phi(t)$ – первісна функції $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$, неперервної на $[\alpha;\beta]$, тому за формулою Ньютона-Лейбніца дістанемо

$$\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi(t)\Big|_\alpha^\beta = \Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=$$
$$=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a).$$

Отже, $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$

Приклад 4. Знайти $\int\limits_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx = \int\limits_1^e (1+\ln x)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{x}dx.$

Розв'язання. Зробимо заміну змінної: $1+\ln x = t$, тоді $\frac{1}{x}dx = dt$.

Визначимо тепер межі інтегрування для нової змінної t:

$x_H = 1$, $t_H = 1+\ln 1 = 1$;

$x_В = e$, $t_B = 1+\ln e = 1+1 = 2$.

$$\int\limits_1^e (1+\ln x)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{x}dx = \int\limits_1^2 t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{t^{4/3}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_1^2 = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\Big|_1^2 = \frac{3}{4}\left(2^{\frac{4}{3}}-1^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{16}-1\right).$$

Приклад 5. Знайти $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx.$

Розв'язання. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 \sin x dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| \left. \begin{array}{ll} x_H = 0 & , \ t_H = \cos 0 = 1 \\ x_B = \dfrac{\pi}{2} & , \ t_B = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= -\int\limits_1^0 t^2 dt = -\frac{t^3}{3}\bigg|_1^0 = -\frac{1}{3}\left[0^3 - 1^3\right] = \frac{1}{3}.$$

Приклад 6. Обчислити $\int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt{1+x}+1}.$

Розв'язання. $\int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt{1+x}+1}$. Зробимо заміну змінної: $\sqrt{1+x} = t$, $1 + x = t^2$.

Продиференцюємо ліву і праву частини: $dx = 2tdt$. Визначимо тепер межі інтегрування для нової змінної t, до старої змінної x більше не повертаємось.

$x_H = 0, \qquad t_H = 1;$

$x_B = 8, \qquad t_B = 3.$

$$\int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt{1+x}+1} = \int\limits_1^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int\limits_1^3 \frac{tdt}{t+1} = 2\int\limits_1^3 \frac{(t+1)-1}{t+1} dt =$$

$$= 2\int\limits_1^3 \frac{t+1}{t+1} dt - 2\int\limits_1^3 \frac{dt}{t+1} = 2\int\limits_1^3 dt - 2\int\limits_1^3 \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t\Big|_1^3 - 2\ln|t+1|\Big|_1^3 = 2(3-1) - 2[\ln 4 - \ln 2] =$$

$$= 4 - 2 \cdot \ln\frac{4}{2} = 4 - 2\ln 2.$$

Зауважимо, що іноді вводимо заміну не $x=\varphi(t)$, а $t=\psi(x)$, при цьому необхідно, щоб функція, обернена до функції $t=\psi(x)$, існувала і для отриманої функції повинні виконуватись умови, за яких виведена формула заміни змінної у визначеному інтервалі.

Приклад 7. Обчислити $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{e^x-1}=t$, тоді $e^x-1=t^2$, $e^x=t^2+1$, $x=\ln(t^2+1)$. Остання обернена функція існує і задовольняє умовам, за яких виведена формула заміни змінної:

$$dx=\frac{2t}{t^2+1},\ x_H=\ln 2,\ t_H=1,\ x_B=2\ln 2,$$

$$t_B=\sqrt{e^{2\ln 2}-1}=\sqrt{e^{\ln 4}-1}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$$

$$\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{2tdt}{t(t^2+1)}=2\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}=2arctgt\Big|_1^{\sqrt{3}}=$$

$$=2\left[arctg\sqrt{3}-arctg1\right]=2\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{6}.$$

2.4.3. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема. *Нехай функції* $u=u(x)$ *і* $v=v(x)$ *неперервні і мають неперервні похідні на відрізку* $[a;b]$*, тоді*

$$\int\limits_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu. \qquad (2.10)$$

Формула *(2.10)* називається ***формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі.***

Доведення. Визначимо диференціал від добутку функцій

$$d[u(x)\cdot v(x)] = d[u(x)]\cdot v(x) + d[v(x)]\cdot u(x) = u'(x)dx\cdot v(x) + v'(x)dx\cdot u(x).$$

Проінтегруємо тепер цю тотожність у межах від a до b.

$$\int_a^b d[u(x)\cdot v(x)] = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b v'(x)u(x)dx.$$

За формулою Ньютона –Лейбніца

$$\int_a^b d[u(x)\cdot v(x)] = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b,$$

тоді

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

з урахуванням $v'(x)dx = dv$; $u'(x)dx = du$, маємо

$$\int_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Приклад 8. Обчислити $\int_1^e x^2 \ln xdx.$

Розв'язання. У цьому інтегралі позначимо $\ln x = u$, $x^2dx = dv$, тоді $\frac{1}{x}dx = du$, $v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}\cdot$ Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int_1^e x^2 \ln xdx = \ln x\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^3\cdot\frac{1}{x}dx. =$$

$$= \ln x\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2dx = \ln x\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^e - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_1^e =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln e\cdot e^3 - \ln 1\cdot 1^3\right) - \frac{1}{9}\left(e^3 - 1^3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1\cdot e^3 - 0\right) - \frac{1}{9}\left(e^3 - 1\right) = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}.$$

Приклад 9. $\int\limits_0^1 xe^{2x}dx.$

Розв'язання.

$$\int\limits_0^1 xe^{2x}dx = \left\{ \begin{array}{ll} x = u, & \textit{тоді} \quad dx = du \\ e^{2x}dx = dv, & v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} =$$

$$= x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1\cdot e^{2\cdot 1} - 0\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2\cdot 1} - e^0\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}.$$

2.5. Геометричне застосування визначених інтегралів

2.5.1. Обчислення площі криволінійної трапеції

За геометричним змістом визначеного інтеграла, визначений інтеграл від невід'ємної неперервної функції $f(x)$ на $[a;b]$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої знизу відрізком $[a;b]$ осі Ox, зверху – графіком функції $y = f(x)$, зліва і справа – вертикальними прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 8).

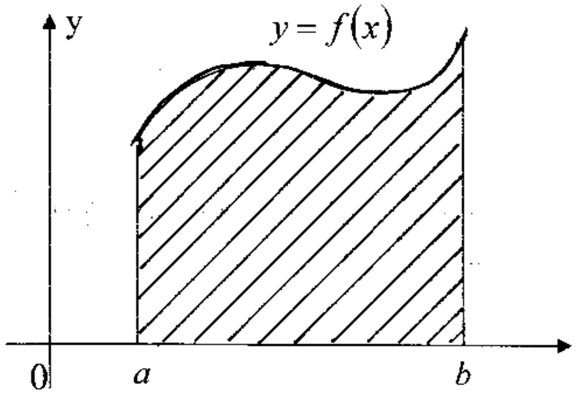


Рис. 8

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

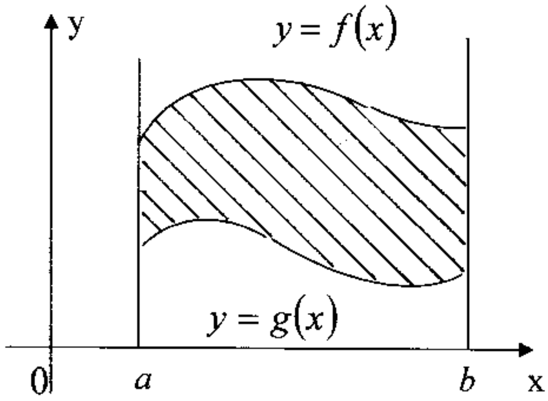


Рис. 9

Нехай криволінійна трапеція (рис. 9) обмежена знизу та зверху графіками неперервних функцій $y=g(x)$ і $y=f(x)$, $g(x)\le f(x)$ при $a\le x\le b$, тоді площу такої плоскої фігури можна знайти за формулою:

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx. \qquad (2.11)$$

Ця формула буде також вірною при будь–яких знаках значень функцій $f(x)$ і $g(x)$, за умови, що $f(x)\ge g(x)$.

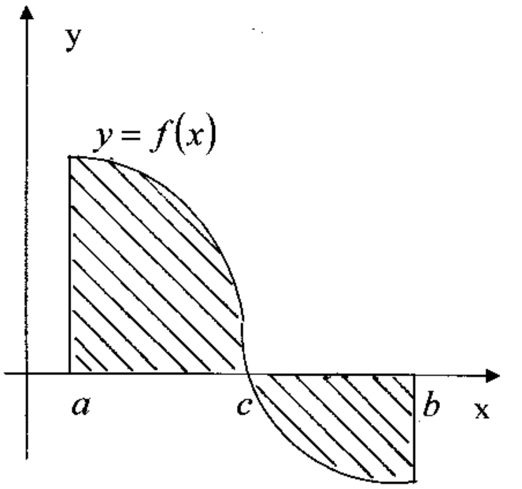


Рис. 10

$$S=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|.$$

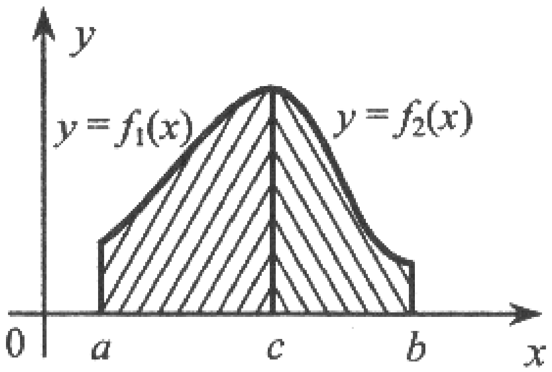


Рис. 11

$$S=\int_a^c f_1(x)dx+\int_c^b f_2(x)dx \qquad \text{(рис.11).}$$

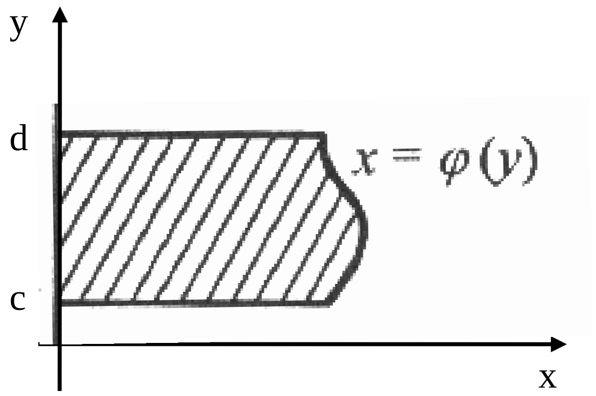


Рис. 12

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy,$$

де функція $x = \varphi(y)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[c;\, d]$ – рис.12.

Приклад 10. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 6x + 7$, $y = x + 1$.

Розв'язання. Перш за все визначимо межі інтегрування – абсциси точок перетину параболи $y = x^2 - 6x + 7$ і прямої $y = x + 1$.

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 7 \\ y = x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 1 = x^2 - 6x + 7 \\ y = x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \quad x_2 = 6 \\ y = x + 1 \end{cases}, \qquad \text{тоді} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ y = 7. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким чином, парабола і пряма перетинаються в точках з координатами: $A(1;\, 2)$, $B(6;\, 7)$;

$x_H = 1$ – нижня межа інтегрування,

$x_B = 6$ – верхня межа інтегрування.

Зробимо рисунок. Для побудови параболи визначимо координати допоміжних точок: перетину з осями координат та вершини параболи.

Перетин з віссю Ox: $y = 0$, $x^2 - 6x + 7 = 0$,

$x_1 = 3 + \sqrt{2}$ $(\approx 4{,}4)$, $x_2 = 3 - \sqrt{2}$ $(\approx 1{,}6)$.

Маємо точки $(3 + \sqrt{2};\ 0)$, $(3 - \sqrt{2};\ 0)$.

Перетин з віссю Oy: $x = 0$, $y = 7$, отже, парабола перетинає вісь ординат у точці $(0;\ 7)$.

$x_{верш} = 3$, $y_{верш} = y(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 7 = 9 - 18 + 7 = -2$

$(3;\ -2)$ – координати вершини параболи.

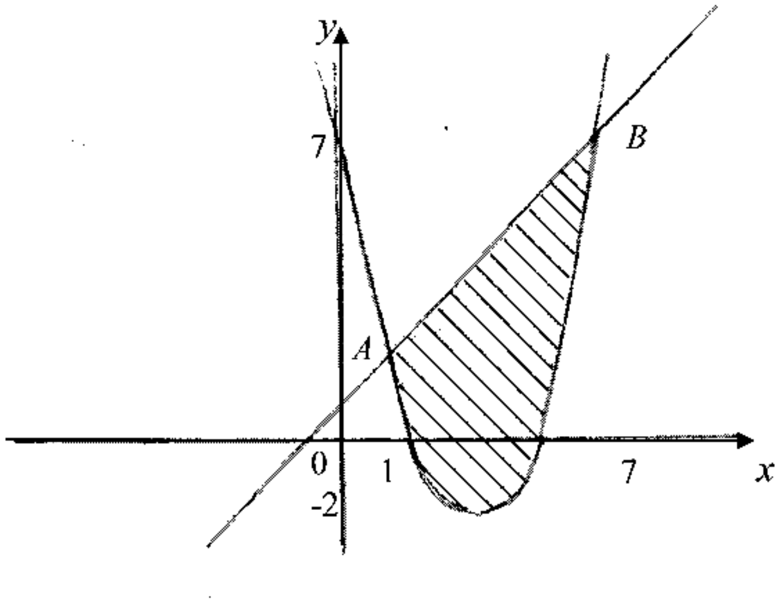


Рис. 13

Для обчислення площі цієї криволінійної трапеції застосуємо формулу:

$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$, де $y = f(x)$ – графік функції, що обмежує криволінійну трапецію зверху, $y = g(x)$ – обмежує знизу.

Як бачимо, криволінійна трапеція зверху обмежена прямою $y = x + 1$, а знизу – параболою $y = x^2 - 6x + 7$ (рис.13).

$$S=\int_1^6\left[x+1-\left(x^2-6x+7\right)\right]dx=\int_1^6\left(-x^2+7x-6\right)dx=$$

$$=-\int_1^6 x^2dx+7\int_1^6 xdx-6\int_1^6 dx=-\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^6+\frac{7}{2}x^2\Bigg|_1^6-6x\Big|_1^6=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(6^3-1^3\right)+\frac{7}{2}\left(6^2-1^2\right)-6(6-1)=$$

$$=-\frac{1}{3}(216-1)+\frac{7}{2}(36-1)-6\cdot 5=-\frac{215}{3}+\frac{7\cdot 35}{2}-30=$$

$$=\frac{-430+735-180}{6}=\frac{125}{6}\,(кв.од.).$$

Приклад 11. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Розв'язання. Еліпс, заданий канонічним рівнянням, симетричний відносно осей координат, а отже шукана площа S дорівнює площі криволінійної трапеції OAB, помноженої на 4 (рис. 14),

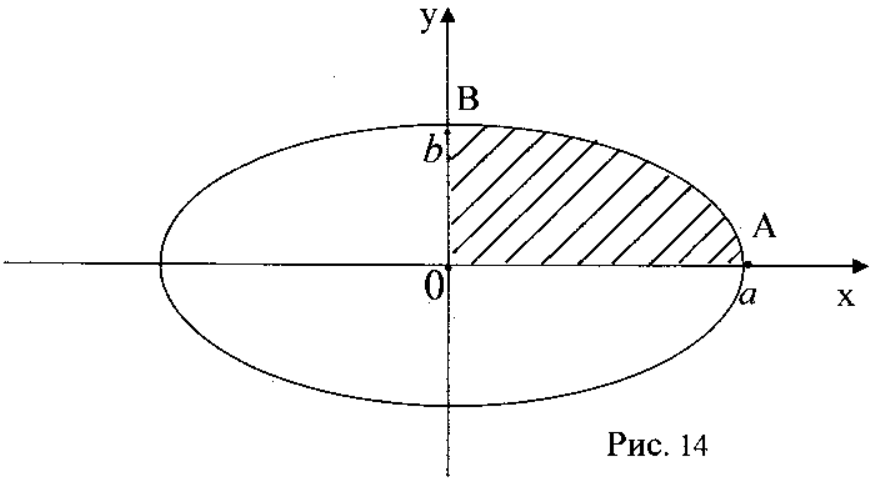


Рис. 14

Із рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ виразимо y через x:

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);\; y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right);\Rightarrow\; y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Площа $S = 4 \cdot \int\limits_0^a y dx = 4\int\limits_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 4\frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$

Зробимо підстановку: $x = a\sin t$, тоді $dx = a\cos t dt$.

Визначимо межі інтегрування для нової змінної $t: x_H = 0$, $0 = a\sin t$, $a \neq 0$, отже, $\sin t = 0$, $t_H = \arcsin 0 = 0$; $x_B = a$, тоді $a = a\sin t$; $\sin t = 1$, $t_B = \frac{\pi}{2}$.

$$S = 4 \cdot \frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = 4 \cdot \frac{b}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t dt =$$

$$= 4\frac{b}{a} \cdot a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}dt =$$

$$= 2ab\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt\right] = 2ab\left[t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] =$$

$$= 2ab\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0)\right] = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \cdot a \cdot b\ (кв.од.).$$

2.5.2. Обчислення об'ємів тіл обертання

Нехай деяке тіло проектується на вісь Ox у відрізок $[a; b]$ (рис. 15).

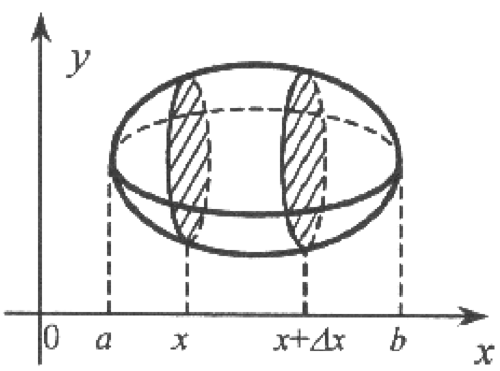


Рис. 15

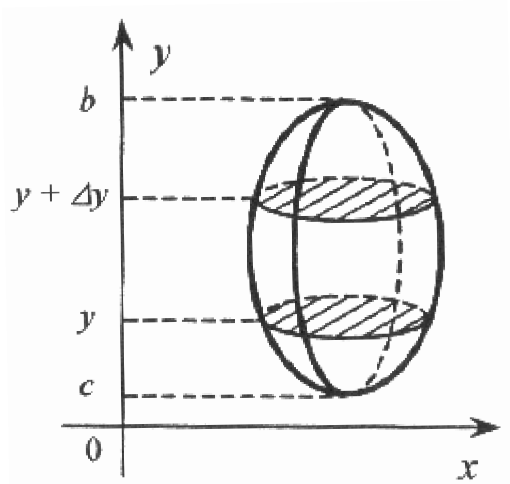


Рис. 16

Нехай відома неперервна функція $S(x)$, яка виражає площу перерізу тіла площиною, що перпендикулярна до осі Ox і проходить через довільну точку x відрізка $[a;b]$. Надамо x приріст Δx таким, щоб $x+\Delta x$ теж належала відрізку $[a;b]$.

Об'єм циліндра з основою $S(x)$ і висотою Δx дорівнює $\Delta V = S(x)\Delta x$.

Приймаємо $dV(x) = S(x)dx$, тоді $V = \int_a^b dV(x)$, отже, $V = \int_a^b S(x)dx$

аналогічно $V = \int_c^d S(y)dy$, якщо фігура проектується на вісь Oy (рис.16).

Нехай дана неперервна та додатна на відрізку $[a;b]$ функція $y = f(x)$. Розглянемо тіло обертання, обмежене площинами $x = a$, $x = b$ і поверхнею обертання кривою $y = f(x)$ навколо осі Ox (рис. 17).

Об'єм такого тіла обертання обчислюється за формулою

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b f^2(x)dx . \qquad (2.12)$$

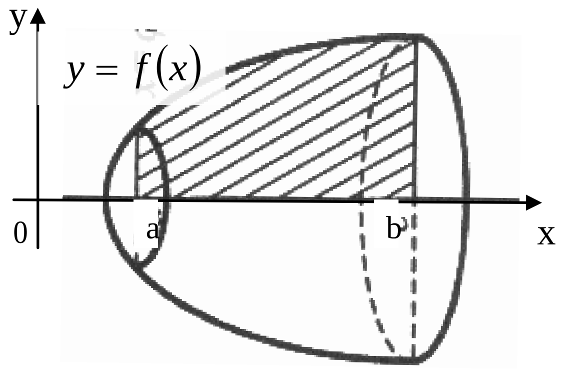


Рис. 17

Об'єм тіла обертання, обмеженого площинами $y = c$, $y = d$ і поверхнею обертання кривої $x = \varphi(y)$ навколо осі Oy (рис.18), обчислюється за формулою:

$$V_{Oy} = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy . \qquad (2.13)$$

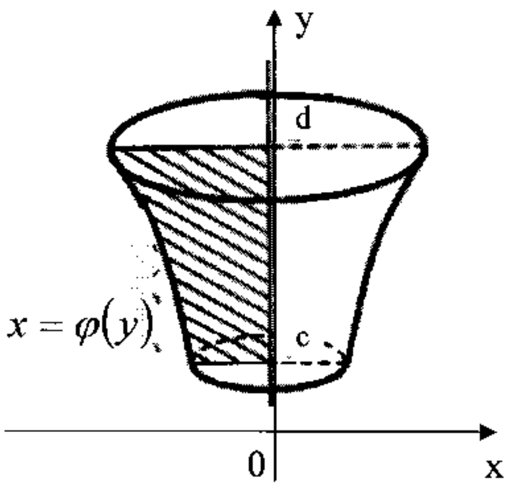


Рис. 18

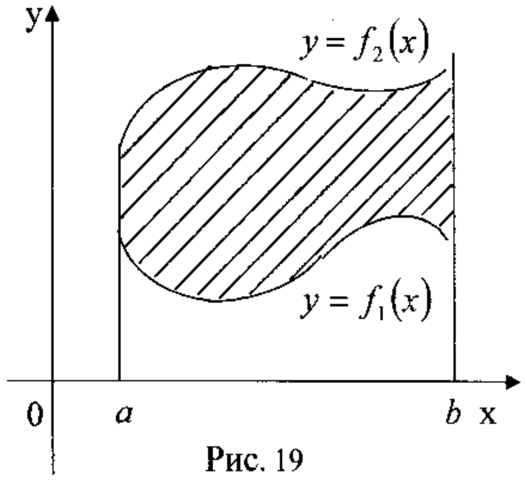


Рис. 19

Якщо фігура (рис.19), обмежена лініями $y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad 0 \le f_1(x) \le f_2(x)$ при $x \in [a; b]$, прямими $x = a$, $x = b$, обертається навколо осі Ox, то об'єм такого тіла обертання обчислюємо за формулою:

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b \left[f_2^{\,2}(x) - f_1^{\,2}(x) \right] dx \qquad (2.14)$$

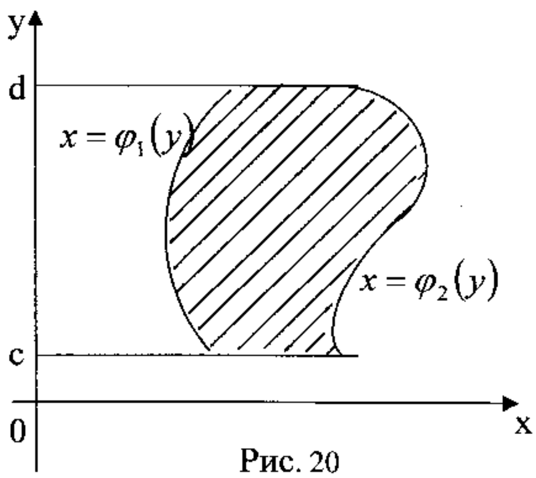


Рис. 20

Аналогічно (рис.20):

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d \left[\varphi_2^{\,2}(y) - \varphi_1^2(y) \right] dy, \qquad (2.15)$$

$0 \le \varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$ при $y \in [c; d]$.

Приклад 12. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі Ox фігури, яка обмежена лініями $y = x^2$ і $x = y^2$.

Розв'язання.

$y = x^2$ і $x = y^2$ – канонічні рівняння парабол, симетричних відповідно осям Oy і Ox. Визначимо межі інтегрування (це абсциси точок перетину парабол), для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2. \end{cases}$ Маємо $\begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x\left(x^3 - 1\right) = 0, \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} y = x^2 \\ x_1 = 0,\ x_2 = 1 \end{cases} \text{, тоді}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким чином, параболи перетинаються в точках з координатами: $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 1)$, рис.21. Межі інтегрування: $x_H = 0$, $x_b = 1$.

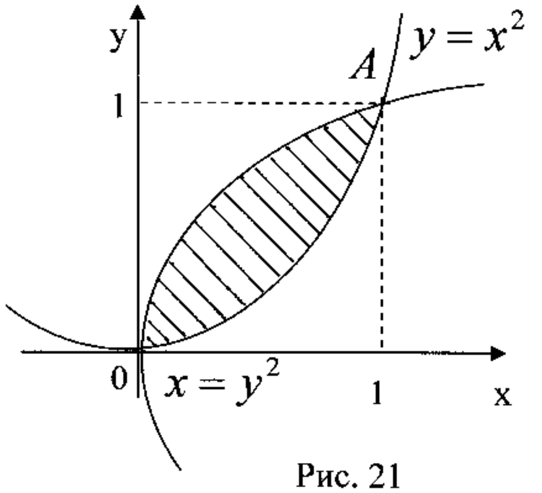


Рис. 21

Оскільки криволінійна трапеція обертається навколо осі Ox, то застосуємо формулу *(2.14)*.

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b \left[f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x) \right] dx.$$

$$V_{Ox} = \pi \int_0^1 \left[x - x^4 \right] dx =$$

$$= \pi \left[\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^4 dx \right] = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 \right] =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}\left(1^2 - 0^2\right) - \frac{1}{5}\left(1^5 - 0^5\right) \right] =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right] = \frac{3}{10} \pi (\text{куб.од.}).$$

Приклад 13. Знайти об’єм чана у формі параболоїда обертання (парабола $y = ax^2$ обертається навколо осі Oy), якщо висота чана дорівнює H, а площа верхнього перерізу S.

Розв’язання.

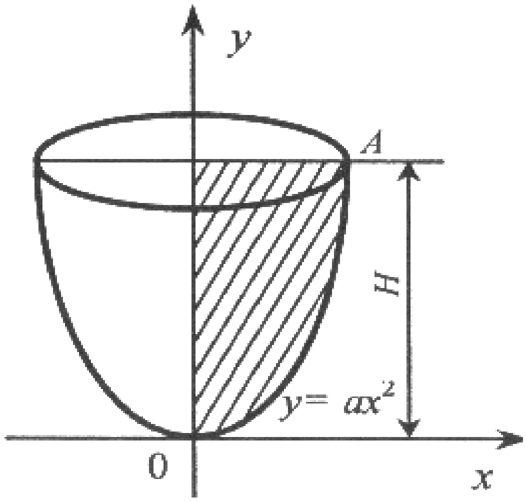


Рис. 22

Визначимо значення параметра a.

Точка A параболи має координати $(x;\, H)$ (рис. 22), тоді $H = ax^2$; $x^2 = \dfrac{H}{a}$.

Площа круга в перерізі чана площиною, перпендикулярною до осі Oy, на висоті H від початку координат дорівнює за умовою S.

Площа круга обчислюється за формулою: $S = \pi R^2$.

$R^2 = x^2 = \dfrac{H}{a}$, тоді $S = \pi \dfrac{H}{a}$, звідки $a = \dfrac{\pi \cdot H}{S}$.

Отже, рівняння параболи $y = \dfrac{\pi \cdot H}{S} \cdot x^2$, звідси $x^2 = \dfrac{y \cdot S}{\pi \cdot H}$.

Об’єм тіла обертання (об’єм чана) обчислюємо за формулою *(2.13)*:

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

$$V_{Oy} = \pi \int_0^H \frac{y \cdot S}{\pi \cdot H} dy = \pi \cdot \frac{S}{\pi \cdot H} \int_0^H y dy =$$

$$= \frac{S}{H} \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^H = \frac{S}{2H}\left(H^2 - 0^2\right) = \frac{1}{2} S \cdot H \;(\text{куб. од.}).$$

Приклад 14. Площа поперечного перерізу стовбура $S(x)$ на відстані x від шийки кореня обчислюється за формулою $S(x) = A + Bx$, де A і B – деякі сталі коефіцієнти. Визначити об'єм стовбура дерева довжиною 23 м, якщо відомо, що на висоті 3 м діаметр стовбура 26,5 см, а на висоті 9 м діаметр стовбура 21,5 см.

Розв'язання. Площа круга $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

При $x = 3\,м,\, d = 26{,}5\,см = 0{,}265\,м$, тоді $S(x) = \dfrac{\pi \cdot 0{,}265^2}{4} = 0{,}0551\,м^2$.

При $x = 9\,м,\; d = 21{,}5\,см = 0{,}215\,м$ $\quad S(x) = \dfrac{\pi \cdot 0{,}215^2}{4} = 0{,}0363\,м^2$.

Оскільки за умовою площа поперечного перерізу обчислюється за формулою $S(x) = A + Bx$, то маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}0551 = A + 3B \\ 0{,}0363 = A + 9B. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему лінійних рівнянь з невідомими A і B, маємо $A = 0{,}0644$, $B = -0{,}0031$, тому $S(x) = 0{,}0644 - 0{,}0031x$.

Об'єм дерев'яного стовбура обчислюється за формулою $V = \int\limits_a^b S(x)dx$.

$$V = \int\limits_0^{23} (0{,}0644 - 0{,}0031)dx = 0{,}0644x\Big|_0^{23} - 0{,}0031\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{23} =$$

$$= 0{,}0644 \cdot 23 - 0{,}0031 \cdot \frac{1}{2} \cdot 23^2 = 1{,}4812 - 0{,}81995 = 0{,}66125\,(м^3).$$

2.6. Фізичне застосування визначеного інтеграла. Обчислення тиску і роботи сили

Скористуємося схемою застосування визначеного інтеграла. Нехай шукана величина Q відповідає відрізку $[a; b]$ зміни змінної x. Знаходимо диференціал функції $Q(x)$. Для цього на відрізку $[a; b]$ фіксуємо точку x. Надамо x малий приріст Δx. На відрізку $[x, x+\Delta x]$ шукаємо приріст $\Delta Q(x)$ функції $Q(x)$. $\Delta Q(x)$ знаходимо наближено, вважаючи, що всі величини в $\Delta Q(x)$ зберігають на відрізку $[x, x+\Delta x]$ стале значення таке, як в точці x. Це наближене значення $\Delta Q(x)$ приймають за $dQ(x)$. Тоді $Q(x) = \int_a^b dQ(x)$.

Приклад 15. Знайти силу тиску води на вертикальний шлюз, який має форму півкруга радіуса a, діаметр якого знаходиться на поверхні води.

Розв'язання.

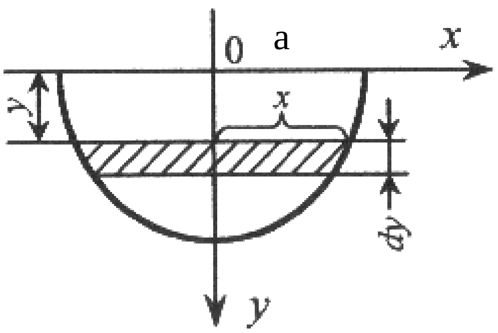


Рис. 23

Від осі Ox на відстані y від початку координат розглянемо смугу, висотою dy (рис. 23). Площа цієї смуги $dS = 2xdy$. Рівняння кола радіуса a з центром у початку координат має вигляд $x^2 + y^2 = a^2$, звідси $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, тоді

$$dS = 2\sqrt{a^2 - y^2}\,dy.$$

Тиск води на цю смугу дорівнює $dP = dS \cdot y \cdot \gamma$, де γ – питома вага води.

$$dP = 2y\gamma\sqrt{a^2 - y^2}\,dy = 2y\sqrt{a^2 - y^2}\,dy \quad (\gamma = 1).$$

Тиск води на шлюз знаходимо за формулою $P = \int_a^b dP$.

$$P=\int_0^a 2y\sqrt{a^2-y^2}\,dy=-\int_0^a \left(a^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(a^2-y^2\right)=-\left.\frac{\left(a^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^a=$$

$$=-\frac{2}{3}\left(a^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=-\frac{2}{3}\left[\left(a^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(a^2-0^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]=-\frac{2}{3}\cdot\left(-a^3\right)=\frac{2}{3}a^3.$$

Аналогічно, якщо A – робота, яку треба знайти, шукаємо диференціал роботи dA, а потім обчислюємо роботу за формулою $A=\int_a^b dA$.

2.7. Визначений інтеграл в економічних задачах

Підкреслимо, що в економічних задачах змінні зазнають змін дискретно. Для використання визначеного інтеграла треба побудувати математичну модель, яка передбачатиме неперервне змінювання залежних змінних (функцій) та незалежних змінних (аргументів).

Приклад 16. Знайти кількість продукції Q, виробленої протягом 8–годинного робочого дня, якщо продуктивність праці змінюється за емпіричною формулою $q=-0{,}6t^2+4{,}8t+9$.

Розв'язання. Формула $q=-0{,}6t^2+4{,}8t+9$ повною мірою відображає реальний процес роботи підприємства (рис. 24): продуктивність спочатку зростає, досягає максимуму в середині робочого дня при $t=4$ *год*, а потім спадає.

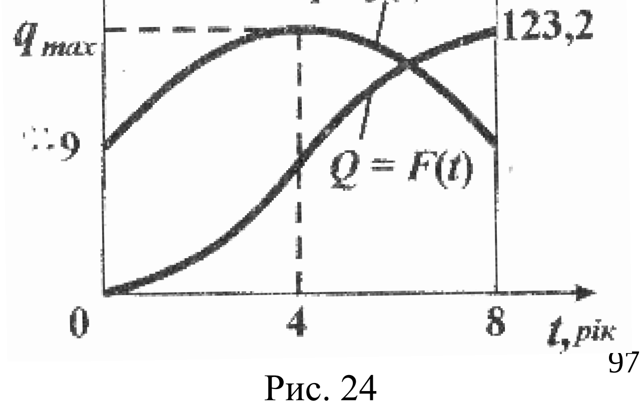


Рис. 24

Припустимо, що продуктивність змінюється протягом дня безперервно, тобто q – неперервна функція аргументу t на відрізку $[0;8]$, денну виробку Q можна обчислити за допомогою визначеного інтеграла: $Q = \int\limits_0^8 q(t)dt = \int\limits_0^8 \left(-0{,}6t^2 + 4{,}8t + 9\right)dt =$

$$= \left(-0{,}6\frac{t^3}{3} + 4{,}8\frac{t^2}{2} + 9t\right)\Bigg|_0^8 = \left(-0{,}2t^3 + 2{,}4t^2 + 9t\right)\Big|_0^8 = 123{,}2.$$

Денна виробка чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції обмеженої зверху кривою $q = f(t)$; друга крива показує зростання випуску продукції за часом (графік первісної $Q = F(t)$ відповідає правій осі ординат Q) (рис. 24). При $t = 4$ маємо точку перегину кривої $F(t)$. У першій половині робочого дня інтенсивність виробки продукції вища, ніж у другій.

Ступінь нерівності в розподілі доходів населення ілюструє так звана крива Лоренца (рис. 25).

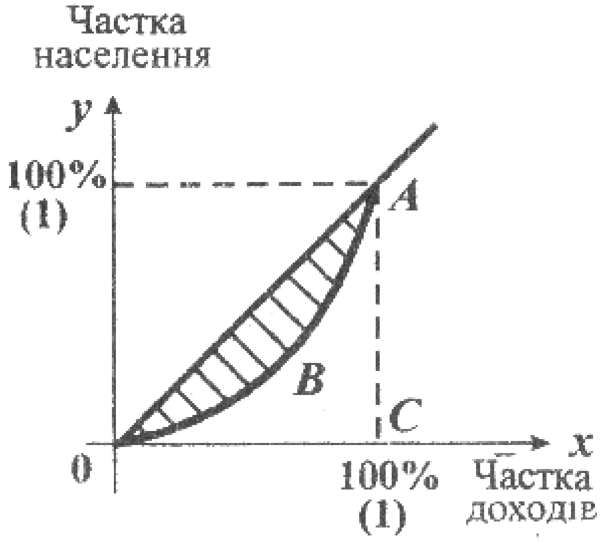


Рис. 25

Крива Лоренца – це графік, в якому по осі абсцис відкладено відсоток населення від найбідніших верств до найбагатших, а по осі ординат – відсоток одержуваного ними доходу. Чим більше відхилення кривої Лоренца від бісектриси першого координатного кута, тим більша нерівність у розподілі доходів країни. Заштрихована область між бісектрисою OA та кривою Лоренца OBA відображає різницю між абсолютно справедливим розподілом (OA) і фактичним (OBA), а відношення площі фігури OBA до площі трикутника OAC називається коефіцієнтом Джині, за допомогою якого нерівність у розподілі доходів характеризують кількісно.

Приклад 17. На підставі досліджень розподілу доходів деякої країни криву Лоренца можна описати рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, де x – частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

Розв'язання. Коефіцієнт Джині дорівнює:

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}, \quad S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2};$$

$$S_{OAC} = S_{\Delta OAC} - S_{OBAC} = \frac{1}{2} - S_{OBAC},$$

тоді $$k = \frac{\frac{1}{2} - S_{OBAC}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2S_{OBAC}.$$

S_{OBAC} визначимо як площу криволінійної трапеції:

$$S_{OBAC} = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx =$$

$$= x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

До інтеграла, що залишився застосуємо метод заміни змінної. Нехай $x = \sin t$, тоді $dx = \cos t dt$; межі інтегрування для нової змінної t:

$$x_H = 0,\ t_H = 0;\ x_B = 1,\ t_B = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt\right] = \frac{1}{2}\left[t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sin \pi - \sin 0\right)\right] = \frac{\pi}{4}.$$

Остаточно $S_{OBAC} = 1 - \frac{\pi}{4}$; $k = 1 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57$.

Під час визначення економічної ефективності капітальних вкладів зустрічаються так звані ***задачі дисконтування***: знаходження початкової суми вкладу Q_0 через термін t, якщо відома кінцева величина Q при відсотковій ставці p.

Формула обчислення кінцевої суми за неперервними відсотками така: $Q = Q_0 \cdot e^{rt}$, $r = 0{,}01p$. Якщо сума Q – також функція часу $f(t)$, то дисконтова сума за термін t буде $Q_0 = f(t) \cdot e^{-rt}$.

Повна дисконтова сума на момент часу t обчислюється за формулою:

$$Q_d = \int_0^t f(t) \cdot e^{-rt} dt .$$

Приклад 18. Визначити дисконтову суму Q_d при $f(t) = Q_0(1 + kt)$, де Q_0 – початкові капіталовкладення, k - щорічна доля їх збільшення.

Розв'язання.

$$Q_d = \int_0^t f(t) \cdot e^{-rt} dt = \int_0^t Q_0(1 + kt) e^{-rt} dt .$$

Застосуємо метод інтегрування частинами:

$u = 1 + kt$, тоді $du = kdt$; $e^{-rt} dt = dv$, $v = \int e^{-rt} dt = -\frac{1}{r} e^{-rt}$.

$$Q_d = \int_0^t Q_0(1 + kt) \cdot e^{-rt} dt = Q_0 \left[(1 + kt) \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) e^{-rt} \Big|_0^t + \frac{k}{r} \int_0^t e^{-rt} dt \right] =$$

$$= Q_0 \left[-\frac{1}{r}(1 + kt) e^{-rt} \Big|_0^t - \frac{k}{r^2} e^{-rt} \Big|_0^t \right] = Q_0 \left[-\frac{1 + kt}{r} e^{-rt} + \frac{1}{r} - \frac{k}{r^2}\left(e^{-rt} - 1\right) \right] =$$

$$= \frac{Q_0}{r} \left[\left(1 + \frac{k}{r}\right) - \left(1 + kt + \frac{k}{r}\right) e^{-rt} \right].$$

З отриманої формули можна зробити деякі висновки.

1. Чим вища відсоткова ставка p (а отже, і r), тим менша дисконтова сума Q_d, отже, вищій доход, що обчислюється як різниця між сумою щорічно зростаючих капіталовкладень за t років та величиною Q_d. Якщо розглядати Q_d як дисконтовий доход, то зростання відсоткової ставки p зменшує рентабельність розміщення капіталу.

2. Зростання інтенсивності щорічних капіталовкладень (k) сприяє зростанню Q_d.

3. Якщо p та k залишаються незмінними, то дисконтовий доход зростає із зростанням кількості років.

У реальних умовах треба враховувати темп інфляції, який у свою чергу визначає раціональну величину проміжку часу t. Безумовно, при високому рівні інфляції вигідно робити капіталовкладення тільки на короткий термін.

2.8. Невласні інтеграли

При означенні визначеного інтеграла, як границі інтегральних сум, передбачалося, що 1) відрізок інтегрування скінченний; 2) підінтегральна функція неперервна. Якщо порушується хоча б одна з цих умов, то означення визначеного інтеграла втрачає зміст. Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до поняття невласного інтеграла. При цьому, якщо порушується умова скінченності відрізка інтегрування, то йдеться про ***невласний інтеграл першого роду*** *(або* ***інтеграл з нескінченними межами інтегрування****)*.

Якщо порушується умова неперервності функції, то йдеться про ***невласний інтеграл другого роду*** (або ***інтеграл від необмеженої підінтегральної функції***).

2.8.1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування

Припустимо, що область інтегрування нескінченна і є, наприклад інтервалом $[a; +\infty)$.

Тоді, навіть, якщо функція $f(x)$ неперервна, то не можемо говорити про інтегральні суми, оскільки за будь-якого розбиття інтервалу $[a; +\infty)$ на кінцеве число частин, одна з цих частин все рівно буде нескінченною.

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $[a; +\infty)$ і інтегрована на будь-якому відрізку $[a; b]$, де $b \geq a$, тобто для будь-якого $b \geq a$ існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Означення. *Якщо існує скінченна границя* $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, *то вона називається невласним інтегралом першого роду функції* $f(x)$ *на інтервалі* $[a; +\infty)$ *і позначається*

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2.16}$$

Якщо існує скінченна границя *(2.16)*, то невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ***збіжний***. Якщо границя не існує або нескінченна, то невласний інтеграл ***розбіжний***.

Аналогічно визначають невласні інтеграли для інших нескінченних інтервалів $(-\infty; b]$, $(-\infty; +\infty)$, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx; \tag{2.17}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (2.18)$$

У лівій частині рівності *(2.18)* невласний інтеграл буде збіжним тоді, коли кожен з інтегралів правої частини збіжний. Якщо хоча б один з інтегралів правої частини розбіжний, то розбіжним буде і інтеграл у лівій частині.

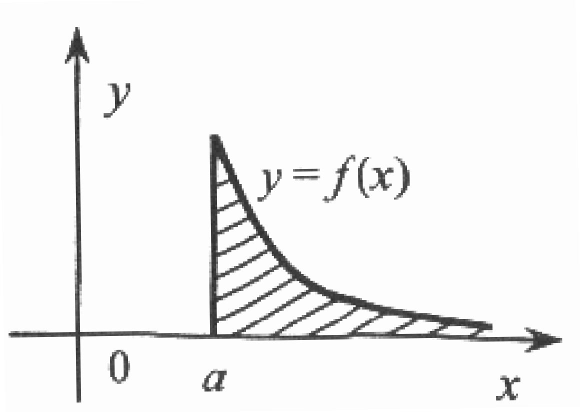


Рис. 26

Геометричний зміст невласного інтеграла першого роду: якщо функція $f(x)$ неперервна та невід'ємна на інтервалі $[a;+\infty)$ і $\int_a^{\infty} f(x)dx$ збіжний, то він виражає площу нескінченної області, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямою $x = a$ (рис.26).

Якщо $f(x)$ – неперервна на $[a;+\infty)$, а $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на цьому проміжку, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[F(b) - F(a)\right] = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(+\infty) - F(a).$$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$ – узагальнена формула Ньютона–Лейбніца.

Зауваження. *Можна показати, що більшість основних властивостей визначених інтегралів зберігається для збіжних інтегралів з нескінченними межами, у тому числі, справедливою буде і формула заміни змінної.*

Приклад 19. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\cos xdx$.

Розв'язання.

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\cos xdx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\cos xdx=\lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_{0}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\sin b-\sin 0\right]=\lim_{b\to+\infty}\left[\sin b-0\right]=\lim_{b\to+\infty}\sin b.$$

Границя не існує, тому невласний інтеграл розбіжний.

Приклад 20. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^4}$.

Розв'язання. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^4}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{xdx}{1+\left(x^2\right)^2}$.

Застосуємо метод заміни змінної: нехай $x^2=t$, тоді $2xdx=dt$, $xdx=\frac{1}{2}dt$.

Якщо x змінюється від 1 до b, то t змінюється від 1 до b^2.

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{xdx}{1+\left(x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b^2}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}arctgt\Big|_{1}^{b^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[arctgb^2-arctg1\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{8}.$$

Отже, невласний інтеграл збіжний і дорівнює $\frac{\pi}{8}$.

Приклад 21. Обчислити $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

Розв'язання.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b (\ln x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \ln x = t, & \frac{1}{x} dx = dt; \\ x_H = 1, & t_H = \ln 1 = 0 \\ x_B = b, & t_B = \ln b \end{array} \right\} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^{\ln b} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} \lim_{b \to +\infty} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\ln b} = \frac{2}{3} \lim_{b \to +\infty} \left((\ln b)^{\frac{3}{2}} - 0 \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{b \to +\infty} (\ln b)^{\frac{3}{2}} = +\infty,$$

таким чином, невласний інтеграл розбіжний.

2.8.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $[a; b)$, а при $x = b$ має розрив; інтегровна на будь-якому відрізку $[a; b - \varepsilon]$, де $0 < \varepsilon < b - a$, тобто існує $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$.

Означення. *Якщо існує скінченна границя* $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$, *то ця границя називається невласним інтегралом другого роду функції* $f(x)$ *(невласним інтегралом від необмеженої функції) на інтервалі* $[a; b)$ *і позначається*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \qquad (2.19)$$

У цьому випадку невласний інтеграл другого роду $\int_a^b f(x) dx$ існує або збіжний, а функція $f(x)$ називається інтегровною на інтервалі $[a; b)$.

Якщо границя $\int\limits_a^b f(x)dx$ нескінченна або не існує, невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називається розбіжним. Аналогічно визначають невласний інтеграл у тих випадках, коли підінтегральна функція невизначена, або має розрив при $x = a$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \tag{2.20}$$

або при $x = c$, $c \in (a; b)$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to +0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx, \tag{2.21}$$

причому в лівій частині рівності *(2.21)* невласний інтеграл збіжний тоді і лише тоді, коли існує і скінченна кожна з границь правої частини.

Геометричний зміст невласного інтеграла другого роду: невласний інтеграл другого роду невід'ємної функції $f(x)$ виражає площу нескінченної криволінійної трапеції (рис. 27).

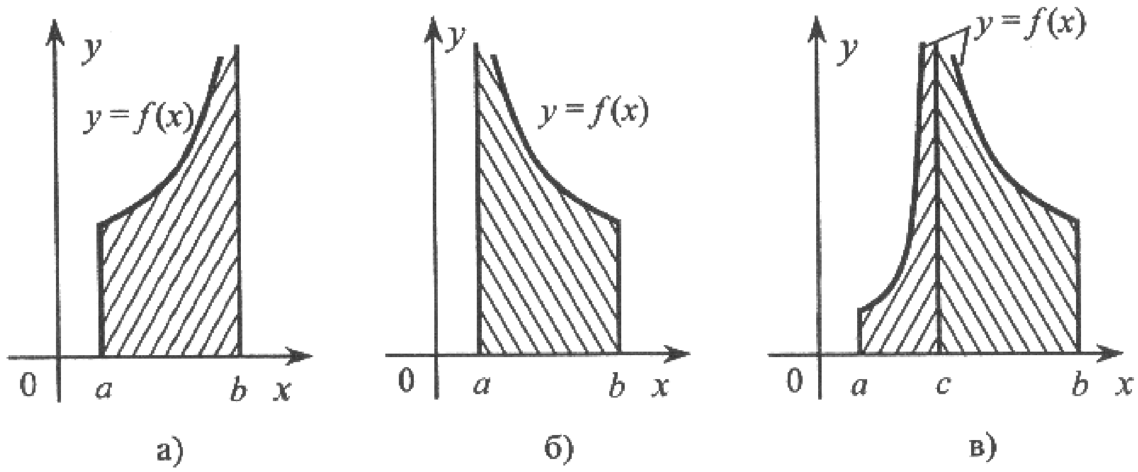


Рис. 27

Приклад 22. Обчислити $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція на $[0;1]$ невизначена при $x=0$. За формулою *(2.20)* дістанемо:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{3}{2}}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_{0+\varepsilon}^1 = -2\lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{1}{\sqrt{x}}\right|_{0+\varepsilon}^1 =$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to+0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{0+\varepsilon}}\right) = -2+2\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\sqrt{0+\varepsilon}} = \infty,$$

отже, заданий інтеграл розбіжний.

Приклад 23. Обчислити $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. При $x=1$ функція невизначена. Застосуємо формулу *(2.19)*, тоді будемо мати:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Даний інтеграл збіжний.

2.9. Ознаки збіжності невласних інтегралів

У деяких випадках необов'язково обчислювати невласний інтеграл, а достатньо лише знати: збіжний цей інтеграл чи розбіжний. Тоді корисно порівняти даний невласний інтеграл з іншим невласним інтегралом, збіжність або розбіжність якого відома. Наведемо ознаки збіжності, які будуються на порівнянні невласних інтегралів.

Теорема. *Нехай при* $x \geq a$ *функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *неперервні і* $0 \leq g(x) \leq f(x)$.

Тоді: 1) якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *збіжний, то збіжним буде також* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$*;*

2) якщо $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *розбіжний, то інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *теж розбіжний.*

Приклад 24. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \cdot e^x}$.

Розв'язання. Порівняємо підінтегральну функцію з функцією $\frac{1}{x^2}$. При

$x \geq 1 \qquad \frac{1}{x^2 e^x} < \frac{1}{x^2}$.

$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x^2}dx = -\lim\limits_{b \to +\infty} x^{-1}\Big|_1^b = -\lim\limits_{b \to +\infty}\left[\frac{1}{b} - 1\right] = 1$ – інтеграл збіжний.

Оскільки $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ збіжний, то і даний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 e^x}$ теж збіжний.

Теорема. *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *в інтервалі* $[a; b)$ *неперервні і задовольняють нерівностям* $0 \leq g(x) \leq f(x)$*, а в точці* $x = b$ *мають розрив.*

Тоді: 1) якщо інтеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ *збіжний, то збіжним буде також* $\int\limits_a^{b} g(x)dx$*;*

2) якщо $\int\limits_a^{b} g(x)dx$ *розбіжний, то інтеграл* $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ *також буде розбіжним.*

Приклад 25. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^3}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція неперервна на інтервалі $[0;1)$, а в точці $x=1$ має нескінченний розрив.

Порівняємо підінтегральну функцію з функцією $\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}}$, яка також неперервна в інтервалі $[0;1)$ і має нескінченний розрив у точці $x=1$. Оскільки для $0 \le x < 1$ справедлива нерівність $x^3 \le x$, отже $1-x^3 \ge 1-x$. Тоді $\sqrt[5]{1-x^3} \ge \sqrt[5]{1-x}$, тому $\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^3}} \le \frac{1}{\sqrt[5]{1-x}}$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)^{1/5}} = -\lim_{\varepsilon\to+0} \left. \frac{(1-x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} \right|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= -\frac{5}{4} \lim_{\varepsilon\to+0} \left[(1-1+\varepsilon)^{\frac{4}{5}} - (1-0)^{\frac{4}{5}} \right] = \frac{5}{4}.$$

Останній інтеграл –збіжний, тоді збіжним буде і даний інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^3}}$.

2.10. Інтеграл Пуассона

Інтеграл виду $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx$ має спеціальну назву – ***інтеграла Пуассона*** і відіграє важливу роль у теорії ймовірностей. Графіком підінтегральної функції $y = e^{-x^2}$ є крива Гаусса (рис. 28).

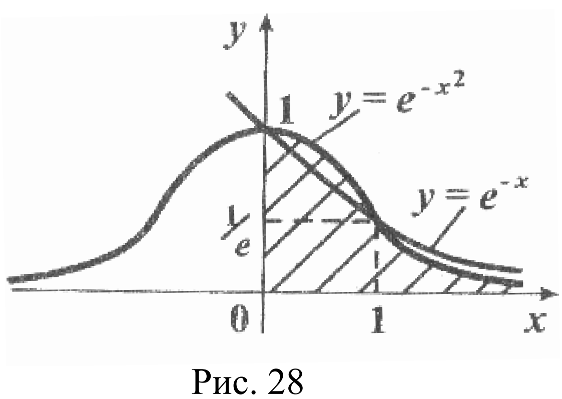


Рис. 28

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx + \int\limits_1^\infty e^{-x^2} dx.$$

Перший у цій сумі не є невласним. Він чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої кривою Гаусса на відрізку $[0;1]$ і виражається скінченним числом. Розглянемо $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$. Для підінтегральної функції виконується нерівність $0 < e^{-x^2} \le e^{-x}$ при $x \ge 1$.

$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b e^{-x} dx = -\lim_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_1^b = -\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{e^b} - \frac{1}{e}\right] = \frac{1}{e}$ – збіжний, тоді збіжним буде і інтеграл $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$, а отже, інтеграл Пуассона теж збіжний.

Інтеграл Пуассона $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ дорівнює площі фігури, заштрихованої на рис. 28.

Без доведення наведемо результат: $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2.11. Наближені обчислення визначеного інтеграла

Нехай треба обчислити $\int_a^b f(x)dx$ від неперервної функції $f(x)$. Якщо ми можемо знайти первісну $F(x)$ підінтегральної функції, то за формулою Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Якщо первісна $F(x)$ не може бути визначена, оскільки вона не виражається через елементарні функції, або якщо функція $y = f(x)$ задана графічно чи таблично, то для обчислення інтеграла застосовують наближені формули. У найпростіших випадках отримання наближених формул базується на геометричному змісті визначеного інтеграла, оскільки його можна тлумачити як площу криволінійної трапеції.

2.11.1. Метод трапецій

Нехай треба обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a;\, b]$, графік якої зображено на рис. 29.

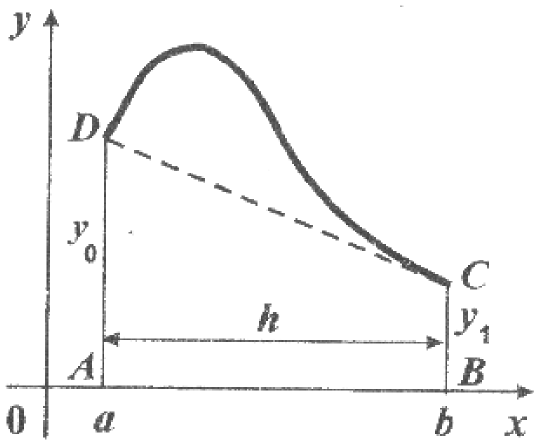


Рис. 29

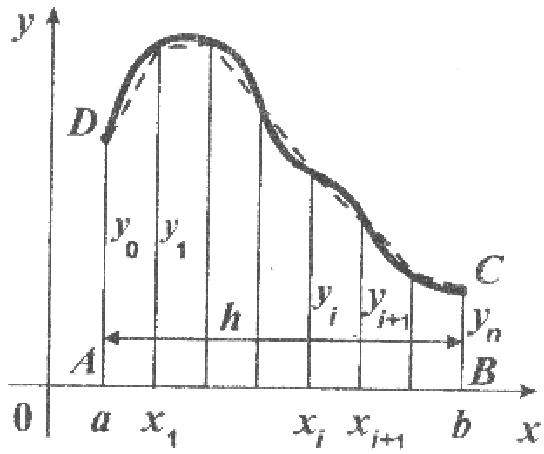


Рис. 30

Криву CD можемо замінити її хордою, а криволінійну трапецію – звичайною трапецією, площа якої буде

$$S = \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a) = \frac{b-a}{2}(y_0+y_1) = \frac{h}{2}(y_0+y_1).$$

Таким чином, приходимо до наближеної формули

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(y_0+y_1).$$

Ця формула дає грубе наближення. Для того, щоб дістати більш точну формулу, відрізок $[a;\, b]$ розіб’ємо на n рівних частин точками $a = x_0,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_i,\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_n = b$ і проведемо відповідні цим точкам ординати. Вони розіб’ють криволінійну трапецію на n криволінійних трапецій, кожну з яких замінимо трапецією (рис. 30).

Висота всіх трапецій дорівнює $\dfrac{b-a}{n}$.

Позначимо $f(a)=y_0$, $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, …, $f(x_{n-1})=y_{n-1}$, $f(b)=y_n$

і визначимо площі трапецій: $\dfrac{b-a}{2n}(y_0+y_1)$, $\dfrac{b-a}{2n}(y_1+y_2)$, …, $\dfrac{b-a}{2n}(y_{n-1}+y_n)$.

Площа фігури, обмеженої зверху ламаною, дорівнює

$$S=\frac{b-a}{2n}\left(y_0+y_1+y_1+y_2+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1}+y_n\right),$$

або $S=\dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)$.

Отже, маємо таку наближену формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right). \qquad (2.22)$$

Ця формула називається ***формулою трапецій***. Чим більше число n точок поділу $[a;b]$, тим точніша формула трапецій.

Приклад 26. Знайти за формулою трапецій інтеграл $\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x}$, розділивши відрізок $[0;1]$ на $n=10$ рівних частин .

Розв'язання. Обчислимо спочатку $\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x}$ користуючись формулою Ньютона-Лейбніца: $\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x}=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2-0=\ln 2\approx 0{,}69315$

.

Застосуємо тепер формулу трапецій. При $n=10$, $h=\dfrac{b-a}{10}=\dfrac{1-0}{10}=0{,}1$.

Складемо та заповнимо таблицю:

i	x_i	$y_i = \dfrac{1}{1+x_i}$
0	0	1
1	0,1	0,90909
2	0,2	0, 83333
3	0,3	0,76923
4	0,4	0,71426
5	0,5	0,66666
6	0,6	0,625
7	0,7	0,58824
8	0,8	0,55555
9	0,9	0,52632
10	1	0,5

Підставимо отримані значення у формулу трапеції, дістанемо

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1+0{,}5}{2}+6{,}18768\right)=0{,}69376.$$

Наближений результат відрізняється від точного менше, ніж на 0,0007.

Взагалі похибку при обчисленні визначеного інтеграла за формулою трапецій можна оцінити як $\delta \le \max\limits_{a\le\xi\le b}\left| f^{(n)}(\xi)\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}\right|$.

2.11.2. Метод Сімпсона (метод параболічних трапецій)

Знов розглянемо криволінійну трапецію $ABCD$. Основу AB цієї криволінійної трапеції розіб’ємо навпіл точкою E, проведемо відповідну їй ординату EF (рис. 31).

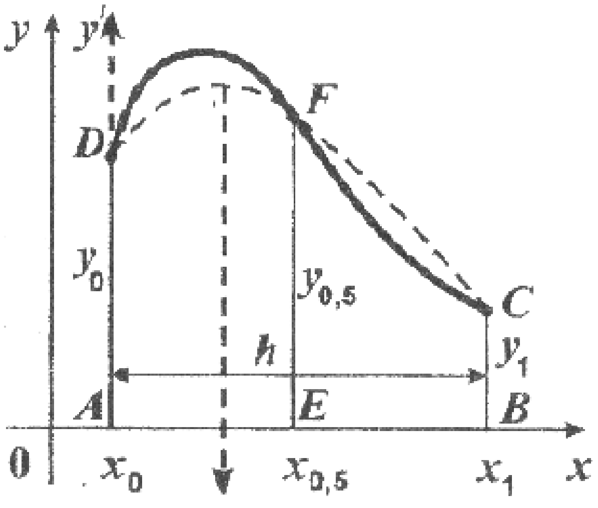


Рис. 31

Ординати $AD = y_0$, $EF = y_{0,5}$, $BC = y_1$, $AB = h$.

Замість хорд CF і FD проведемо криву у вигляді параболи, що проходить через точки C, F, D, рівняння якої $y = ax^2 + bx + c$.

Коефіцієнти a, b, c знаходяться з умови проходження параболи через точки C, F, D.

Перенесемо початок координат у точку A, отримаємо $x_0 = 0$, $x_{0,5} = \frac{h}{2}$, $x_1 = h$, тоді $y_0 = c$, $y_{0,5} = a\frac{h^2}{4} + b\frac{h}{2} + c$, $y_1 = ah^2 + bh + c$.

Площу фігури, обмеженої зверху дугою параболи, визначимо як

$$S = \int_0^h \left(ax^2 + bx + c\right)dx = a\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h + b\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^h + cx\Big|_0^h =$$

$$= a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch = \frac{h}{6}\left(2ah^2 + 3bh + 6c\right)$$

або

$$S = \frac{h}{6}\left(y_0 + 4y_{0,5} + y_1\right),\ h = b - a.$$

Тоді $$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(y_0 + 4y_{0,5} + y_1\right). \qquad (2.23)$$

Для того, щоб збільшити точність, розіб'ємо проміжок $[a; b]$ на n рівних частин, а криволінійну трапецію $ABCD$ на n смужок, і до кожної з них застосуємо формулу *(2.23)*, після чого одержимо таку наближену формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + 4(y_{0,5} + \ldots + y_{n-0,5})\right] \quad (2.24)$$

Остання формула називається ***формулою Сімпсона.***

Приклад 27. Обчислити за формулою Сімпсона $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, розділивши відрізок $[0; 1]$ на $n = 10$ рівних частин.

Розв'язання. Заповнимо таблицю:

i	x_i	y_i
0	0	1
0,5	0,05	0,95238
1	0,1	0,90909
1,5	0,15	0,86956
2	0,2	0, 83333
2,5	0,25	0,8
3	0,3	0,76923
3,5	0,35	0,74074
4	0,4	0,71426
4,5	0,45	0,68965
5	0,5	0,66666
5,5	0,55	0,64516
6	0,6	0,625
6,5	0,65	0,60606
7	0,7	0,58824
7,5	0,75	0,57142
8	0,8	0,55555
8,5	0,85	0,54054
9	0,9	0,52632

9,5	0,95	0,51282
10	1	0,5

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx \frac{1-0}{6\cdot 10}\left[(1+0,5)+2\cdot 6,18768+4\cdot 6,92833\right]=0,69314.$$

2.12. Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення визначеного інтеграла функції на заданому відрізку.
2. Який геометричний зміст визначеного інтеграла?
3. Сформулюйте теорему існування визначеного інтеграла.
4. Які властивості визначеного інтеграла?
5. Сформулюйте теорему про оцінку визначеного інтеграла.
6. Наведіть формулу Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла.
7. Сформулюйте теорему про заміну змінної у визначеному інтегралі.
8. Як інтегрується частинами визначений інтеграл?
9. Дайте означення невласного інтеграла по нескінченному проміжку. Який його геометричний зміст?
10. Що ви знаєте про невласні інтеграли другого роду?
11. Які ознаки збіжності невласних інтегралів ви знаєте?
12. Як обчислити площу криволінійної трапеції за допомогою визначеного інтеграла?
13. Як обчислюються об’єми тіл обертання за допомогою визначеного інтеграла?
14. Наведіть приклади застосування визначеного інтеграла в економічних задачах.
15. Які наближені методи обчислення визначеного інтеграла?

2.13. Задачі для самостійної роботи

Задачі 1–20. Обчислити визначені інтеграли:

1\. а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{3}\right)dx$;

б) $\int\limits_{3}^{9}\frac{\ln x}{x}dx$;

в) $\int\limits_{0}^{2}x2^{x}dx$;

2\. а) $\int\limits_{0}^{0,5}\frac{12dx}{(4x-3)^{4}}$;

б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1+x^{4}}$;

в) $\int\limits_{0}^{1}\arcsin xdx$;

3\. а) $\int\limits_{4}^{49}\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-1\right)dx$;

б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi}x\cos xdx$;

4\. а) $\int\limits_{-8}^{2}\sqrt[4]{8x+65}dx$;

11\. а) $\int\limits_{0}^{2}\frac{12^{x}-7\cdot 2^{x}}{4^{x}}dx$;

б) $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^{2}x}{x}dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx$;

12\. а) $\int\limits_{0,5}^{2}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^{2}xdx$;

в) $\int\limits_{0}^{1}\ln(x+1)dx$;

13\. а) $\int\limits_{-4}^{-1}\frac{2x^{2}+x-3}{x}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{x}dx}{1+e^{2x}}$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{x}\cos xdx$;

14\. а) $\int\limits_{1}^{4}\left(x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

в) $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$;

5. а) $\int\limits_{-2}^2 \left(7^{2x}+\cos 2\pi x\right)dx$;

б) $\int\limits_1^8 \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2}}$;

в) $\int\limits_1^2 x\log_2 xdx$;

6. а) $\int\limits_{-2}^{-1} \left(x^2+\frac{6}{x}\right)dx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 xdx$;

в) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$;

7. а) $\int\limits_{-2}^1 \left(x^2+x\right)^2 dx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx$;

в) $\int\limits_1^e x^3 \ln xdx$;

б) $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3^{x^2}}dx$;

в) $\int\limits_0^3 (x-3)e^{-2x}dx$;

15. а) $\int\limits_{-2}^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;

б) $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x^2+2x-3}$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} x\cos xdx$;

16. а) $\int\limits_{-1}^1 \left(1+\sqrt[3]{2x}\right)dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $\int\limits_0^{-\pi} x\sin 2xdx$;

17. а) $\int\limits_1^4 \left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)^2$;

б) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

в) $\int\limits_0^1 (x-1)e^{-x}dx$;

8. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \sin 3x \sin x dx$;

б) $\int\limits_{1}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;

в) $\int\limits_{1}^{e} x^2 \ln x dx$;

9. а) $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^2 - x + 2}{x^4} dx$;

б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi} e^x \sin x dx$;

10. а) $\int\limits_{0}^{\ln 4} \left(e^{2x} + 2\right)^2$;

б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $\int\limits_{1}^{9} \sqrt{x} \ln x dx$;

18. а) $\int\limits_{0}^{\pi} 2\sin^2 \frac{x}{2} dx$;

б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$;

19. а) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$;

б) $\int\limits_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$;

в) $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1) dx$;

20. а) $\int\limits_{4}^{49} \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 1\right) dx$;

б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{3^{x^2}} dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$.

Задачі 21–40. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями. Зробити рисунок.

21. $y = 4 - x^2$; $y = x^2 - 2x$.

22. $y = 1 - \cos x$; $y = \cos x$.

23. $y = x^2$; $y = \frac{1}{x}$; $x = 3$.

24. $y = \frac{4}{x^2}$; $y = 7 - 3x$.

25. $y = \sqrt{x}$; $y = \frac{1}{x}$; $x = 4$.

26. $y = -x^2 + 6x - 5$; $y = x - 5$.

27. $y = \frac{7}{x}$; $x + y = 8$.

28. $y = -x^2 - 6x - 5$; $y = -x - 5$.

29. $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$; $x - 2y + 9 = 0$.

30. $y = x^2 - 3x - 1$; $y = -x^2 - 2x + 5$.

31. $y = \frac{4}{x}$; $y = 1$; $y = x + 3$.

32. $y = \sin x$; $y = \cos x$; $x = -\frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$.

33. $y = x^2 - 6x + 7$; $y = x + 1$.

34. $y = x^2$; $xy = 8$, $x = 6$.

35. $y = x^3$; $y = 2x$, $y = x$.

36. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$; $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3$.

37. $y = x^2 - 6x + 9$; $\frac{x}{3} - \frac{y}{12} = 1$.

38. $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $y = 4$.

39. $y = \sin x$; $y = \cos x$; $x = 0$.

40. $y = \frac{1}{4}(x-2)^2$; $x - 2y + 10 = 0$.

Задачі 41–60. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо заданої осі фігури, обмеженої лініями. Зробити рисунок.

41. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$; вісь Ox.

42. $y = x^3$, $y = 8$, вісь Oy.

43. $y = \dfrac{8}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$, вісь Ox.

44. $y^2 = x$, $x^2 = y$, вісь Oy.

45. $y = 4 - x^2$, $2x + y - 4 = 0$ вісь Ox.

46. $x = y^2$, $x = 1$, $y = 0$, вісь Oy.

47. $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$, вісь Ox.

48. $y = \dfrac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 2$, вісь Oy.

49. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$; вісь Ox.

50. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$; вісь Oy.

51. $y = 5x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$; вісь Ox.

52. $x^2 - y^2 = 4$, $y = -2$, $y = 2$; вісь Oy.

53. $y = 4x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$; вісь Ox.

54. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$; вісь Oy.

55. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$; вісь Ox.

56. $y = 5 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$; вісь Ox.

57. $y = 9 - x^2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$; вісь Ox.

58. $y = 4x$, $y = x^3$, $x \geq 0$; вісь Ox.

59. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{3}$; вісь Ox.

60. $y = x^2$, $y = -x + 3$; вісь Ox.

Задачі 61–80. Обчислити інтеграл або довести його розбіжність.

61. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

62. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$;

63. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$;

64. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^4}$;

65. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x+3}{x^2+2x+5}dx$;

66. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

67. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$;

68. $\int\limits_{5}^{\infty} \frac{dx}{x^2-8x+17}$;

69. $\int\limits_{0}^{\infty} x^2e^{-x^3}dx$;

70. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$;

71. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;

72. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$;

73. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\frac{x}{2}}dx$;

74. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x}dx$;

75. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$;

76. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

77. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^3dx}{1+x^4}$;

78. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

79. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$;

80. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Рекомендована література

1. Барковський В.В. Вища математика для економістів: навч. посіб. / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. – К.: Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.
2. Дубовик В.П. Вища математика / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
3. Вища математика: Підручник: У 2 кн. Кн. 1. Основні розділи / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. – 400с.
4. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. – К.: А.С.К., 2005. – 480 с.
5. Кагадій Т.С. Інтегральне числення: навч. посіб. / Т.С. Кагадій, Л.Ф. Сушко, В.Б. Говоруха. – Дніпро: ДДАЕУ, 2018. – 117 с.
6. Тіман М.П. Математичні поняття для інженерів: навч. посіб, Дніпропетровськ: «Поліграфіст», 1999. – 224 с.
7. Сушко С.О. Математика для економічних спеціальностей: навч. посіб. / С.О.Сушко, Л.Я.Фомичова, Т.С.Кагадій. – Дніпропетровськ: НГА України, 1999. – 375 с.
8. https://www.yakaboo.ua/knigi/uchebnaja-literaura-pedagogika/studentam-i-aspirantam/matematika/vysshaja-matematika.html