МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Т.С. КАГАДІЙ, Л.Ф. СУШКО, І.В. ЩЕРБИНА,
О.Д. ОНОПРІЄНКО, А.Г. ШПОРТА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ: ТЕОРІЯ, ПРИКЛАДИ, РОЗВ'ЯЗАННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Дніпро 2022

УДК 517.3(075.8)

Кагадій Т.С., Сушко Л.Ф., Щербина І.В., Оноприєнко О.Д., Шпорта А.Г. Диференціальні рівняння: теорія, приклади, розв'язання: навч. посіб. Дніпро: ДДАЕУ, 2022. 190с.

Навчальний посібник містить розділи дисципліни «Вища математика»: «Диференціальні рівняння І порядку», «Диференціальні рівняння ІІ порядку», «Системи диференціальних рівнянь», «Застосування диференціальних рівнянь до розвязку задач». Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв'язанням типових задач і задач підвищеної складності.

Розраховано на здобувачів вищої освіти спеціальностей 192 «Будівництво та цивільна інженерія» та 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» денної та заочної форм навчання.

Укладачі:
Т.С. Кагадій, д. ф.-м. н., проф. каф. прикладної математики
НТУ «Дніпровська політехніка»
Л.Ф. Сушко, ст. викл. каф. вищої математики та фізики
І.В. Щербина, к. ф.-м. н., доц. каф. вищої математики та фізики
О.Д. Оноприєнко, PhD, доц. каф. теоретичної механіки, опору матеріалів та матеріалознавства
А.Г. Шпорта, к. ф.-м. н., доц. каф. прикладної математики
НТУ «Дніпровська політехніка»

Рецензенти:
А.Є. Шевельова, докт. фіз.-мат. наук, проф. (ДНУ ім. О. Гончара)
О.В. Білова, канд. фіз.-мат. наук, доц. (УДУНТ)
А.В. Ткачук, канд. техн. наук, доц. (ДДАЕУ)

Розглянуто на засіданні кафедри вищої математики та фізики
(Протокол № 15 від 10.05.2022 р.).

Схвалено науково-методичною радою факультету водогосподарської інженерії та екології
(Протокол № 5 від 25.05.2022 року).

Ухвалено науково – технічною радою ДДАЕУ як навчальний посібник (протокол №__8___ від 22.06.2022)

ВСТУП

Надзвичайно важливою формою навчання здобувачів вищої освіти є самостійна робота, що складається з вивчення теоретичних положень за підручником, розгляду прикладів та розв'язування задач. Під час вивчення матеріалу за підручником перехід до наступної теми можливий тільки після повного розуміння попередньої й відповідного виконання на папері всіх прикладів, перетворень та обчислень.

Розв'язування задач з дисципліни «Вища математика» пов'язане з багатьма труднощами. Здобувачам необхідні консультації щодо методів розв'язання задач і без допомоги викладача або відповідного підручника процес навчання є занадто складним і нераціональним. Запропонований посібник призначений для студентів, які цікавляться вищою математикою і прагнуть поглибити свої знання з цього предмету.

Мета посібника:

- сформувати й розвинути математичне мислення, набути практичних навичок при розв'язуванні нестандартних задач;
- не виходячи за рамки програми курсу для технічних спеціальностей, допомогти здобувачам вищої освіти самостійно вивчити нові прийоми та методи розв'язання, а також ознайомитися з деякими новими теоретичними відомостями.

Навчальний посібник складається з п'яти розділів; на початку кожного них подано теоретичні відомості за темою, основні означення, теореми і формули. Посібник містить зразки детального розв'язання важливих типових задач і задач підвищеного рівня складності, що потребують творчого, нестандартного підходу.

Навчальний посібник відповідає типовій та робочій програмам спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» та 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» і може бути корисним для самостійної роботи, підготовки до різних видів контролю та предметних олімпіад.

Розділ 1
ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1.1. Загальні відомості про диференціальні рівняння

При дослідженні різноманітних фізичних явищ, технологічних процесів у багатьох галузях науки і техніки, а також деяких процесів, які виникають в екології, економіці та соціальних науках, часто не вдається безпосередньо знайти закон, що зв'язує величини, які характеризують певний процес чи явище. Натомість у багатьох випадках достатньо легко виявити функціональні залежності між визначальними характеристиками процесу (функціями) та швидкостями їх зміни, тобто знайти рівняння, які містять шукані функції та їх похідні або диференціали.

Рівняння, що пов'язують незалежні змінні, невідому функцію цих змінних і похідні (або диференціали) цієї функції, називаються ***диференціальними***.

Якщо невідома функція залежить від однієї змінної, то рівняння називається ***звичайним***, якщо незалежних змінних дві або більше – ***рівнянням*** із ***частинними похідними***.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної чи диференціала, що входить в рівняння.

Приклад. Диференціальними є такі рівняння:

а) $xy' + 2\ln xy + 7 = 0$, б) $x^2dy + ydx = 0$,

в) $y'' + y'tgy = 0$, г) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

А саме, рівняння а), б) є звичайними диференціальними рівняннями першого порядку, рівняння в) – звичайне другого порядку. Рівняння г), де x, y – незалежні змінні, $z = f(x, y)$ – невідома функція двох змінних, a – константа, – рівняння з частинними похідними другого порядку.

Надалі розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння, причому як незалежну змінну, так і шукану функцію вважатимемо дійсними.

Нагадаємо, що задача диференціального числення полягає в тому, щоб за заданою функцією знайти її похідну. Натомість зворотна задача, яка розглядається вже в інтегральному численні, має таке формулювання: дана функція $f(x)$, знайти її первісну. Така задача може бути записана у формі рівняння:

$$y' = f(x). \tag{1.1}$$

Отже, маємо найпростіше диференціальне рівняння, розв'язок якого відомий з інтегрального числення:

$$y = \int f(x)dx + C. \tag{1.2}$$

Згідно з формулою (1.2) диференціальне рівняння може мати безліч розв'язків, кожний з яких можна одержати, якщо довільний сталій C надати певне числове значення.

Таким чином, предметом теорії диференціальних рівнянь є розробка методів їх інтегрування і дослідження властивостей одержаних розв'язків.

1.2. Задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь

Диференціальне рівняння, одержане у процесі дослідження фізичного явища або процесу, називають диференціальною моделлю цього явища або процесу. Диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані явища, дають можливість встановити якісні і кількісні характеристики їх станів. Використання цих моделей дає можливість описати динаміку розвитку процесу, а також передбачити його подальший розвиток.

У процесі побудови диференціальних рівнянь важливе значення має знання законів тієї області науки, з якою пов'язана природа задачі. Наприклад, у механіці це може бути другий закон Ньютона ($F = ma$, де m – маса тіла, a – прискорення руху, F – сума сил, що діють на тіло); у електротехніці – закон Кірхгофа (алгебраїчна сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю); у хімії – закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину у певний момент часу) тощо.

Розглянемо декілька прикладних задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь.

Задача 1. Відомо, що швидкість розпаду радію прямо пропорційна його кількості. Знайти закон зміни маси речовини від часу, якщо q_0 – кількість радію в момент часу $t = t_0$.

Розв'язання. Нехай $q(t)$ – кількість радію в момент часу t. Швидкість розпаду радію, як швидкість зміни функції, це похідна від цієї функції. Отже, закон розпаду можна записати так:

$$\frac{dq(t)}{dt} = -kq(t), \tag{1.3}$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Знак мінус означає, що маса радію з часом зменшується. Задача полягає в знаходженні функції $q(t)$, яка є розв'язком рівняння (1.3) і задовольняє умові $q(t_0) = q_0$.

Задача 2. Згідно із законом Ньютона, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища. Знайти закон залежності температури тіла від часу.

Розв'язання. Нехай в момент часу t температура тіла дорівнює $T(t)$. Припустимо, що нагріте до температури T_0 тіло помістили в середовище, температура якого стала і дорівнює $T_1 (T_0 > T_1)$. За умовою

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1), \tag{1.4}$$

де $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності, $T(0) = T_0$. Рівняння (1.4) описує закон охолодження тіла в залежності від часу та температури навколишнього середовища.

Задача 3. Визначити диференціальну модель задачі, яка дозволяє знайти форму дзеркала, що збирає спрямований на нього потік паралельних променів в одну точку.

Розв'язання. Зробимо переріз дзеркала площиною $0xy$, щоб точка, в яку збираються промені (фокус), була початком координат, а вісь Ox – паралельною до променів, які падають на дзеркало. У перерізі одержуємо деяку криву $y = f(x)$ (рис. 1.1).

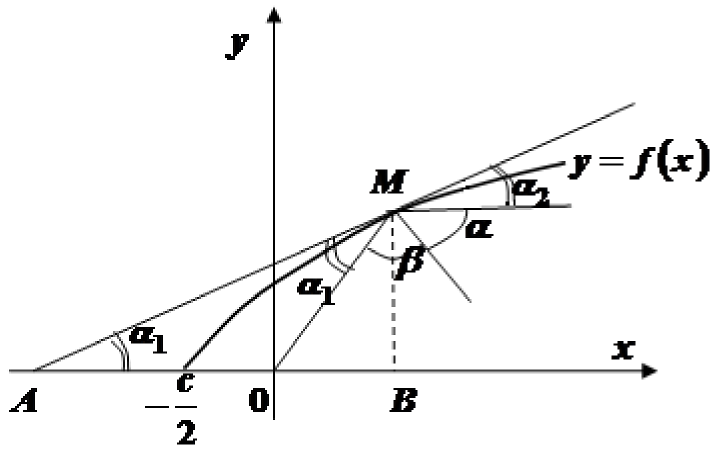


Рис. 1.1

Нехай $M(x, y)$ є довільною точкою кривої $y = f(x)$. Проведемо в цій точці дотичну MA та нормаль MN до кривої. Використаємо закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя α дорівнює куту його відбиття β. Звідки випливає, що $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$. Трикутник MOA рівнобедрений, отже $AO = MO$, де $MO = \sqrt{OB^2 + MB^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Оскільки $y' = tg\alpha_1$ (геометричний зміст похідної), то, вважаючи, що $y > 0$, одержуємо

$$y' = tg\alpha_1 = \frac{MB}{AB} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

Домножимо чисельник та знаменник дробу на $\sqrt{x^2 + y^2} - x$, тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right). \tag{1.5}$$

Диференціальне рівняння (1.5) є диференціальною моделлю задачі.

Задача 4. Підприємство реалізує продукцію b, про яку в момент часу t з числа N_0 потенційних покупців знає лише $x = x(t)$ покупців. Для прискорення збуту продукції дано рекламні оголошення по радіо і телебаченню. Наступна інформація про продукцію розповсюджується серед покупців засобом спілкування один з одним. Вважатимемо, що після рекламних оголошень швидкість зміни числа тих, хто знає про продукцію, прямо пропорційна добутку числа покупців, які знають про товар, на число тих, хто про нього не знає. Знайти залежність між змінними x і t, якщо в початковий момент часу $t = 0$ (після рекламних оголошень) про товар знали $\frac{N_0}{a}$ чоловік (***закон ефективності реклами***).

Розв'язання. Якщо $x(t)$ – кількість покупців, які знають про продукцію підприємства в момент часу t, то, враховуючи умову задачі, дістаємо наступне диференціальне рівняння

$$x'(t) = kx(N_0 - x), \tag{1.6}$$

де $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності, $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ – швидкість зміни числа тих, хто знає про продукцію. Диференціальне рівняння (1.6) разом з початковою умовою $x(0) = \frac{N_0}{a}$ є математичною моделлю закону ефективності реклами.

Зауваження. Отже, перший етап розв'язування задач з практичним змістом закінчується складанням диференціального рівняння для шуканої функції. Це творча й найважча частина розв'язку, тому що не існує будь-яких загальних правил для складання диференціальних рівнянь за умовами конкретної задачі. Наприклад, якщо це задача геометричного характеру, то наявність у її даних дотичної чи деяких зв'язаних з нею відрізків дає можливість написати співвідношення між координатами точок кривої і кутовим коефіцієнтом дотичної. У задачах фізичного характеру часом можна відразу написати відповідне диференціальне рівняння, якщо задана швидкість зміни будь-якого процесу. В інших випадках необхідно попередньо встановити співвідношення між збільшенням змінних, потім переходом до границі одержати диференціальне рівняння.

Математична зрілість інженера характеризується в основному тим, наскільки правильно він може математично формулювати практичні задачі, які пов'язані з його спеціальністю. Якщо задача зведена до диференціального рівняння, методи розв'язування якого відомі, то другий етап розв'язку, тобто інтегрування рівняння, не викликає труднощів.

1.3. Основні поняття та означення

Звичайним диференціальним рівнянням $\boldsymbol{n}$***-го порядку*** відносно функції $y = f(x)$ називається співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.7}$$

між незалежною змінною x, шуканою функцією $y = f(x)$ і похідними $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Зауваження. Позначення, використані у наведеному означенні, не є суттєвими, незалежна змінна може позначатися через t, шукана функція – через s, f, φ тощо.

Вважається також, що похідна n-го порядку шуканої функції обов'язково входить в це рівняння, тоді як наявність решти аргументів необов'язкова.

Рівняння (1.7), не розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$, називається ***неявним*** диференціальним рівнянням.

Натомість рівняння, розв'язане відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{1.8}$$

називається ***нормальним*** або ***явним***.

Розв'язком рівняння (1.8) на деякому інтервалі (a, b) називається функція $y = \varphi(x)$, що має на цьому інтервалі похідні до порядку n включно, яка при підстановці в дане рівняння обертає його в тотожність.

Приклад. Перевірити, чи є функції $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \cos 2x$, $y_3 = 4\sin 3x$ розв'язками диференціального рівняння $y'' + 9y = 0$.

Розв'язання. Знайдемо похідні наведених функцій та підставимо кожну функцію та її похідні в дане рівняння. Отримаємо:

а) $y_1 = \cos 3x$, $y_1' = -3\sin 3x$, $y_1'' = -9\cos 3x$

$$-9\cos 3x + 9\cos 3x \equiv 0;$$

б) $y_2 = \cos 2x$, $y_2' = -2\sin 2x$, $y_2'' = -4\cos 2x$

$$-4\cos 2x + 9\cos 2x = 5\cos 2x \neq 0, \text{ якщо } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in z,$$

тому функція y_2 не є розв'язком даного рівняння;

в) $y_3 = 4\sin 3x$, $y_3' = 12\cos 3x$, $y_3'' = -36\sin 3x$

$$-36\sin 3x + 36\sin 3x \equiv 0.$$

Отже, тільки функції y_1 та y_3 є розв'язками рівняння $y'' + 9y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Розв'язками цього рівняння, як легко перевірити, є взагалі всі функції $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

З геометричної точки зору графік розв'язку диференціального рівняння (1.7) або (1.8) є деяка крива, яку називають ***інтегральною кривою***. Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають ***сім'єю інтегральних кривих***.

В загальному випадку розв'язок диференціального рівняння n-го порядку знаходиться в результаті n послідовних інтегрувань, тому загальний розв'язок такого рівняння містить n довільних сталих, тобто має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n). \tag{1.9}$$

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають ***інтегруванням*** цього рівняння. Якщо всі розв'язки рівняння можна виразити через елементарні функції або у ***квадратурах*** (коли розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій), то кажуть, що рівняння проінтегроване ***у скінченному вигляді***.

Розділ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

2.1. Загальні поняття та означення

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (2.1)$$

яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну

$y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Якщо рівняння (2.1) можна розв'язати відносно y', то воно набуває вигляду

$$y' = f(x, y). \qquad (2.2)$$

Таке рівняння називають рівнянням в ***нормальній формі***.

Рівняння (2.2) можна записати ще у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ або $dy - f(x, y)dx = 0$, який є окремим випадком рівняння:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \qquad (2.3)$$

де $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – відомі функції.

Розв'язком диференціального рівняння (2.2) на інтервалі (a, b) називається диференційована на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює рівняння (2.2) на тотожність, тобто $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$.

Вже зазначалось, диференціальне рівняння має безліч розв'язків. Однак у багатьох задачах теоретичного або прикладного характеру серед усіх розв'язків рівняння (2.2) потрібно знайти такий розв'язок, що задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0, \qquad (2.4)$$

де x_0, y_0 – задані числа. Така умова, згідно з якою розв'язок $y = \varphi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в заданій точці x_0, називають ***початковою умовою***. Задача знаходження розв'язку рівняння (2.2), який задовольняє початкову умову (2.4), називається ***задачею Коші***.

З геометричної точки зору задача Коші (2.2), (2.4) полягає у відшуканні інтегральної кривої рівняння (2.2), яка проходить через задану точку (x_0, y_0) площини Oxy.

Основною теоремою, яка забезпечує не тільки існування, але й єдинність розв'язку задачі Коші, є теорема Коші [3].

<u>Теорема Коші (про існування і єдинність розв'язку).</u> Нехай функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $f'_y(x,y)$ визначені та неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0; y_0) \in G$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (2.2), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0 \text{ або } y(x)|_{x=x_0} = y_0. \tag{2.5}$$

Геометричний зміст теореми полягає в тому, що при виконанні її умов існує єдина інтегральна крива диференціального рівняння, яка проходить через точку (x_0, y_0).

2.2. Класифікація розв'язків

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію

$$y = \varphi(x, C), \tag{2.6}$$

яка залежить від однієї довільної сталої C, якщо:

1) вона є розв'язком рівняння (2.2) при будь-якому значенні сталої C;

2) для довільної початкової умови (2.5) існує єдине значення сталої $C = C_0$ таке, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє умову (2.5), тобто $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

При цьому передбачається, що значення x_0, y_0 належать до тієї області G зміни змінних, у якій виконуються умови теореми існування і єдності розв'язку.

Зауваження. Якщо в процесі знаходження загального розв'язку одержують рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, не розв'язане відносно y, то загальний розв'язок залишається в неявному вигляді. Така рівність називається ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння (2.2).

Частинним розв'язком рівняння (2.2) називають функцію $y = \varphi(x, C_0)$, утворену з загального розв'язку (2.6) при певному значенні сталої $C = C_0$.

Співвідношення $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називають у цьому випадку ***частинним інтегралом*** рівняння.

Зауваження. Кількість констант у загальному розв'язку та кількість початкових умов у задачі Коші завжди дорівнює порядку диференціального рівняння.

Приклад. Для рівняння $y' = 2x + 2$ загальним розв'язком буде сім'я функцій $y = x^2 + 2x + C$. Знайдемо частинний розв'язок, що задовольняє таку початкову умову: $y(1) = 2$. Підставляючи в загальний розв'язок $x = 1$, $y = 2$, одержимо $2 = 1 + 2 + C$, звідки $C = -1$. Отже, шуканим частинним розв'язком (розв'язком задачі Коші) буде функція $y = x^2 + 2x - 1$.

Зауваження. Якщо у точці (x_0, y_0) порушуються умови теореми Коші, то через цю точку проходить декілька інтегральних кривих (розв'язок не єдиний) або не проходить жодної інтегральної кривої (розв'язок не існує). Такі точки називаються ***особливими точками*** диференціального рівняння. Шукати особливі точки потрібно серед точок, у яких мають розрив функція $f(x, y)$ або її частинна похідна $f'_y(x, y)$.

Якщо кожна точка розв'язку $y = \varphi(x)$, який не може бути отриманий із загального розв'язку ні за яких значень параметру C, є особливою точкою диференціального рівняння, то розв'язок $y = \varphi(x)$ називають ***особливим***.

Приклад. Рівняння $y' = \dfrac{y}{x}$ має, як легко перевірити, загальний розв'язок $y = Cx$ – це сім'я прямих, які всі проходять через точку $(0;0)$. Точка $(0;0)$ є особлива точка цього диференціального рівняння. Права частина рівняння

$f(x,y)=\frac{y}{x}$ задовольняє умови теореми Коші, якщо $x\neq 0$. Отже, особливими будуть також точки $(0;y_0)$, де $y_0\neq 0$. Через ці точки не проходить жодної інтегральної кривої (рис. 18.1).

Графіком особливого розв'язку є інтегральна крива, яка у кожній своїй точці має спільну дотичну з однією з інтегральних кривих. Таку інтегральну криву називають ***обвідною*** сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння, визначених його загальним розв'язком.

Приклад. Рівняння $y'=\sqrt{y}$ має сім'ю інтегральних кривих, а саме парабол $y=\left(\frac{x}{2}+C\right)^2$. Крім того, очевидно, що це рівняння має також розв'язок $y=0$. Цей розв'язок є особливим, бо функція $f'_y(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ при $y=0$ розривна. Пряма $y=0$ дотикається до сім'ї парабол і є її обвідною (рис.2.2).

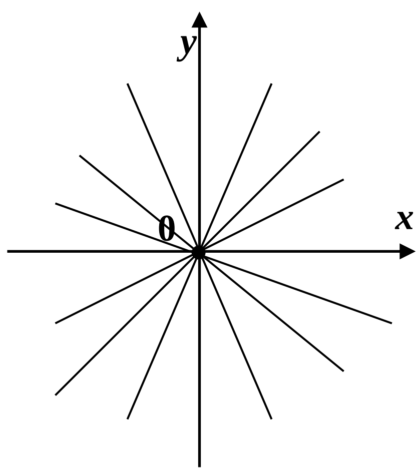


Рис. 2.1

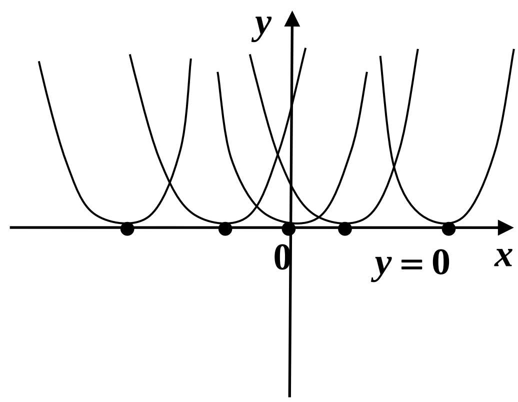


Рис. 2.2

Зауваження. Якщо розглядати x і y як декартові координати точки, то диференціальне рівняння (2.2) встановлює зв'язок між координатами довільної точки $M(x,y)$ площини і кутовим коефіцієнтом дотичної $y'|_M = f(x,y)=tg\alpha$ до інтегральної кривої у цій точці. Отже, якщо функція $f(x,y)$ визначена в області G, то кожній точці $M(x, y) \in G$ диференціальне рівняння (2.2) ставить у відповідність значення кута $\alpha = arctg(x, y)$. Вказуючи цей напрям одиничним вектором з початком в точці M, одержимо в області G ***поле напрямів***, визначене рівнянням (2.2). Отже, з погляду геометрії, розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$ визначає інтегральну криву, яка в кожній своїй точці дотикається до поля напрямів.

2.3. Рівняння з відокремлюваними змінними

Існує декілька типів диференціальних рівнянь першого порядку, які інтегруються в квадратурах (або зводяться до них). Одним із таких типів є диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Найпростішим диференціальним рівнянням першого порядку є рівняння вигляду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \tag{2.7}$$

де один доданок залежить тільки від x, а другий – від y. Такі рівняння називають рівняннями з ***відокремленими змінними***. Проінтегрувавши почленно це рівняння, одержимо його загальний інтеграл:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \tag{2.8}$$

де кожен з коефіцієнтів біля диференціалів є добутком двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а інша – тільки від y. Рівняння (2.8) називають ***рівнянням з відокремлюваними змінними***.

Для інтегрування рівняння (2.8) потрібно домогтися того, щоб коефіцієнт біля dx залежав тільки від x, а коефіцієнт біля dy – тільки від y. Це досягається діленням обох частин рівняння на добуток $M_2(x)N_1(y)$. Після цього одержуємо

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (2.9)$$

Рівняння (2.9) має вигляд (2.7), його можна розглядати як рівність диференціалів, отже, відповідні невизначені інтеграли відрізняються собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C. \qquad (2.10)$$

Співвідношення (2.10) є загальним інтегралом рівняння (2.8).

Зауваження. При діленні рівняння (2.8) на $M_2(x)N_1(y)$ можна втратити розв'язки, при яких $M_2(x)=0$ та $N_1(y)=0$. Тому слід окремо розв'язати рівняння $M_2(x)=0$ та $N_1(y)=0$, знайти їх розв'язки (якщо вони існують) та перевірити, які з них не можуть бути одержані з загального розв'язку, тобто, є особливими розв'язками.

Рівняння з відокремлюваними змінними можна записати також у вигляді

$$y' = f(x)\varphi(y). \qquad (2.11)$$

Щоб розв'язати це рівняння, треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (2.11) на $\varphi(y)$ (вважаємо, що $\varphi(y) \neq 0$) і помножимо на dx. Тоді рівняння запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx, \qquad (2.12)$$

тобто у вигляді рівняння з відокремленими змінними. В загальному випадку рівняння (2.12) є частковим випадком рівняння (2.7). Отже, його розв'язок має вигляд

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Тут, як і для рівняння (2.8), якщо $\varphi(y_0)=0$, то $y = y_0$ є розв'язком рівняння (2.11).

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Довести, що функції: а) $y=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$; б) $y=$ $=\frac{1}{2}\ln^2 x$; в) $y=e^x\left(x^2-2x+2\right)$ є розв'язками відповідних рівнянь:

а) $y'=\sin^3 x$; б) $y'=\frac{\ln x}{x}$; в) $y'=x^2e^x$.

Розв'язання. Розв'язком диференціального рівняння $y'=f(x,y)$ називається така неперервна диференційовна функція, яка при підстановці у дане рівняння перетворює його на тотожність.

а) $y=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x \Rightarrow y'=\sin x-\frac{1}{3}\cdot 3\cos^2 x\cdot \sin x$.

Підставимо y' в рівняння $y'=\sin^3 x$:

$\sin x-\cos^2 x\sin x=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)=\sin x\cdot\sin^2 x=\sin^3 x\equiv\sin^3 x$.

Таким чином, $y=-\cos+\frac{1}{3}\cos^3 x$ є розв'язком даного рівняння, оскільки в результаті підстановки отримано тотожність.

б) $y=\frac{1}{2}\ln^2 x\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{x}$. Підставляючи в рівняння $y'=\frac{\ln x}{x}$, отримуємо тотожність $\frac{\ln x}{x}\equiv\frac{\ln x}{x}$. Отже, $y=\frac{1}{2}\ln^2 x$ є розв'язком даного рівняння.

в) $y=e^x\left(x^2-2x+2\right)\Rightarrow y'=e^x\left(x^2-2x+2\right)+e^x(2x-2)=e^x\left(x^2-2x+2+\right.$ $\left.+2x-2\right)=e^x\cdot x^2$. Після підстановки цього виразу в рівняння $y'=x^2e^x$ отримуємо тотожність: $e^x\cdot x^2\equiv x^2\cdot e^x$. Функція $y=e^x\left(x^2-2x+2\right)$ є розв'язком даного рівняння.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xdx+ydy=0$.

Розв'язання. Це рівняння з відокремленими змінними (2.7). Інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$$\int xdx + \int ydy = C\ ;$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Геометрично загальний розв'язок представляє собою сім'ю концентричних кіл

$$x^2 + y^2 = 2C.$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2x\sin ydx + \left(x^2 + 3\right)\cos ydy = 0$, що задовольняє умові $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

Розв'язання. Поділимо кожний член рівняння на $\left(x^3 + 3\right)\sin y$, одержимо рівняння вигляду (2.9):

$$\frac{2xdx}{x^2 + 3} + \frac{\cos ydy}{\sin y} = 0.$$

Інтегруючи способом підстановки, знаходимо

$$\int \frac{2xdx}{x^2 + 3} + \int \frac{\cos ydy}{\sin y} = C_1\ ,$$

$$\int \frac{d\left(x^2 + 3\right)}{x^2 + 3} + \int \frac{d(\sin y)}{\sin y} = C_1\ ,$$

$$ln\left(x^2 + 3\right) + ln(\sin y) = lnC\text{, де } C_1 = lnC\ .$$

Після потенціювання отримаємо загальний розв'язок рівняння

$$\left(x^2 + 3\right)\sin y = C.$$

Оскільки $\left(x^2 + 3\right)\sin y = 0$ при $\sin y = 0$, і при цьому значенні диференціальне рівняння не втрачає числового змісту, то $\sin y = 0$ – розв'язок рівняння. Цей розв'язок міститься в загальному розв'язку при $C = 0$.

Підставимо $x = \frac{\pi}{6}$ і $y = 1$ в загальний інтеграл рівняння $\sin y = \frac{C}{x^2 + 3}$, одержимо $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{C}{1+3}$, звідки $\frac{1}{2} = \frac{C}{4}$ або $C = 2$. Таким чином, шуканий частинний інтеграл має вигляд $\sin y = \frac{2}{x^2 + 3}$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $y' = \cos 2x \cdot \left(y^2 + 9\right)$.

Розв'язання. Для того, щоб відокремити змінні, запишемо замість $y' = \frac{dy}{dx}$, домножимо обидві частини рівняння на dx та поділимо їх на $\left(y^2 + 9\right)$:

$$\frac{dy}{dx} = \cos 2x \cdot \left(y^2 + 9\right) \Rightarrow dy = \cos 2x \cdot \left(y^2 + 9\right)dx \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + 9} = \cos 2x dx.$$

Отримане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Проінтегруємо його:

$$\int \frac{dy}{y^2 + 9} = \int \cos 2x + C \Rightarrow \frac{1}{3} arctg \frac{y}{3} = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$ – загальний інтеграл рівняння.

Приклад 5. Розв'язати рівняння: $y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 - 9}}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2 - 9}} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}} + {}$ ${} + \ln C \Rightarrow \ln|y| = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 9}\right| + \ln C$.

Тут для зручності сталу інтегрування C записано в логарифмічній формі. Після потенціювання дістаємо загальний розв'язок рівняння: $y = C\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right)$. Через те, що функція $y = 0$ також задовольняє задане рівняння, вона теж є його розв'язком. Вона міститься у загальному розв'язку (її можна отримати, якщо $C = 0$).

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\left(y - x^2 y\right)dy = \left(x - xy^2\right)dx$.

Розв'язання. Для того, щоб відокремити змінні, треба спочатку винести за дужки співмножники в кожній з частин рівняння:

$y\left(1 - x^2\right)dy = x\left(1 - y^2\right)dx$.

Далі поділимо обидві частини рівняння на $\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)$. Тоді

$$\frac{y}{1-y^2}dy = \frac{x}{1-x^2}dx \qquad \left(x \neq \pm 1;\ y \neq \pm 1\right) \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1-y^2\right)}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1-x^2\right)}{1-x^2} +$$

$$+ lnC \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}ln\left|1-y^2\right| = -\frac{1}{2}ln\left|1-x^2\right| + lnC \Rightarrow ln\left|1-y^2\right| = ln\left|1-x^2\right| + lnC^{-2} \Rightarrow$$

$1 - y^2 = \left(1 - x^2\right)\cdot C^{-2}$ або $1 - y^2 = C_1\left(1 - x^2\right)$, де, враховуючи довільність сталої C , перепозначено C^{-2} через C_1 .

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є

$$y^2 = 1 + C_1\left(x^2 - 1\right). \tag{2.13}$$

З'ясуємо можливість появи особливих розв'язків заданого рівняння. Легко перевірити, що функції $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ є розв'язками рівняння, однак у загальному інтегралі міститься лише два останніх (їх можна отримати з формули (2.13), якщо $C = 0$). Функції $x = -1$ і $x = 1$ є особливими розв'язками.

Отже, розв'язок має вигляд: $y^2 = 1 + C\left(x^2 - 1\right)$, $x = -1$, $x = 1$.

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші: $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0{,}6$.

Розв'язання. Подамо дане рівняння у вигляді:

$$xy' = y^2 - y \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = y^2 - y \Rightarrow \frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} + lnC$$

$\left(x \cdot \left(y^2 - y\right) \neq 0\right)$.

Обчислимо інтеграл:

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = -\int \frac{-1+y-y}{y(y-1)}dy = -\int\left(\frac{y-1}{y(y-1)} - \frac{y}{y(y-1)}\right)dy = -\int\frac{dy}{y} + \int\frac{dy}{y-1} =$$
$$= -ln|y| + ln|y-1| + \overline{C} = ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + \overline{C}.$$

Отже, маємо загальний розв'язок рівняння

$$ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = ln|xC| \ \Rightarrow \ \frac{y-1}{y} = xC \ \Rightarrow \ y(1-Cx) = 1 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{1-Cx}. \tag{2.14}$$

Застосовуючи початкову умову $y(1) = 0,6$, знаходимо значення довільної сталої C: $0,6 = \dfrac{1}{1-C} \ \Rightarrow \ C = -\dfrac{2}{3}$.

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд $y = \dfrac{1}{1+\dfrac{2x}{3}}$.

Зауважимо, що загальний розв'язок знайдено за умови $x(y^2-y) \neq 0$. Якщо $x(y^2-y) = 0$, то або $x = 0$, або $y = 0$, або $y = 1$. Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що $x = 0$ не є розв'язком вихідного рівняння, $y = 1$– частинний розв'язок, оскільки він є у загальному (2.14) при $C = 0$, а $y = 0$ – розв'язок рівняння, але у загальному його немає ні при якому значенні довільної сталої C

Приклад 8. Знайти частинний розв'язок рівняння:
$$y\,ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0, \ y\left(-\frac{15}{16}\right) = e.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді:
$$y'\sqrt{x+1} = -y\,ln^3 y \ \Rightarrow \ \frac{dy}{dx}\sqrt{x+1} = -y\,ln^3 y \ \Rightarrow \ \frac{dy}{y\,ln^3 y} = -\frac{dx}{\sqrt{x+1}} \ \Rightarrow$$

$$\int\frac{dy}{y\,ln^3 y} = -\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}} + C.$$

Для обчислення інтеграла у лівій частині рівності застосуємо метод заміни змінної:

$$\int \frac{dy}{y\,ln^3\,y} = \begin{vmatrix} ln\,y = t \\ \frac{dy}{y} = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} + \overline{C} = -\frac{1}{2\,ln^2\,y} + \overline{C}.$$

Отже, загальний інтеграл має вигляд: $-\frac{1}{2\,ln^2\,y} = -2\sqrt{x+1} + C$.

Застосовуючи початкову умову, знаходимо частинний розв'язок рівняння:
$$-\frac{1}{2\,ln^2\,e} = -2\sqrt{-\frac{15}{16}+1} + C \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} + C \;\Rightarrow\; C = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2\,ln^2\,y} = 2\sqrt{x+1}.$$

Пропонуємо читачам перевірити самостійно, чи являються розв'язками рівняння значення x та y, при яких $y\,ln^3\,y \cdot \sqrt{x+1} = 0$.

Приклад 9. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку $(1;2)$, кутовий коефіцієнт дотичної до якої у кожній точці дорівнює $\frac{x}{y}$. Побудувати криву.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ у кожній точці є значенням похідної y' у цій точці. Отже, $y' = \frac{x}{y}$. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \;\Rightarrow\; ydy = xdx \;\Rightarrow\; \int ydy = \int xdx + C \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C.$$

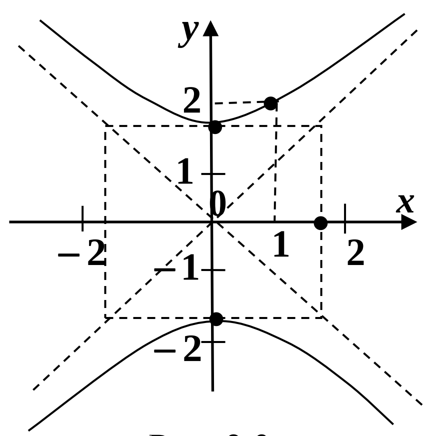


Рис. 2.3

Підставимо в загальний інтеграл рівняння координати точки, через яку проходить шукана крива: $\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = C \;\Rightarrow\; C = \frac{3}{2}$.

Тоді рівняння кривої має вигляд $y^2 - x^2 = 3$, графік кривої наведено на рис. 2.3.

Завдання для самостійної роботи

1. Перевірити, чи буде функція $y=f(x)$ розв'язком відповідного рівняння:

а) $y=e^{2x}$, $\quad y=e^{\frac{xy'}{y}}$;

б) $y=\dfrac{1+x}{x^2}$, $\quad y'=y+x^2$;

в) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$, $\quad (1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$;

г) $y=x\cdot e^{-3x}$, $\quad y'-\dfrac{y}{x}=2xe^{-3x}$;

д) $y=e^{tg\frac{x}{2}}$, $\quad y'\sin x=y\ln y$.

2. Знайти загальні розв'язки (інтеграли) рівнянь:

а) $xy'=\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y}$; б) $x\dfrac{dy}{dx}+y=y^2$; в) $y'\sin^2 x-y\cos x=0$;

г) $xy'-y\ln y=0$; д) $y'=e^{2x+y}$; є) $3e^x tgy dx+(2+e^x)\sec^2 y dy=0$.

3. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

а) $(1+e^x)yy'=e^x$, $\quad y(0)=1$;

б) $y'tgx=y+3$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$;

в) $y=y'\cos^2 x\ln y$, $\quad y(\pi)=1$;

г) $x^2(y^3+5)dx+(x^3+5)y^2dy=0$, $\quad y(0)=1$;

д) $\dfrac{yy'}{x}+e^y=0$, $\quad y(1)=0$.

4. Напишіть рівняння, якому задовольняють:

а) усі точки екстремуму інтегральних кривих рівняння $y'=x^3+y$;

б) усі точки перегину інтегральних кривих рівняння $y'=ye^{3x}-9$.

2.4. Однорідні диференціальні рівняння

До рівняння з відокремлюваними змінними зводяться однорідні диференціальні рівняння першого порядку.

Функція $f(x,y)$ називається ***однорідною функцією*** виміру k, якщо для будь-яких x, y, t справджується тотожність $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$.

Наприклад, функція $f_1(x,y)=x^3+6xy^2$ є однорідна функція виміру 3, оскільки

$$f_1(tx,ty)=(tx)^3+6tx(ty)^2=t^3\left(x^3+6xy^2\right)=t^3 f_1(x,y).$$

Функція $f_2(x,y)=arccos\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ – однорідна функція виміру $k=0$, так як $f_2(tx,ty)=\dfrac{(tx)^2+(ty)^2}{(tx)^2-(ty)^2}=arccos\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=t^0\,arccos\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=t^0 f_2(x,y)$.

Диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ називається ***однорідним*** відносно змінних x та y, якщо $f(x,y)$ є однорідною функцією виміру 0.

Покажемо, що коли диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ однорідне, то його завжди можна подати у вигляді

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.13}$$

Дійсно, якщо $f(x,y)$ – однорідна функція нульового виміру, то, за означенням, $f(tx,ty)=t^0 f(x,y)=f(x,y)$. Поклавши $t=\dfrac{1}{x}$, одержуємо:

$$f(x,y)=f\left(\frac{x}{x},\frac{y}{x}\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однорідне рівняння (2.13) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни змінної (підстановки) $\dfrac{y}{x}=u$ або, що те саме, $y=ux$, де $u=u(x)$ – нова шукана функція. Тоді $y'=u'x+u$, і рівняння (2.13) буде мати вигляд

$$u'x+u=\varphi(u),\ u'x=\varphi(u)-u \Rightarrow \frac{du}{dx}x=\varphi(u)-u. \qquad (2.14)$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Поділяючи змінні і інтегруючи, одержимо загальний його інтеграл

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x},\ \varphi(u)\neq u,\ x\neq 0 \Rightarrow \int\frac{du}{\varphi(u)-u}=ln|x|+C.$$

Після обчислення інтеграла підставимо замість u відношення $\frac{y}{x}$ і дістанемо загальний інтеграл рівняння (2.13).

Зауваження. При відокремлюванні змінних ми ділимо отримане рівняння на $f(u)-u$, припускаючи, що цей вираз відмінний від нуля. Якщо $f(u)-u=0$, то рівняння (2.14) запишеться у вигляді $x\frac{du}{dx}=0$. У цьому випадку рівняння (2.13) може мати розв'язки $y=Cx\ (x\neq 0)$ та $x=0\ (y\neq 0)$. Ці розв'язки можуть бути особливими.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$.

Розв'язання. Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру, тому що $f(tx,ty)=\frac{2txty}{(tx)^2-(ty)^2}=\frac{t^2\cdot 2xy}{t^2\left(x^2-y^2\right)}=\frac{2xy}{x^2-y^2}=$ $=f(x,y)$.

Отже, диференціальне рівняння є однорідним. Застосуємо підстановку $y=ux$, тоді $y'=u'x+u$. Підставимо y, y' у задане рівняння, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними, звідки дістанемо загальний інтеграл. Процес розв'язання виглядає так:

$$u'x+u=\frac{2x\cdot ux}{x^2-(ux)^2} \quad \Rightarrow \quad u'x=\frac{2x^2u}{x^2\left(1-u^2\right)}-u \quad \Rightarrow$$

$$u'x = \frac{2u - u(1-u^2)}{1-u^2} \quad \Rightarrow \quad u'x = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{(1+u^2) - u^2 - u^2}{u(1+u^2)}du = \int \frac{dx}{x} + lnC,$$

$$\int \frac{(1+u^2)du}{u(1+u^2)} - \int \frac{2u^2 du}{u(1+u^2)} = ln|x| + lnC,$$

$$ln|u| - ln(1+u^2) = ln|xC|.$$

Остаточно, загальний інтеграл рівняння відносно функції $u(x)$ має вигляд $\frac{u}{1+u^2} = xC$.

Підставляючи значення $u = \frac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл заданого рівняння $(x^2 + y^2)C = y$.

При відокремленні змінних ми ділимо на x і на u, що можливо при $x \neq 0$ та $u \neq 0$. Нехай $u = 0$, тобто $y = 0$. Ця функція перетворює дане рівняння в тотожність, тому є його розв'язком. Цей розв'язок є особливим і його слід вказати додатково до знайденого інтегралу. Точки, в яких $x = 0$, не входять в область визначення правої частини заданого рівняння $(x^2 - y^2 \neq 0)$, тому пряма $x = 0$ не може бути інтегральною кривою цього рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $xy' - y = x\,e^{-\frac{2y}{x}}$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $y' - \frac{y}{x} = e^{-\frac{2y}{x}}$.

Отже, рівняння має вигляд $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, тобто є однорідним.

Зробимо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$, отримаємо:

$$u'x + u - u = e^{-2u} \Rightarrow \frac{du}{dx} x = e^{-2u} \Rightarrow \frac{du}{e^{-2u}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int e^{2u}\, du = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} e^{2u} = \ln|x| + C.$$

Підставляючи значення $u = \dfrac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл рівняння

$$\frac{1}{2} e^{\frac{2y}{x}} = \ln|x| + C.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\left(2\sqrt{xy} - x\right)dy + ydx = 0$.

Розв'язання. Маємо $f_1(x, y) = y$; $f_2(x, y) = 2\sqrt{xy} - x$.

Оскільки $f_1(tx, ty) = ty$, $f_2(tx, ty) = 2\sqrt{tx \cdot ty} - tx = t\left(2\sqrt{xy} - x\right)$, то функції $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ є однорідними функціями першого виміру. Отже, задане рівняння є однорідним. Зробимо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$, яка зведе його до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = -ydx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - 2\sqrt{xy}} \left(x \neq 0, y \neq \frac{x}{4} \right) \Rightarrow u'x + u =$$

$$= \frac{ux}{x - 2\sqrt{ux^2}} \Rightarrow u'x + u = \frac{u}{1 - 2\sqrt{u}} \Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{2u\sqrt{u}}{1 - 2\sqrt{u}} \Rightarrow \frac{\left(1 - 2\sqrt{u}\right)du}{2u\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{dx}{x} (u \neq 0) \Rightarrow \int \frac{\left(1 - 2\sqrt{u}\right)du}{2u\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

$$\int \left(\frac{1}{2u\sqrt{u}} - \frac{2\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}} \right) du = \frac{1}{2} \int u^{-3/2} du - \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{u}} - \ln|u| + C.$$

Отже, після інтегрування маємо: $-\dfrac{1}{\sqrt{u}} - \ln|u| = \ln|x| + C$.

Зробимо обернену підстановку $u=\dfrac{y}{x}$ і одержимо загальний інтеграл шуканого рівняння $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+ln|y|+C=0$.

Якщо $u=0$, то $y=0$ – особливий розв'язок рівняння; крім того, $x=0$ – теж особливий розв'язок заданого рівняння.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$.

Розв'язання. Маємо: $f_1(x,y)=y^2-2xy; \quad f_2(x,y)=x^2$.

Функції $f_1(x,y)$ та $f_2(x,y)$ є однорідними функціями другого виміру:

$$f_1(tx,ty)=(ty)^2-2(tx)(ty)=t^2y^2-2t^2xy=t^2\left(y^2-2xy\right)=t^2f_1(x,y);$$
$$f_2(tx,ty)=(tx)^2=t^2x^2=t^2f_2(x,y),$$

тобто початкове рівняння є однорідним.

Зробимо підстановку $y=ux; \quad y'=u'x+u; \quad u=\dfrac{y}{x}$, та зведемо це рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y^2-2xy+x^2y'=0,$$

$$(ux)^2-2x\,ux+x^2(u'x+u)=0,$$

$$u^2x^2-2x^2u+x^2(u'x+u)=0 \quad\Rightarrow\quad u^2-2u+u'x+u=0, \text{ або}$$

$$u'x=u-u^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dx}x=u-u^2.$$

Відокремимо змінні в останньому рівнянні: $\displaystyle\int\frac{du}{u-u^2}=\int\frac{dx}{x}$;

$$u-u^2=-\left(u^2-u\right)=-\left(u^2-2\cdot\frac{1}{2}u+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{4}-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$\int\frac{du}{\frac{1}{4}-(u-1/2)^2}=\int\frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\,ln\left|\frac{\frac{1}{2}+u-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-u+\frac{1}{2}}\right|=ln\left|x\right|+ln\left|C\right|, \text{ або}$$

$$ln\left|\frac{u}{1-u}\right|=ln\left|Cx\right|\Rightarrow\frac{u}{1-u}=Cx$$

$\dfrac{u}{1-u}=Cx\Rightarrow\dfrac{y/x}{1-y/x}=Cx,\Rightarrow\dfrac{y}{x-y}=Cx-$ загальний інтеграл даного рівняння.

Знайдемо з останнього виразу шукану функцію y:

$$-\frac{x-y-x}{x-y}=Cx,\ -\frac{x-y}{x-y}+\frac{x}{x-y}=Cx,\ \frac{x}{x-y}=Cx+1\ \Rightarrow$$

$$x=(Cx+1)(x-y)\ \Rightarrow x=Cx^2+x-y(Cx+1),\ Cx^2=y(Cx+1)\Rightarrow$$

$y=\dfrac{Cx^2}{Cx+1}$ $-$ загальний розв’язок рівняння.

Приклад 5. Знайти розв’язок задачі Коші: $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}$, $y(1)=-3$.

Розв’язання. Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру:

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2x^2};\quad f(tx,ty)=\frac{t^2x^2+t^2y^2}{2t^2x^2}=t^0\cdot\frac{x^2+y^2}{2x^2},$$

отже, рівняння є однорідним.

Покладемо $y=ux$, $y'=u'x+u$. Підставимо y, y' в задане рівняння, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними, звідки дістанемо загальний інтеграл. Процес розв’язання виглядає так:

$$xu'+u=\frac{x^2+u^2x^2}{2x^2} \Rightarrow\ xu'=\frac{1+u^2}{2}-u \Rightarrow\ xu'=\frac{(u-1)^2}{2} \Rightarrow\ x\frac{du}{dx}=$$

$$=\frac{(u-1)^2}{2} \Rightarrow\ \frac{2du}{(u-1)^2}=\frac{dx}{x} \Rightarrow\ 2\int\frac{du}{(u-1)^2}=\int\frac{dx}{x}+ln|C| \Rightarrow\ -\frac{2}{u-1}=ln|xC| \Rightarrow$$

$$-\frac{2}{\frac{y}{x}-1}=ln|xC| \Rightarrow ln|xC|=\frac{2x}{x-y}.$$

Остаточно загальний інтеграл має вигляд: $Cx=e^{\frac{2x}{x-y}}$.

При відокремленні змінних ми поділили на $x\neq 0$ і на $(u-1)^2\neq 0$. Точки, в яких $x=0$, не входять в область визначення правої частини заданого рівняння, тому $x=0$ не є розв'язком рівняння.

При $u-1=0$ маємо $y=x$.

Функція $y=x$ перетворює задане рівняння в тотожність і є його особливим розв'язком, який слід вказати додатково до знайденого інтеграла.
Використуємо початкову умову $x=1$, $y=-3$ і знайдемо C:

$$C\cdot 1=e^{\frac{2\cdot 1}{1-(-3)}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

Тоді $\sqrt{e}x=e^{\frac{2x}{x-y}}$ або $x=e^{\frac{3x+y}{2(x-y)}}$ – частинний розв'язок рівняння.

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші: $y^2+x^2y'=x\,y\,y',\ y(1)=1$.

Розв'язання. Це рівняння є однорідним (перевірити самостійно), тому після підстановки $y=ux;\quad y'=u'x+u;\quad u=\frac{y}{x}$ отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(ux)^2+x^2(u'x+u)=x\,ux(u'x+u),$$

$$u^2x^2+x^2(u'x+u)=x^2u(u'x+u),\quad \text{або}\quad u^2+u'x+u=u\,u'x+u^2,$$

$$u'x-u\,u'x=-u,$$

$$u'x(1-u)=-u,$$

$$u'x(u-1)=u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}\cdot x(u-1)=u.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int\frac{u-1}{u}du=\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad u-ln|u|=ln|x|+ln|C|,$$

або $u=ln|Cux|$, $\frac{y}{x}=ln\left|C\frac{y}{x}\cdot x\right|$, $y=x\,ln|Cy|$ – загальний інтеграл.

Використаємо початкові умови: $1=1\,ln|C| \Rightarrow lnC=1 \Rightarrow C=e$.

Тоді $y=x\,ln|e\cdot y|$, або $y=x(ln\,e+ln\,y)$, або $y=x+x\,ln\,y$ – розв'язок задачі Коші.

Приклад 7. Знайти частинний розв'язок рівняння: $xy'=y\left(1+ln\frac{y}{x}\right)$, $y=\frac{1}{\sqrt{e}}$ при $x=1$.

Розв'язання. Маємо $y'=\frac{y}{x}\left(1+ln\frac{y}{x}\right)$. Це однорідне рівняння. Зробимо підстановку $y=ux,\quad y'=u'x+u,\quad u={}^{y}\!/_{x}$ та аналогічно попереднім прикладам розв'яжемо отримане рівняння:

$$u'x+u=u(1+ln\,u),$$

$$u'x=u+u\,lnu-u \quad \Rightarrow u'x=u\,lnu \quad \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x=u\,lnu,$$

$$\frac{du}{u\,lnu}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{du}{u\,lnu}=\int\frac{dx}{x}.$$

Для обчислення інтеграла, що знаходиться у лівій частині, використаємо заміну змінної $t = \ln u; \quad dt = \frac{du}{u}$. Маємо $\int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln u| + C$.

Отже, $\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \ln|u| = Cx$.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = Cx.$$

Знайдемо C: $\ln\left|\frac{1/\sqrt{e}}{1}\right| = C \cdot 1 \Rightarrow C = \ln\frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow C = \ln e^{-1/2} \Rightarrow C = -1/2$.

$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\frac{1}{2}x \Rightarrow y = xe^{-\frac{x}{2}}$ – частинний розв'язок рівняння.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальні розв'язки (інтеграли) рівнянь:

а) $xy' - y = x\,tg\frac{y}{x}$; б) $xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x}$;

в) $y' = e^{\frac{-y}{x}} + \frac{y}{x} - 4$; г) $y' = \frac{x+y}{x-y}$;

д) $xy^2dy = \left(x^3 + y^3\right)dx$.

2. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

а) $xdy - ydx = ydy$, $y(-1) = 1$; б) $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xy = 0$, $y(1) = -2$;

в) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $y(1) = 2$; г) $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$;

д) $xy = y\cos\ln\frac{y}{x}$, $y(1) = e^{\pi}$.

2.5. Лінійні диференціальні рівняння

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається таке рівняння, в якому величини y та y' знаходяться у першому степені і не перемножуються між собою. Загальний вигляд таких рівнянь

$$A(x)y' + B(x)y = C(x),$$

де $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – неперервні функції. В області, де $A(x) \neq 0$, це рівняння рівносильне рівнянню

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (2.15)$$

у якому позначено $p(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$, $q(x) = \dfrac{C(x)}{A(x)}$.

Якщо права частина (2.15) $q(x) = 0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним***, а якщо функція $q(x)$ тотожно не дорівнює нулю, то ***лінійним неоднорідним***.

Зауваження. Якщо функція $p(x)$ і $q(x)$ у рівнянні (2.15) неперервні на деякому інтервалі (a,b), то згідно з теоремою Коші через кожну точку смуги $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$ проходить єдина інтегральна крива. Насправді, якщо рівняння (19.1) записати у вигляді $y' = q(x) - p(x)y$, то його права частина $f(x,y) = q(x) - p(x)y$ є, очевидно, неперервною функцією, а частинна похідна $f'_y(x,y) = -p(x)$ обмежена у цій області. У цьому випадку рівняння (2.15) особливих розв’язків не має.

Лінійне неоднорідне рівняння (2.15) завжди інтегрується в квадратурах. Розглянемо два способи інтегрування таких рівнянь.

2.5.1. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Розв’яжемо спочатку відповідне рівнянню (2.15) однорідне рівняння

$$y' + p(x)y = 0, \qquad (2.16)$$

яке є водночас рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = -(p)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \; (y \neq 0) \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad . \tag{2.17}$$

Формула (2.17) описує всі розв'язки рівняння (2.16), оскільки розв'язок $y = 0$, який міг бути втраченим при відокремлюванні змінних, міститься у формі загального розв'язку (якщо $C = 0$).

Запишемо загальний розв'язок рівняння (2.15) у вигляді

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{2.18}$$

де $C(x)$ – нова невідома функція. Знайдемо функцію $C(x)$, підставивши для цього розв'язок (2.18) в рівність (2.15). Для цього знайдемо похідну $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Підставляємо значення y і y' в рівняння (2.15):

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

звідки $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$,

де C_1 – довільна стала. Підставляючи тепер отриману функцію $C(x)$ в рівність (2.18), одержуємо формулу для загального розв'язку лінійного рівняння (2.15):

$$y(x) = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int p(x)dx}. \tag{2.19}$$

2.5.2. Метод пістановки (метод Й. Бернуллі)

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (2.15) шукатимемо у вигляді добутку двох диференційовних функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, тобто

$$y = uv, \tag{2.20}$$

де $u(x)$, $v(x)$ – невідомі функції, причому одна з цих функцій (наприклад, v) довільна (але не дорівнює тотожно нулю).

Знаходячи похідну $y' = u'v + uv'$ і підставляючи значення y та y' в рівняння (2.15), дістанемо

$$\begin{gathered} u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \Rightarrow \\ u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \end{gathered} \tag{2.21}$$

Користуючись довільністю функції v, виберемо її такою, щоб вона була розв'язком рівняння $v' + p(x)v = 0$, звідки

$$v = e^{-\int p(x)dx} \ (C = 0). \tag{2.22}$$

Знайдену функцію v підставимо в рівняння $u'v = q(x)$, яке отримано з рівняння (2.21) за умови, що вираз у дужках дорівнює нулю. Отже,

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\,. \tag{2.23}$$

Підставляючи знайдені функції u і v у (2.20), знаходимо загальний розв'язок рівняння (2.15) знову у вигляді формули (2.19), тобто

$$y(x) = \left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int p(x)dx}.$$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + \frac{3y}{x} = \frac{sin4x}{x^3}$.

Розв'язання. Це лінійне неоднорідне рівняння виду (2.15), в якому $p(x) = \frac{3}{x}$, $q(x) = \frac{sin4x}{x^3}$.

Метод варіації довільної сталої. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння:

$$y' + \frac{3y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} + lnC \Rightarrow ln|y| = -3ln|x| + lnC \Rightarrow$$

$$y = \frac{C}{x^3}\ .$$

Розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = \frac{C(x)}{x^3}$, звідки $y' = \frac{C'(x)\cdot x^3 - 3x^2C(x)}{x^6} = \frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4}$.

Підставляючи y і y' в початкове рівняння, одержуємо:

$$\frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4} + \frac{3C(x)}{x^3\cdot x} = \frac{sin4x}{x^3} \Rightarrow C'(x) = sin4x \Rightarrow C(x) = \int sin4xdx + C =$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд $y=\frac{C(x)}{x^3}=$

$$=\left(-\frac{1}{4}\cos 4x + C\right)\cdot\frac{1}{x^3}.$$

Метод Бернуллі. Нехай $y=uv$. Тоді після підстановки рівняння має вигляд: $u'v+uv'+\frac{3uv}{x}=\frac{\sin 4x}{x^3} \Rightarrow u'v+u\left(v'+\frac{3v}{x}\right)=\frac{\sin 4x}{x^3}$.

Для знаходження функцій u і v одержуємо систему $\begin{cases} v'+\frac{3v}{x}=0, \\ u'v=\frac{\sin 4x}{x^3} \end{cases}$.

Інтегруючи перше з цих рівнянь, дістаємо $\frac{dv}{v}=-\frac{3dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=-3\ln|x| \Rightarrow$

$v=\frac{1}{x^3}\ (C=0)$.

Підставимо значення v у друге рівняння, тоді $u'\cdot\frac{1}{x^3}=\frac{\sin 4x}{x^3} \Rightarrow$

$u'=\sin 4x \Rightarrow u=\int \sin 4x dx=-\frac{1}{4}\cos 4x + C$.

Отже, загальний розв'язок рівняння:

$$y=uv=\left(-\frac{1}{4}\cos 4x + C\right)\cdot\frac{1}{x^3}.$$

Зауваження. Наведені методи розв'язування лінійних рівнянь можна застосовувати також до рівняння вигляду

$$\bigl(p(y)x+q(y)\bigr)\cdot y'=1, \tag{2.24}$$

якщо y прийняти за незалежну змінну, а x – за функцію цієї змінної. Наприклад, рівняння $\left(x-2yx-y^2\right)dy+y^2dx=0$ є нелінійним відносно функції $y = y(x)$. Однак, якщо записати його у вигляді $\left(x - 2yx - y^2\right)y' = -y^2 \Rightarrow y' = \dfrac{y^2}{y^2 + 2yx - x} \Rightarrow \dfrac{1}{x'} = \dfrac{y^2}{y^2 + 2yx - x} \Rightarrow x' + \dfrac{1 - 2y}{y^2}x = 1$, $(y \neq 0)$, то маємо лінійне рівняння відносно функції $x = x(y)$. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $x = u(y) \cdot v(y)$.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - \dfrac{2y}{x} = 2x^3$.

Розв'язання. Це лінійне неоднорідне рівняння виду (2.15), у якому $p(x) = -\dfrac{2}{x}$, $q(x) = 2x^3$.

Метод варіації довільної сталої. Запишемо і розв'яжемо лінійне однорідне диференціальне рівняння $y' - \dfrac{2y}{x} = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}, \quad \int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{dx}{x}, \quad ln|y| = 2ln|x| + lnC, \quad ln|y| = ln\left|C \cdot x^2\right|,$$

$y = Cx^2$.

Будемо тепер розшукувати розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді $y = C(x) \cdot x^2$.

Звідки $y' = C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x$.

Підставимо y і y' у задане рівняння

$$C'(x) \cdot x^2 + 2C(x) \cdot x - \frac{2C(x) \cdot x^2}{x} = 2x^3, \quad C'(x) = 2x,$$

$$C(x) = \int 2xdx = x^2 + C_1 .$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд: $y = \left(x^2 + C_1\right) \cdot x^2$.

Метод Бернуллі. У рівнянні $y' - \frac{2y}{x} = 2x^3$ робимо підстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$: $\qquad u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3, \quad u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3.$

Будемо вважати, що вираз у дужках у лівій частині рівняння дорівнює нулю. Тоді отримаємо систему диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними: $\begin{cases} v' - \frac{2v}{x} = 0, \\ u'v = 2x^3. \end{cases}$

Знайдемо, спочатку, розв'язок першого рівняння:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}, \quad ln|v| = 2ln|x|, \; ln|v| = ln\left|x^2\right|, \; v = x^2.$$

Ми вибрали за $v(x)$ частинний розв'язок, поклавши $C = 0$.

Підставимо знайдений розв'язок в друге рівняння системи:

$$u'x^2 = 2x^3, \quad u' = 2x, \quad u = \int 2x dx = x^2 + C.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = \left(x^2 + C\right) \cdot x^2$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\left(x^2 + 1\right)y' + 4xy = 1$.

Розв'язання. Це рівняння є лінійним. Його можна записати у вигляді

$$y' + \frac{4xy}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Розв'яжемо його методом Бернуллі. Виконуємо підстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{4xuv}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}, \qquad u'v + u\left(v' + \frac{4xv}{x^2 + 1}\right) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} v' + \frac{4xv}{x^2 + 1} = 0, \\ u'v = \frac{1}{x^2 + 1}. \end{cases}$$

Розв’яжемо перше рівняння:

$$v' + \frac{4xv}{x^2+1} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{4xv}{x^2+1}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{4xdx}{x^2+1}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{4xdx}{x^2+1},$$

$$ln|v| = -2ln\left|x^2+1\right|, \quad ln|v| = ln\left(x^2+1\right)^{-2}, \quad v = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Підставимо знайдений розв’язок в друге рівняння системи:

$$\frac{u'}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{x^2+1}, \qquad u' = x^2+1, \quad u = \int \left(x^2+1\right)dx = \frac{x^3}{3} + x + C.$$

Отже, $y = \dfrac{x^3+3x+3C}{3\left(x^2+1\right)^2}$.

Приклад 4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' + y \cdot tgx = cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Розв’язання. Задане рівняння лінійне неоднорідне. Розв’яжемо його методом варіації довільної сталої. Відповідне йому лінійне однорідне рівняння має вигляд $y' + y \cdot tgx = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -ytgx, \qquad \frac{dy}{y} = -tgxdx, \qquad \int \frac{dy}{y} = -\int tgxdx, \qquad ln|y| = ln|cos\,x| + lnC,$$

$$ln|y| = ln|C\cos x|, \quad y = C\cos x.$$

Шукаємо розв’язок заданого рівняння у вигляді $y = C(x)cos\,x$. Звідки $y' = C'(x)cos\,x - C(x)sin\,x$.

Підставляємо y і y' в задане рівняння.

$$C'(x)cos\,x - C(x)sin\,x + C(x)cos\,x \cdot tgx = cos^2 x,$$

$$C'(x)cos\,x = cos^2 x, \quad C'(x) = cos\,x, \quad C(x) = \int cos\,xdx = sin\,x + C_1.$$

Таким чином, загальний розв’язок даного рівняння має вигляд $y = (sin\,x + C_1) \cdot cos\,x$.

Підставимо в цей вираз початкові умови:

$$\frac{1}{2}=\left(\sin\frac{\pi}{4}+C_1\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}\ ,$$

$$\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+C_1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\quad C_1=0\,.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд: $y=\sin x\cdot\cos x$, або

$$y=\frac{1}{2}\sin 2x\,.$$

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y'-\frac{y}{x\ln x}=2x\ln x\,,\ y(e)=2e^2.$$

Розв'язання. Це лінійне рівняння, розв'яжемо його методом Бернуллі. Зробимо підстановку $y=uv$, $y'=u'v+uv'$. Тоді

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x\ln x}=x\ln x\,,\qquad u'v=u\left(v'-\frac{v}{x\ln x}\right)=2x\ln x\,,$$

$$\begin{cases} v'-\dfrac{v}{x\ln x}=0, \\ u'v=2x\ln x. \end{cases}$$

Розв'яжемо переш рівняння системи:

$$v'=\frac{v}{x\ln x},\qquad \frac{dv}{dx}=\frac{v}{x\ln x},\quad \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x\ln x},\quad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x\ln x},\quad \ln|v|=\ln|\ln x|\,,$$

$v=\ln x$. Підставимо отриманий розв'язок в друге рівняння $u'\ln x=2x\ln x$, $u'=2x$, $u=2\int xdx=x^2+C$.

$y=\left(x^2+C\right)\ln x$ – загальний розв'язок рівняння.

Підставляємо початкової умови:

$2e^2=\left(e^2+C\right)\cdot\ln e$, $C=e^2$.

Отже, $y=\left(x^2+e^2\right)\cdot\ln x$ – частинний розв'язок.

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші:

$$y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x, \quad y(0)=0.$$

Розв'язання. Розділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{1-x^2}$. Дістанемо:

$$y'+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Зробимо підстановку $y=uv;\qquad y'=u'v+uv'$,

$$u'v+uv'+\frac{uv}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$u\left(v'+\frac{v}{\sqrt{1-x^2}}\right)+u'v=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{cases} v'+\dfrac{v}{\sqrt{1-x^2}}=0, \\ u'v=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння:

$$v'=-\frac{v}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \quad \ln v=-\arcsin x \quad \Rightarrow \quad v=e^{-\arcsin x}.$$

Підставимо знайдене значення v у друге рівняння:

$$u'e^{-\arcsin x}=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{e^{\arcsin x}\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\int du=\int\frac{\arcsin x\cdot e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\int\frac{\arcsin x\cdot e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{matrix} t=\arcsin x \\ dt=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{matrix}\right| \quad = \quad \int t e^t dt=$$

$$= \left| \begin{array}{l} u_1 = t, \qquad du_1 = dt, \\ dv_1 = e^t dt, \quad v_1 = \int e^t dt = e^t \ , \\ \int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1 . \end{array} \right| = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C =$$

$$= arcsin x \, e^{arcsin\, x} - e^{arcsin\, x} + C \, .$$

Отже, $u = arcsin x \, e^{arcsin\, x} - e^{arcsin\, x} + C$.

Тоді, загальний розв’язок лінійного рівняння має вигляд: $y = \left(arcsin x \, e^{arcsin\, x} - e^{arcsin\, x} + C \right) e^{-arcsin\, x}$ або $y = arcsin x - 1 + C \, e^{-arcsin\, x}$.

Підставимо в цей вираз початкові умови: $0 = arcsin 0 - 1 + C \, e^{-arcsin 0} \quad \Rightarrow \quad C = 1$.

Отже $y = arcsin x - 1 + e^{-arcsin\, x}$ – частинний розв’язок лінійного рівняння.

Зауваження. Може статися, що диференціальне рівняння буде лінійним тільки після того, як поміняти ролями незалежну змінну x і шукану функцію y, тобто записати це рівняння у вигляді $\frac{dx}{dy} + f(y)x = g(x)$.

Приклад 7. Розв’язати рівняння $\left(x + y^3\right) y' = y$.

Розв’язання. Відносно функції $y(x)$ рівняння не є лінійним (воно містить доданок y^3). Але відносно функції $x(y)$ це рівняння є лінійним.

Дійсно: $\left(x + y^3\right)\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow x + y^3 = \frac{dx}{dy} \cdot y \Rightarrow \frac{dx}{dy} \cdot y - x = y^3 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = y^2$.

Розв’яжемо отримане рівняння методом Бернуллі, тобто зробимо підстановку $x = uv$ (u і v тепер є функціями аргумента y) і $\frac{dx}{dy} = v\frac{du}{dy} + u\frac{dv}{dy}$.

$$v\frac{du}{dy} + u\frac{dv}{dy} - \frac{uv}{y} = y^2, \quad v\frac{du}{dy} + u\left(\frac{dv}{dy} - \frac{v}{y}\right) = y^2,$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dy} - \dfrac{v}{y} = 0, \\ v\dfrac{du}{dy} = y^2. \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; ln|v| = ln|y| \;\Rightarrow\; v = y.$$

$$y\frac{du}{dy} = y^2 \Rightarrow \frac{du}{dy} = y \;\Rightarrow\; u = \int ydy = \frac{y^2}{2} + C.$$

Тепер можна записати загальний розв'язок даного рівняння $(x = u \cdot v)$:

$$x = \left(\frac{y^2}{2} + C\right) \cdot y.$$

2.6. Рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \;\; \alpha \in R \;\; (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1). \qquad (2.25)$$

Якщо у (2.25) $\alpha = 0$, то одержуємо лінійне рівняння, а при $\alpha = 1$ – рівняння з відокремлюваними змінними.

Поділимо рівняння (2.25) на $y^{\alpha} \neq 0$: $y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$ і зробимо заміну $z = y^{1-\alpha}$. Тоді $z' = \dfrac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, звідки знаходимо $y^{-\alpha}y' = \dfrac{z'}{1-\alpha}$. Отже, рівняння набуває вигляду

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + p(x)z = q(x). \qquad (2.26)$$

Останнє рівняння є лінійним відносно z. Розв'язок його відомий. Таким чином, підстановка $z = y^{1-\alpha}$ зводить рівняння Бернуллі до лінійного. Зауважимо, що при $\alpha > 0$ розв'язком рівняння (2.25) буде також функція $y = 0$.

На практиці розв'язок рівняння Бернуллі зручніше шукати методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його до лінійного рівняння.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' + y = y^2 \ln x$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $y^2 \neq 0$: $xy'y^{-2} + y^{-1} = \ln x$.

Робимо заміну $z(x) = y^{-1}$, $z' = -\frac{1}{y^2}y'$. Тоді рівняння набуває вигляду $-xz' + z = \ln x \Rightarrow z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$.

Останнє рівняння є лінійним відносно функції $z(x)$ і його можна розв'язати методом Лагранжа або методом Бернуллі. Застосуємо, наприклад, перший з них, а саме, виконаємо наступні дві дії:

1. $z' - \frac{1}{x}z = 0$, $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$, $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$, $\ln|z| = \ln|Cx|$, $z = Cx$.

2. $z = C(x)x$, $z' = C'(x) + C(x) \Rightarrow C'(x)x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)x = -\frac{\ln x}{x}$,

$$C'(x)x = -\frac{\ln x}{x}, \quad C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}, \quad C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = \frac{dx}{x^2} \\ du = \frac{1}{x}dx & v = -\frac{1}{x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(\ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) + \int \frac{dx}{x^2}\right) = \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + C_1.$$

Отже, $z = \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + C_1\right) \cdot x = \ln x + 1 + C_1 x$. Тоді загальний розв'язок рівняння матиме вигляд $y = z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\ln x + 1 + C_1 x}$; $y = 0$.

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 y^2, \; y(1) = 1.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння Бернуллі будемо шукати у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + v'u$. Маємо

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x^2 (uv)^2,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^2 u^2 v^2 \Rightarrow \begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = x^2 u^2 v^2. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи: $v' - \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$ $ln|v| = ln|x| \Rightarrow v = x \ (C = 0)$.

Підставимо отримане значення v у друге рівняння:

$u'v = x^2u^2v^2 \Rightarrow \ u'x = x^2u^2x^2 \Rightarrow \ u' = u^2x^3 \Rightarrow \ \frac{du}{dx} = u^2x^3 \Rightarrow \ \frac{du}{u^2} =$ $= x^3dx \Rightarrow -\frac{1}{u} = \frac{x^4}{4} + C \Rightarrow \ u = -\frac{4}{x^4 + 4C}$.

Отже, загальний розв'язок рівняння Бернуллі має вигляд:

$$y = uv = -\frac{4}{x^4 + 4C} \cdot x = -\frac{4x}{x^4 + 4C}.$$

Для визначення частинного розв'язку рівняння накладемо початкову умову: якщо $x = 1$, то $y = 1$. Тоді $-\frac{4}{1 + 4C} = 1$, звідки $-4 = 4C + 1 \Rightarrow C = -\frac{5}{4}$. Підставимо отримане значення C у загальний розв'язок рівняння і отримаємо частинний розв'язок:

$$y = -\frac{4x}{x^4 - 5} = \frac{4x}{5 - x^4}.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Бернуллі. Зробимо підстановку $y = u \cdot v$, тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=x^2u^2v^2, \quad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=x^2u^2v^2.$$

$$\begin{cases} v'+\dfrac{v}{x}=0, \\ u'v=x^2u^2v^2. \end{cases}$$

Розв’яжемо перше рівняння: $v'+\frac{v}{x}=0 \Rightarrow \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=$ $=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow ln|v|=-ln|x| \Rightarrow v=\frac{1}{x}$.

Підставимо отримане значення v у друге рівняння:

$$u'\frac{1}{x}=x^2u^2\cdot\frac{1}{x^2} \Rightarrow u'=x\cdot u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=x\cdot u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2}=xdx \Rightarrow \int\frac{du}{u^2}=\int xdx \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{u}=\frac{x^2}{2}+C \Rightarrow -\frac{1}{u}=\frac{x^2+2C}{2} \Rightarrow u=-\frac{2}{x^2+2C}.$$

Загальний розв’язок рівняння: $y=u\cdot v=-\frac{2}{x\left(x^2+2C\right)}$.

Приклад 4. Розв’язати рівняння $y'-\frac{2y}{x}=x\sqrt{y}$.

Розв’язання. Дане рівняння є рівнянням Бернуллі. Зробимо підстановку $y=u\cdot v$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'-\frac{2uv}{x}=x\sqrt{uv}, \qquad u'v+u\left(v'-\frac{2v}{x}\right)=x\sqrt{uv}.$$

$$\begin{cases} v'-\dfrac{2v}{x}=0 \\ u'v=x\sqrt{uv}. \end{cases}$$

Розв’яжемо перше рівняння:

$$v'=\frac{2v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx}=\frac{2v}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=\int\frac{2dx}{x} \Rightarrow ln|v|=2\,ln|x| \Rightarrow v=x^2.$$

Підставимо отримане значення v у друге рівняння:

$$u' \cdot x^2 = x\sqrt{ux^2} \Rightarrow u' = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u}} = dx \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int dx \Rightarrow 2\sqrt{u} = x + C \Rightarrow$$

$$u = \frac{(x+C)^2}{4}.$$

Загальний розв'язок рівняння: $y = u \cdot v = \dfrac{x^2(x+C)^2}{4}$.

Приклад 5. Знайти розв'язок задачі Коші $y' + \dfrac{3x^2 y}{x^3+1} = (1+x^3)y^2 \sin x$, $y(0) = 1$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Бернуллі. Нехай $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{3x^2 uv}{x^3+1} = (1+x^3)u^2 v^2 \sin x,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{3x^2 v}{x^2+1}\right) = (1+x^3)u^2 v^2 \sin x.$$

$$\begin{cases} v' + \dfrac{3x^2 v}{x^3+1} = 0, \\ u'v = (1+x^3)u^2 v^2 \sin x. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння:

$$v' = -\frac{3x^2 v}{x^3+1} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{3x^2 v}{x^3+1} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{3x^2}{x^3+1} \Rightarrow \ln|v| = -\ln\left|x^3+1\right| \Rightarrow$$

$$v = (x^3+1)^{-1} \Rightarrow v = \frac{1}{x^3+1}.$$

Підставимо отримане значення v у друге рівняння:

$$u' \cdot \frac{1}{x^3+1} = (1+x^3) \cdot u^2 \cdot \frac{\sin x}{(x^3+1)^2} \Rightarrow u' = u^2 \cdot \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = u^2 \sin x \Rightarrow \frac{du}{u^2} =$$

$$= \sin x dx \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \sin x dx \Rightarrow -\frac{1}{u} = -\cos x - C \Rightarrow \frac{1}{u} = \cos x + C \Rightarrow u = \frac{1}{\cos x + C}.$$

Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y = \dfrac{1}{(\cos x + C)(x^3+1)}$.

Підставимо в цей вираз початкові умови:

$$1=\frac{1}{(cos\,0+C)(0+1)},\quad 1=\frac{1}{1+C}\Rightarrow C=0.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд $y=\frac{1}{(x^3+1)cos\,x}$.

Завдання для самостійної роботи

1. З'ясувати, чи буде функція $y=\frac{\cos x}{x}$ розв'язком рівняння $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{2x}$.

2. Рівняння $x\sin y dy+y^2\sin x dx-\sin x dx=0$ є :

а) рівнянням з відокремлюваними змінними ;
б) однорідним рівнянням ;
в) лінійним рівнянням ;
г) рівнянням Бернуллі .

3. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$xy'-y=x\sin^2\frac{3y}{x}$$

4. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$y'-ytgx=\frac{1}{cos\,x}.$$

5. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$y'-\frac{2y}{x}=x^2\,ctg\,x.$$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy'=y\left(1+3\ln y-3\ln x\right).$$

7.Знайти розв'язок задачі Коші $xy'+y=3xy^2\ln^2 x$, $y(1)=0{,}5$

8. Знайти розв'язок задачі Коші $xy'+y=ln\,x+1$, $y(1)=3$;

9. Знайти розв'язок задачі Коші $y'+\frac{3}{x}y=\frac{2}{x^3}$, $y(1)=1$.

10. Розв'язати рівняння Бернуллі: $xy^2y'=x^2+y^3$.

Розділ 3
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.

3.1. Загальні поняття та означення

Якщо диференціальне рівняння містить похідну більш ніж першого порядку, то воно називається рівнянням вищих порядків.

Розглянемо спочатку диференціальне рівняння другого порядку, яке має загальний вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{3.1}$$

або, якщо розв'язати це рівняння відносно другої похідної, то матимемо

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{3.2}$$

де x - незалежна змінна, $y = y(x)$ - шукана функція, y', y'' - похідні цієї функції.

Розв'язком рівняння (3.2) на інтервалі (a, b) називається така функція $y = \varphi(x)$, диференційована на цьому інтервалі, яка при підстановці в рівняння (3.2) перетворює його на тотожність.

Загальним розв'язком рівняння (3.2) називається така функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, яка, по-перше, є розв'язком рівняння (3.2) при будь-яких значеннях довільних сталих C_1, C_2, по-друге, якими не були б початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0 \tag{3.3}$$

існують єдині значення довільних сталих $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$, такі, що функція $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ буде розв'язком рівняння (20.2) та задовольняє початкові умови (3.3).

Будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ рівняння (3.2), отриманий із загального розв'язку при конкретних значеннях довільних сталих $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$ називається ***частинним розв'язком*** цього рівняння.

Розв'язки рівняння (3.2) вигляду $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ та $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$ називаються загальним та частинним інтегралами рівняння (3.2) відповідно.

Графік будь-якого диференціального рівняння другого порядку називається ***інтегральною кривою***. Загальний розв'язок диференціального рівняння (3.2) уявляє сім'ю інтегральних кривих, частинний розв'язок – одну інтегральну криву, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, та має дотичну в цій точці з кутовим коефіцієнтом $y'(x_0) = y'_0$.

Аналогічно диференціальним рівнянням першого порядку, задача, яка полягає у відшуканні частинного розв'язку диференціального рівняння другого порядку при заданих початкових умовах називається задачею Коші.

Теорема 3.1. **(про існування та єдинність задачи Коші)**

Якщо в рівнянні (3.2) функція $f(x, y, y')$ та її частинні похідні f'_y та $f'_{y'}$ неперервні у деякій області D зміни змінних x, y та y' то для будь-якої точки $(x_0, y_0, y'_0) \in D$ існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (3.2), що задовольняє початковим умовам (3.3).

Аналогічні поняття та означення вводяться для диференціальних рівнянь n- го порядку. Загальний вигляд диференціального рівняння n- го порядку:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{3.4}$$

або, якщо розв'язати його відносно найвищої похідної:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \tag{3.5}$$

Порядок диференціального рівняння визначає порядок старшої похідної, що до нього входить. Початкові умови для диференціальних рівнянь n- го порядку мають вигляд:

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0, \\ &y'(x_0) = y'_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Розв'язком диференціального рівняння (3.4) на інтервалі (a,b) називається така функція $y=\varphi(x)$, диференційована на цьому інтервалі, яка при підстановці в рівняння (3.4) перетворює його на тотожність.

Загальним розв'язком рівняння (3.4) називається така функція $y=\varphi\left(x,C_1,C_2,...,C_n\right)$, що містить n довільних сталих, які не залежать від x, та є розв'язком рівняння (3.4) при будь-яких значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_n$

Частинний розв'язок диференціального рівняння (3.4) отримується із *загального при конкретних значеннях довільних сталих* $C_1,C_2,...,C_n$ *таким* чином, щоб задовольнити початкові умови (3.6).

З точки зору геометрії загальний розв'язок диференціального рівняння n- го порядку, також, як і для першого є сім'єю інтегральних кривих, що залежать від параметрів $C_1,C_2, ...,C_n$ (для диференціальних рівнянь першого порядку тільки від одного параметра C), а частинний розв'язок – це окрема крива з цієї сім'ї.

Якщо неможливо отримати загальний (частинний) розв'язки диференціального рівняння (3.4) у явному вигляді, то отримані неявні функції $\Phi(x, y,C_1,C_2,...,C_n)=0$ та $\Phi\left(x, y,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0\right)=0$ називають загальним та частинним інтегралами диференціального рівняння відповідно.

Задача знаходження розв'язків диференціальних рівнянь вищих порядків набагато складніша ніж першого. Тому розглянемо лише окремі, найпростіші випадки диференціальних рівнянь вищих порядків.

3.2. Диференціальні рівняння, що припускають зниження порядку

Одним з методів розв'язання диференціальних рівнянь вищих порядків є метод ***зниження*** порядку. Розглянемо три типи таких рівнянь.

3.2.1. Рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$.

Нехай є рівняння

$$y^{(n)} = f(x),$$

де $f(x)$ - неперервна функція, яка інтегрується в квадратурах.

Отже перепишемо дане рівняння у вигляді:

$$\frac{d\,y^{(n-1)}}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad d\,y^{(n-1)} = f(x)dx.$$

Проінтегруємо отримане рівняння:

$\int d\,y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$, тоді

$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$, де C_1 - стала інтегрування.

Продовжуючи цей процес послідовно отримаємо

$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2$,

$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2$,

$\int d\,y^{(n-2)} = \int\left(\int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2\right)dx$,

…………………………………………………………..

$$y = \int\left(\int\left(\ldots\int\left(\int f(x)dx\right)dx\right)dx\ldots.\right)dx + C_{n-2}\frac{x^2}{2} + C_{n-1}x + C_n.$$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = 2^x - \sin 3x$.

Розв'язання. Проінтегруємо двічі обидві частини цього рівняння:

$$y' = \int\left(2^x - \sin 3x\right)dx = \int 2^x dx - \int \sin 3x dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) + C_1$$

$$y=\int\left(\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{3}\cos 3x+C_1\right)dx=\frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,dx+\frac{1}{3}\int\cos 3x\,dx+C_1\int dx=$$

$$=\frac{2^x}{\ln^2 2}+\frac{1}{9}\sin 3x+C_1x+C_2.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння:

$$y=\frac{2^x}{\ln^2 2}+\frac{1}{9}\sin 3x+C_1x+C_2.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'''=\frac{1}{x^3}-\sin 4x+3$.

Розв'язання. Права частина рівняння не містить невідомої функції y та її похідної y', тому для отримання розв'язку тричі послідовно інтегруємо обидві його частини:

$$y''=\int\left(\frac{1}{x^3}-\sin 4x+3\right)dx=\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{1}{4}\cos 4x+3x+C_1,$$

$$y'=\int\left(\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{1}{4}\cos 4x+3x+C_1\right)dx=\frac{x^{-1}}{2}+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{3x^2}{2}+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{3x^2}{2}+C_1x+C_2\right)dx=-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{64}\cos 4x+$$

$$+\frac{3x^3}{2\cdot 3}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння:

$$y=-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{64}\cos 4x+\frac{x^3}{2}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $y'''=\frac{2}{x^5}-\cos 4x+5$.

Розв'язання. Права частина рівняння не містить невідомої функції y та її похідної y', тому для отримання розв'язку тричі послідовно інтегруємо обидві його частини:

$$y'' = \int\left(\frac{2}{x^5} - \sin 4x + 5\right)dx = \frac{2x^{-4}}{-4} - \frac{1}{4}\sin 4x + 5x + C_1 =$$

$$= -\frac{x^{-4}}{2} - \frac{1}{4}\sin 4x + 5x + C_1,$$

$$y' = \int\left(-\frac{x^{-4}}{2} - \frac{1}{4}\sin 4x + 5x + C_1\right)dx = \frac{x^{-3}}{6} + \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{5x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int\left(\frac{x^{-3}}{6} + \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{5x^2}{2} + C_1 x + C_2\right)dx = -\frac{x^{-2}}{12} + \frac{1}{64}\sin 4x +$$

$$+ \frac{5x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 = -\frac{1}{12x^2} + \frac{\sin 4x}{64} + \frac{5x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння:

$$y = -\frac{1}{12x^2} + \frac{\sin 4x}{64} + \frac{5x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' = x\cos\frac{x}{2}$.

Розв'язання. Дане рівняння того же типу, що і попереднє, тому його розв'язок знаходимо аналогічно, тобто:

$$y' = \int x\cos\frac{x}{2}\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = x & dv = \cos\frac{x}{2}dx \\ du = dx & v = \int\cos\frac{x}{2}dx = 2\sin\frac{x}{2} \end{array}\right| =$$

$$= y' = 2x\sin\frac{x}{2} - 2\int\sin\frac{x}{2}dx = 2x\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2} + C_1,$$

$$y = \int\left(2x\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2} + C_1\right)dx = 2\int x\sin\frac{x}{2}dx + 8\sin\frac{x}{2} + C_1 x + C_2,$$

$$\int x\sin\frac{x}{2}dx=\begin{vmatrix} u=x & dv=\sin\frac{x}{2}dx \\ du=dx & v=\int\sin\frac{x}{2}dx=-2\cos\frac{x}{2} \end{vmatrix}=$$

$$=-2x\cos\frac{x}{2}+2\int\cos\frac{x}{2}dx=-2x\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y=-4x\cos\frac{x}{2}+16\sin\frac{x}{2}+C_1x+C_2.$$

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші

$$y''=\cos^2 5x, \qquad y'(0)=2; \quad y(0)=-\frac{1}{50}.$$

Розв'язання.

$$y'=\int\cos^2 5x dx=\int\frac{1+\cos 5x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)+C_1,$$

$$y=\int\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)+C_1\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{25}\cos 5x\right)+C_1x+C_2.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння:

$$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{50}\cos 5x+C_1x+C_2.$$

Для того, щоб отримати частинний розв'язок, тобто, розв'язати задачу Коші, треба знайти C_1 та C_2 використовуючи початкові умови:

$$2=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{5}\sin 0\right)+C_1, \quad \Rightarrow \quad C_1=2,$$

$$-\frac{1}{50}=\frac{1}{4}\cdot 0^2-\frac{1}{50}\cos 0+C_1\cdot 0+C_2, \quad \Rightarrow \quad C_2=0.$$

Таким чином, $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{50}\cos 5x+2x-$ частинний розв'язок рівняння.

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші: $y''=\dfrac{2x}{x^2+1},\quad y'(0)=0,\quad y(0)=2.$

Розв'язання.

$$y'=\int\frac{2x}{x^2+1}dx=ln\left(x^2+1\right)+C_1,$$

$$y=\int\left(ln\left(x^2+1\right)+C_1\right)dx=\int ln\left(x^2+1\right)dx+C_1x+C_2,$$

$$\int ln\left(x^2+1\right)dx=\begin{vmatrix} u=ln\left(x^2+1\right) & dv=dx \\ du=\dfrac{2x}{x^2+1}dx & v=x \end{vmatrix}=x\,ln\left(x^2+1\right)-2\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=$$

$$=x\,ln\left(x^2+1\right)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=x\,ln\left(x^2+1\right)-2\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=x\,ln\left(x^2+1\right)-2x+2arctgx.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння:

$$y=x\,ln\left(x^2+1\right)-2x+2arctgx+C_1x+C_2$$

Для того, щоб отримати частинний розв'язок, тобто, розв'язати задачу Коші, треба знайти C_1 та C_2, використовуючи початкові умови:

$$0=ln(0+1)+C_1 \quad\Rightarrow\quad C_1=0;$$

$$2=0\cdot ln(0+1)-2\cdot 0+2arctg0+C_1\cdot 0+C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2=2.$$

Таким чином, частинний розв'язок рівняння:

$$y=x\,ln\left(x^2+1\right)-2x+2arctgx+2$$

Приклад 7. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y''=2cos\,x\,sin^2x-cos^3x,\qquad y(0)=\frac{7}{3};\quad y'(0)=-1.$$

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок інтегруванням:

$$y'=\int\left(2cos\,x\,sin^2x-cos^3x\right)dx=\int\left(2sin^2x\,cos\,x-cos^2x\cdot cos\,x\right)dx=$$

$$=\int\left(2sin^2x-cos^2x\right)cos\,xdx=\int\left(2sin^2x-1+sin^2x\right)cos\,xdx=$$

$$\int\left(3\sin^2 x-1\right)\cos x dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t,\\ dt=\cos x dx\end{array}\right|=\int\left(3t^2-1\right)dt=-\frac{3t^3}{3}+t+C_1=$$

$$=\sin^3 x-\sin x+C_1.$$

$$y=\int\left(\sin^3 x-\sin x+C_1\right)dx=\int\left(\sin^2 x-1\right)\sin x dx+C_1\int dx=$$

$$=-\int\cos^2 x\sin x dx+C_1 x=\left|\begin{array}{l}\cos x=t,\\ dt=-\sin x dx.\end{array}\right|=\int t^2 dt+C_1 x=\frac{t^3}{3}+C_1 x+C_2=$$

$$=\frac{\cos^3 x}{3}+C_1 x+C_2.$$

Знайдемо C_1 та C_2. Підставимо початкові умови у вирази з y' та y.

$-1=-\cos^3 0+\cos 0+C_1, \quad \Rightarrow \quad C_1=-1$;

$\frac{7}{3}=\frac{\cos^3 0}{3}+C_1\cdot 0+C_2, \quad \Rightarrow \quad C_2=2$.

Тоді, частинний розв’язок рівняння має вигляд:

$$y=\frac{\cos^3 x}{3}-x+2.$$

3.2.2. Диференціальні рівняння, що явно не містять шукану функцію $y(x)$

Диференціальне рівняння $F(x, y', y')=0$, що явно не містить шукану функцію y, за допомогою підстановки $y'=P(x)$; $y''=P'(x)$ зводять до відповідного рівняння першого порядку $F(x, P(x), P'(x))=0$. Розв’язок цього рівняння знаходять, виходячи з його типу, а потім, для отримання загального розв’язку початкового рівняння, повертаються до заміни $y'=P$.

Зразки розв’язування задач

Приклад 1. Розв’язати рівняння: $xy''+y'=\ln x$.

Розв'язання. Оскільки дане рівняння є рівнянням другого порядку, що явно не містить y, введемо підстановку $y' = P(x), \quad y'' = P'(x)$. Отримаємо рівняння першого порядку:

$$xP' + P = \ln x, \quad \Rightarrow \; P' + \frac{P}{x} = \frac{\ln x}{x},$$

яке є лінійним рівнянням. Його розв'язок будемо шукати у вигляді $y = uv$, а $y' = u'v + uv'$.

Отримаємо: $$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\ln x}{x},$$

$$u\left(v' + \frac{v}{x}\right) + u'v = \frac{lnnx}{x},$$

$$\begin{matrix} I \\ II \end{matrix} \begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = \dfrac{\ln x}{x}. \end{cases}$$

I. $$v' = -\frac{v}{x}, \quad \Rightarrow \frac{dv}{sx} = -\frac{v}{x}, \quad \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow$$

$$+\ln|v| = -\ln|x|, \quad \Rightarrow \; \ln v = \ln\frac{1}{x}, \quad \Rightarrow v = \frac{1}{x}.$$

II.

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}, \quad \Rightarrow \; u' = \ln x, \quad \Rightarrow \int du = \int \ln x dx \left| \begin{matrix} \text{За методом інтегрування} \\ \text{частинамимаємо} \\ u_1 = \ln x, \qquad du_1 = \dfrac{dx}{x}, \\ dv_1 = dx, \qquad v_1 = x, \end{matrix} \right| \Rightarrow$$

$$u = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \; u = \ln x \cdot x - \int dx, \quad \Rightarrow \; u = x\ln x - x + C_1.$$

Маємо: $P = \left(x\ln x - x + C_1\right)\cdot\dfrac{1}{x}$ або $P = \ln x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{C_1}{x}$.

Тоді: $y' = P = \ln x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{C_1}{x}$.

Проінтегруємо це рівняння

$$y=\int\left(\ln x-1+\frac{C_1}{x}\right)dx=\int \ln x dx+\int\left(-1+\frac{C_1}{x}\right)dx.$$

Із попереднього $\int \ln x dx = x\ln x - x$.

Маємо: $y = x\ln x - x - x + C_1 \ln|x| + C_2$, або

$y = x\ln x - 2x + C_1 \ln|x| + C_2$ – загальний розв'язок.

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $y''\left(1+x^2\right)=2xy'$.

Розв'язання. Дане рівняння не містить явно функції y, тому зводимо його до рівняння першого порядку підстановкою $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$.

Маємо: $p'\left(1+x^2\right)=2xp$,

$$\left(1+x^2\right)\frac{dp}{dx}=2xp \quad\Rightarrow\quad \frac{dp}{p}=\frac{2xdx}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dp}{p}=\int\frac{2xdx}{1+x^2} \quad\Rightarrow$$

$$\ln|p|=\ln\left|1+x^2\right|+\ln C_1 \quad\Rightarrow\quad \ln|p|=\ln\left|C_1\left(1+x^2\right)\right| \quad\Rightarrow\quad p=C_1\left(1+x^2\right).$$

Отже, $y'=C_1\left(1+x^2\right)$. Інтегруючи це рівняння, дістанемо

$$y=C_1x+\frac{C_1x^3}{3}+C_2.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $x^2y''+xy'=1$.

Розв'язання. Аналогічно попередньому прикладу введемо підстановку $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$. Отримаємо рівняння першого порядку:

$$x^2p'+xp=1.$$

Це рівняння є лінійним. Його розв'язок будемо шукати за допомогою підстановки $p=uv$, $p'=u'v+uv'$:

Отримаємо: $u'v+uv'+\dfrac{uv}{x}=\dfrac{1}{x^2}$, $\quad u'v+u\left(v'+\dfrac{v}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}$,

$$\begin{matrix} I \\ \\ II \end{matrix}\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

I. $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \int \dfrac{dv}{v} = -\int \dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \; ln|v| = -ln|x| \quad \Rightarrow$

$lnv = ln\dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow v = \dfrac{1}{x}$.

II. $u' \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \; du = \dfrac{1}{x} ln\, x \quad \Rightarrow \int du = \int \dfrac{1}{x} dx \quad \Rightarrow u = ln\, x + C_1$.

Маємо $p = (ln\, x + C_1) \cdot \dfrac{1}{x}$, тоді $y' = p = \dfrac{ln\, x + C_1}{x}$.

$$y = \int \left(\frac{ln\, x + C_1}{x} \right) dx.$$

Загальний розв'язок: $\quad y = \dfrac{ln^2 x}{2} + C_1\, ln|x| + C_2$.

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' ctgx + y' = 2, \qquad y(0) = 0; \qquad y'(0) = -2.$$

Розв'язання. Аналогічно попередньому, маємо: $y' = P(x); \quad y'' = P'(x)$. Тоді:

$$P' ctgx + P = 2.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та обчислюємо отримані інтеграли:

$$P' ctgx = 2 - P, \;\; \Rightarrow \frac{dP}{dx} \cdot ctgx = 2 - P, \quad \Rightarrow \frac{dP}{2 - P} = \frac{dx}{ctgx}, \quad \Rightarrow \int \frac{dP}{2 - P} = \int tgx\, dx, \quad \Rightarrow$$

$$-ln|2 - P| = -ln|cos\, x| - lnC_1, \;\; \Rightarrow \; ln|2 - P| = ln|C_1 \cos x|, \quad \Rightarrow \; 2 - P = C_1 \cos x, \quad \Rightarrow$$

$$P = 2 - C_1 \cos x, \quad \Rightarrow \quad y' = 2 - C_1 \cos x, \quad \Rightarrow \quad y = \int (2 - C_1 \cos x) dx;$$

$y = 2x - C_1 \sin x + C_2 \quad -$ загальний розв'язок.

Використаємо початкові умови:

$$y'(0) = -2, \quad \Rightarrow \quad -2 = 2 = C_1 \cos 0, \quad \Rightarrow \quad C_1 = 4,$$
$$y(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 \cdot 0 - C_1 \sin 0 + C_2, \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y = 2x - 4\sin x.$$

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$xy'' = y' \ln\frac{y'}{x}, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = e^2.$$

Розв'язання. Рівняння явно не залежить від функції y, тому підстановкою $y' = p(x), \quad y'' = p'(x)$ зводимо його до диференціального рівняння першого порядку:

$$x\,p' = p\ln\frac{p}{x},$$

яке є однорідним. Використовуємо заміну $p = ux, \quad p' = u'x + u$ та отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x\,(u'x + u) = u\,x\ln\frac{ux}{x},$$

або $u'x + u = u\ln u \quad \Rightarrow \quad u'x = u\ln u - u \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = u(\ln u - 1) \quad \Rightarrow$

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}.$$

До інтеграла, що стоїть у лівій частині останнього рівняння застосуємо заміну $t = \ln u - 1, \quad \Rightarrow \quad dt = \dfrac{du}{u}$.

Дістанемо:

$$\int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|t| = \ln|x| + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad \ln|t| = \ln|C_1 x| \quad \Rightarrow \quad t = C_1 x \quad \Rightarrow$$

$$\ln u - 1 = C_1 x \quad \Rightarrow \quad \ln u = C_1 x + 1 \quad \Rightarrow \quad u = e^{C_1 x + 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{x} = e^{C_1 x + 1} \quad \Rightarrow$$

$$p = xe^{C_1 x + 1} \quad \Rightarrow \quad y' = xe^{C_1 x + 1}.$$

Маємо диференціальне рівняння першого порядку, яке розв'язуємо інтегруванням:

$$y = \int x e^{C_1+1} dx .$$

$$y = \int x e^{C_1 x+1} dx \quad \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\textit{використовуємо метод інтегрування частинами}} \\ u = x & dv = e^{C_1 x+1} dx \\ du = dx & v = \int e^{C_1 x+1} dx = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} \end{array} \right|$$

$$y = x \frac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} - \int \frac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} dx = x \frac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} - \frac{1}{C_1^{\ 2}} e^{C_1 x+1} + C_2 .$$

Отже, загальним розв'язком даного рівняння буде функція:

$$y = x \frac{1}{C_1} e^{C_1 x+1} - \frac{1}{C_1^{\ 2}} e^{C_1 x+1} + C_2 \text{ або } y = \frac{C_1 x - 1}{C_1^2} e^{C_1 x+1} + C_2$$

Підставимо початкові умови $y(1) = e, \quad y'(1) = e^2$. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} e = \frac{C_1 - 1}{C_1^2} e^{C_1+1} + C_2, \\ e^2 = e^{C_1+1}. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = 1, C_2 = e$.

Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд: $y = (x-1)e^{x+1} + e$.

3.2.3. Диференціальні рівняння, що явно не містять незалежну зміну x

Диференціальне рівняння вигляду

$$F(y, y', y'') = 0,$$

що явно не містить незалежну зміну x, підстановкою $y' = P(y); \quad y'' = P_y' \cdot y_x' = P'P$ зводять до диференціального рівняння першого порядку $F(y, P, P') = 0.$ Потім визначають тип отриманого рівняння і відповідним методом його розв'язують. Нехай розв'язок рівняння першого порядку буде мати вигляд $P = \varphi(y, C_1)$. Тоді, $y' = \varphi(y, C_1)$ - це рівняння є рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними,інтегруючи яке отримаємо загальний інтеграл $\int \frac{dy}{\varphi(y,C_1)} = x + C_2.$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $1 + (y')^2 = 2y\,y''$.

Розв'язання. Це рівняння явно не містить незалежну змінну x, тому необхідно використати підстановку $y' = P(y), \quad y'' = P'P,$ яка зведе рівняння до рівняння першого порядку.

$$1 + P'^2 = 2yP'P.$$

Відокремимо змінні, та обчислимо одержані інтеграли:

$$1 + P^2 = 2y\frac{dP}{dy}\cdot P \quad \Rightarrow \quad \frac{2PdP}{1+P^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \quad \int\frac{2PdP}{1+P^2} = \int\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} 1 + P^2 = t \\ dt = 2PdP \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dt}{t} = \int\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad ln|t| = ln|y| + ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad ln|t| = ln|C_1 y| \quad \Rightarrow$$

$$t = C_1 y \;\Rightarrow\; 1 + P^2 = C_1 y \;\Rightarrow\; P^2 = C_1 y - 1 \;\Rightarrow\; P = \sqrt{C_1 y - 1} \;\Rightarrow y' = \sqrt{C_1 y - 1}.$$

Останнє рівняння – це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 y - 1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx, \quad \Rightarrow \quad .$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} + C_2.$$

Отже, загальним інтегралом даного рівняння другого порядку є:

$$x = \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} + C_2.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $(y')^2 = y\,y'' + 1$.

Розв'язання. Це рівняння явно не містить незалежну змінну x, тому слід використати підстановку $y' = p(y),\quad y'' = p'p,$ яка зведе наше рівняння до рівняння першого порядку:

$$ypp' + 1 = p^2.$$

Відокремимо змінні, та обчислимо одержані інтеграли:

$$p^2 = y\frac{pdp}{dy} + 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{pdp}{p^2 - 1} = \frac{dy}{y}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{pdp}{p^2 - 1} = \int \frac{dy}{y}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} ln\left|p^2 - 1\right| = ln|y| = lnC_1 \Rightarrow \sqrt{p^2 - 1} = C_1 y \Rightarrow p = \sqrt{C_1^2 y^2 + 1}$$

Останнє рівняння – це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1^2 y^2 + 1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 + 1}} = dx, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_1} ln\left|y + \sqrt{y^2 + \frac{1}{C_1^2}}\right| + C_2 = x.$$

Отже, загальний інтеграл даного рівняння:

$$\frac{1}{C_1} ln\left|y + \sqrt{y^2 + \frac{1}{C_1^2}}\right| + C_2 = x$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y \cdot y'' - (y')^2 = y^2\, ln\, y, \qquad y(0) = 1; \qquad y'(0) = 1.$$

Розв'язання. Підстановкою $y' = P(y),\quad y'' = P' \cdot P$ початкове рівняння зводиться до рівняння Бернуллі першого порядку

$$P \cdot y\,P' - P^2 = y^2\, ln\, y, \quad \text{або} \qquad P' - \frac{P}{y} = \frac{y\, ln\, y}{P}.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $P = uv$. Тоді $P' = u'v + uv'$.

Після підстановки отримаємо:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = \frac{y\,ln\,y}{uv},$$

$$u\left(v' - \frac{v}{y}\right) + u'v = \frac{y\,ln\,y}{uv},$$

$$\begin{matrix} I \\ II \end{matrix}\begin{cases} v' - \dfrac{v}{y} = 0, \\ u'v = \dfrac{y\,ln\,y}{uv}, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} I \\ II \end{matrix}\begin{cases} v' = \dfrac{v}{y}, \\ u' = \dfrac{y\,ln\,y}{uv^2}. \end{cases}.$$

I. $\dfrac{dv}{dy} = \dfrac{v}{y}, \quad \Rightarrow \quad \int \dfrac{dv}{v} = \int \dfrac{dy}{y}, \quad \Rightarrow \quad ln|v| = ln|y|, \quad \Rightarrow \quad v = y.$

II.

$$u' = \frac{y\,ln\,y}{y^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{udu}{dy} = \frac{ln\,y}{y}, \quad \Rightarrow \quad \int u\,du = \int \frac{ln\,y\,dy}{y}, \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} t = ln\,y \\ dt = \dfrac{dy}{y} \end{vmatrix}, \quad \Rightarrow$$

$$\int udu = \int t\,dt, \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2}{2} = \frac{t^2}{2} + \frac{C_1}{2}, \quad \Rightarrow \quad u^2 = t^2 + C_1, \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{ln^2 y + C_1}.$$

Дістанемо: $P = uv$, $P = \sqrt{ln^2 y + C_1} \cdot y$.

Отже:

$$y' = \sqrt{ln^2 y + C_1} \cdot y, \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\sqrt{ln^2 y + C_1}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y\sqrt{ln^2 y + C_1}} = \int dx, \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} ln\,y = t \\ dt = \dfrac{dy}{y} \end{vmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + C_1}} = \int dx, \quad \Rightarrow \quad ln\left| t + \sqrt{t^2 + C_1} \right| = x + C_2.$$

Загальний інтеграл рівняння матиме вигляд:

$$ln\left| ln\,y + \sqrt{ln^2 y + C_1} \right| = x + C_2.$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо C_1 та C_2:

$$\begin{matrix} y(0)=1, & \Rightarrow \\ y'(0)=1, & \Rightarrow \end{matrix} \qquad \begin{cases} ln\left|ln1+\sqrt{ln^2 1+C_1}\right| = C_2, \\ 1=\sqrt{ln^2 1+C_1}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2 = ln\sqrt{C_1}, \\ C_1 = 1, \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{matrix} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{matrix}.$$

Таким чином, частинний розв'язок рівняння має вигляд:

$$ln\left| lny+\sqrt{ln^2 y+1} \right| = x.$$

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y^2 y'' = -\grave{}1, \qquad y(1)=1; \qquad y'(1)=0.$$

Розв'язання. Підстановкою $y'=p(y), \quad y''=p'\cdot p$ початкове рівняння зводиться до рівняння першого порядку:

$$y^3 pp' = -1 \Rightarrow pdp = -\frac{dy}{y^3}$$

$$\int pdp = -\int \frac{dy}{y^3} \Rightarrow \frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + C_1 \Rightarrow p = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1+2C_1 y^2}}{y} \Rightarrow dx = \pm\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1 y^2}}$$

$$x = \pm\int \frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1 y^2}} + C_2 = \frac{\pm 1}{4C_1}\int \frac{1}{\sqrt{1+2C_1 y^2}} d\left(1+2C_1 y^2\right)$$

$x = \pm\dfrac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1 y^2} + C_2$ - загальний розв'язок рівняння.

Використовуючи початкові умови $y(1)=1, y'(1)=0$, знайдемо частинний розв'язок рівняння:

$$\begin{cases} \pm \dfrac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1}+C_2=1, \\ \pm\sqrt{1+2C_1}=0. \end{cases}$$

Звідки: $C_1=-\dfrac{1}{2}, C_2=1$

Отже: $x=\pm\sqrt{1-y^2}+1$ - частинний розв'язок рівняння.

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$yy''=y^2+\left(y'\right)^2, \qquad y(0)=1; \quad y'(0)=1.$$

Розв'язання. Підстановкою $y'=p(y); \quad y''=p'p$ зведемо дане рівняння до однорідного рівняння І-го порядку $ypp'=y^2+p^2$, яке за допомогою заміни $p=uy, \quad p'=u'y+u$ перетвориться на диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$yuy(u'y+u)=y^2+(uy)^2 \quad\Rightarrow\quad u(u'y+u)=1+u^2 \quad\Rightarrow$$

$$uu'y+u^2=1+u^2 \quad\Rightarrow\quad uu'y=1 \quad\Rightarrow\quad udu=\frac{1}{y} \quad\Rightarrow\quad \int udu=\int\frac{dy}{y}$$

$$\frac{u^2}{2}=\ln y+C_1 \quad\Rightarrow\quad u^2=2(\ln y+C_1) \quad\Rightarrow\quad u=\pm\sqrt{2(\ln y+C_1)}.$$

Оскільки $p=uy$, то маємо, що $p=\pm y\sqrt{2(\ln y+C_1)}$.

Звідки $y'=\pm y\sqrt{2(\ln y+C_1)}$.

Ми отримали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dx}=\pm y\sqrt{2(\ln y+C_1)} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y\sqrt{2(\ln y+C_1)}}=\pm dx \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{y\sqrt{2(\ln y+C_1)}}=\pm\int dx$$

$\sqrt{2(\ln y+C_1)}=\pm x+C_2$ - загальний розв'язок рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок рівняння. З початкових умов випливає:

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2C_1} = C_2, \\ 1 = \sqrt{2C_1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Зауважимо, що початкові умови приводять до однозначного вибору знака у виразі для $y'(x)$, а отже, і у розв'язку $y(x)$. Частинний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$\sqrt{2\ln y + 1} = x + 1 \text{ або } y = e^{\left(x^2 + 2x\right)/2}.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку:

1) $y'' = \sin^2 3x$;

2) $y'' = x^2 \ln x$;

3) $y''' = e^{5x} - x^3$;

4) $y''' = \dfrac{2}{x^3} - 5\sin 7x$;

5) $xy'' - y' = 0$;

6) $y'' + y' tgx = \sin 2x$;

7) $x^2 y'' + xy' = 1$;

8) $xy'' = y' + x \sin \dfrac{y'}{x}$;

9) $yy'' - y'\left(2\sqrt{yy'} - y'\right) = 0$;

10) $2yy'' = 3(y')^2 = 4y^2$;

11) $y'' y^3 = 4$;

12) $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}}$.

3.3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Загальні означення та поняття

Рівняння вигляду

$$b_0(x) y^{(n)} + b_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x) y' + b_n(x) y = F(x) \qquad (3.6)$$

називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку, де $b_0(x), b_1(x), \ldots, b_{n-1}(x),\ b_n(x), F(x)$ - задані функції, y- шукана функція, $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y'$ - похідні цієї функції. Функції $b_0(x), b_1(x), \ldots, b_{n-1}(x), b_n(x)$ називаються коефіцієнтами диференціального рівняння, функція $F(x)$ називається правою частиною диференціального рівняння. Якщо $F(x)$

тотожно дорівнює нулю, то рівняння (3.6) називається однорідним, якщо $F(x)\neq 0$, то - неоднорідним. В рівнянні (3.6) завжди $b_0(x)\neq 0$, оскільки, якщо б це було не так, то рівняння (3.6) було б рівнянням $n-1$ порядку. Це означає, що рівняння (3.6) можна розділити на $b_0(x)$ і отримати:

$$y^{(n)}+\frac{b_1(x)}{b_0(x)}y^{(n-1)}+\ldots+\frac{b_{n-1}(x)}{b_0(x)}y'+\frac{b_n(x)}{b_0(x)}y=\frac{F(x)}{b_0(x)},$$ або

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \tag{3.7}$$

де $a_1(x)=\dfrac{b_1(x)}{b_0(x)}$, $a_2(x)=\dfrac{b_2(x)}{b_0(x)}$, $a_{n-1}(x)=\dfrac{b_{n-1}(x)}{b_0(x)}$, $a_n(x)=\dfrac{b_n(x)}{b_0(x)}$.

Далі будемо розглядати рівняння (3.7), як більш зручніше.

Якщо у деякому інтервалі $(a;b)$ функції $a_i(x)$ та $f(x)$ неперервні, то рівняння (3.7) має єдиний розв'язок при будь-яких початкових умовах

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0,\ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\quad x_0\in(a;b).$$

3.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння (ЛОДР) другого порядку:

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \tag{3.8}$$

Теорема 3.2. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – є частинними розв'язками рівняння (3.6), то функція

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, є також розв'язком цього рівняння.

Доведення. Підставимо функцію $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ та її похідні в ліву частину ЛОДР (3.8).

Отримаємо:

$$\left(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\right)''+a_1\left(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\right)'+a_2\left(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\right)=0$$

$$C_1y_1''(x)+C_2y_2''(x)+a_1C_1y_1'(x)+a_1C_2y_2'(x)+a_2C_1y_1(x)+a_2C_2y_2(x)=0$$
$$C_1\left(y_1''(x)+a_1y_1'(x)+a_2y_1(x)\right)+C_2\left(y_2(x)+a_1y_2(x)+a_2y_2(x)\right)=0.$$

Оскільки функції $y_1(x)$ та $y_2(x)-$є розв'язками рівняння (3.8), то, вирази в дужках тотожно дорівнюють нулю, тобто, $C_1\cdot 0+C_2\cdot 0\equiv 0$. Таким чином, функція $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ також є розв'язком рівняння (3.8).

<u>Означення</u>. Функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називаються ***лінійно незалежними*** на інтервалі $(a;b)$, якщо рівність $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)=0$ де α_1та α_2 деякі дійсні числа, виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1=\alpha_2=0$. Якщо хоча б одне з чисел α_1та α_2 відмінно від нуля то функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називаються ***лінійно залежними*** на $(a;b)$. Зрозуміло, що функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони пропорційні, тобто $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=const.$

Засобом вивчення лінійної залежності системи функцій є так званий ***визначник Вронського*** або ***вронскіан***. Для двох диференційованих функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ вронскіан має вигляд

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \qquad (3.9)$$

<u>Теорема 3.3</u>. Якщо диференційовані функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні на $(a;b)$, то визначник Вронського на цьому інтервалі тотожно дорівнює нулю.

<u>Доведення.</u> Оскільки функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні на залежні на $(a;b)$, то вони є пропорційними, тобто $y_2(x)=\lambda\, y_1(x)$, де λ - коефіцієнт пропорційності. Тоді, $y_2'(x)=\lambda\, y_1'(x)$.

Отримаємо:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \lambda\, y_1(x) \\ y_1'(x) & \lambda\, y_1'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)\cdot\lambda\, y_1'(x)-y_1'(x)\cdot\lambda\, y_1(x)\equiv 0.$$

Теорема 3.4.. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - лінійно незалежні розв'язки рівняння (3.8) на $(a;b)$, то визначник Вронського на цьому інтервалі в жодній точці не звертається в нуль.

Сукупність будь-яких двох лінійно незалежних на інтервалі $(a;b)$ частинних розв'язків ЛОДР другого порядку $y_1(x)$ та $y_2(x)$ визначає ***фундаментальну систему розв'язків*** цього рівняння.

Теорема 3.5. (структура загального розв'язку ЛОДР другого порядку). Якщо два частинні розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – ЛОДР (3.8) утворюють на інтервалі $(a;b)$ фундаментальну систему, то загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{3.10}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Доведення.

Згідно теореми 3.2 функція (3.10) є розв'язком рівняння (3.8). Треба тільки довести, що цей розв'язок є загальним, тобто, що із нього можна виділити єдиний частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, де $x_0 \in (a;b)$. Підставивши ці початкові умови в (3.10), дістанемо

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(x) + C_2 y'_2(x_0) \end{cases},$$

де $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, з невідомими C_1, C_2. Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$$

.

Дорівнює значенню вронскіана при $x = x_0$. Оскільки розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння на $(a;b)$ та $x_0 \in (a;b)$, то відповідно до теореми 3.4 визначник $W(x_0) \neq 0$.

Отже система рівнянь має єдиний розв'язок:

$$C_1 = C_1^0 = \frac{1}{W(x_0)}\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y'_0 & y'_2(x_0) \end{vmatrix}, \quad C_2 = C_2^0 = \frac{1}{W(x_0)}\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y'_2(x_0)_0 & y'_0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок $y = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x)$ є частинним розв'язком (єдиним в наслідок теореми єдинності) рівняння (3.8), що задовольняє задані початкові умови.

3.5. Інтегрування ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо ЛОДР другого порядку

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0, \tag{3.11}$$

де p та q є сталі числа.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (3.11) досить знайти два його частинних розв'язки, що утворюють фундаментальну систему.

Будемо шукати частинні розв'язки рівняння (3.11) у вигляді $y = e^{k\,x}$, де k-деяке число (запропоновано Л. Ейлером).

Тоді $y' = k\,e^{k\,x}$, $y'' = k^2\,e^{k\,x}$. Після підстановки цих виразів в рівняння (3.11) отримаємо:

$$k^2\,e^{k\,x} + pk\,e^{kx} + q\,e^{kx} = 0, \text{ або } e^{k\,x}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$$

Остаточно дістанемо:

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{3.12}$$

Рівняння (3.12) називається ***характеристичним рівнянням ЛОДР*** (3.11), і є квадратним алгебраїчним рівнянням.

При розв'язанні характеристичного рівняння (3.12) можливі наступні три випадки.

1. Корені k_1 та k_2 рівняння дійсні та різні ($k_1 \neq k_2$, $D = p^2 - 4q > 0$).

В цьому випадку частинними розв'язками $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (3.11) є функції $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$. Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків. Оскільки вронскіан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} \cdot k_2 e^{k_2 x} - k_1 e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} =$$

$$= e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x}(k_2 - k_1) \neq 0.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.11), за теоремою 3.5 має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2. Корені k_1 та k_2 рівняння дійсні і однакові ($k_1 = k_2, D = p^2 - 4q = 0$).

В цьому випадку маємо лише один частинний розв'язок $y_1 = e^{k_1 x}$.

Покажемо, що функція $y_2 = xe^{k_1 x}$ також є розв'язком рівняння (3.11). Маємо:

$y_2 = xe^{k_1 x}$, $y_2' = e^{k_1 x} + k_1 xe^{k_1 x}$,

$y_2'' = k_1 e^{k_1 x} + k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x} = 2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x}$.

Після підставки цієї функції та її похідних в рівняння (3.11) дістанемо:

$2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x} + p\left(e^{k_1 x} + k_1 xe^{k_1 x}\right) + qxe^{k_1 x} = 0$

або $2k_1 + k_1^2 x + p(1 + k_1 x) + qx = 0 \Rightarrow \quad x\left(k_1^2 + pk_1 + q\right) + (p + 2k_1) = 0$

Оскільки k_1 - корінь характеристичного рівняння (3.12), то $k_1^2 + pk_1 + q = 0$ і $p + 2k_1 = 0$, тоді останнє рівняння перетворюється на тотожність $0 \equiv 0$, тобто функція $y_2 = xe^{k_1 x}$ є розв'язком рівняння (3.11). Частинні розв'язки $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = xe^{k_1 x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, оскільки вронскіан

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & xe^{k_1x} \\ k_1e^{k_1x} & (1+k_1x)e^{k_1x} \end{vmatrix}=$$

$$=e^{k_1x}\cdot(1+k_1x)e^{k_1x}-k_1xe^{k_1x}\cdot e^{k_1x}=\cdot e^{2k_1x}\neq 0.$$

Це означає, що функція

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_1x} \text{ або } y=e^{k_1x}(C_1+C_2x)$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння (3.11).

3. Корені k_1 та k_2 характеристичного рівняння - комплексно-спряжені ($k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, $D=p^2-4q<0$, де $i^2=-1$).

У цьому випадку частинними розв'язками диференціального рівняння (3.11) є функції $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$ та $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$.

За формулами Ейлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$

Маємо: $y_1=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x$

$$y_2=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Знайдемо два дійсних частинних розв'язки ЛОДР (3.11). Для цього складемо дві лінійні комбінації розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$:

$$\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x=\tilde{y}_1, \qquad \frac{y_1-y_2}{2}=e^{\alpha x}\sin\beta x=\tilde{y}_2.$$

Функції $\tilde{y}_1$ та $\tilde{y}_2$ є розв'язками диференціального рівняння (3.11) , що випливає з властивостей розв'язків ЛОДР другого порядку. Ці розв'язки $\tilde{y}_1$ та $\tilde{y}_2$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, оскільки вронскіан

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix}=$$

$$=e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x \end{vmatrix}=e^{2\alpha x}\Big(\alpha\sin\beta x\cos\beta x+\beta\cos^2\beta x-$$

$$\alpha\sin\beta x\cos\beta x+\beta\sin^2\beta x\Big)=\beta e^{2\alpha x}\neq 0.$$

Отже функція $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$ є загальним розв'язком ЛОДР (3.11).

Таким чином, результати дослідження можливих випадків розв'язків ЛОДР зі сталими коефіцієнтами можна записати у вигляді наступної таблиці:

Таблиця 1

k_1, k_2 – корені характеристичного рівняння $k^2+pk+q=0$	y_1, y_2 – частинні розв'язки ЛОДР	$y=C_1y_1+C_2y_2$ – загальний розв'язок ЛОДР
k_1, k_2 – дійсні різні числа, $k_1\neq k_2$	$y_1=e^{k_1x}$ $y_2=e^{k_2x}$	$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$
$k_1=k_2$ – дійсні однакові числа	$y_1=e^{k_1x}$ $y_2=x\,e^{k_1x}$	$y=e^{k_1x}\left(C_1+C_2x\right)$
$k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ – комплексно -спряжені числа, $i^2=-1$ – уявна одиниця, α,β – дійсні числа.	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y''-6y'+8y=0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$k^2-6k+8=0$,

$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot8=4$, $\quad k_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{4}}{2}$;

Корені характеристичного рівняння: $k_1=4;\quad k_2=2$ –

дійсні та різні, тобто, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$k^2 - 7k + 6 = 0$.

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$, $k_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{25}}{2}$ тобто

$k_1 = 6, k_2 = 1$ - корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тому загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 6k + 9 = 0$. Його корені – дійсні, рівні – $k_{1,2} = -3$. Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = e^{-3x}(C_1 x + C_2 x)$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 - 10k + 25 = 0$. Його корені $k_{1,2} = 5$ – дійсні, рівні. Тоді загальний розв'язок рівняння:

$y = e^{5x}(C_1 + C_2 x)$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Розв'язання. Маємо характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 10 = 0$.

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36$,

$k_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i,$ $(\ \alpha = 1;\ \ \beta = 3\ )$.

Загальний розв'язок рівняння $y = e^{x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y''+4y'+13y=0$.

Розв'язання. Маємо характеристичне рівняння $k^2+4k+13=0$.

$D=4^2-4\cdot 1\cdot 13=-36$,

$$k_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=-2\pm 3i, \quad \Rightarrow \quad \alpha=-2; \quad \beta=3.$$

Загальний розв'язок рівняння – $y=e^{-2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)$.

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші

$$y''-5y+6y'=0, \quad y(0)=3; \quad y'(0)=7.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2-5k+6=0$.

Його корені $k_1=2; \quad k_2=3$. Тоді, загальний розв'язок – $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. Для того, щоб знайти частинний розв'язок треба визначити C_1 та C_2. Це можна зробити, використовуючи початкові умови, але спочатку треба знайти похідну y' від загального розв'язку: $y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}$.

Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y(0)=3, \\ y'(0)=7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=C_1e^0+C_2e^0, \\ 7=2C_1e^0+3C_2e^0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=3, \\ 2C_1+3C_2=7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=2, \\ C_2=1. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок рівняння: $y=2e^{2x}+e^{3x}$.

Приклад 8. Розв'язати задачу Коші

$$y''-2y'+y=0, \quad y(0)=4; \quad y'(0)=5.$$

Характеристичне рівняння $k^2-2x+1=0$. Його корені $k_1=k_2=1$. Тоді загальний розв'язок $y=e^x\left(C_1+C_2x\right)$.

Знайдемо похідну y': $y'=e^x\left(C_1+C_2x\right)+e^x\cdot C_2$.

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y(0)=4, \\ y'(0)=-5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=e^0(C_1+C_2\cdot 0), \\ -5=e^0(C_1+C_2\cdot 0)+e^0\cdot C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=4, \\ -5=C_1+C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=4, \\ C_2=-9. \end{cases}$$

Отже, розв'язок задачі Коші матиме вигляд: $y=e^x(4-9x)$.

Приклад 9. Розв'язати задачу Коші

$$y''-6y+5y'=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=-2.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2-6k+5=0$, звідки корені $k_1=1, k_2=5$. Тоді загальний розв'язок: $y=C_1e^x+C_2e^{5x}$. Для того, щоб знайти частинний розв'язок треба визначити C_1 та C_2. Це можна зробити, використовуючи початкові умови, але спочатку треба знайти похідну y' від загального розв'язку: $y'=C_1e^x+5C_2e^{5x}$. Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y(0)=2, \\ y'(0)=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=C_1e^0+C_2e^0, \\ -2=C_1e^0+5C_2e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=2, \\ C_1+5C_2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=3, \\ C_2=-1. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок рівняння: $y=3e^x-e^{5x}$.

Приклад 10. Розв'язати задачу Коші

$$y''+3y'=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=3.$$

Розв'язання. Отримаємо характеристичне рівняння: $k^2+3k=0$. Це неповне квадратне рівняння, тому розв'яжемо його наступним чином: $k\cdot(k+3)=0$, звідки знайдемо $k_1=0$, $k_2=-3$. Тоді загальний розв'язок рівняння $y=C_1e^0+C_2e^{-3x}$ або $y=C_1+C_2e^{-3x}$.

Знайдемо $y'=0+C_2e^{-3x}\cdot(-3)=-3C_2e^{-3x}$.

Підставляючи початкові умови, будемо мати:

$$\begin{cases} 1=C_1+C_2e^0, \\ 3=-3C_2e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1, \\ C_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1-C_2, \\ C_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=2, \\ C_2=-1. \end{cases}$$

Тоді частинний розв'язок рівняння: $y=2-e^{-3x}$.

Приклад 11. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -1.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$. Його корені $k_1 = k_2 = 3$. Тоді загальний розв'язок $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$.

Знайдемо похідну y': $\quad y' = 3e^{3x}(C_1 + C_2 x) + e^{3x} \cdot C_2$.

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = e^0(C_1 + C_2 \cdot 0), \\ -1 = 3e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0 \cdot C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ -1 = 3C_1 + C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -4. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок рівняння: $y = e^{3x}(1 - 4x)$.

Приклад 12. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -2..$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 25 = 0$, звідки $k^2 = -25$, тому $k_{1,2} = \pm 5i \; (\alpha = 0, \beta = 5)$.

Тоді загальний розв'язок запишеться у вигляді: $y = e^0(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$ або $y = (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$.

Знайдемо $y' = -5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x$.

Для знаходження C_1, C_2 отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0, \\ -2 = -5C_1 \sin 0 + 5C_2 \cos 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ 5C_2 = -2 \Rightarrow C_2 = -\dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Тоді $y = \cos 5x - \frac{2}{5}\sin 5x$ - частинний розв'язок.

Приклад 13. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = -3.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 2 = 0$.

$$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot2=-4;\quad k_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2};\quad k_{1,2}=1\pm i\ \ (\alpha=1,\beta=1).$$

Загальний розв'язок: $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

Обчислимо y':

$$y'=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^x(-C_1\sin x+C_2\cos x).$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо C_1 та C_2:

$$\begin{cases} y(0)=-2, \\ y'(0)=-3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2=e^0(C_1\cos0+C_2\sin0), \\ -3=e^0(C_1\cos0+C_2\sin0)+e^0(-C_1\sin0+C_2\cos0), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1=-2, \\ C_1+C_2=-3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-2, \\ C_2=-1. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок однорідного рівняння:

$$y=e^x(-2\cos x-\sin x)\ \text{або}\ y=-e^x(2\cos x+\sin x).$$

Приклад 14. Знаючи корені характеристичного рівняння, записати відповідне диференціальне рівняння:

а) $k_1=2,\ \ k_2=3$; б) $k_1=k_2=2$; в) $k_1=2i,\ \ k_2=-2i$.

Розв'язання. а) За теоремою Вієта маємо $p=-(k_1+k_2)=-5$, $q=k_1k_2=6$. Отже, характеристичне рівняння має вигляд $k^2-5k+6=0$, а відповідним диференціальним рівнянням є $y''-5y'+6y=0$.

б) Оскільки маємо двократний корінь, то характеристичне рівняння запишеться так: $(k-2)^2=0$ або $k^2-4k+4=0$. Тому диференціальне рівняння матиме вигляд $y''-4y'+4y=0$.

в) У цьому випадку числа k_1 і k_2 суто уявні, тому скористаємося основною теоремою алгебри і складемо алгебраїчне рівняння за його коренями. Маємо $(k-2i)(k+2i)=0$ або $k^2+4=0$ і $y''+4y=0$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальні та частинні розв'язки однорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

1. $y'' - y' - 12y = 0$;
2. $y'' + 2y' + 5y = 0$;
3. $2y'' - 5y' = 0$;
4. $y'' - y' = 0$;
5. $9y'' + y' = 0$;
6. $4y'' - 4y' + y = 0,\ y(0) = 5, y'(0) = -1$;
7. $y'' - 7y' + 12 = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = 13$;
8. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$.

3.6. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку (ЛНДР)

Розглянемо ЛНДР другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{3.13}$$

де $a_1(x),\ a_2(x),\ f(x)$ - задані неперервні на $(a;b)$ функції.

Відповідним ЛОДР для рівняння (3.13) є рівняння

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{3.14}$$

Теорема 3.6. ***(структура загального розв'язку ЛНДР***). Загальним розв'язком y рівняння (3.13) є сума його довільного частинного розв'язку y^* та загального розв'язку $\overline{y}$ відповідного ЛОДР (3.14), тобто

$$y = \overline{y} + y^* \tag{3.15}$$

Доведення. Спочатку, переконаємось, що функція $y = \overline{y} + y^*$ взагалі є розв'язком диференціального рівняння (3.13). За умовою y^* є розв'язком ЛНДР (3.13). Таким чином, $\left(y^*\right)'' + a_1(x)\left(y^*\right)' + a_2(x)\left(y^*\right) = f(x)$.

З іншої сторони $\overline{y}$ - розв'язок ЛОДР (3.14), тобто $\left(\overline{y}\right)'' + a_1(x)\left(\overline{y}\right)' + a_2(x)\left(\overline{y}\right) = 0$.

Тоді, маємо:

$$\left(y^* + \overline{y}\right)'' + a_1(x)\left(y^* + \overline{y}\right)' + a_2(x)\left(y^* + \overline{y}\right) = \left(y^*\right)'' + a_1(x)\left(y^*\right)' + a_2(x)\left(y^*\right) +$$

$$+\left(\overline{y}\right)'' + a_1(x)\left(\overline{y}\right)' + a_2(x)\left(\overline{y}\right) = f(x) + 0 = f(x).$$

Це означає, що функція $y = \overline{y} + y^*$ є розв’язком рівняння (3.13). Треба довести, що цей розв’язок є загальним, тобто з нього можна виділити єдиний частинний розв’язок, що задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Оскільки $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, то

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*. \tag{3.16}$$

Похідна цієї функції матимемо вигляд:

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \left(y^*\right)' \tag{3.17}$$

Підставимо початкові умови в (3.16) та (3.17). Дістанемо :

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y^*(x_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + {y^*}'(x_0) \end{cases}.$$

Перепишемо цю систему наступним чином:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0) \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) = y'_0 - {y^*}'(x_0) \end{cases}.$$

Отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими C_1, C_2.

Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}$ у точці x_0 .

Функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно незалежними та утворюють фундаментальну систему розв’язків, тому визначник Вронського $W(x_0) \neq 0$. Отже система має єдиний розв’язок $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$. Функція $y = C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2 + y^*$ є частинним розв’язком ЛНДР, що задовольняє заданим початковим умовам.

<u>Теорема 3.7</u> (про накладання розв'язків). Якщо права частина ЛНДР (3.13) є сумою двох функцій $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $y_1^*(x)$ та $y_2^*(x)$ частинні розв'язки $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x)$ відповідно, то функція $y^* = y_1^* + y_2^*$ буде розв'язком рівняння (3.13).

Доведення. Підставимо функцію $y^* = y_1^* + y_2^*$ в рівняння (3.13)

$$\left(y_1^* + y_2^*\right)'' + a_1(x)\left(y_1^* + y_2^*\right)' + a_2(x)\left(y_1^* + y_2^*\right) = \left[\left(y_1^*\right)'' + a_1(x)\left(y_1^*\right)' + \right.$$

$$\left. + a_2(x)\left(y_1^*\right)\right] + \left[\left(y_2^*\right)'' + a_1(x)\left(y_2^*\right)' + a_2(x)\left(y_2^*\right)\right] = f_1(x) + f_2(x) = f(x).$$

Теорема доведена.

3.7. Інтегрування ЛНДР другого порядку із сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною

Розглянемо ЛНДР другого порядку із сталими коефіцієнтами:

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{3.18}$$

Як відомо загальний розв'язок такого рівняння складається із суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку даного рівняння, тобто $y = \bar{y} + y^*$. Метод знаходження $\bar{y}$ описаний у **п. 3.4**. Покажемо, як визначати y^* в залежності від вигляду правої частини. (Такий спосіб називається методом невизначених коефіцієнтів)

Можливі такі випадки:

1. Нехай $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n, тобто

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Будемо розшукувати частинний розв'язок y^* ЛНДР (3.18) у вигляді

$$y^* = x^r e^{ax} Q_n(x), \tag{3.19}$$

де r- число, що дорівнює кратності a коренів характеристичного рівняння (3.12) ЛОДР другого порядку із сталими коефіцієнтами (тобто число r показує скільки раз a є коренем рівняння $k^2 + pk + q = 0$).

$Q_n(x)$– многочлен степеня n з невідомими коефіцієнтами, тобто, якщо

$n = 0$ $\qquad Q_n(x) = A$,

$n = 1$ $\qquad Q_n(x) = Ax + B$,

$n = 2$ $\qquad Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C$,

$n = 3$ $\qquad Q_n(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

………………………………………………….

Іншими словами:

а) якщо $k_1 \neq a, \quad k_2 \neq a$, тоді $\quad y^* = e^{ax}Q_n(x)$,

б) якщо $k_1 \neq a, \quad k_2 = a$, тоді $\quad y^* = xe^{ax}Q_n(x)$;

в) якщо $k_1 = k_2 = a$, тоді $\quad y^* = x^2e^{ax}Q_n(x)$.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів многочлена $Q_n(x)$ треба підставити функцію y^* та її похідні першого та другого порядку в задане рівняння, скоротити обидві частини рівняння на e^{ax}, та прирівняти коефіцієнти при однакових степенях n з обох його сторін. Таким чином, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

2. Нехай $f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Rm(x)\sin bx]$, де $P_n(x), R_m(x)$ – задані многочлени степенів n та m, тоді частинний розв'язок ЛДНР

$$y'' + py' + qy = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Rm(x)\sin bx] \tag{3.20}$$

будемо шукати у вигляді:

$$y^* = x^r e^{ax}[Q_S(x)\cos bx + L_S(x)\sin bx], \tag{3.21}$$

де r - число, що дорівнює кратності $a+bi$ як кореня характеристичного рівняння (3.12) ЛОДР другого порядку із сталими коефіцієнтами (тобто число r показує чи є число $a+bi$ коренем рівняння $k^2+pk+q=0$ чи ні). Функції $Q_S(x)$, $L_S(x)$ – многочлени степеня $s=max\{n,m\}$ з невідомими коефіцієнтами. Отже,

а) якщо $k_{1,2} \neq a \pm bi$, тоді $y^* = e^{ax}\left[Q_S(x)\cos bx + L_S(x)\sin bx\right]$,

б) якщо $k_{1,2} = a \pm bi$, тоді $y^* = x e^{ax}\left[Q_S(x)\cos bx + L_S(x)\sin bx\right]$.

Зауваження 1. У цьому випадку для знаходження невідомих коефіцієнтів многочленів $Q_S(x)$ та $L_S(x)$ діємо так само, як і в попередньому випадку, але після підстановки функції (3.21) та її похідних першого і другого порядків в рівняння (3.20) прирівняємо коефіцієнти при $\cos bx$, $\sin bx$, внаслідок чого знов дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо невідомі коефіцієнти.

Зауваження 2. Якщо в рівнянні (3.20) одна із функцій $P_n(x)$, $R_m(x)$ тотожно дорівнює нулю, то загальний вигляд y^* не зміниться, тобто $y^* = x^r e^{ax}\left[Q_S(x)\cos bx + L_S(x)\sin bx\right]$.

Зауваження 3. Якщо права частина рівняння (3.18) буде складатися з суми двох або більше функцій, наприклад, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, де $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – функції спеціального вигляду, то частинний розв’язок неоднорідного лінійного рівняння y^* має вигляд

$$y^* = y_1^* + y_2^*,$$

де y_1^* та y_2^* – частинні розв’язки лінійних неоднорідних рівнянь

$y'' + py' + qy = f_1(x)$ та $y'' + py' + qy = f_2(x)$ відповідно.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 6y' + 5y = e^{5x}\left(12x^2 - 8\right)$.

Розв'язання. Загальний розв'язок цього неоднорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами складається з двох компонентів $y = \bar{y} + y^*$, де $\bar{y}$ - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а y^* - будь-який частинний розв'язок заданого рівняння.

Характеристичне рівняння однорідного рівняння $y'' - 6y' + 5y = 0$ має вигляд $k^2 - 6k + 5 = 0$. Його корені: $k_1 = 5;\ k_2 = 1$ (Перевірити самостійно). Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд: $\bar{y} = C_1 e^{5x} + C_2 e^{x}$ (за таблицею (1)).

Враховуючи, що $f(x) = e^{5x}\left(12x^2 - 8\right)$, тобто, $a = 5, n = 2$, а також, що $k_1 = 5 = a,\quad k_2 \neq a$ дістанемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y* = xe^{5x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) \quad \text{або} \quad y^* = e^{5x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right).$$

Знаходимо похідні першого та другого порядку від y^*:

$$y^{*\prime} = 5e^{5x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) + e^{5x}\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right),$$

$$y^{*\prime\prime} = 25e^{5x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) + 5e^{5x}\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) +$$
$$+ 5e^{5x}\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) + e^{5x}\left(6Ax + 2B\right).$$

Підставляючи $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ в початкове рівняння, отримаємо:

$$25e^{5x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) + 10e^{5x}\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) + e^{5x}\left(6Ax + 2B\right) -$$
$$-6\left(5e^{5x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) + e^{5x}\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)\right) +$$
$$+5e^{5x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) = e^{5x}\left(12x^2 - 8\right).$$

Розділимо обидві частини на e^{5x} та приведемо подібні доданки:

$$12Ax^2 + 8Bx + 6Ax + 4C + 2B = 12x^2 - 8.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x в однакових степенях.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 12A=12, \quad \Rightarrow \quad A=1, \\ x & 8Bx-6A=0, \quad \Rightarrow \quad 8B=6A, \quad \Rightarrow \quad B=\frac{3}{4}A, \quad \Rightarrow \quad B=\frac{3}{4}, \\ x^0 & 4C+2B=-8, \;\Rightarrow \quad 2C=-4-B, \;\Rightarrow \quad C=\frac{-4-\frac{3}{4}}{2}, \Rightarrow \quad c=-\frac{19}{8}. \end{array}$$

Тоді, $y^* = e^{5x}\left(x^2+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{19}{8}\right)$.

Дістанемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді:

$$y=C_1e^{5x}+C_2e^{x}+e^{5x}\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{19}{8}\right).$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння: $y''-y'-6y=e^{2x}(4x-6)$.

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y=\bar{y}+y^*$, де $\bar{y}-$ загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''-y'-6y=0$. Характеристичне рівняння $k^2-k-6=0$ має корені $k_1=3;\quad k_2=-2$. Отже $\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння залежить від вигляду правої частини $f(x)=e^{2x}(4x-6)$ (маємо $a=2;\quad n=1;\quad k_1=3;\quad k_2=-2$).

Тоді $y^*=e^{2x}(Ax+B)$. Для визначення невідомих коефіцієнтів A та B підставимо y^* в початкове рівняння. Щоб це було можливим, знайдемо першу і другу похідні від частинного розв'язку y^*.

$$y^{*'}=2e^{2x}(Ax+B)+e^{2x}\cdot A,$$
$$y^{*''}=4e^{2x}(Ax+B)+2e^{2x}A+2e^{2x}A=4e^{2x}(Ax+B)+4e^{2x}A.$$

Після підстановки $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в задане рівняння отримаємо:

$$4e^{2x}(Ax+B)+4e^{2x}A-\left(2e^{2x}(Ax+B)+e^{2x}A\right)-6e^{2x}(Ax+B)=e^{2x}(4x-6).$$

Розділимо обидві частини останнього виразу на e^{2x} та зведемо подібні доданки. Маємо:

$$-4A+3A-4B=4x-6.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x в однакових степенях:

$$\begin{array}{l|l} x & -4A=4, \qquad \Rightarrow \quad A=-1, \\ x^0 & 3A-4B=-6, \quad \Rightarrow \quad 4B=3A+6 \quad \Rightarrow \quad B=\dfrac{3}{4}. \end{array}$$

Тобто, $y^*=e^{2x}\left(-x+\dfrac{3}{4}\right)$.

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння:

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}+e^{2x}\left(-x+\frac{3}{4}\right).$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння: $y''+6y'+9y=3\,e^{-3x}$.

Розв'язання. Аналогічно попередньому, маємо $y=\bar{y}+y^*$.

Характеристичне рівняння $k^2+6k+9=0$ має однакові корені $k_{1,2}=-3$. Отже, $\bar{y}=e^{-3x}(C_1+C_2x)$.

$f(x)=3e^{-3x}$, тобто, $a=-3;\quad n=0;\quad k_{1,2}=-3=a$. Частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y^*=Ax^2e^{-3x},$$

$$y^{*'}=2Axe^{-3x}-3Ax^2e^{-3x},$$

$$y^{*''}=2Ae^{-3x}-6Axe^{-3x}-6Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}, \quad \text{або}$$

$$y^{*''}=2Ae^{-3x}-12Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}.$$

Після підстановки цих виразів в початкове рівняння, дістанемо

$$2Ae^{-3x}-12Axe^{-3x}+9Ax^2+6\left(2Axe^{-3x}-3Ax^2e^{-3x}\right)+9Ax^2e^{-3x}=3e^{-3x},$$

або

$$2A=3 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{3}{2}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде $y^*=\frac{3}{2}x^2e^{-3x}$,

а загальний: $y=e^{-3x}\left(C_1+C_2x-\frac{3}{2}x^2\right)$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння: $y''-5y'=4\cos 2x+8\sin 2x$.

Розв'язання. Маємо: $k^2-5k=0 \Rightarrow k(k-5)=0 \Rightarrow k_1=0; \quad k_2=5$.

$$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x,$$

$$y^{*'}=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,$$

$$y^{*''}=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Отримаємо:

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-5\left(-2A\sin 2x+2B\cos 2x\right)=4\cos 2x+8\sin 2x.$$

Порівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$ в обох частинах останнього рівняння:

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & -4A-10B=4, \\ \sin 2x & -4B+10A=8. \end{array}$$

Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2A+5B=-2, \\ 5A-2B=4. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь за формулами Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-4-25=-29.$$

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=4-20=-16; \qquad \Delta_B=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=8+20=28.$$

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = \frac{16}{29}; \qquad B = -\frac{28}{29}.$$

Отже: $y^* = \frac{16}{29}\cos 2x - \frac{28}{29}\sin 2x$,

$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{5x} + \frac{16}{29}\cos 2x - \frac{28}{29}\sin 2x$ – загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння: $y'' - 8y' + 25y = 26e^{4x}\cos 3x$.

Розв'язання. Маємо:

$y'' - 8y' + 25y = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 8k + 25 = 0; \quad D = 64 - 100 = -36$.

$k_{1,2} = 4 \pm 3i$, де $i = \sqrt{-1}$. Загальний розв'язок однорідного рівняння – $\bar{y} = e^{4x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$.

Частинний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння шукатимемо у вигляді $\left(a = 4; \quad b = 3; \quad k_{1,2} = a \pm ib\right)$:

$$y^* = xe^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right),$$

$$y^{*'} = 4e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)x + e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right)x +$$
$$+ e^{4x}\left(A\cos 3x + 3\sin 3x\right),$$

$$y^{*''} = 16e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)\cdot x + 4e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right)\cdot x +$$
$$+ 4e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + 4e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right)\cdot x +$$
$$+ e^{4x}\left(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x\right)\cdot x + e^{4x}\left(3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) +$$
$$+ e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) = 16e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)\cdot x +$$
$$+ 8e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right)x + 4e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right)\cdot x +$$
$$+ e^{4x}\left(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x\right)\cdot x + 2e^{4x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) +$$
$$+ 4e^{4x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right).$$

Підставимо $y^*, y^{*'}$ та $y^{*''}$ в початкове рівняння та отримаємо:

$$16e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)\cdot x+8e^{4x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)\cdot x+$$
$$+e^{4x}\left(-9A\cos 3x-9B\sin 3x\right)\cdot x+2e^{4x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)+$$
$$+4e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)-8\Big[4e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)\cdot x+$$
$$+e^{4x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)\cdot x+e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)\Big]+$$
$$+25e^{4x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)\cdot x=26e^{4x}\cos 3x.$$

Після низки арифметичних перетворень останнє рівняння набуває вигляду:

$$6B\cos 3x-4\cos 3x-4B\sin 3x-6A\sin 3x=26\cos 3x.$$

Порівняємо коефіцієнти при $\cos 3x$ та $\sin 3x$:

$$\begin{array}{r|l} \cos 3x & 6B-4A=26, \\ \sin 3x & -4B-6A=0. \end{array}$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -2A+3B=13, \\ -3A-2B=0, \end{cases}$$

яку розв'яжемо за формулами Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=4+9=13,$$

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-26, \qquad \Delta_B=\begin{vmatrix} -1 & 13 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=39;$$

Тоді

$$A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=-2; \qquad B=\frac{\Delta_B}{\Delta}=-3.$$

Отже, маємо $y^*=x\,e^{4x}\left(-2\cos 3x-3\sin 3x\right)$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння дістанемо у вигляді:

$$y=e^{4x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)+x\cdot e^{4x}\left(-2\cos 3x-3\sin 3x\right).$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння: $y''+9y=4\cos 3x+2\sin 3x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''+9y=0$ має вигляд $\bar{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. Оскільки $f(x)=4\cos 3x+2\sin 3x$, тобто $a=0;\quad b=3;\quad k_{1,2}=\pm 3i=a\pm bi$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде:

$$y^*=x(A\cos 3x+B\sin 3x),$$

$$y^{*\prime}=A\cos 3x+B\sin 3x+x(-3A\sin 3x+3B\cos 3x),$$

$$y^{*\prime\prime}=-3A\sin 3x+3B\cos 3x-3A\sin 3x+3B\cos 3x+x(-9A\cos 3x-9B\sin 3x)=$$
$$=-6A\sin 3x+6B\cos 3x+x(-9A\cos 3x-9B\sin 3x).$$

Дістанемо:

$$-6A\sin 3x+6B\cos 3x+x(-9A\cos 3x-9B\sin 3x)+9x(A\cos 3x-B\sin 3x)=$$
$$=4\cos 3x+2\sin 3x\ ,$$

Звідки, $A=-\frac{1}{3};\quad B=\frac{2}{3}$. Отже $y^*=x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right)$.

Загальним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння буде функція

$$y=\bar{y}+y^*=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right).$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння: $y''-10y'=30x^2+200\sin 10x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''-10y'=0$ має вигляд $\bar{y}=C_1+C_2e^{10x}$.

Права частина початкового рівняння складається з двох доданків: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, де $f_1(x)=30x^2;\quad f_2(x)=200\sin 10x$. Тому, частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння теж складається з двох доданків: $y^*=y_1^*+y_2^*$, де y_1^* та y_2^* є частинними розв'язками рівнянь

$y''-10y'=30x^2$ та $y''-10y'=200\sin 10x$ відповідно.

Аналогічно попередньому, маємо:

$$y_1^*=x\left(Ax^2+Bx+C\right)=Ax^3+Bx^2+Cx,$$

$$y_1^{*'} = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y_1^{*''} = 6Ax + 2B.$$

Отримаємо:

$$6Ax + 2B - 10\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 30x^2, \quad \text{або}$$

$$-30Ax^2 + \left(6A - 20B\right)x + 2B - 10C = 30x^2.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -30A = 30, \quad \Rightarrow A = -1, \\ x & 6A - 20B = 0, \quad \Rightarrow 20B = 6A, \quad \Rightarrow B = \frac{3}{10}, \\ x^0 & 2B - 10C = 0, \quad \Rightarrow C = \frac{6}{100}. \end{array}$$

Отже, $y_1^* = -x^3 + 0{,}3x^2 + 0{,}06x$.

$$y_2^* = A\cos 10x + B\sin 10x,$$
$$y_2^{*'} = -10A\sin 10x + 10B\cos 10x,$$
$$y_2^{*''} = -100A\cos 10x - 100B\sin 10x.$$

Тоді,

$$-100A\cos 10x - 100B\sin 10x - 10\left(-10A\sin 10x + 10B\cos 10x\right) = 200\sin 10x.$$

$$\begin{array}{r|lcl} \cos 10x & -100A - 100B = 0, & \Rightarrow & A + B = 0, \\ \sin 10x & -100B + 100A = 200, & & A - B = 2. \end{array}$$

Звідки, $A = 1;\quad B = -1$. Отже, $y_2^* = \cos 10x - \sin 10x$.

Загальний розв’язок початкового лінійного неоднорідного рівняння дістанемо у вигляді:

$$y = C_1 + C_2 e^{10x} - x^3 + 0{,}06x + \cos 10x - \sin 10x.$$

Приклад 8. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' - y' - 2y = e^{4x}\left(10x + 7\right), \quad y\left(0\right) = 3; \quad y'\left(0\right) = 0.$$

Розв’язання. Аналогічно попередньому маємо:

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

$$k^2 - k - 2 = 0, \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2; \quad k_2 = -1.$$

Отже, загальний розв’язок однорідного рівняння буде: $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

$$f(x)=e^{4x}(10x+7).$$

$$a=4;\quad n=1,\quad k_1=2;\quad k_2=-1\quad\Rightarrow\quad y^*=e^{4x}(Ax+B),$$

$$y^{*'}=4e^{4x}(Ax+B)+e^{4x}\cdot A,$$

$$y^{*''}=16e^{4x}(Ax+B)+4e^{4x}\cdot A+4e^{4x}\cdot A=16e^{4x}(Ax+B)+8e^{4x}A.$$

Підставимо $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в початкове рівняння:

$$16e^{4x}(Ax+B)+8e^{4x}A-\left(4e^{4x}(Ax+B)+e^{4x}A\right)-2e^{4x}(Ax+B)=e^{4x}(10x+7)$$

або

$$16(Ax+B)+8A-4(Ax+B)-A-2(Ax+B)=10x+7.$$

$$\begin{array}{c|l} x & 16A-4A-2A=10,\quad\Rightarrow\quad A=1, \\ x^0 & 16B+8A-4B-A-2B=+7,\quad\Rightarrow\quad 7A-10B=+7,\quad\Rightarrow\quad B=0. \end{array}$$

Частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд: $y^*=xe^{4x}$,

а загальний розв'язок – $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+xe^{4x}$.

Використаємо початкові умови. Для цього знайдемо y':

$$y'=2C_1e^{2x}-C_2e^{-x}+e^{4x}+4xe^{4x}.$$

Маємо:

$$\begin{cases}3=C_1e^0+C_2e^0+0,\\ 0=2C_1-C_2+e^0,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}C_1+C_2=3,\\ 2C_1-C_2=0,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}3C_1=3,\\ C_1-C_2=3,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}C_1=1,\\ C_2=2.\end{cases}$$

Отже, дістанемо розв'язок задачі Коші:

$$y=e^{2x}+2e^{-x}+xe^{4x}\ .$$

Приклад 9. Розв'язати задачу Коші:

$$y''-10y'+25y=(-100x+30)\,e^{-5x}+4\cos 5x,\qquad y(0)=-1{,}9;\qquad y'(0)=-1{,}1.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння має два рівних кореня $k_{1,2}=5$. Отже, $\bar{y}=e^{5x}(C_1+C_2x)$. Оскільки, права частина складається з суми двох різних функцій: $f_1(x)=(-100x+30)\,e^{-5x}$, $f_2(x)=4\cos 5x$, то кожній з них будуть відповідати частинні розв'язки y_1^* та y_2^*, а $y^*=y_1^*+y_2^*$.

$$y_1^*=e^{-5x}(Ax+B),$$

$$y_1^{*'}=-5e^{-5x}(Ax+B)+e^{-5x}\cdot A$$

$$y_1^{*''}=25e^{-5x}(Ax+B)-5e^{-5x}\cdot A-5e^{-5x}\cdot A=25e^{-5x}(Ax+B)-10e^{-5x}\cdot A$$

Підставимо $y_1^*,\, y_1^{*'},\, y_1^{*''}$ в рівняння $y''-10y'+25y=(-100x+30)\,e^{-5x}$.

Маємо:

$$25e^{-5x}(Ax+B)-10e^{-5x}\cdot A-10\left(-5e^{-5x}(Ax+B)+e^{-5x}\cdot A\right)+25e^{-5x}(Ax+B)=$$
$$=(-100x+30)e^{-5x}.$$

Розділимо обидві частини рівняння на e^{-5x}:

$$25(Ax+B)-10A-10\left(-5(Ax+B)+A\right)+25(Ax+B)=(-100x+30).$$

Прирівняємо коефіцієнти при x в однакових степенях:

$$\begin{array}{c|l} x & 25A+50A+25A=-100, \quad \Rightarrow \quad A=-1, \\ x^0 & 25B-10A+50B-10A+25B=30, \quad \Rightarrow \quad -20A+100B=30, \quad \Rightarrow \quad B=0{,}1. \end{array}$$

Дістали: $y_1^*=e^{-5x}(-x+0{,}1)$.

$$y_2^*=A\cos 5x+B\sin 5x,$$

$$y_2^{*'}=-5A\sin 5x+5B\cos 5x,$$

$$y_2^{*''}=-25A\cos 5x-25B\sin x.$$

Підставимо $y_2^*,\, y_2^{*'},\, y_2^{*''}$ в рівняння $y''-10y'+25y=4\cos 5x,$ отримаємо:

$$-25A\cos 5x-25B\sin 5x-10\left(-5A\sin 5x+5B\cos 5x\right)+25\left(A\cos 5x+B\sin 5x\right)=$$
$$=4\cos 5x.$$

$$\begin{array}{c|l} \cos 5x & -50B=4, \quad \Rightarrow \quad B=-0{,}08, \\ \sin 5x & 50A=0, \qquad\quad A=0. \end{array}$$

Дістали $y_2^*=-0{,}08\sin 5x$. Підсумовуючи результати, маємо:

$$y^*=y_1^*+y_2^*=e^{-5x}(-x+0{,}1)-0{,}08\sin 5x.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = e^{5x}\left(C_1 + C_2x\right) + e^{-5x}\left(-x + 0,1\right) - 0,08\,sin5x.$$

Щоб знайти розв'язок задачи Коші, обчислимо похідну від загального розв'язку рівняння:

$$y' = 5e^{5x}\left(C_1 + C_2x\right) + e^{5x}C_2 - 5e^{-5x}\left(-x + 0,1\right) - e^{-5x} - 0,4\,cos\,5x.$$

Використаємо початкові умови: $y(0) = -1,9;\qquad y'(0) = -1.$

$$\begin{cases} -1,9 = e^0\left(C_1 + C_2 \cdot 0\right) + e^0\left(0,1\right) - 0,08\,sin0 \\ -1 = 5e^0\left(C_1 + C_2 \cdot 0\right) + e^0C_2 - 5e^0\left(0,1\right) - e^0 - 0,4\,cos\,0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1,9 = C_1 + 0,1 \\ -1 = 5C_1 + C_2 - 0,5 - 1 - 0,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 10,9 \end{cases}.$$

Отримали розв'язок задачи Коші:

$$y = e^{5x}\left(-2 - 10,9x\right) + e^{-5x}\left(-x + 0,1\right) - 0,08\,sin5x.$$

3.8. Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих)

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

де $f(x)$ – будь-яка функція. Розв'язок цього рівняння буде мати вигляд:

$$y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2, \tag{3.22}$$

де y_1, y_2 – частинні розв'язки відповідного диференціального однорідного рівняння, які знаходимо за таблицею 1, а $C_1(x),\ C_2(x)$ - деякі, поки що невідомі функції. Ці функції будемо розшукувати, виходячи з тієї умови, що $y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2$ - загальний розв'язок заданого рівняння, тобто, якщо його підставити у рівняння, то воно перетвориться на тотожність. Виконаємо цю процедуру. Для цього знайдемо похідні першого та другого порядку функції (3.22):

$$y' = C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 + C_1(x)\,y_1' + C_2(x)\,y_2'$$

Підберемо функції $C_1(x),\quad C_2(x)$ так, щоб $C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0$. Тоді

$$y'' = C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + C_1(x)\,y_1'' + C_2(x)\,y_2''.$$

Підставимо y, y', y'' в рівняння (22.10).

Дістанемо:

$$C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + C_1(x)\,y_1'' + C_2(x)\,y_2'' + a_1(x)(C_1(x)\,y_1' + C_2(x)\,y_2') +$$
$$+ a_2(x)(C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2) = f(x)$$ або

$$C_1(x)\left[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right] + C_2(x)\left[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right] +$$
$$C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x)$$

В останньому рівнянні вирази, що знаходяться у квадратних дужках тотожно дорівнюють нулю, оскільки функції y_1, y_2 – розв'язки рівняння

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 .$$

Тоді маємо: $C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x)$.

Таким чином, функція $y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2$ буде розв'язком рівняння, якщо $C_1(x),\quad C_2(x)$ задовольняють системі лінійних алгебраїчних рівнянь відносно функцій $C_1'(x),\quad C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0, \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x). \end{cases} \tag{3.23}$$

Визначник цієї системи $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ є визначником Вронського для функцій $y_1(x), y_2(x)$, що утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР (3.8). Отже, система (3.23) має єдиний розв'язок $C_1'(x) = \varphi_1(x),\quad C_2'(x) = \varphi_2(x)$, звідки $C_1(x)$ та $C_2(x)$ знаходяться простим інтегруванням.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{3x}}.$$

Розв'язання. Частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння $y'' + 5y' + 6y = 0$ з характеристичним рівнянням $k^2 + 5k + 6 = 0$ $(k_1 = -3;\ k_2 = -2)$ мають вигляд $y_1 = e^{-3x};\quad y_2 = e^{-2x}$.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння отримаємо у вигляді $y = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-3x}$, де невідомі функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ задовольняють системі алгебраїчних лінійних рівнянь відносно $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'e^{-3x} + C_2'e^{-2x} = 0, \\ -3C_1'e^{-3x} - 2C_2'e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^{3x}}. \end{cases}$$

Цю систему розв'яжемо за формулами Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{-2x} \\ -3e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-5x} + 3e^{-5x} = e^{-5x}.$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{1+e^{3x}} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-2x}}{1+e^{3x}},$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & \frac{1}{1+e^{3x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{-3x}}{1+e^{3x}}.$$

Отже, $C_1' = \dfrac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -\dfrac{e^{3x}}{1+e^{3x}};\qquad C_2' = \dfrac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{3x}}.$

Проінтегруємо останні два вирази:

$$C_1 = \int -\frac{e^{3x}dx}{1+e^{3x}} = \left| \begin{matrix} t = 1+e^{3x} \\ dt = 3e^{3x}dx \end{matrix} \right| = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}ln|t| + C_1^* = -\frac{1}{3}ln\left|1+e^{3x}\right| + C_1^* .$$

$$C_2 = \int \frac{e^{2x}dx}{1+e^{3x}} = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{tdt}{1+t^3} .$$

Маємо під знаком інтеграла правильний раціональний дріб, який розкладемо на простіші:

$$\frac{t}{t^3+1} = \frac{t}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} = \frac{A\left(t^2-t+1\right)+(Bt+C)(t+1)}{(t-1)\left(t^2-t+1\right)} .$$

Звідки, дістанемо :

$$t = A\left(t^2-t+1\right) + Bt\,(t+1) + C\,(t+1).$$

$$\begin{array}{c|l} t^2-1 & \qquad -1 = 3A, \quad \Rightarrow \quad A = -1/3, \\ t^2 & \qquad 0 = A+B, \quad \Rightarrow \quad B = 1/3, \\ t & 1 = -A+B+C, \quad \Rightarrow C = 1+A-B = 1-1/3-1/3 = 1/3 . \end{array}$$

Отже, $C_2 = \int \left(\frac{-1/3}{t+1} + \frac{1/3t+1/3}{t^2-t+1} \right) dt = 1/3 \left[\int \frac{-dt}{t+1} + \int \frac{(t+1)\,dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right].$

Обчислимо окремо отримані інтеграли.

$$\int \frac{t+1}{(t-1/2)^2 + \frac{3}{4}} dt = \left| \begin{matrix} t-1/2 = z \\ t = z+1/2 \\ dz = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{z+1/2+1}{z^2+3/4} dz = \int \frac{z\,dz}{z^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} z^2+\frac{3}{4} = w \\ dw = 2z\,dz \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{z^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}ln|\,w\,| + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot arctg\,\frac{2z}{\sqrt{3}} =$$

$$=\frac{1}{2}ln\left|\left(t-1/2\right)^2+\frac{3}{4}\right|+\sqrt{3}\,arctg\frac{2\left(t-1/2\right)}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}ln\left|t^2-t+1\right|+\sqrt{3}\,arctg\frac{2t-1/2}{\sqrt{3}}.$$

$$C_2=-\frac{1}{3}ln\left|e^x+1\right|+\frac{1}{6}ln\left|e^{2x}-e^x+1\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2e^x-1}{\sqrt{3}}+C_1^*.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дістанемо у вигляді

$$y=\left(-\frac{1}{3}ln\left|1+e^{3x}\right|+C_1^*\right)e^{-2x}+\left(-\frac{1}{3}ln\left|e^x+1\right|+\frac{1}{6}ln\left|e^{2x}-e^x+1\right|+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2e^x-1}{\sqrt{3}}+C_1^*\right)e^{-3x}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y''+y=\dfrac{1}{cos\,x}$.

Розв'язання. Знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y''+y=0,\quad\Rightarrow\quad k^2+1=0,\quad\Rightarrow\quad k^2=-1,\quad\Rightarrow\quad k=\pm i,\quad\Rightarrow$$
$$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x,$$
$$y_1=\cos x,\qquad y_2=\sin x,$$
$$y_1'=-\sin x,\qquad y_2'=\cos x\,.$$

Загальний розв'язок початкового рівняння буде мати той же вигляд, що і загальний розв'язок однорідного рівняння, але C_1 та C_2 – не довільні сталі, а деякі функції, які знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases}C_1'\cos x+C_2'(x)\sin x=0,\\ -C_1'\sin x+C_2'\cos x=\dfrac{1}{\cos x}.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -tgx; \qquad \Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді,

$$C_1' = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -tgx; \qquad C_2' = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = 1.$$

Дістанемо функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int -tgx\,dx = ln|\cos x| + C_1^*,$$

$$C_2(x) = \int dx = x + C_2^*.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння отримаємо у вигляді:

$$y = \left(ln|\cos x| + C_1^*\right)\cos x + \left(x + C_2^*\right)\sin x.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' + y' = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + k = 0$ відповідного однорідного диференціального рівняння має корені $k_1 = 0; \quad k_2 = -1$, тому частинні розв'язки однорідного рівняння

$y_1 = 1; \quad y_2 = e^{-x}, \quad \Rightarrow \quad y_1' = 0; \quad y_2' = -e^{-x}.$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $y = C_1(x) + C_2(x)e^{-x}$.

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему:

$$\begin{cases} C_1' + C_2'e^{-x} = 0, \\ -C_2'e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x + 1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = C_2'e^{-x}, \\ C_2' = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = \dfrac{e^x}{e^x + 1}, \\ C_2' = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}. \end{cases}$$

Проінтегруємо кожне з отриманих рівнянь:

$$C_1=\int\frac{e^x dx}{e^x+1}=\left|\begin{array}{l} t=e^x \\ dt=e^x dx \end{array}\right|=\int\frac{dt}{t+1}=ln|t+1|+C_1^*=ln|e^x+1|+C_1^*$$

$$C_2=\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}=\left|\begin{array}{l} e^x+1=t \\ e^x=t-1 \\ dt=e^x dx \end{array}\right|=\int\frac{t-1}{t}dt=\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=t-ln|t|+C_2^*=$$
$$=e^x+1-ln|e^x+1|+C_2^*\ .$$

Дістанемо загальний розв'язок початкового рівняння

$$y=ln|e^x+1|+C_1^*+\left(e^x+1-ln|e^x+1|+C_2^*\right)e^{-x}.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y''+4y'+4y=e^{-2x}\,ln\,x.$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2+4k+4=0$ відповідного однорідного диференціального рівняння має корені $k_{1,2}=-2$, тому частинні розв'язки однорідного рівняння $y_1=e^{-2x};\quad y_2=xe^{-2x},\quad \Rightarrow\quad y_1'=-2e^{-2x};\quad y_2'=e^{-2x}-2xe^{-2x}..$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $y=\left(C_1(x)+xC_2(x)\right)e^{-2x}$.

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему:

$$\begin{cases} C_1'e^{-2x}+C_2'x\,e^{-2x}=0, \\ -2C_1'e^{-2x}+C_2'e^{-2x}(1-2x)=e^{-2x}\,ln\,x\ . \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1'+C_2'x=0, \\ -2C_1'+C_2'(1-2x)=ln\,x\ . \end{cases}$$

Цю систему розв'яжемо за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{vmatrix} = 1 - 2x + 2x = 1.$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \ln x & 1-2x \end{vmatrix} = -x\ln x,$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \ln x \end{vmatrix} = \ln x.$$

Отже, $C_1' = \dfrac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -x\ln x; \qquad C_2' = \dfrac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = \ln x.$

Проінтегруємо кожне з отриманих рівнянь:

$$C_1 = \int -x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{l} \textit{За методом інтегрування} \\ \textit{частинами маємо} \\ u = \ln x, \qquad du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = x\,dx, \qquad v = \dfrac{x^2}{2}, \end{array} \right| =$$

$$C_1 = -\ln x \cdot \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow C_1 = -\ln x \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int x\,dx, \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C_1^*$$

$$C_2 = \int C_2'\,dx = \int \ln x\,dx \left| \begin{array}{l} \textit{За методом інтегрування} \\ \textit{частинами маємо} \\ u = \ln x, \qquad du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = dx, \qquad v = x, \end{array} \right|$$

$$C_2 = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow C_2 = \ln x \cdot x - \int dx, \quad \Rightarrow C_2 = x\ln x - x + C_2^*.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = e^{-2x}\left(-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C_1^*\right) + x e^{-2x}\left(x\ln x - x + C_2^*\right).$$

Розділ 4
СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЬ

4.1. Нормальна система рівняннь

Диференціальне рівняння порядку n з однією змінною функцією шляхом перепозначення зводиться до системи, що складається з n диференціальних рівняннь 1-го порядку з n невідомими функціями. Так, рівняння 3-го порядку $y''' = f(x, y, y', y'')$ в результаті замін $y' = u$, $y'' = v$ зводиться до системи

$$y' = u, \quad u' = v, \quad v' = f\left(x, y, u, v\right),$$

де x – аргумент; y, u, v – невідомі функції.

Систему диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв`язаних відносно похідних від шуканих функцій, називають **нормальною**. Коротко її можна записати так:

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.1}$$

Розв`язати систему (4.1) – це значить знайти функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, підстановка яких в (4.1) перетворює всі n рівностей цієї системи на тотожності.

Загальний розв`язок системи (4.1) має вигляд $y_j = y_j\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Задача Коші для системи (4.1) полягає у пошуку набору функцій $y_j(x)$,

$j = 1, 2, \ldots, n$, що задовольняють рівняння (4.1) та початкові умови

$$y_j\left(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = h_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.2}$$

де $x_0, h_1, h_2, \ldots, h_n$ – задані числа. Сталі C_1, C_2, … , C_n знаходяться у результаті розв`язування алгебраїчної системи (4.2).

Якщо в області D змінювання змінних $x, y_1, \ldots, y_n$ функції $f_j\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку за змінними $y_1, \ldots, y_n$ і точка $(x_0, h_1, h_2, \ldots, h_n) \in D$, то в області D існує єдиний розв`язок $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, який задовольняє умови (4.2).

Нехай, зокрема, система типу (4.1) містить два рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \tag{4.3}$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y). \tag{4.4}$$

Тут змінна t – аргумент; $x(t)$ та $y(t)$ – шукані функції.

Продиференціюємо рівняння (4.3) за змінною t та за допомогою (4.4) виключимо dy/dt. Одержимо диференціальне рівняння вигляду $\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}\right)$. Залучаючи рівність (4.3), виключимо звідси y. Отримаємо рівняння 2-го порядку з однією невідомою функцією $x(t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right).$$

З цього рівняння визначається $x(t)$, після чого з рівняння (4.3) - друга невідома функція $y(t)$.

Приклад 1. Знайти загальний розв`язок системи диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} dx/dt = y - x + e^{2t}, \\ dy/dt = y - 2x. \end{cases}$$

Розв`язання. Продиференціюємо перше рівняння за t та за допомогою другої рівності виключимо dy/dt:

$$x'' = y' - x' + 2e^{2t}, \; x'' = (y - 2x) - x' + 2e^{2t}.$$

З першого рівняння виразимо y та підставимо в отримане диференціальне рівняння:

$$y = x' + x - e^{2t}, \; x'' = x' + x - e^{2t} - 2x - \; x' + 2e^{2t}.$$

Маємо $x'' + x = e^{2t}$. Це – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами, що має невідому функцію $x(t)$.

Знайдемо його розв`язок. З характеристичного рівняння $k^2 + 1 = 0$, $k_{1,2} = \pm i$ отримаємо загальний розв`язок відповідного однорідного рівняння:

$X = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

Частинний розв`язок неоднорідного рівняння має вигляд: $\bar{x} = Ae^{2t}$. Звідси: $\bar{x}' = 2Ae^{2t}$, $\bar{x}'' = 4Ae^{2t}$.

Отримані вирази підставимо в рівняння $x'' + x = e^{2t}$ і, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, отримаємо:

А = 1/5, $\bar{x} = \frac{1}{5}e^{2t}$.

Загальний розв`язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$x = X + \bar{x} = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{5}e^{2t}$, де C_1 та C_2 – довільні сталі.

З першого рівняння системи одержимо:

$$y = x' + x - e^{2t} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{2}{5}e^{2t} + C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{5}e^{2t} - e^{2t} =$$

$$= (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t - \frac{2}{5}e^{2t}.$$

Отже, загальний розв`язок системи:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{5}e^{2t},$$

$$y(t) = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t - \frac{2}{5}e^{2t}.$$

4.2. Лінійна система диференціальних рівнянь

Лінійною системою диференціальних рівнянь називають систему вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n. \end{cases} \tag{4.5}$$

Невідомі функції $x_j(t)$ та їх похідні dx_j/dt входять до рівняння системи лінійно, тобто у першому степені, не перемножуючись між собою. Коефіцієнти $a_{kj} = a_{kj}(t)$ та вільні члени $f_j(t)$ – задані функції, $k, j = 1, 2, \ldots, n$.

Застосовують векторно-матричну форму запису. Вводять вектори $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\vec{f} = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$, $d\vec{x}/dt = \{x_1', x_2', ..., x_n'\}$, які зображують матрицями-стовпцями $X, F, dX/dt$. В позначеннях

$$A = (a_{kj}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \qquad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

система (4.5) записується однією матричною рівністю

$$\frac{dX}{dt} = AX + F. \tag{4.6}$$

Якщо $F = 0$, тобто F – нуль-матриця, то систему (4.6) називають однорідною, а при $F \neq 0$ – неоднорідною.

Загальний розв`язок лінійної неоднорідної системи (4.6) має структуру:

$$X = X_* + \bar{X}, \tag{4.7}$$

де X_* – загальний розв`язок однорідної системи, що відповідає системі (4.6):

$$\frac{dX_*}{dt} = AX_*, \tag{4.8}$$

а $\bar{X}$ – частинний розв`язок неоднорідної системи (4.6).

$$X_* = \begin{pmatrix} x_{*1} \\ x_{*2} \\ \vdots \\ x_{*n} \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}, \quad x_j = x_{*j} + \bar{x}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Припустимо, для системи (4.8), що складається з n рівнянь, відомі n її лінійно незалежних частинних розв`язків $X_j(t)$ $j = 1, 2, \ldots, n$ (кожна з величин X_j є матрицею-стовпцем, яка являє собою векторну функцію з n координатами $\vec{x}_j = \{x_{1j}(t), x_{2j}(t), ..., x_{nj}(t)\}$). Лінійна незалежність матриць X_j означає, що матрична тотожність $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n \equiv \theta$ можлива тільки в тому випадку, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ – нулі. Тоді загальний розв`язок однорідної системи (4.8) можна утворити за формулою

$$X_* = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j(t), \tag{4.9}$$

де C_j – довільні сталі.

Питання про лінійну незалежність матриць X_j вирішується шляхом вивчення визначника ***Вронського.*** Так називають визначник квадратної матриці ***W*(*t*),** стовпцями якого слугують матриці X_j:

$$X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad W(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Для лінійної незалежності розв`язків $X_j(t)$ необхідно та достатньо, щоб $\det W(t) \neq 0$ ні при якому значенні t з проміжку (a, b), в якому коефіцієнти $a_{kj}(t)$ системи (4.5) неперервні. (Умова $\det W(t) \neq 0$ виконується $\forall t \in (a, b)$, коли вона має місце хоча б в одній точці цього проміжку).

Якщо ввести $\boldsymbol{n}$-вимірний вектор $\boldsymbol{C}=\left\{\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,...,\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}\right\}$, в якому довільні сталі $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,...,\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}$ грають роль координат, та зобразити його стовпцевою матрицею $\boldsymbol{C}$, то рівність (4.9) в матричній формі прийме вигляд

$$\boldsymbol{X}_{*}=\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{C}\,.$$

Частинний розв\`язок $\bar{\boldsymbol{X}}$ системи (4.6) підбирається за виглядом $\boldsymbol{F}$**.** При відомому загальному розв\`язку $\boldsymbol{X}_{*}$ однорідної системи (4.8) побудова загального розв\`язку $\boldsymbol{X}$ неоднорідної системи (4.6) можлива також за методом варіації довільних сталих.

Приклад 2. Знайти частинний розв\`язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dx/dt = 2x - y, \\ dy/dt = y - 2x + 18t. \end{cases}$$

що задовольняє умови $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Розв\`язування. Позначимо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} 0 \\ 18\,t \end{pmatrix},\ X\left(t\right)=\begin{pmatrix} x\left(t\right) \\ y\left(t\right) \end{pmatrix},\quad \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix},$$

$$X_{*}=\begin{pmatrix} x_{*}\left(t\right) \\ y_{*}\left(t\right) \end{pmatrix},\quad \bar{X}=\begin{pmatrix} \bar{x}\left(t\right) \\ \bar{y}\left(t\right) \end{pmatrix}.$$

Тоді задана неоднорідна система запишеться однією матричною рівністю $\dfrac{dX}{dt}=AX+F$. Знайдемо лінійно незалежні частинні розв\`язки однорідної системи:

$$\frac{dX}{dt}=AX\ \text{ або } \begin{cases} dx/dt = 2x - y, \\ dy/dt = y - 2x. \end{cases}$$

Виключивши y, одержимо $x''=2x'-y' \Rightarrow x''=2x'-\left(y-2x\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow x''=2x'+2x-2x+x' \Rightarrow x''-3x'=0\,.$

Характеристичне рівняння $k^2-3k=0$ має корені $k_1=0$, $k_2=3$, яким відповідають елементи частинного розв`язку $x_1=e^{0t}=1$ та $x_2=e^{3t}$.

З першого рівняння системи виразимо y: $y=2x-x'$. Підставимо сюди почергово $x_1=1$ та $x_2=e^{3t}$. Маємо $y_1=2$, $y_2=-e^{3t}$.

Визначилися два частинних розв`язки однорідної системи:

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}e^{3t}\\-e^{3t}\end{pmatrix}.$$

Матриця $W=\begin{pmatrix}1 & e^{3t}\\2 & -e^{3t}\end{pmatrix}$, її визначник $\det W=\begin{vmatrix}1 & e^{3t}\\2 & -e^{3t}\end{vmatrix}=-3e^{3t}\neq 0$ ні при якому значенні t. Таким чином, розв`язки X_1 та X_2 лінійно незалежні.

Запишемо загальний розв`язок однорідної системи:

$$X_*=C_1X_1+C_2X_2=C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}e^{3t}\\-e^{3t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1+C_2e^{3t}\\2C_1-C_2e^{3t}\end{pmatrix},$$

тобто $\begin{cases}x_*=C_1+C_2e^{3t},\\ y_*=2C_1-C_2e^{3t}.\end{cases}$

Частинний розв`язок $\bar{X}$ шукаємо за методом варіації довільних сталих. Покладемо $C_1=C_1(t)$, $C_2=C_2(t)$ та поставимо вимогу, щоб функції $\bar{x}=C_1(t)+C_2(t)e^{3t}$, $\bar{y}=2C_1(t)-C_2(t)e^{3t}$ задовольняли задану систему рівнянь. Маємо $\bar{x}'=C_1'+C_2'e^{3t}+3C_2e^{3t}$, $\bar{y}'=2C_1'-C_2'e^{3t}-3C_2e^{3t}$.

Внесемо $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ до початкової системи диференціальних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l}C_1'+C_2'e^{3t}+3C_2e^{3t}=2C_1+2C_2e^{3t}-2C_1+C_2e^{3t}\\ 2C_1'-C_2'e^{3t}-3C_2e^{3t}=2C_1-C_2e^{3t}-2C_1-2C_2e^{3t}+18t\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}C_1'+C_2'e^{3t}=0,\\ 2C_1'-C_2'e^{3t}=18t.\end{cases}$$

Отримаємо $C_1'=6t$, $C_2'=-6te^{-3t}$,

$$C_1=\int 6t\,dt=3t^2,\ C_2=-6\int te^{-3t}dt=-6\left[-\frac{1}{3}te^{-3t}-\frac{1}{9}e^{-3t}\right]=2te^{-3t}+\frac{2}{3}e^{-3t}.$$

Сталі інтегрування тут опущені, тому що достатньо знайти найпростіший частинний розв`язок неоднорідної системи.

Маємо:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 3t^2 + 2t + 2/3,\\ \bar{y} &= 6t^2 - 2t - 2/3\end{aligned} \qquad \text{або} \qquad \bar{X} = \begin{pmatrix} 3t^2 + 2t + 2/3 \\ 6t^2 - 2t - 2/3 \end{pmatrix}.$$

Згідно з (4.7) запишемо загальний розв`язок системи:

$$X = X_* + \bar{X} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 e^{3t} \\ 2C_1 - C_2 e^{3t} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 3t^2 + 2t + 2/3 \\ 6t^2 - 2t - 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + 2/3 + C_2 e^{3t} + 3t^2 + 2t \\ 2\left(C_1 + 2/3\right) - 2 - C_2 e^{3t} + 6t^2 - 2t \end{pmatrix}.$$

Після включення числа 2/3 в C_1 маємо

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 e^{3t} + 3t^2 + 2t \\ 2C_1 - C_2 e^{3t} + 6t^2 - 2t - 2 \end{pmatrix}$$

або $\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{3t} + 3t^2 + 2t, \\ y(t) = 2C_1 - C_2 e^{3t} + 6t^2 - 2t - 2. \end{cases}$.

Задані початкові умови приводять до рівностей

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ 2C_1 - C_2 - 2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad C_1 = 1, \quad C_2 = -1.$$

Розв’язок задачі Коші: $x(t) = 1 - e^{3t} + 3t^2 + 2t, \quad y(t) = e^{3t} + 6t^2 - 2t$.

4.3. Лінійна система зі сталими коефіцієнтами

Методом виключення невідомих лінійну систему (4.5) можна звести до одного лінійного диференціального рівняння порядку n з однією невідомою функцією. Якщо коефіцієнти системи a_{kj} – сталі числа, то такими будуть і коефіцієнти наново утвореного диференціального рівняння.

Нехай система (4.5) складається з двох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + f_2(t), \end{cases}$$

де a_1, b_1, a_2, b_2 – сталі.

Диференціюємо перше рівняння за змінною t і за допомогою другої рівності виключаємо dy/dt:

$$x'' = a_1 x' + b_1 y' + f_1',$$

$$x'' = a_1 x' + b_1\left(a_2 x + b_2 y + f_2\right) + f_1',$$

$$x'' = a_1 x' + b_1 a_2 x + b_1 b_2 y + b_1 f_2 + f_1'.$$

За допомогою першого рівняння системи виключаємо y:

$$x'' = a_1 x' + a_2 b_1 x + b_2\left(x' - a_1 x - f_1\right) + b_1 f_2 + f_1';$$

$$x'' + \left(-a_1 - b_2\right) x' + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) x = b_1 f_2 - b_2 f_1 + f_1'.$$

Дістали лінійне диференціальне рівняння другого порядку $x'' + px' + qx = \phi(t)$ із сталими коефіцієнтами $p = -a_1 - b_2$, $q = a_1 b_2 - a_2 b_1$ і правою частиною $\phi(t) = b_1 f_2 - b_2 f_1 + f_1'$.

У випадку сталих дійсних чисел a_{kj} побудова загального розв`язку однорідної системи (4.5), тобто такої, що $f_1 = f_2 = \cdots = f_n \equiv 0$, можлива також за методом Ейлера.

Обмежимося випадком системи, що містить два рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11} x + a_{12} y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21} x + a_{22} y. \end{cases} \tag{4.11}$$

Будемо шукати розв`язок системи (4.11) у формі

$$x = \lambda e^{kt}; \quad y = \mu e^{kt}, \tag{4.12}$$

де λ, μ, k – деякі невідомі поки що числа.

Підставимо (4.12) в (4.11). Після скорочення на e^{kt} одержимо рівності

$$\begin{cases} \lambda k = a_{11}\lambda + a_{12}\mu, \\ \mu k = a_{21}\lambda + a_{22}\mu \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (a_{11}-k)\lambda + a_{12}\mu = 0, \\ a_{21}\lambda + (a_{22}-k)\mu = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

По відношенню до величин λ, μ рівності (4.13) утворюють однорідну алгебраїчну систему. Якщо її визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (4.13) має єдиний розв`язок $\lambda = 0, \mu = 0$. Тоді згідно з (4.12) $x = \mathbf{0}$, $y = \mathbf{0}$, тобто визначиться лише тривіальний (що не має практичного значення) розв`язок системи (4.11). Ненульові значення λ та μ можна отримати, якщо число k підібрати так, щоб $\Delta = 0$. З цією метою будемо вимагати виконання рівності

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{4.14}$$

Розкриваючи визначник, дістанемо квадратне рівняння з невідомим k. Таке рівняння називають характеристичним. Припустимо, що воно має два різних кореня k_1 та k_2 ($k_1 \neq k_2$). Підставимо почергово ці значення в алгебраїчну систему (4.13) та знайдемо дві ненульові пари чисел λ_1, μ_1 та λ_2, μ_2, котрі відповідають кореням k_1 та k_2 (значення λ_1, λ_2 або μ_1, μ_2 можна вибирати, власно кажучи, довільно, але відмінними від нуля). В результаті визначаться два лінійно незалежних частинних розв`язки системи (4.11): $x_1 = \lambda_1 e^{k_1 t}$, $y_1 = \mu_1 e^{k_1 t}$ та $x_2 = \lambda_2 e^{k_2 t}$, $y_2 = \mu_2 e^{k_2 t}$. Їх можна записати і в матричній формі:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{k_1 t} \\ \mu_1 e^{k_1 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} e^{k_1 t}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{k_2 t} \\ \mu_2 e^{k_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} e^{k_2 t}.$$

Загальний розв`язок однорідної системи (4.11) знаходимо за формулою (4.9): $X_* = C_1 X_1 + C_2 X_2$,

$$\begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} e^{k_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} e^{k_2 t} = \begin{pmatrix} C_1 \lambda_1 e^{k_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{k_2 t} \\ C_1 \mu_1 e^{k_1 t} + C_2 \mu_2 e^{k_2 t} \end{pmatrix},$$

тобто

$$x_* = C_1 \lambda_1 e^{k_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{k_2 t}; \quad y_* = C_1 \mu_1 e^{k_1 t} + C_2 \mu_2 e^{k_2 t}. \tag{4.15}$$

Якщо корені рівняння (4.14) комплексні ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$), то можна діяти за тією ж схемою, що і вище. Щоб уникнути появи комплексних коефіцієнтів, простіше зробити так: за елементи x_1 та x_2 прийняти $x_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t$, $x_2 = e^{\alpha t} \sin \beta t$, а відповідні до них функції y_1 та y_2 знайти з першого рівняння системи (4.11):

$$y_1 = \frac{1}{a_{12}} \left(x_1' - a_{11} x_1 \right); \qquad y_2 = \frac{1}{a_{12}} \left(x_2' - a_{11} x_2 \right).$$

Матриці $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ та $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ є лінійно незалежними частинними розв`язками системи (4.11).

Загальний розв`язок X_* відшукується за правилом (4.9):

$$X_* = \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} = C_1 X_1 + C_2 X_2 = \begin{pmatrix} C_1 x_1 + C_2 x_2 \\ C_1 y_1 + C_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Тобто: $\quad x_*(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2, \qquad y_*(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2. \qquad (4.16)$

Якщо корені рівняння (4.14) збігаються ($k_1 = k_2 = k$), то можна прийняти $x_1 = e^{kt}$, $x_2 = t e^{kt}$. Функції y_1 та y_2, як і в попередньому випадку, визначаються з першого диференціального рівняння системи.

Подальша процедура побудови загального розв`язку не відрізняється від вже розглянутої.

Приклад 3. Знайти загальний розв`язок системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$

Розв`язування. Запишемо характеристичне рівняння (4.14) та знайдемо його корені:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 8 \\ 3 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-k)(3-k) - 24 = 0, \quad k^2 - 8k - 9 = 0, \quad k_1 = -1, \quad k_2 = 9.$$

З системи (4.13) $\begin{cases} (5-k)\lambda + 8\mu = 0 \\ 3\lambda + (3-k)\mu = 0 \end{cases}$ отримаємо:

при $k = k_1 = -1$ $\begin{cases} 6\lambda + 8\mu = 0 \\ 3\lambda + 4\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\lambda + 4\mu = 0$, нехай $\lambda = 4$,

тоді $\mu = -3$;

при $k = k_2 = 9$ $\begin{cases} -4\lambda + 8\mu = 0 \\ 3\lambda - 6\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2\mu$, нехай $\lambda = 2$,

тоді $\mu = 1$.

Маємо два частинних розв`язки:

$$x_1 = 4e^{-t}, \ y_1 = -3e^{-t} \quad \text{та} \quad x_2 = 2e^{9t}, \ y_2 = e^{9t}.$$

Згідно з (4.15) запишемо загальний розв`язок системи диференціальних рівнянь:

$$x_* = 4C_1e^{-t} + 2C_2e^{9t}, \qquad y_* = -3C_1e^{-t} + C_2e^{9t}.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв`язок системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

Розв`язування. Відшукаємо корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-k & -3 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-k)^2 + 9 = 0, \quad k^2 - 2k + 10 = 0, \quad k_{1,2} = 1 \pm 3i.$$

Маємо елементи частинного розв`язку: $x_1 = e^t \cos 3t$, $x_2 = e^t \sin 3t$. Відповідні до них вирази для y_1, y_2 знайдемо, підставляючи почергово x_1 та x_2 в перше рівняння системи:

$$y_1 = \frac{1}{3}(x_1 - x_1') = \frac{1}{3}\left(e^t \cos 3t + 3e^t \sin 3t - e^t \cos 3t\right) = e^t \sin 3t;$$

$$y_2 = \frac{1}{3}(x_2 - x_2') = \frac{1}{3}\left(e^t \sin 3t - e^t \sin 3t - 3e^t \cos 3t\right) = -e^t \cos 3t.$$

Таким чином, перше та друге частинні розв`язки:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos 3t \\ e^t \sin 3t \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \sin 3t \\ -e^t \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Загальний розв`язок системи диференціальних рівнянь:

$$x_* = e^t\left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right); \quad y_* = e^t\left(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t\right).$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальні розв’язки систем диференціальних рівнянь:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases};$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases};$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases};$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}.$

Розділ 5
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Диференціальні рівняння є одним з найбільш ефективних засобів математичного моделювання багатьох прикладних задач.

Розв'язуючи задачі фізики, теоретичної механіки, хімії чи інших природничих наук за допомогою диференціальних рівнянь, виділяють такі три етапи: а) побудова диференціального рівняння; б) інтегрування цього рівняння; в) дослідження отриманого розв'язку.

У багатьох випадках побудова диференціального рівняння ***першого порядку*** ґрунтується на так званій «лінійності процесу у малому», тобто на диференційовності функцій, які виражають залежність величин. Як правило, можна рахувати, що всі величини, які беруть участь у певному процесі протягом малого проміжку часу, змінюються зі сталою швидкістю. Це дозволяє застосовувати відомі закони, які описують явища, що протікають рівномірно, для утворення співвідношення між значеннями $\boldsymbol{(t, t+\Delta t)}$, тобто величинами, які беруть участь у процесі, та їх приростами. Якщо перейти в одержаній рівності до границі, коли $\boldsymbol{\Delta t \to 0}$, то отримаємо точну рівність, а саме, диференціальне рівняння, яке описує задане явище.

Складаючи диференціальне рівняння, ми робимо ніби «миттєвий кадр» процесу у заданий момент часу, а потім, розв'язуючи рівняння, відновлюємо перебіг процесу. Отже, у процесі розв'язування прикладних задач наведеним методом лежить загальна ідея лінеаризації – заміни функцій на малих проміжках зміни аргументу лінійними функціями. Інколи диференціальні рівняння можна скласти простіше, якщо скористатися фізичним змістом похідної.

Отже, перший етап розв'язування задач з практичним змістом закінчується складанням диференціального рівняння для шуканої функції. Це творча й найважча частина розв'язку, тому що не існує будь-яких загальних правил для складання диференціальних рівнянь за умовами конкретної задачі.

Наприклад, якщо це задача геометричного характеру, то наявність у її даних дотичної чи деяких зв'язаних з нею відрізків дає можливість написати співвідношення між координатами точок кривої і кутовим коефіцієнтом дотичної. У задачах фізичного характеру часом можна відразу написати відповідне диференціальне рівняння, якщо задана швидкість зміни будь-якого процесу. В інших випадках необхідно попередньо встановити співвідношення між збільшенням змінних, потім переходом до границі одержати диференціальне рівняння.

У процесі побудови звичайних диференціальних моделей важливе, а інколи і першорядне значення має знання законів тієї області науки, з якою зв'язана задача, що вивчається. Так, для розв'язання задач з електротехніки можна користуватися законами Кірхгофа: 1) для кожного вузла ланцюга алгебраїчна сума всіх струмів дорівнює нулю; 2) алгебраїчна сума напруг джерел струму будь-якого замкненого контура дорівнює алгебраїчній сумі падіння напруг на усіх ділянках цього контуру (якщо $\boldsymbol{I(t)}$ – сила струму, то падіння напруги на опорі $\boldsymbol{R}$ дорівнює $\boldsymbol{U = RI}$, на катушці з самоіндукцією $\boldsymbol{L}$ $\boldsymbol{U = L \cdot dI / dt}$, на конденсаторі з ємністю c $\boldsymbol{U = q / c}$, де $\boldsymbol{q = q(t)}$ – заряд конденсатора у момент часу $\boldsymbol{t}$, при цьому $\boldsymbol{dq / dt = I(t)}$).

Математична зрілість інженера характеризується в основному тим, наскільки правильно він може математично формулювати практичні задачі, які пов'язані з його спеціальністю. Якщо задача зведена до диференціального рівняння, методи розв'язування якого відомі, то другий етап розв'язку, тобто інтегрування рівняння, не викликає труднощів.

Задача 1. (***Про радіоактивний розпад*****)** Відомо, що швидкість розпаду радію прямо пропорційна його кількості. Знайти закон зміни маси речовини від часу, якщо $\boldsymbol{q_0}$ – кількість радію в момент часу $\boldsymbol{t = t_0}$.

Розв'язання. Нехай $q(t)$ – кількість радію в момент часу t. Швидкість розпаду радію, як швидкість зміни функції, це похідна від цієї функції. Отже, закон розпаду можна записати так:

$$\frac{dq(t)}{dt}=-kq(t), \tag{5.1}$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Знак мінус означає, що маса радію з часом зменшується. Задача полягає в знаходженні функції $q(t)$, яка є розв'язком рівняння (5.1) і задовольняє умові $q(t_0)=q_0$.

Інтегруючи це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, дістаємо:

$$\begin{aligned}&\frac{dq}{q}=-kdt\Rightarrow ln|q|=-kt+lnC\Rightarrow\\&ln\left|\frac{q}{c}\right|=-kt\Rightarrow q=Ce^{-kt}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Нехай q_0 – кількість радію в момент часу $t=t_0$. Тоді $q_0=Ce^{-kt_0}$, звідки $C=q_0e^{kt_0}$. Підставимо знайдене значення C у (5.2): $q=q_0e^{-k(t-t_0)}$. Якщо $t_0=0$, то $q=q_0e^{-kt}$. Це і є закон зміни початкової маси радію.

Задача 2. (*Про охолодження тіла*) Згідно із законом Ньютона, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища. Знайти закон залежності температури тіла від часу.

Розв'язання. Нехай в момент часу t температура тіла дорівнює $T(t)$. Припустимо, що нагріте до температури T_0 тіло помістили в середовище, температура якого стала і дорівнює $T_1\left(T_0>T_1\right)$. За умовою

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_1), \tag{5.3}$$

де $k>0$ – коефіцієнт пропорційності, $T(0)=T_0$. Рівняння (5.3) описує закон охолодження тіла в залежності від часу та температури навколишнього середовища і є також рівнянням з відокремлюваними змінними. Інтегруючи це рівняння, отримаємо:

$$\frac{dT}{T-T_1}=-kdt \Rightarrow ln\left|T-T_1\right|=-kt+lnC \Rightarrow$$

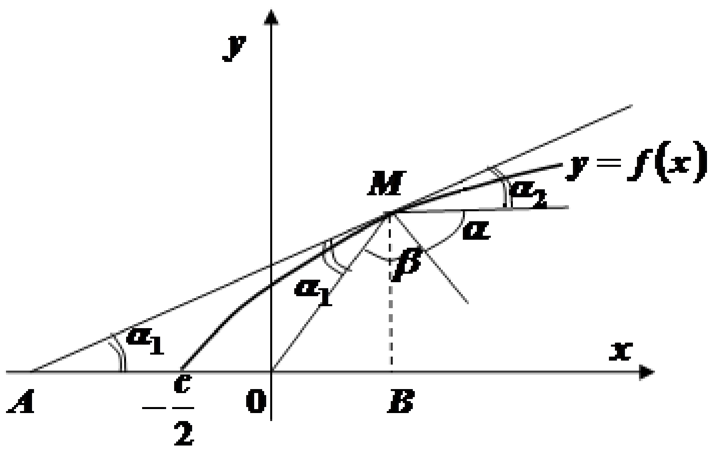
$$ln\left|\frac{T-T_1}{C}\right|=-kt \Rightarrow T=Ce^{-kt}+T_1. \qquad (5.4)$$

Враховуючи початкову умову $T(0)=T_0$ з (5.4) знаходимо, що $C=T_0-T_1$, а отже, остаточно виводимо закон зміни температури тіла залежно від часу:

$$T(t)=T_1+(T_0-T_1)e^{-kt}.$$

Задача 3. (***Про форму дзеркала***) Визначити диференціальну модель задачі, яка дозволяє знайти форму дзеркала, що збирає спрямований на нього потік паралельних променів в одну точку.

Розв'язання. Зробимо переріз дзеркала площиною $0xy$, щоб точка, в яку збираються промені (фокус), була початком координат, а вісь Ox – паралельною до променів, які падають на дзеркало. У перерізі одержуємо деяку криву $y=f(x)$:



Нехай $M(x,y)$ є довільною точкою кривої $y=f(x)$. Проведемо в цій точці дотичну MA та нормаль MN до кривої. Використаємо закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя α дорівнює куту його відбиття β. Звідки випливає, що $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$. Трикутник MOA рівнобедрений, отже $AO = MO$, де $MO = \sqrt{OB^2 + MB^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Оскільки $y' = tg\alpha_1$ (геометричний зміст похідної), то, вважаючи, що $y > 0$, одержуємо

$$y' = tg\alpha_1 = \frac{MB}{AB} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

Домножимо чисельник та знаменник дробу на $\sqrt{x^2 + y^2} - x$, тоді

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}. \tag{5.5}$$

Диференціальне рівняння (5.5) є диференціальною моделлю задачі та є однорідним.

Розв'яжемо його за допомогою заміни $y = ux$. Тоді

$$u'x + u = \frac{\sqrt{x^2 + u^2x^2} - x}{ux} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1+u^2} - 1}{u} - u \Rightarrow$$

$$\int \frac{udu}{\sqrt{1+u^2} - 1 - u^2} = \int \frac{dx}{x} + lnC_1 \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+u^2\right)}{\sqrt{1+u^2} - \left(1+u^2\right)} = ln|x| + lnC_1.$$

Оскільки

$$\int \frac{d\left(1+u^2\right)}{\sqrt{1+u^2} - \left(1+u^2\right)} = \begin{vmatrix} 1+u^2 = t^2 \\ 2udu = 2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{t - t^2} = 2\int \frac{dt}{1-t} - =$$

$$= -2\,ln|t-1| + \overline{C} = -2\,ln\left|\sqrt{1+u^2} - 1\right| + \overline{C},$$

то $-\,ln\left|\sqrt{1+u^2} - 1\right| = ln|xC_1| \Rightarrow$

$$\sqrt{1+u^2} - 1 = \frac{C}{x} \left(C = \frac{1}{C_1}\right) \Rightarrow u^2 = \left(\frac{C}{x}\right)^2 + \frac{2C}{x} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C^2 + 2Cx}{x^2} \Rightarrow$$

$$y^2 = 2Cx + C^2.$$

Отже, маємо рівняння осьового перерізу дзеркала площиною Oxy: $y^2 = 2Cx + C^2$. Одержали сім'ю парабол з вершинами у точках $\left(-\frac{C}{2};0\right)$, а тому поверхня дзеркала як поверхня обертання осьового перерізу навколо осі Ox має вигляд $y^2 + z^2 = 2Cx + x^2$, тобто шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання.

Задача 4. (***Про закон ефективності реклами***) Підприємство реалізує продукцію b, про яку в момент часу t з числа N_0 потенційних покупців знає лише $x = x(t)$ покупців. Для прискорення збуту продукції дано рекламні оголошення по радіо і телебаченню. Наступна інформація про продукцію розповсюджується серед покупців засобом спілкування один з одним. Вважатимемо, що після рекламних оголошень швидкість зміни числа тих, хто знає про продукцію, прямо пропорційна добутку числа покупців, які знають про товар, на число тих, хто про нього не знає. Знайти залежність між змінними x і t, якщо в початковий момент часу $t = 0$ (після рекламних оголошень) про товар знали $\frac{N_0}{a}$ чоловік (***закон ефективності реклами***).

Розв'язання. Якщо $x(t)$ – кількість покупців, які знають про продукцію підприємства в момент часу t, то, враховуючи умову задачі, дістаємо наступне диференціальне рівняння

$$x'(t) = kx(N_0 - x), \tag{5.6}$$

де $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності, $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ – швидкість зміни числа тих, хто знає про продукцію. Диференціальне рівняння (5.6) разом з початковою умовою $x(0) = \frac{N_0}{a}$ є математичною моделлю закону ефективності реклами.

Це рівняння є рівнянням Бернуллі:

$$x' = kxN_0 - kx^2 \Rightarrow x' - kN_0 x = -kx^2.$$

Користуючись підстановкою $x = uv$, дістаємо два рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' - kN_0 v = 0 \\ u'v = -kx^2. \end{cases}$$

Перше з них має розв'язок $v = e^{kN_0 t}$. Тоді друге рівняння матиме вигляд $\frac{du}{dt} = -ku^2 e^{kN_0 t}$. Інтегруючи це рівняння, знаходимо

$$-\frac{1}{u} = -\frac{e^{kN_0 t}}{N_0} - \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{Ce^{kN_0 t} + N_0}{N_0 C} \Rightarrow u = \frac{N_0 C}{N_0 + Ce^{kN_0 t}}.$$

Отже, $x = uv = \dfrac{e^{kN_0 t} \cdot N_0 C}{N_0 + Ce^{kN_0 t}}$.

Враховуючи початкову умову $x(0) = \dfrac{N_0}{a}$, знаходимо $C = \dfrac{N_0}{a-1}$.

Тоді:

$$x = \frac{N_0}{1 + (a-1)e^{-kN_0 t}}. \tag{5.7}$$

Схематичний вигляд графіка цієї функції показано на рис. 5.1.

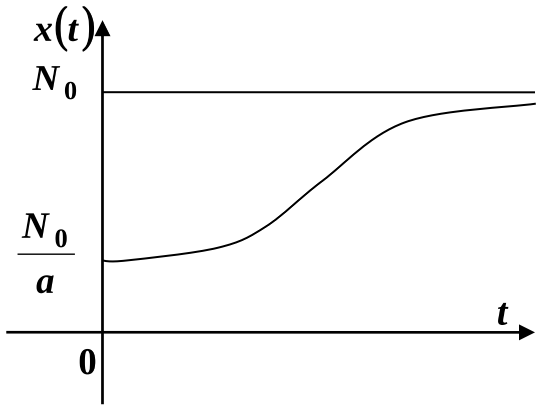


Рис. 5.1

Графік функції (5.7) нагадує видовжену літеру S, його називають ***логістичною кривою***. Пряма $x = N_0$ є асимптотою цієї кривої. Такою кривою зображують також динаміку чисельності популяції (населення, бактерій тощо). У цьому випадку відповідне диференціальне рівняння називають ***рівнянням Ферхюльста-Перла***. Воно описує залежність зростання чисельності популяції при регульованому розмноженні.

Зауваження. На сьогоднішній день є чимало спеціальних математичних комп'ютерних програм, які дозволяють розв'язувати різноманітні математичні задачі. Математичний пакет MathCad орієнтований, перш за все, на здійснення числових розрахунків, пакет MATLAB створений для роботи з числовими матрицями і векторами. Пакети Maple, Mathematical розраховані на здійснення символьних (тобто аналітичних) обчислень.

Практично всі ці пакети дозволяють розв'язувати диференціальні рівняння числовими (наближеними) методами. Остання група математичних пакетів дозволяє також знайти точний (аналітичний) розв'язок у тих випадках, коли рівняння інтегруються в скінченному вигляді.

Задача 5. Знайти та побудувати криву, яка проходить через точку $M(0;1)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої дорівнює $-\frac{x}{4y}$.

Розв'язання. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці (x, y) дорівнює y', то маємо рівняння $y' = -\frac{x}{4y}$.

Це рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними.

$$y' = -\frac{x}{4y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y} \Rightarrow ydy = -\frac{x}{4}dx \Rightarrow \int ydy = -\frac{1}{4}\int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} =$$

$$= -\frac{x^2}{8} + C.$$

З початкових умов $x = 0$, $y = 1$ знаходимо, що $C = \frac{1}{2}$.

Тоді $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ – рівняння шуканої кривої. Це рівняння еліпса (рис. 5.2).

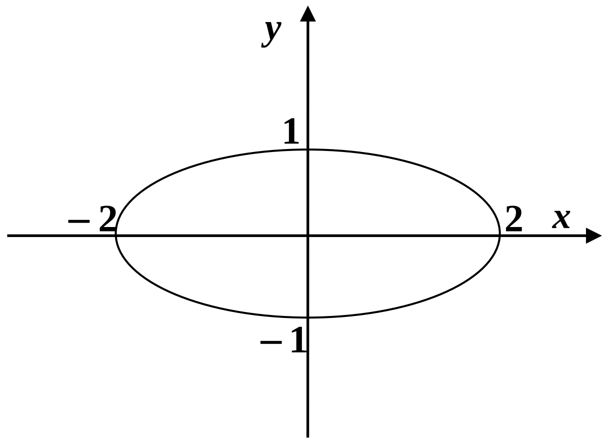


Рис. 5.2

Задача 6. Знайти криву, яка проходить через точку $(0;-3)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній її точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на 4.

Розв'язання. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці (x, y) дорівнює y', то маємо рівняння $y' = y + 4$.

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його.

$$\frac{dy}{dx} = y + 4, \quad \frac{dy}{y+4} = dx, \quad \int \frac{dy}{y+4} = \int dx, \quad ln|y+4| = x + C.$$

Враховуючи початкову умову $(x = 0, y = -3)$, дістаємо: $ln|-3+4| = C \Rightarrow$ $\Rightarrow C = 0$. Тоді $ln|y+4| = x \Rightarrow y = e^x - 4$ – рівняння шуканої кривої.

Задача 7. Знайти криву, що проходить через точку $(4;1)$, якщо відомо, що відрізок будь-якої дотичної до неї, розташований між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.

Розв'язання. Нехай $M(x,y)$ – довільна точка кривої $y=f(x)$. Для визначеності будемо вважати, що крива розміщена в першій чверті.

Для складання диференціального рівняння використаємо геометричний зміст похідної: $tg\alpha$ є кутовий коефіцієнт дотичної, у точці $M(x,y)$ він дорівнює y', тобто $y'=tg\alpha$.

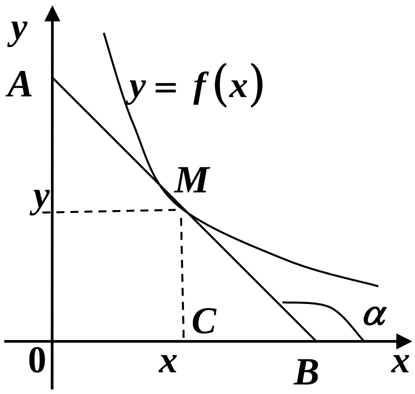


Рис. 5.3

Із рисунка 5.3 видно, що $tg(\angle MBC)=$ $=\dfrac{|MC|}{|BC|}$, але $tg(\angle MBC)=tg(180^\circ-\alpha)=-tg\alpha$.

$|MC|=y$. За умовою задачі $|AM|=$ $=|MB|\Rightarrow|OC|=|CB|=x$. Таким чином, отримуємо, що $tg\alpha=-\dfrac{y}{x}$ або $y'=-\dfrac{y}{x}$. Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow ln|y|=-ln|x|+lnC\Rightarrow y=\frac{C}{x}.$$

Враховуючи початкову умову $(x=4,\ y=1)$, отримаємо $1=\dfrac{C}{4}\Rightarrow C=4$.

$y=\dfrac{4}{x}$ – рівняння шуканої кривої (гіперболи).

Задача 8. У резервуарі знаходиться 100 л розчину солі. До нього вливається чиста вода зі швидкістю $q=5$ л/хв., а розчин вибігає з цією ж швидкістю. У початковий момент часу розчин мав $m_0=10$ кг солі. Скільки солі буде знаходитися у резервуарі через 20 хвилин після початку процесу?

Розв'язання. Об'єм резервуара $V = 100$ л. В момент часу t в ньому знаходиться $m(t)$ кг солі, отже концентрація розчину дорівнює $\frac{m}{V}$ кг/л солі. Об'єм, який має q літрів розчину вміщує $\frac{m}{V}q$ кг солі.

Рівняння процесу має вигляд $\frac{dm}{dt} = -\frac{m}{V}q$.

Це - рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його.

$$\frac{dm}{m} = -\frac{q}{V}dt \Rightarrow \int \frac{dm}{m} = -\int \frac{q}{V}dt \Rightarrow ln|m| = -\frac{q}{V} \cdot t + lnC \Rightarrow m = Ce^{-\frac{q}{V}t}.$$

Якщо $t = 0$, то $m = m_0$, тобто $m_0 = Ce^{-\frac{q}{V}\cdot 0} \Rightarrow m_0 = C$, звідки $m = m_0 e^{-\frac{q}{V}t}$.

Таким чином, маса солі змінюється в залежності від часу за законом. $m = m_0 e^{-\frac{q}{V}t}$.

За час $t = 20$ хв. розчин буде вміщувати солі $m = 10e^{-\frac{5}{100}\cdot 20} = \frac{10}{e} \approx 3{,}68$ кг.

Задача 9. Визначати, за який час тіло, нагріте до 100° C, охолодиться до 25° C в кімнаті з температурою 20° C, якщо до 60° C воно охолоджується за 10 хвилин.

Розв'язання. Відомо, що швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла та навколишнього середовища. Диференціальне рівняння, яке описує цей процес, має вигляд

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20),$$

де T – температура тіла, t – час, k – коефіцієнт пропорційності $(k > 0)$. Знак «мінус» записано тому, що температура тіла знижується, а похідна спадної функції є від'ємною.

Відокремимо змінні в отриманому рівнянні та знайдемо його загальний розв'язок:

$$\frac{dT}{T-20} = -k\,dt \Rightarrow ln|T-20| = -kt + C \Rightarrow T - 20 = e^{-kt+C} \Rightarrow T = 20 + C_1 e^{-kt}$$

, де $C_1 = e^C$.

Використаємо умову, що при $t = 0$ температура тіла була 100°C і визначимо сталу C_1.

$$100 - 20 = C_1 e^{-k\cdot 0} \Rightarrow C_1 = 80.$$

Отже, частинним розв'язком рівняння є функція $T = 20 + 80e^{-kt}$.

Для визначення коефіцієнта k скористаємося другою умовою, а саме $T(10) = 60$. Тоді $60 = 20 + 80e^{-10k} \Rightarrow 40 = 80e^{-10k} \Rightarrow ln\frac{1}{2} = -10k \Rightarrow k = \frac{ln 2}{10}$.

Остаточно маємо такий розв'язок: $T = 20 + 80e^{-\frac{ln 2}{10}t}$.

Підставляючи сюди замість T значення 25°C, обчислимо шуканий час:

$$25 = 20 + 80e^{-\frac{ln 2}{10}t} \Rightarrow 5 = 80e^{-\frac{ln 2}{10}t} \Rightarrow \frac{1}{16} = -e^{-\frac{ln 2}{10}t} \Rightarrow -ln16 = ln e^{-\frac{ln 2}{10}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 ln 2 = \frac{ln 2}{10} t \Rightarrow t = 40 \text{ хв.}$$

Задача 10. Ізольованому проводу надається електричний заряд $Q = Q_0$. Внаслідок поганої ізоляції провід втрачає цей заряд. Швидкість втрати заряду за час t пропорційна наявному заряду. Знайти закон змінювання заряду.

Розв'язання. $\dfrac{dQ}{dt}$ – швидкість зміни заряду проводу. Згідно з умовою задачі $\dfrac{dQ}{dt} = -kQ \quad (k > 0)$, де k – коефіцієнт пропорційності. Початкові дані $Q\,|_{t=0} = Q_0$.

Розв'язуємо рівняння:

$$\frac{dQ}{Q} = -k\,dt \Rightarrow \int \frac{dQ}{Q} = -k\int dt \Rightarrow ln|Q| = -kt + lnC \Rightarrow ln|Q| - ln|C| = -kt \Rightarrow$$

$$ln\left|\frac{Q}{C}\right| = -kt \Rightarrow \frac{Q}{C} = e^{-kt}, \quad Q = Ce^{-kt}.$$

З початкової умови випливає, що $C = Q_0$. Таким чином, закон змінювання електричного заряду має вигляд

$$Q = Q_0 e^{-kt}.$$

Задача 11. Циліндрична котушка вироблена з мідного дроту. При проходженні крізь котушку електричного струму виділяється теплота. Вивести формулу для температури $T = T(t)$ установленого режиму як функції часу.

Розв'язання. Нехай T_0 – температура середовища у якому знаходиться котушка, $T(0) = T_0$; C – питома теплоємкість міді, j – густина, V – обсяг, S – площина поверхні котушки, q – кількість тепла, що виділяється на протязі одиниці часу, k – коефіцієнт теплопровідності.

Кількість теплоти, що виділяється за час Δt дорівнює $q \cdot \Delta t$. Ця величина складається з двох частин: теплоти, яка йде на підвищення температури котушки та теплоти, яка надходить в навколишнє середовище, що оточує котушку. Перша частина дорівнює $cVj\Delta T$, а друга $kS(T - T_0)\Delta t$, звідки $q\Delta t = cVj\,\Delta T + kS(T - T_0)\Delta t$.

Поділивши обидві частини отриманої рівності на Δt та переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, отримуємо диференціальне рівняння.

$q = cVj\frac{dT}{dt} + kS(T - T_0)$, $\frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_0) + \beta$, де $\alpha = \frac{kS}{cVj}$, $\beta = \frac{q}{cVj}$.

Розділяючи змінні та інтегруючи, одержимо:

$$\frac{dT}{-\alpha(T - T_0) + \beta} = dt \Rightarrow \int \frac{dt}{-\alpha(T - T_0) + \beta} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{\alpha}ln\left|T - T_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = t +$$
$$+ C.$$

Оскільки $T(0) = T_0$, $C = -\frac{1}{\alpha}ln\frac{\beta}{\alpha}$, тому $-\frac{1}{\alpha}ln\left|T - T_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = t - \frac{1}{\alpha}ln\frac{\beta}{\alpha}$,

$$ln\left|T - T_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = ln\frac{\beta}{\alpha} - t\alpha.$$

$$T - T_0 - \frac{\beta}{\alpha} = e^{ln\frac{\beta}{\alpha} - t\alpha}, \qquad T - T_0 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}e^{-t\alpha},$$

$T = T_0 + \frac{\beta}{\alpha}\left(1 + e^{-t\alpha}\right)$, або $T = T_0 + \frac{q}{kS}\left(1 + e^{-\frac{kS}{CVj}\cdot t}\right)$.

Задача 12. Електричне коло складається з послідовно ввімкнених джерел постійного струму, що має напругу E, опору R, самоіндукції L та вимикача, який вмикається при $t = 0$. Визначити залежність $I(t)$ сили струму від часу.

Розв'язання. Для визначення сили струму в електричному колі з самоіндукцією використовують формулу $L\frac{dI}{dt} + RI = E$.

Це рівняння є лінійним відносно функції $I(t)$. Треба знайти його частинний розв'язок за умови $I(0) = 0$.

Зробимо підстановку $I(t) = u(t)\cdot v(t)$, тоді $I' = u'v + uv'$.

$$L(u'v + uv') + Ruv = E \Rightarrow Lu'v + Luv' + Ruv = E \Rightarrow Lu'v + u(Lv' + Rv) = E$$

$$\begin{cases} Lv' + Rv = 0, \\ Lu'v = E. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння.

$$L\frac{dv}{dt}=-Rv\Rightarrow\frac{dv}{v}=-\frac{R}{L}dt\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{R}{L}dt\Rightarrow ln|v|=-\frac{R}{L}t\Rightarrow v=e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Тоді друге рівняння матиме вигляд

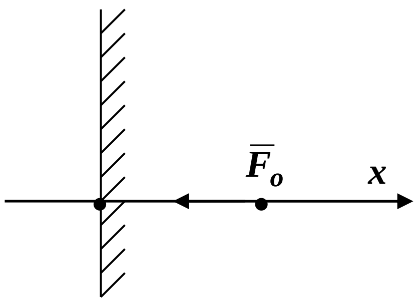
$$Le^{-\frac{R}{L}t}u'=E\Rightarrow u'=\frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}\Rightarrow u=\int\frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}dt=\frac{E}{L}\cdot\frac{L}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}t}+C,$$

тобто $u=\frac{E}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}t}+C$. Тоді $I=\left(\frac{E}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}t}+C\right)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t}$.

Підставимо сюди початкову умову $I(0)=0$ і обчислимо $C=-\frac{E}{R}$. Тоді $I=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Оскільки функція $e^{-\frac{R}{L}t}$ практично спадає дуже швидко, то, відкидаючи її, отримаємо відомий з фізики закон Ома:

$$I=\frac{E}{R}.$$

Задача 13. Куля входить в дошку товщиною 10 см зі швидкістю 200 м/с, а вилітає з дошки, пробивши її, зі швидкістю 50 м/с. Знайти скільки часу тривав рух кулі через дошку, якщо опір дошки руху кулі пропорційний квадрату її швидкості.



Розв'язання. Розглянемо кулю як матеріальну точку. Введемо систему координат, сумістивши її початок з точкою поверхні дошки, у яку влучає куля. Вісь x спрямована вздовж руху кулі. На матеріальну точку діє сила опору, яка спрямована проти руху кулі (іншими силами можна знехтувати) (рис 5.4).

Рис. 5.4.

Рівняння руху кулі вздовж осі Ox має вигляд $m\frac{d^2s}{dt}=-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, де m – маса кулі, s – шлях, який проходить куля за час t, котрий відраховується від входу її у дошку.

Враховуючи, що $\frac{ds}{dt}=v$, перейдемо до рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними $m\frac{dv}{dt}=-kv^2$ або $\frac{dv}{dt}=-av^2$, де $a=\frac{k}{m}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$$\frac{dv}{dt}=-av^2 \quad \Rightarrow \frac{dv}{v^2}=-adt \Rightarrow \int\frac{dv}{v^2}=-a\int dt \Rightarrow -\frac{1}{v}=-at-c_1 \Rightarrow v=\frac{1}{at+c_1}.$$

З початкових умов $v=200$ м/с при $t=0$, знайдемо сталу c_1: $200=\frac{1}{c_1}$,

$c_1=\frac{1}{200}$.

Задача 14. Знайти додатну диференційовану на $[0,\infty)$ функцію $f(x)$, якщо відомо, що при переході до нової змінної за формулою $\xi=\int_0^x f(t)dt$ функція перетворюється на $e^{-\xi}$.

Розв'язання. За умовою $e^{-\int_0^x f(t)dt}=f(x)$. Прологарифмуємо обидві частини цього рівняння і одержимо $-\int_0^x f(t)dt=\ln f(x)$, а після диференціювання обох частин останньої рівності дістанемо

$$-f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \text{або} \qquad f'(x)=-f^2(x).$$

Одержане рівняння – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{df}{dx}=-f^2(x)\Rightarrow-\frac{df}{f^2(x)}=dx\Rightarrow-\int\frac{df}{f^2}=\int dx\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=x+c\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x+c}$$

.

За умовою $e^{-\int_0^x f(t)dt}=f(x)$, звідки $f(0)=1$. Знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє даній початковій умові:

$f(0)=1/c\Rightarrow 1/c=1\Rightarrow c=1$. Отже, шукана функція $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

Задача 15. Довести, що функція $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$ є монотонно зростаючою. Якому диференціальному рівнянню першого порядку вона задовольняє? З якою початковою умовою?

Розв'язання. Функція монотонно зростає при тих x з області її визначення, для яких похідна функції додатна. Знайдемо похідну.

$$y'=e^{x^2}\cdot 2x\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{x^2}\cdot e^{-x^2}=2x\underbrace{e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt}_{y}+1\Rightarrow y'=2xy+1.$$

Це і є диференціальне рівняння, яке задовольняє дана функція. $y(0)=0$ – шукана початкова умова. Доведемо тепер, що y – зростаюча функція. Дійсно, при $x\geq 0$ $y'>0$, тому що $e^{x^2}>0$ і $\int_0^x e^{-t^2}dt\geq 0$.

Задача 16. Під час руху човна у стоячій воді опір середовища викликає уповільнення, пропорційне швидкості руху. У момент зупинки двигуна човен мав швидкість 200 м/хв, а за 0,5 хв. – 100 м/хв. З якою швидкістю човен буде рухатися за 2 хв. після відключення двигуна?

Розв'язання. Позначимо швидкість руху човна через V, тоді уповільнення визначається похідною dV/dt. За умовою задачі уповільнення руху пропорційне швидкості. Позначимо коефіцієнт пропорційності через K. Тоді означена умова запишеться так: $\frac{dV}{dt} = KV$. Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його.

$$\int \frac{dV}{V} = \int Kdt \Rightarrow ln|V| = Kt + ln c \Rightarrow V = ce^{Kt}.$$

За умовою $V(0) = 200$, а $V(1/2) = 100$, тому

$$\begin{cases} 200 = c \\ 100 = ce^{K/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 200 \\ 1 = 2e^{K/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 200 \\ ln1 = ln2 + K/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 200 \\ K = -2ln2 \end{cases}.$$

Шуканий розв'язок має вигляд $V = 200e^{-2t\,ln2}$.

Тепер необхідно обчислити значення функції V в точці $t = 2$.

$$V(2) = 200e^{-4ln4} = 200/16 = 12{,}5 \text{ м/хв.}$$

Задача 17. Точка рухається по прямій так, що середня швидкість за будь-який проміжок часу дорівнює середньому арифметичному швидкостей на кінцях проміжку. Довести, що точка рухається зі сталим прискоренням.

Розв'язання. Позначимо через $S(t)$ переміщення точки за час t, тоді середня швидкість за проміжок часу від t_0 до t обчислюється за формулою $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$ і, за умовою, вона дорівнює середньому арифметичному швидкостей на кінцях даного проміжку часу $\frac{V(t)+V(t_0)}{2}$, де $V(t)$ – миттєва швидкість.

Тоді $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} = \frac{V(t)+V(t_0)}{2}$

або $S(t)-S(t_0) = \frac{1}{2}\left[V(t)+V\left(t_0\right)\right]\left(t-t_0\right)$.

Продиференціюємо обидві частини цієї рівності по t і одержимо

$$S'(t) = \frac{1}{2}V'(t)\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}\left[V(t) + V(t_0)\right].$$

Враховуючи, що $S'(t) = V(t)$, і диференціюючи ще раз, маємо

$$V'(t) = \frac{1}{2}V''(t)\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}V'(t) + \frac{1}{2}V'(t),$$

звідси отримаємо, що $V''(t)\left(t - t_0\right) = 0$, тобто $V''(t) = 0$. Це означає, що $V'(t) = const$. Але похідна від швидкості визначає прискорення. Таким чином, ми довели, що прискорення даної матеріальної точки – стала величина.

Задача 18. Ріка має ширину a і швидкість течії v. На протилежних берегах розміщені два пункти А і В так, що пряма АВ перпендикулярна до берегів. Човен з власною швидкістю $u > 0$ переправляється із А в В так, що в будь-який момент часу його ніс (тобто вектор власної швидкості) направлений в точку В. Знайти час, витрачений на переправу.

Розв'язання. Введемо систему координат (рис. 5.5) і кожен момент часу положення човна будемо характеризувати як декартовими координатами x і y, так і полярними ρ і φ. Розкладаючи швидкість човна на компоненти, (рис. 5.5), знайдемо: $\dot{x} = v - u\cos\varphi$, $\dot{y} = -u\sin\varphi$.

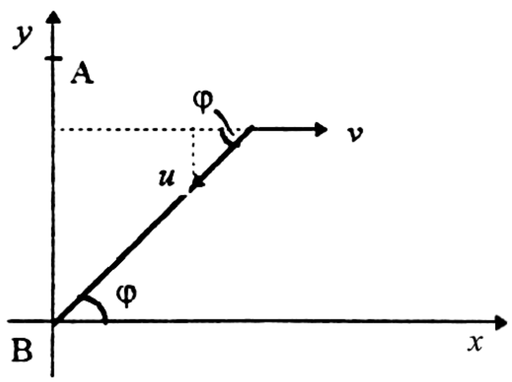


Рис.5.5

Враховуючи, що $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi = v - u\cos\varphi \\ \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi = -u\sin\varphi \end{cases}.$$

Дану систему розв'яжемо відносно $\dot{\rho}$ і $\dot{\varphi}$, для чого помножимо перше рівняння на $\cos\varphi$, а друге на $\sin\varphi$ і знайдемо їх суму.

Дістанемо $\dot{\rho} = v\cos\varphi - u$. Потім перше рівняння помножимо на $-\sin\varphi$, а друге на $\cos\varphi$ і склавши, одержимо $\rho\dot{\varphi} = -v\sin\varphi$. Отже, маємо:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = v\cos\varphi - u \\ \rho\dot{\varphi} = -v\sin\varphi \end{cases}.$$

Продиференціюємо другу із рівностей за змінною t: $\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = -v\dot{\varphi}\cos\varphi$. Підставимо сюди $\dot{\rho}$ і ρ, знайдені з системи:

$$-\frac{v\sin\varphi}{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}v\cos\varphi - u\dot{\varphi} = 0.$$

Поділимо обидві частини рівняння на $-v\sin\varphi$:

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} - 2\dot{\varphi}ctg\varphi + \frac{u\dot{\varphi}}{v\sin\varphi} = 0.$$

Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо:

$$\ln|\dot{\varphi}| - 2\ln|\sin\varphi| + \frac{u}{v}\ln\left|tg\frac{\varphi}{2}\right| = \ln C \text{, або}$$

$$\frac{\dot{\varphi}\left(tg\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{v}}}{\sin^2\varphi} = C.$$

У момент $t = 0$ човен знаходився в точці $A(\pi/2, a)$, тому $\varphi(0) = \pi/2$, $\rho(0) = a$, а з другого рівняння системи маємо $\varphi'(0) = -v/a$. Враховуючи ці початкові умови, знайдемо константу *C*. $C = -v/a$. Тепер останнє рівняння перепишеться так:

$$\frac{\dot{\varphi}\left(tg\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{v}}}{\sin^2\varphi} = -\frac{v}{a}.$$

Нехай переправа займає T часу. Проінтегруємо отримане рівняння за змінною t від 0 до *T*, взявши до уваги, що $\varphi(0) = \pi/2$, $\varphi(T) = 0$ ($\rho(T) = 0$):

$$\int_{\pi/2}^{0} \frac{\left(tg\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{v}}}{sin^2\varphi} d\varphi = -\frac{v}{a}T \text{, де } d\varphi = \dot{\varphi}(t)dt.$$

Після підстановки $z = tg\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ та очевидних перетворень маємо

$$\int_0^1 \left(1+z^2\right) z^{\frac{u}{v}-2} dz = 2\frac{v}{a}T, \qquad \left.\left(\frac{z^{\frac{u}{v}-1}}{\frac{u}{v}-1} + \frac{z^{\frac{u}{v}+1}}{\frac{u}{v}+1}\right)\right|_0^1 = 2\frac{v}{a}T,$$

$$\frac{u}{u-v} + \frac{v}{u+v} = 2\frac{v}{a}T \text{, звідки } T = \frac{au}{u^2 - v^2}.$$

Задача 19. Нехай точка Р рухається по осі Ox зі сталою швидкістю $V > 0$, а точка М рухається по деякій кривій L на площині xOy зі сталою по величині швидкістю U $(U > V)$, причому вектор швидкості точки M в кожен момент часу направлений до точки P. Крива L називається лінією погоні. Припускаючи, що при $t = 0$ точка P знаходиться в початку координат, а точка M в положенні $M_0(0; y_0)$ $(y_0 > 0)$, знайти точку $(x; 0)$, в якій точка M дожене точку P та обчислити тривалість погоні T.

Розв'язання. Розглянемо положення точок M і P в момент часу t (рис. 5.6).

Точка P рухається зі сталою швидкістю V, за час t вона пройде відстань $OP = Vt$. Нехай координати точки M в момент часу t будуть $x(t)$ і $y(t)$. Тоді швидкість $V_M^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = U^2$

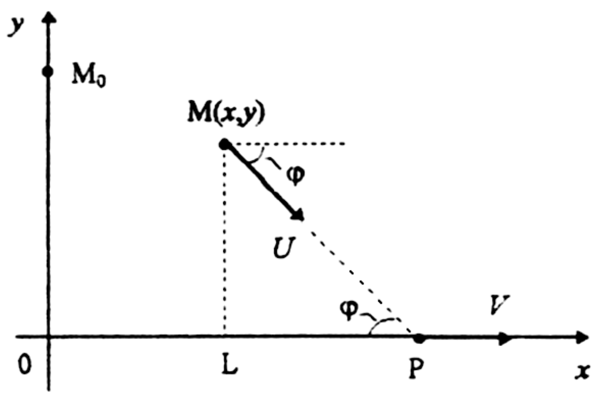


Рис. 5.6

. $OP = Vt$, $OL = x$, тоді $LP = Vt - x$. З другого боку $LP = yctg\varphi$ або $LP = -y\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$, де $\dot{x}$ і $\dot{y}$ – проекції швидкості U на координатні осі. Звідси маємо $Vt - x = -y\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$. Таким чином, ми отримали систему рівнянь відносно $\dot{x}$ і $\dot{y}$:

$$\begin{cases} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = U^2 \\ Vt\dot{y} - x\dot{y} + y\dot{x} = 0 \end{cases}.$$

Виразимо $\dot{x}$ з другого рівняння системи і підставимо в перше рівняння:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{(x - Vt)\dot{y}}{y} \\ \dot{y}^2 = \dfrac{U^2 y^2}{(x - Vt)^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{(x - Vt)\dot{y}}{y} \\ \dot{y}^2 y^2 + \dot{y}^2 (x - Vt)^2 - U^2 y^2 = 0 \end{cases}.$$

Виключимо з цієї системи одне невідоме. Для цього друге рівняння продиференціюємо по t, підставимо в нього $\dot{x}$ з першого рівняння і $x - Vt$ з другого. Після перетворень отримаємо:

$$\frac{U^2 y\ddot{y}}{\dot{y}} = V\dot{y}\sqrt{U^2 - \dot{y}^2}.$$

Це диференціальне рівняння другого порядку, в якому відсутня в явному вигляді змінна t. У такому рівнянні можна знизити порядок за допомогою заміни $\dot{y} = p$, $\ddot{y} = \frac{dp}{dy}p$:

$$\frac{U^2 yp\dfrac{dp}{dy}}{p} = Vp\sqrt{U^2 - p^2} \quad \text{або} \quad \int \frac{Udp}{p\sqrt{U^2 - p^2}} = \int \frac{Vdy}{Uy}.$$

У першому інтегралі зробимо заміну змінної $p=1/z$, тоді остаточно одержимо $-\boldsymbol{ln}\left|\dfrac{\boldsymbol{U}+\sqrt{\boldsymbol{U}^2-\boldsymbol{p}^2}}{\boldsymbol{p}}\right|=\dfrac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{ln}\,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{ln}\boldsymbol{C}$ або

$$\frac{\boldsymbol{U}+\sqrt{\boldsymbol{U}^2-\boldsymbol{p}^2}}{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{y}^{\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}}=\boldsymbol{C}.$$

При $t=0$ точка M знаходиться в положенні M_0, тобто $x(0)=0$, $y(0)=y_0$, $p=\dot{y}(0)=-U$. Підставимо ці початкові умови в останнє рівняння і знайдемо сталу $C=-y_0^{V/U}$, тоді рівняння матиме вигляд:

$$\frac{\boldsymbol{U}+\sqrt{\boldsymbol{U}^2-\boldsymbol{p}^2}}{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}=-\boldsymbol{y}_0^{\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно p:

$$-\left(\frac{\boldsymbol{y}_0}{\boldsymbol{y}}\right)^{\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}}\cdot\boldsymbol{p}-\boldsymbol{U}=\sqrt{\boldsymbol{U}^2-\boldsymbol{p}^2}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{y}_0}{\boldsymbol{y}}\right)^{\frac{2\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}}\cdot\boldsymbol{p}^2+2\left(\frac{\boldsymbol{y}_0}{\boldsymbol{y}}\right)^{\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{U}^2-\boldsymbol{p}^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{p}\cdot\left[\left(\frac{\boldsymbol{y}_0}{\boldsymbol{y}}\right)^{\frac{2\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}}+1\right]=-2\boldsymbol{U}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{y}_0}{\boldsymbol{y}}\right)^{\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}},\text{ звідки }\boldsymbol{p}=-\frac{2\boldsymbol{y}_0^{\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{y}_0^{2\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{y}^{2\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}}.$$

Через те, що $p=\dfrac{dy}{dt}$ маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{\boldsymbol{y}_0^{2\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{y}^{2\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}}{2\boldsymbol{y}_0^{\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{U}}\boldsymbol{dy}=-\boldsymbol{dt}\Rightarrow\frac{\boldsymbol{y}_0^{\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}}{2\boldsymbol{U}}\cdot\frac{\boldsymbol{y}^{1-\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}}}{1-\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}}+\frac{\boldsymbol{y}_0^{-\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}}{2\boldsymbol{U}}\cdot\frac{\boldsymbol{y}^{1+\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}}}{1+\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}}=\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{t}.$$

Використаємо початкову умову $y(0)=y_0$, одержимо $C_1=\dfrac{y_0U}{U^2-V^2}$, тоді останній вираз набере вигляду

$$\frac{1}{2(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V})}\boldsymbol{y}_0^{\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}\boldsymbol{y}^{1-\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}}+\frac{1}{2(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})}\boldsymbol{y}_0^{-\boldsymbol{V}/\boldsymbol{U}}\boldsymbol{y}^{1+\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}}}=\frac{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{U}^2-\boldsymbol{V}^2}-\boldsymbol{t}.$$

У момент часу *T*, коли точка *M* дожене точку *P*, $y(T)$ буде дорівнювати нулю. Враховуючи це, дістанемо: $\boldsymbol{T} = \dfrac{\boldsymbol{y_0 U}}{\boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{V}^2}$, а абсциса точки зустрічі

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{VT} = \frac{\boldsymbol{y_0 VT}}{\boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{V}^2}.$$

Задача 20. Човен уповільнює свій рух рід дією опору води, величина якого пропорціональна швидкості човна. Початкова швидкість човна дорівнює 1,5 м/с, за 4 с його швидкість становить 1 м/с. Коли швидкість човна зменшиться до 1 см/с? Який шлях пройде човен до зупинки?

Розв'язання. Позначимо швидкість човна в момент часу t як $V(t)$. Прискорення руху – це похідна від швидкості, за умовою воно пропорційно швидкості. Таким чином, маємо $\dot{V}(t) = kV(t)$, де k – коефіцієнт пропорційності. Отримане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок $V(t) = Ce^{kt}$. За умовою задачі $V(0) = 1{,}5$ м/с, $V(4) = 1$ м/с. Скористуємося цими умовами для знаходження параметрів C і k, маємо: $1{,}5 = C$ та $1 = Ce^{4k}$, звідки $1 = 1{,}5e^{4k}$. Прологарифмуємо це рівняння: $0 = \ln 1{,}5 + 4k$ або $k = -\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3}{2}$. Отже,

$$\boldsymbol{V} = \frac{3}{2}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{ln}\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{\boldsymbol{t}}{4}} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{\boldsymbol{t}}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\boldsymbol{t}}{4}-1}.$$

Тепер можна підрахувати, коли швидкість човна буде дорівнювати 1 см/с або 0,01 м/с.

$$0{,}01 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\boldsymbol{t}}{4}-1} \Rightarrow \boldsymbol{lg}\, 0{,}01 = \left(\frac{\boldsymbol{t}}{4}-1\right)\boldsymbol{lg}\frac{2}{3} \Rightarrow -2 = \left(\frac{\boldsymbol{t}}{4}-1\right)\boldsymbol{lg}\frac{2}{3}$$

або $$t=\frac{4\,lg\frac{2}{3}-8}{lg\frac{2}{3}}=4+\frac{8}{lg1{,}5}.$$

Задача 21. У баці знаходиться 100 л розчину, який містить 10 кг солі. У бак безперервно подається вода (5 л за хвилину), яка змішується з розчином. Суміш витікає з тією ж швидкістю. Скільки солі залишиться в баці через 1 годину?

Розв'язання. Нехай в момент часу t в баці міститься $x(t)$ кг солі. Кількість розчину залишається сталою – 100 л. Кількість солі в момент часу $t+\Delta t$, буде $x(t+\Delta t)$. З другого боку відсотковий вміст солі в момент часу t складає $\frac{x}{100}\cdot 100\%$. За час Δt витекло $5\Delta t$ літрів рідини, в якій знаходилось $\frac{5\Delta tx}{100}$ солі. Отже, через Δt хвилин в баці залишилося солі $x-\frac{5\Delta tx}{100}$. Тобто, маємо:

$$x-\frac{5\Delta tx}{100}=x(t+\Delta t),\text{ звідки } x(t+\Delta t)-x=-\frac{5\Delta tx}{100}.$$

Розділимо обидві частини рівності на Δt та перейдемо до границі при $\Delta t\to 0$:

$$x'(t)=-\frac{5x}{100}\quad\text{або}\quad x'(t)=-\frac{x}{20}.$$

Одержали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок має вигляд $x(t)=Ce^{-\frac{t}{20}}$. Очевидно, що $x(0)=10$, тому $C=10$ і можна записати частинний розв'язок: $x(t)=10e^{-\frac{t}{20}}$. Це і є закон зміни кількості солі в баці.

Знайдемо тепер, скільки солі буде в розчині в момент $t=1$ год. $=60$ хв.

$x(60)=10e^{-\frac{60}{20}}=10e^{-3}$.

Задача 22. У досліджувальному куску гірської породи міститься 100 мг урану та 14 мг уранового свинцю. Відомо, що уран розпадається навпіл за $4,5\cdot 10^9$ років і що при повному розпаді 238 г урану утворюється 206 г уранового свинцю. Визначити вік гірської породи.

Використати закон радіоактивного розпаду: кількість радіоактивної речовини, що розпадається за одиницю часу, пропорційна наявній кількості речовини. Вважати, що в момент утворення гірська порода не вміщувала свинцю, та знехтувати наявністю проміжних радіоактивних продуктів між ураном та свинцем (оскільки вони розпадаються набагато швидше від урану).

Розв'язання. Використовуючи закон радіоактивного розпаду, складемо диференціальне рівняння, яке описує цей процес.

Нехай кількість урану в момент t була $x(t)$, тоді в момент $t+\Delta t$ його стане $x\left(t+\Delta t\right)$. Визначимо цю величину іншим способом. За умовою задачі кількість речовини, що розпадається за час Δt дорівнює $kx\left(t\right)\Delta t$. Тоді через проміжок часу Δt залишиться радіоактивної речовини $x-kx\Delta t$. Таким чином, маємо

$$\boldsymbol{x\left(t+\Delta t\right)=x-kx\Delta t} \text{ або } \boldsymbol{x\left(t+\Delta t\right)-x=-kx\Delta t}.$$

Поділимо обидві частини рівняння на Δt та зробимо граничний перехід при $\Delta t\to 0$:

$$\boldsymbol{\dot{x}=-kx}.$$

У даному диференціальному рівнянні можна поділити змінні, проінтегрувати та знайти загальний розв'язок: $\boldsymbol{x(t)=Ce^{-kt}}$.

Визначимо кількість урану в шматку породи в момент $t=0$. Відомо, що при повному розпаді 238 г урану утворюється 206 г свинцю. У нашому випадку порода містить 14 мг свинцю. Щоб визначити, з якої кількості урану не одержано, складемо пропорцію, позначивши шукану величину через y:

238000 мг – 206000 мг

y мг – 14 мг

Звідки $y = \frac{238}{206} \cdot 14 = 16{,}2$, тобто $x(0) = 100 + 16{,}2 = 116{,}2$.

Таким чином, в момент $t = 0$ було $x(0)$ урану, а через $4{,}5 \cdot 10^9$ років його стане $x(0)/2$. Тобто маємо:

$$\frac{x(0)}{2} = x(0)e^{-4{,}5 \cdot 10^9 k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-4{,}5 \cdot 10^9 k} \Rightarrow -\ln 2 = -4{,}5 \cdot 10^9 k \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9}$$

.

Таким чином, закон розпаду запишеться у вигляді:

$$x(t) = 116{,}2e^{-\frac{\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9}t}.$$

Звідси знайдемо вік гірської породи:

$$100 = 116{,}2e^{-\frac{\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9}} \Rightarrow \ln 100 = \ln 116{,}2 - \frac{\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 4{,}5 \cdot 10^9 \frac{\ln 1{,}162}{\ln 2} \approx 9{,}7 \cdot 10^8 \text{ років.}$$

Задача 23. Футбольний м'яч масою 0,4 кг кинуто вгору зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорціональний квадрату швидкості і дорівнює $0{,}48 \cdot 10^{-2}$ Н при швидкості 1 м/с. За який час м'яч дістане найвищої точки руху? Вважати, що прискорення сили ваги дорівнює 10 м/с^2.

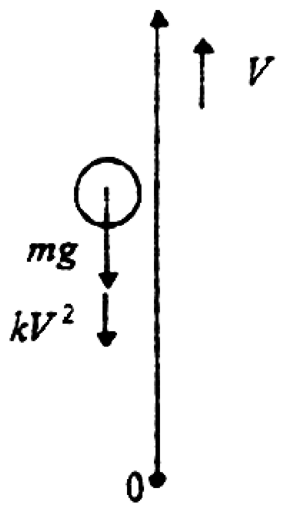


Рис. 5.7

Розв'язання. Позначимо швидкість руху м'яча $V(t)$, тоді в момент часу t на нього діє сила ваги mg та сила опору повітря $F = kV^2$ (рис. 5.7).

За другим законом Ньютона маємо

$$m\dot{V} = -mg - kV^2.$$

Розділимо обидві частини цього рівняння на m та позначимо $\alpha = k/m$, тоді попередня рівність запишеться так $\dot{V} = -g - \alpha V^2$.

Розв’яжемо отримане рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dV}{g+\alpha V^2} = -dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha g}} arctg \frac{V\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}} = -t + C \Rightarrow V = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} tg\left(\sqrt{\alpha g}\left(C-t\right)\right)$$

За умовою опір повітря $F = kV^2$, він дорівнює $0,48\cdot10^{-2}$ Н для $V=1$ м/с, звідки $k = 0,48\cdot10^{-2}$, а $\alpha = k/m = 0,48\cdot10^{-2}/0,4 = 1,2\cdot10^{-2}$. Тому загальний розв’язок має вигляд:

$$V = \sqrt{\frac{10}{1,2\cdot10^{-2}}} tg\left(\sqrt{0,12}\left(C-t\right)\right).$$

Знайдемо сталу *C*, яка задовольняє початкову умову $V(0) = 20$ м/с:

$$20 = 28,9\cdot tg\left(0,34C\right) \Rightarrow C = 2,89 arctg 0,69 \approx 1,75.$$

М’яч досягне найвищої точки, коли швидкість досягне нульового значення. Підставимо $V = 0$ в загальний розв'язок:

$$0 = 28,9 tg\left(0,346\left(C-t\right)\right) \Rightarrow t = C = 1,75.$$

Таким чином, піднімання м’яча триватиме 1,75 с.

Задача 24. Один кінець пружини закріплений нерухомо, а до другого прикріплена кулька масою m. Під час руху кульки зі швидкістю V сила опору дорівнює hV. При $t=0$ кулька, яка знаходиться в стані рівноваги, отримує швидкість V_0. Дослідити рух кульки у випадках $h^2 < 4km$ та $h^2 > 4km$, якщо при відхиленні від стану рівноваги на відстань x на неї діє пружина з силою kx, яка направлена до стану рівноваги.

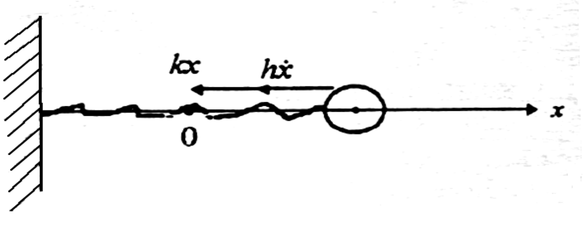


Рис. 5.8

Розв’язання. Позначимо відхилення кульки від стану рівноваги через x. Тоді на неї діє пружина з силою kx та сила опору $hV = h\dot{x}$ (рис. 5.8). Згідно з другим законом Ньютона маємо $m\ddot{x} = -h\dot{x} - kx$ або

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0.$$

Знайдемо розв’язок цього рівняння з початковими умовами

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = V_0.$$

Диференціальне рівняння є лінійним рівнянням із сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$ml^2 + hl + k = 0.$$

Коренями цього рівняння є числа

$$l_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4km}}{2m}.$$

Розглянемо два випадки.

а) Нехай $h^2 > 4km$, тоді очевидно, що характеристичне рівняння має два дійсних різних кореня, і загальним розв’язком диференціального рівняння буде

$$x(t) = C_1 e^{\frac{-h+\sqrt{h^2-4km}}{2m}t} + C_2 e^{\frac{-h-\sqrt{h^2-4km}}{2m}t}.$$

Знайдемо частинний розв’язок, що задовольняє початковим умовам

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ V_0 = \dfrac{-h + \sqrt{h^2 - 4km}}{2m} C_1 + \dfrac{-h - \sqrt{h^2 - 4km}}{2m} C_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_1 = -C_2, \; C_1 = \frac{V_0 m}{\sqrt{h^2 - 4km}}, \; C_1 = -\frac{V_0 m}{\sqrt{h^2 - 4km}}.$$

Тоді $$x(t) = \frac{V_0 m}{\sqrt{h^2 - 4km}} e^{\frac{-h+\sqrt{h^2-4km}}{2m}t} - \frac{V_0 m}{\sqrt{h^2 - 4km}} e^{\frac{-h-\sqrt{h^2-4km}}{2m}t}.$$

б) Якщо $h^2 < 4km$, то корені будуть комплексними

$$l_{1,2} = \frac{-h}{2m} \pm \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} i .$$

Загальний розв’язок вихідного рівняння запишеться у вигляді:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{h}{2m}t} \cos \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t + C_2 e^{-\frac{h}{2m}t} \sin \frac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t .$$

Згідно з початковими умовами маємо

$$\begin{cases} 0 = C_1 \\ V_0 = C_2 \dfrac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} \end{cases} \Rightarrow C_2 = \frac{2V_0 m}{\sqrt{4km - h^2}} .$$

Тобто $x(t) = \dfrac{2mV_0}{\sqrt{4km - h^2}} e^{-\frac{h}{2m}t} \sin \dfrac{\sqrt{4km - h^2}}{2m} t$.

Задача 25. Тіло кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю V_0. Вивести рівняння руху тіла, нехтуючи силами опору.

Розв’язання. Виберемо осі координат так, як показано на рис. 5.9.

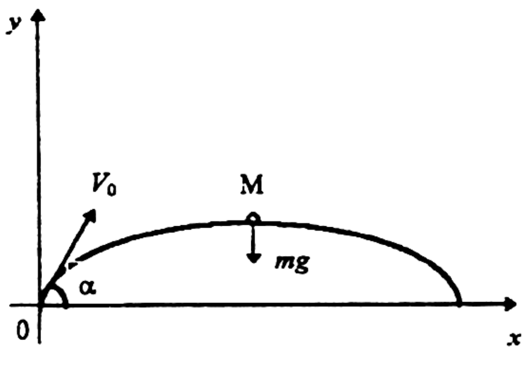


Рис. 5.9

У довільній точці M на тіло з масою m діє тільки одна сила – його вага $P = mg$. Тому, у відповідності до другого закону Ньютона, диференціальні рівняння руху в проекціях на осі x та y запишуться так:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \; m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg .$$

Скорочуючи на m, одержимо рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-g.$$

Початкові умови мають вигляд:

$$x(0)=0,\ y(0)=0,\ x'(0)=V_0\cos\alpha,\ y'(0)=V_0\sin\alpha.$$

Інтегруючи рівняння і враховуючи початкові умови, знаходимо рівняння руху тіла

$$x(t)=\left(V_0\cos\alpha\right)t,\ y(t)=\left(V_0\sin\alpha\right)t-gt^2/2.$$

З останніх рівнянь можна зробити ряд висновків щодо характеру руху тіла, яке ми розглядаємо. Наприклад, можна дати відповіді на такі запитання:

1) який час буде в польоті тіло до його падіння на землю;

2) яку відстань L подолає тіло по горизонталі до падіння;

3) яка максимальна висота польоту H;

4) якою буде траєкторія польоту тіла.

Отримаємо відповіді.

1) Час, котрий тіло буде в польоті, можна знайти з другого рівняння руху, поклавши $y=0$: $t\cdot\left(V_0\sin\alpha-gt/2\right)=0$, тобто $t_1=0$ (початок руху), тоді $t_2=\dfrac{2V_0\sin\alpha}{g}$ і є шуканий час.

2) Тепер не важко знайти відстань, пройдену тілом по горизонталі, підставивши в перше рівняння руху t_2:

$$L=\frac{\left(V_0\cos\alpha\right)\left(2V_0\sin\alpha\right)}{g}=\frac{V_0^2\sin2\alpha}{g}.$$

З цієї рівності, зокрема, виходить, що відстань буде найбільшою, якщо $2\alpha=90^\circ$, тобто $\alpha=45^\circ$. У цьому випадку відстань дорівнює $L=\dfrac{V_0^2}{g}$.

3) Максимальну висоту польоту H отримаємо, якщо врахуємо, що у найвищій точці вертикальна проекція швидкості дорівнює нулю. З формули

для функції y маємо $y'(t)=V_0\sin\alpha-gt$. Із умови $y'(t)=0$ витікає, що $V_0\sin\alpha-gt=0$, звідки $t=V_0\sin\alpha/g$. Підставимо знайдене t в друге рівняння руху і знайдемо $\boldsymbol{H=\frac{V_0^2\,sin^2\alpha}{2g}}$.

4) На запитання про траєкторію польоту відповідь вже отримана, тому що рівняння руху є параметричними рівняннями параболи. Якщо з цих рівнянь виключити параметр t, то одержимо рівняння параболи в декартових координатах: $\boldsymbol{y=xtg\alpha-\frac{g\,sec^2\alpha}{2V_0^2}x^2}$.

Задача 26. Електричний ланцюг складено з послідовно ввімкненого джерела сталого струму, який дає напругу V, опору R, самоіндукції L та вимикача, який вмикається при $t=0$. Знайти залежність сили струму від часу.

Розв'язання. Сила струму $I=I(t)$ на будь-якій ділянці ланцюга одна й та ж (за законом про послідовне сполучення). Падіння напруги на опорі R дорівнює RI, на самоіндукції – $L\frac{dI}{dt}$. Отже, за другим законом Кірхгофа маємо:

$$\boldsymbol{V=RI+L\frac{dI}{dt}}.$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Запишемо та розв'яжемо його характеристичне рівняння

$$\boldsymbol{R+Lk=0\Rightarrow k=-R/L}.$$

Тобто загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння буде $\boldsymbol{I^*=Ce^{-\frac{R}{L}t}}$. Частинний розв'язок будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів:

$$\boldsymbol{\overline{I}=A}, \text{ тоді } \boldsymbol{\frac{d\overline{I}}{dt}=0} \text{ і маємо } \boldsymbol{V=RA}, \text{ звідки } \boldsymbol{A=V/R}.$$

Таким чином, загальний розв'язок вихідного рівняння набуде вигляду

$$\boldsymbol{I(t)=I^*+\bar{I}=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V}{R}}.$$

Знайдемо тепер частинний розв’язок, що задовольняє початкову умову $I(0)=0$:

$$0=\boldsymbol{C+V/R\Rightarrow C=-V/R\Rightarrow I(t)=-\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V}{R}=\frac{V}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)}.$$

Задача 27. Послідовно з’єднали опір R та конденсатор ємністю c, заряд якого у момент з’єднання $(t=0)$ дорівнює q_0. Знайти силу струму при $t>0$.

Розв’язання. Сила струму $I(t)$ на будь-якій ділянці ланцюга одна й та ж (за законом про послідовне сполучення). Падіння напруги на опорі R дорівнює IR, а на конденсаторі $-$ q/c. За другим законом Кірхгофа маємо

$$\boldsymbol{RI+q/c=0}.$$

Відомо, що $dq/dt=I(t)$. Тому, якщо продиференціюємо останнє рівняння, дістанемо

$$\boldsymbol{R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{c}I=0}.$$

Отримали однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами, для якого характеристичним рівнянням буде $Rk+\frac{1}{c}=0$, звідки $k=-\frac{1}{Rc}$ і загальний розв’язок запишеться у вигляді $I(t)=Ce^{-\frac{t}{Rc}}$.

Здобудемо тепер частинний розв’язок, який задовольняє умову $q(0)=q_0$. Падіння напруги на конденсаторі $V(0)=q_0/c$. Тому початкова сила струму через опір R буде $I(0)=q_0/Rc$. Враховуючи це, одержимо закон зміни сили струму для даного ланцюга

$$\boldsymbol{I(t)=\frac{q_0}{Rc}e^{-\frac{t}{Rc}}}.$$

Задача 28. Знайти всі розв'язки системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{(y')^2}{y} = x' + \dfrac{xy'}{y} \\ x'y + xy' = 1 \end{cases}, \text{ де } x = x(t),\ y = y(t).$$

Розв'язання. Друге рівняння системи можна записати так

$$(xy)' = 1.$$

Перше рівняння системи помножимо на y: $y''y + (y')^2 = x'y + xy'$. Тепер ліву частину останнього рівняння можна записати як $(y'y)'$, а права частина дорівнює одиниці. Маємо $(y'y)' = 1$.

Проінтегруємо це рівняння і одержимо $y'y = t + C_1$. Якщо $y'y$ представити як $(y^2)' / 2$, то матимемо $(y^2)' = 2t + 2C_1$. Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо

$$y^2 = t^2 + 2C_1 t + C_2.$$

Проінтегруємо друге рівняння вихідної системи:

$$xy = t + C_3 \Rightarrow x = (t + C_3) / y.$$

Підставивши в це співвідношення значення y, одержимо розв'язок системи у вигляді:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t + C_3}{\pm\sqrt{t^2 + 2C_1 t + C_2}} \\ y(t) = \pm\sqrt{t^2 + 2C_1 t + C_2} \end{cases}.$$

Задача 29. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = xy' + x^2 y''.$$

Розв'язання. Відмітимо, що $(x^2 y')' = 2xy' + x^2 y''$.

Додамо до обох частин рівняння xy':

$$xy' + y = 2xy' + x^2 y'' \text{ або } (xy)' = \left(x^2 y'\right)'.$$

Проінтегруємо обидві частини цього рівняння

$$xy = x^2 y' + C_1.$$

Останнє рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Розв'яжемо його методом Бернуллі.

Зробимо підстановку $y = UV$, $y' = U'V + UV'$.

$$xUV = x^2\left(U'V + UV'\right) + C_1 \Rightarrow xUV - x^2 UV' = x^2 U'V + C_1.$$

$$xV - x^2 V' = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dx}{x} \Rightarrow V = x.$$

$$x^3 U' + C_1 = 0 \Rightarrow dU = -\frac{C_1}{x^3}dx \Rightarrow U = \frac{C_1}{2x^2} + C_2.$$

Загальний розв'язок запишеться у вигляді:

$$y(x) = \frac{C_1}{2x} + C_2 x.$$

Задача 30. Довести, що кожен розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2 + t^4 + \cos x}$$

є обмеженою функцією.

Розв'язання. Для доведення обмеженості функції $x(t)$ треба довести, що для будь-яких значень t_1 і t_2 різниця $\left|x(t_2) - x(t_1)\right|$ скінченна.

З вихідного рівняння витікає, що $\dfrac{dx}{dt} \le \dfrac{1}{1+t^4}$. За формулою Ньютона-Лейбніца для будь-яких значень t_1 і t_2 маємо:

$$\left|x(t_2) - x(t_1)\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt}dt\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4}$$

Останній інтеграл збігається:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^4}=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=2\left(\int_0^1\frac{dt}{1+t^4}+\int_1^{\infty}\frac{dt}{1+t^4}\right)\le 2\left(1+\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^4}\right)=\frac{8}{3}.$$

Отже $\left|x(t_2)-x(t_1)\right|$ для будь-яких t_1 і t_2 скінченний і функція $x(t)$ – обмежена.

Завдання для самостійної роботи

1. За 30 днів розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини. Через який час залишиться 1 % початкової кількості?

Відповідь: $x(t)=x(0)\cdot 2^{-t/30}$, $x(t)=0{,}01x(0)$ при $t=60/lg\,2\approx 200$ днів.

2. У посудину, яка містить 20 л повітря (80% азоту та 20% кисню), втікає за 1 секунду 0б1 л азоту та витікає така ж кількість суміші. Повітря безперервно перемішується. Через який час в посудині буде 99% азоту?

Відповідь: кількість азоту в літрах $x(t)=20-4e^{-t/200}$,

$$x(t)=19{,}8 \text{ при } t=200\,ln\,20\approx 600 \text{ сек} = 10 \text{ хв.}$$

3. Послідовно ввімкнуті самоіндукція L, опір R та конденсатор ємності c, заряд якого при $t=0$ дорівнює q. Ланцюг замикається при $t=0$. Знайти силу струму в ланцюгу та частоту коливань в тому випадку, коли розряд має характер коливань.

Відповідь: $I(t)=\dfrac{q}{cL\omega}e^{-\frac{Rt}{2L}}\sin\omega t$, $cR^2<4L$, $\omega=\dfrac{\sqrt{4cL-R^2c^2}}{2Lc}$.

4. Послідовно ввімкнуті джерело струму, напруга якого змінюється за законом $E=V\sin\omega t$, опір R та самоіндукція L. Знайти силу струму в ланцюзі (усталений режим).

Відповідь: $I(t)=A\sin(\omega t-\varphi)$, $A=\dfrac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$, $\varphi=arctg\dfrac{\omega L}{R}$.

5. Послідовно ввімкнуті джерело струму, напруга якого змінюється за законом $E=V\sin\omega t$, опір R, самоіндукція L та конденсатор ємності c. Знайти силу струму в ланцюзі (усталений режим). При якій частоті ω сила струму найбільша?

Відповідь: $\boldsymbol{I(t) = A\sin(\omega t - \varphi)}$,

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{V}}{\sqrt{\boldsymbol{R}^2 + \left(\boldsymbol{\omega L} - \frac{1}{\boldsymbol{\omega c}}\right)^2}}, \quad \boldsymbol{\varphi = arctg}\frac{\boldsymbol{\omega L} - \frac{1}{\boldsymbol{\omega c}}}{\boldsymbol{R}};$$

$\boldsymbol{A_{max}} = \boldsymbol{V} \,/\, \boldsymbol{R}$ при $\boldsymbol{\omega}^2 = 1 \,/\, \boldsymbol{Lc}$.

6. Знайти загальний розв’язок рівняння $\boldsymbol{y'} = \frac{1}{2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^2}$.

Відповідь: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ce}^{2\boldsymbol{y}} + \frac{\boldsymbol{y}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{y}}{2} + \frac{1}{4}$.

7. Нехай A – множина чисел a, при яких система $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{ay} \\ \dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{ay} \end{cases}$ має розв’язок $\left(x(t); y(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty\right)$. Знайти A та для кожного $a \in A$ вказати множину початкових умов, для яких $x(t); y(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Відповідь: $\boldsymbol{a} < 0$, $\boldsymbol{y}_0 = \frac{\boldsymbol{a} - 1}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}_0$.

8. Із сім’ї кривих диференціального рівняння $y'' = 3x^2 - 4x^3$ вилучити криву, що проходить через точку $A(0;1)$ та торкається у цій точці прямої $x + y - 7 = 0$.

Відповідь: $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}^4}{4} - \frac{\boldsymbol{x}^5}{5} - \boldsymbol{x} + 1$.

9. Матеріально точка з масою m, що знаходиться у момент часу $t = 0$ у рідині, починає рухатися в ній під дією власної ваги без початкової швидкості. Опір рідини прямо пропорційний швидкості матеріальної точки (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). Знайти закон руху точки.

Відповідь: $\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{m}^2\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{k}^2}\left(\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{kt}}{\boldsymbol{m}}} - 1\right) + \frac{\boldsymbol{mgt}}{\boldsymbol{k}}$.

ДОДАТКИ

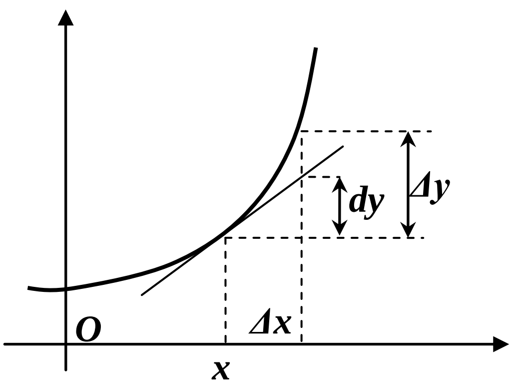
Обчислення похідних

Елементарні функції	Складені функції
1. $\left(x^{n}\right)' = n x^{n-1}$	1. $\left(u^{n}\right)' = n u^{n-1} \cdot u'$
2. $\left(x\right)' = 1$	2. ----
3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	3. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a$	4. $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \ln a \cdot u'$
5. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$	5. $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$
6. $\left(\log_{a} x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$	6. $\left(\log_{a} u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
7. $\left(\lg x\right)' = \frac{1}{x \ln 10}$	7. $\left(\lg u\right)' = \frac{1}{u \ln 10} \cdot u'$
8. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	8. $\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
9. $\left(\sin x\right)' = \cos x$	9. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
10. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$	10. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
11. $\left(tg\, x\right)' = \frac{1}{\cos^{2} x}$	11. $\left(tg\, u\right)' = \frac{1}{\cos^{2} u} \cdot u'$
12. $\left(ctg\, x\right)' = -\frac{1}{\sin^{2} x}$	12. $\left(ctg\, u\right)' = -\frac{1}{\sin^{2} u} \cdot u'$
13. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	13. $\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot u'$
14. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	14. $\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot u'$
15. $\left(arctg\, x\right)' = \frac{1}{1+x^{2}}$	15. $\left(arctg\, u\right)' = \frac{1}{1+u^{2}} \cdot u'$
16. $\left(arcctg\, x\right)' = -\frac{1}{1+x^{2}}$	16. $\left(arcctg\, u\right)' = -\frac{1}{1+u^{2}} \cdot u'$

Правила диференціювання

<table>
<tr><td colspan="2">$C' = 0$</td></tr>
<tr><td>$(u \pm v)' = u' \pm v'$</td><td>$(u + C)' = u'$</td></tr>
<tr><td>$(uv)' = u'v + u\,v'$</td><td>$(C \cdot u)' = C \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - u\,v'}{v^2}$</td><td>$\left(\dfrac{u}{C}\right)' = \dfrac{u'}{C}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Диференціювання складеної функції
Якщо $[\,f(x)]' = \varphi(x)$, то $[\,f(k\,x)]' = k \cdot \varphi(k\,x)$,
$[\,f(u(x))]' = \varphi(u(x)) \cdot u'(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Диференціювання функції $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$, заданої параметрично
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Похідні вищих порядків
$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = (y')'$, $y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3} = (y'')'$, … $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} = \left(y^{(n-1)}\right)'$</td></tr>
</table>

Диференціал та його геометричний зміст



$$dx = \Delta x\,,$$
$$dy = y'\,dx$$

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Означення та основні властивості

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** від функції $f(x)$ на $[a;b]$, якщо у всіх точках цього відрізку виконується рівність $$F'(x)=f(x).$$ Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то функція $F(x)+C$ також є первісною для $f(x)$.
Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$: $$\int f(x)dx=F(x)+C.$$
1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$ 2. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$ 3. $\int dF(x)=F(x)+C$ 4. $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ 5. $\int a\,f(x)dx=a\int f(x)dx$ 6. Якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(kx)dx=\frac{1}{k}F(kx)+C$; $\int f(x+b)dx=F(x+b)+C$; $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$

Таблиця інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$ $\qquad \int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k}\,\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ $\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{kx+b}} = \frac{2}{k}\sqrt{kx+b} + C$

3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|\,x\,| + C$ $\qquad \int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\ln|\,kx+b\,| + C$

4. $\int \frac{dx}{x^2+p} = \frac{1}{\sqrt{p}}\, arctg\, \frac{x}{\sqrt{p}} + C \ (p>0)$ $\qquad \int \frac{dx}{(kx)^2+p} = \frac{1}{k\sqrt{p}}\, arctg\, \frac{kx}{\sqrt{p}} + C$

5. $\int \frac{dx}{x^2-p} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{p}}{x+\sqrt{p}}\right| + C$ $\qquad \int \frac{dx}{(kx)^2-p} = \frac{1}{k\cdot 2\sqrt{p}} \ln\left|\frac{kx-\sqrt{p}}{kx+\sqrt{p}}\right| + C$

6. $\int \frac{dx}{p-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \ln\left|\frac{x+\sqrt{p}}{x-\sqrt{p}}\right| + C$ $\qquad \int \frac{dx}{p-(kx)^2} = \frac{1}{k\cdot 2\sqrt{p}} \ln\left|\frac{kx+\sqrt{p}}{kx-\sqrt{p}}\right| + C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm p}} = \ln\left|\, x + \sqrt{x^2 \pm p}\,\right| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{(kx)^2 \pm p}} = \frac{1}{k}\ln\left|\, kx + \sqrt{(kx)^2 \pm p}\,\right| + C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{p-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{p}} + C$ $\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{p-(kx)^2}} = \frac{1}{k}\arcsin \frac{kx}{\sqrt{p}} + C$

9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\qquad \int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k}\,\frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$

10. $\int e^x dx = e^x + C$ $\qquad \int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C$

11. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ $\qquad \int \sin(kx+b) dx = -\frac{1}{k}\cos(kx+b) + C$

12. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ $\qquad \int \cos(kx+b) dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b) + C$

13. $\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$ $\qquad \int tg(kx+b) dx = -\frac{1}{k}\ln|\,\cos(kx+b)| + C$

14. $\int ctg\, x\, dx = \ln|\sin x| + C$ $\qquad \int ctg(kx+b) dx = \frac{1}{k}\ln|\,\sin(kx+b)| + C$

15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg\,\frac{x}{2}\right| + C$	$\int \frac{dx}{\sin(kx+b)} = \frac{1}{k}\ln\left| tg\,\frac{kx+b}{2}\right| + C$
16. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$	$\int \frac{dx}{\cos(kx+b)} = \frac{1}{k}\ln\left| tg\left(\frac{kx+b}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2(kx+b)} = -\frac{1}{k}ctg(kx+b) + C$
18. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(kx+b)} = \frac{1}{k}tg(kx+b) + C$

Методи інтегрування

Інтегрування методом заміни змінної

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{matrix} x=\varphi(t) \Rightarrow t=\psi(x) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{matrix} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f_1(t)dt = \\ = F_1(t)+C = F_1(\psi(x))+C$$

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \left\{ \begin{matrix} \varphi(x)=t \\ \varphi'(x)dx=dt \end{matrix} \right\} = \int f(t)dt = F(t)+C = F(\varphi(x))+C$$

$x\,dx \rightarrow x^2 = t$	$\frac{dx}{\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{x} = t$
$x^n\,dx \rightarrow x^{n+1} = t$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \arcsin x = t,\ \arccos x = t$
$\sin x\,dx \rightarrow \cos x = t$	$\frac{dx}{1+x^2} \rightarrow arctg\,x = t,\ arcctg\,x = t$
$\cos x\,dx \rightarrow \sin x = t$	$\frac{dx}{\cos^2 x} \rightarrow tg\,x = t$
$e^{kx}\,dx \rightarrow e^{kx} = t$	$\frac{dx}{\sin^2 x} \rightarrow ctg\,x = t$
$a^x\,dx \rightarrow a^x = t$	
$\frac{dx}{x} \rightarrow \log_a x = t,\ \ln x = t$	
$\frac{dx}{x^n} \rightarrow \frac{1}{x^{n-1}} = t$	

Інтегрування частинами

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
I. $\int \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x^n \\ P_n(x) \end{bmatrix}}_{u} \underbrace{\begin{bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \\ e^{kx}, a^x \end{bmatrix} dx}_{dv}$ $\int \frac{x}{\cos^2 kx}\,dx$ $\int \frac{x}{\sin^2 kx}\,dx$ $u = x,\ \ dv = dx/\cos^2 kx$ $u = x\,,\ \ dv = dx/\sin^2 kx$
II. $\int x^s \underbrace{\log_a^n x}_{u}\,dx\,,\ \ s \neq -1$ $\int x^n \underbrace{\arcsin kx}_{u}\,dx$ $\int x^n \underbrace{arctg\,kx}_{u}\,dx$
III. Циклічні інтеграли $\int \underbrace{\begin{bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix}}_{u} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{kx} \\ a^x \end{bmatrix} dx}_{dv}$ $\int \sin\log_a x\,dx$, $u = \sin\log_a x$ $\int \cos\log_a x\,dx$, $u = \cos\log_a x$ $\int \underbrace{\sqrt{ax^2+b}}_{u}\,dx$ $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax^2+b}}$ $u = x \quad ; \quad dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}$

Корисні формули

$\int \frac{x\,dx}{x^2+b}=\frac{1}{2}\ln\left\lvert x^2+b\right\rvert+C$	$\int \frac{x\,dx}{kx^2+b}=\frac{1}{2k}\ln\left\lvert kx^2+b\right\rvert+C$
$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+b}}=\sqrt{x^2+b}+C$	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{kx^2+b}}=\frac{1}{k}\sqrt{kx^2+b}+C$
$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{b-x^2}}=-\sqrt{b-x^2}+C$	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{b-kx^2}}=-\frac{1}{k}\sqrt{b-kx^2}+C$

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}=\ln\left\lvert f(x)\right\rvert+C$$

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}}=2\sqrt{f(x)}+C$$

$$\int \sqrt{p-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{p-x^2}+\frac{p}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{p}}+C$$

$$\int \sqrt{x^2+p}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+p}+\frac{p}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+p}\right\rvert+C$$

$$\int \sqrt{x^2-p}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-p}-\frac{p}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+p}\right\rvert+C$$

Інтегрування дробово-раціональних функцій

Дробово-раціональна функція(ДРФ)= $\dfrac{\textit{поліном}}{\textit{поліном}}$

степінь числівника < степінь знаменника — правильна ДРФ

степінь числівника $\geq$ степінь знаменника — неправильна ДРФ

неправильна ДРФ =поліном + правильна ДРФ

правильна ДРФ = сума найпростіших дробів

Найпростіші (елементарні) дроби

I тип	$\dfrac{A}{x-a}$	II тип	$\dfrac{A}{(x-a)^n}$
III тип	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ $(D=b^2-4ac<0)$	IV тип	$\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ $(D=b^2-4ac<0)$

Розкладання ДРФ на найпростіші дроби

множник знаменника	*відповідні найпростіші дроби*
$(x-a)^1$	$\dfrac{A}{x-a}$
$(x-a)^n$	$\dfrac{A_n}{(x-a)^n}+\dfrac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}+\ldots\dfrac{A_1}{x-a}$
$(ax^2+bx+c)^1$	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$(ax^2+bx+c)^n$	$\dfrac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}+\dfrac{A_{n-1}x+B_{n-1}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\ldots+\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}$

Інтегрування найпростіших дробів I та II типу

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\ln|\,x-a\,|+C$$

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^n}=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$$

Інтегрування найпростіших дробів III та IV типу

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\left\{ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=\right.$$

$$\left.=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\underbrace{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}_{q}\right]\ ;\ \ x+\frac{b}{2a}=t, dx=dt\right\}=\frac{1}{a}\int\frac{A\,t+\beta}{t^2+q}dt=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{A\,t+\beta}{t^2+q}dt=\frac{A}{a}\int\frac{t\,dt}{t^2+q}+\frac{\beta}{a}\int\frac{dt}{t^2+q}=\frac{A}{2a}\ln\left(t^2+q\right)+\frac{\beta}{a\sqrt{q}}arctg\frac{t}{\sqrt{q}}+C$$

(якщо $D<0$, то $q>0$)

$$\int\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx=\left\{x+\frac{b}{2a}=t\right\}=\frac{1}{a^n}\int\frac{A\,t+\beta}{\left(t^2+q\right)^n}dt=$$

$$=\frac{A}{a^n}\underbrace{\int\frac{t\,dt}{\left(t^2+q\right)^n}}_{\text{заміна } t^2=z}+\frac{\beta}{a^n}\int\frac{dt}{\left(t^2+q\right)^n}$$

Рекурентна формула

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+q\right)^n}=\frac{t}{2q(n-1)\left(t^2+q\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2q\,(n-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2+q\right)^{n-1}}$$

Інтегрування деяких тригонометричних функцій

$\int \sin ax \sin bx\, dx$, $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$ Застосовуються формули $$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(ax-bx)-\cos(ax+bx)\right];$$ $$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(ax+bx)+\cos(ax-bx)\right];$$ $$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(ax+bx)+\sin(ax-bx)\right].$$
Функції, непарні відносно $\sin x$ або $\cos x$ $\int \sin^{2n+1} x\, dx$, $\int \sin^{2n+1} x\, f(\cos x)\, dx$ Виконується перетворення $\sin^{2n+1} x = \sin x \cdot \sin^{2n} x = \sin x\left(1-\cos^2 x\right)^n$ та заміна змінної $\cos x = t\,, \sin x\, dx = -dt$. $\int \cos^{2n+1} x\, dx$, $\int \cos^{2n+1} x\, f(\sin x)\, dx$ Виконується перетворення $\cos^{2n+1} x = \cos x \cdot \cos^{2n} x = \cos x\left(1-\sin^2 x\right)^n$ та заміна змінної $\sin x = t\,, \cos x\, dx = dt$
$\int \sin^{2n} x\, dx$, $\int \cos^{2m} x\, dx$, $\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x\, dx$ Застосовуються формули $$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad ; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad ; \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

Функції, парні відносно $\sin x$ та $\cos x$:

$\int f(tg\, x)\,dx$, $\int f(ctg\, x)\,dx$,

дробові функції від $\sin^{2n} x$, $\cos^{2m} x$, $\sin x \cos x$.

Заміна $tg\, x = t,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ або $ctg\, x = t$, $dx = -\dfrac{dt}{1+t^2}$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

Універсальна тригонометрична підстановка

$$tg\frac{x}{2} = t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ;$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Типові задачі: $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Функції, які містять корені лінійної або дробово-лінійної функції

$$\int f\left(x, \sqrt[m]{(ax+b)^k}, \sqrt[n]{(ax+b)^l}, \ldots\right) dx \text{ або } \int f\left(x, (ax+b)^{\frac{k}{m}}, (ax+b)^{\frac{l}{n}}, \ldots\right) dx$$

$$s = H.O.K.(m, n, \ldots)$$

заміна $ax+b = t^s$,

$$x = \frac{t^s - b}{a},$$

$$dx = \frac{s\,t^{s-1}dt}{a}$$

$$\int f\left(x, \sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^k}, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^l}, \ldots\right) dx \text{ або } \int f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{\frac{k}{m}}, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{\frac{l}{n}}, \ldots\right) dx$$

$$s = H.O.K.(m, n, \ldots)$$

заміна $\dfrac{ax+b}{cx+e} = t^s$,

$$x = \frac{e\,t^s - b}{a - c\,t^s},$$

$$dx = \frac{es\,t^{s-1}\left(a - c\,t^s\right) + \left(e\,t^s - b\right)cs\,t^{s-1}}{\left(a - c\,t^s\right)^2} dt$$

Функції, які містять корінь квадратний від квадратного двочлена

$$\int f\left(x, \sqrt{p - x^2}\right) dx$$

заміна $x = \sqrt{p}\sin t$ або $x = \sqrt{p}\cos t$

$$dx = \sqrt{p}\cos t\,dt \qquad dx = -\sqrt{p}\sin t\,dt$$

$$\sqrt{p - x^2} = \sqrt{p}\cos t \qquad \sqrt{p - x^2} = \sqrt{p}\sin t$$

$$\int f\left(x, \sqrt{x^2 + p}\right) dx$$

заміна $x = \sqrt{p}\,tg\,t$ або $x = \sqrt{p}\cos t$

$$dx = \frac{\sqrt{p}\,dt}{\cos^2 t} \qquad dx = -\frac{\sqrt{p}\,dt}{\sin^2 t}$$

$$\sqrt{x^2 + p} = \frac{\sqrt{p}}{\cos t} \qquad \sqrt{x^2 + p} = \frac{\sqrt{p}}{\sin t}$$

$$\int f\left(x, \sqrt{x^2 - p}\right) dx$$

заміна $x = \dfrac{\sqrt{p}}{\cos t}$ або $x = \dfrac{\sqrt{p}}{\sin t}$

$$dx = \frac{\sqrt{p}\sin t\,dt}{\cos^2 t} \qquad dx = -\frac{\sqrt{p}\cos t\,dt}{\sin^2 t}$$

$$\sqrt{x^2 + p} = \frac{\sqrt{p}\sin t}{\cos t} \qquad \sqrt{x^2 + p} = \frac{\sqrt{p}\cos t}{\sin t}$$

Функції, які містять корінь квадратний від квадратного тричлена

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \left\{x+\frac{b}{2a}=t,\, dx=dt\right\} = \int \frac{A\,t+\beta}{\sqrt{at^2+\gamma}}\,dt = = A\int \frac{t\,dt}{\sqrt{at^2+\gamma}} + \beta\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+\gamma}}$$
$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \left\{x+\frac{b}{2a}=t,\, dx=dt\right\} = \int R_1\left(t, \sqrt{at^2+\gamma}\right)dt$$

Підстановки Ейлера

Перша підстановка : $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\; a>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$; $ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}x\,t + t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}$
Друга підстановка : $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\; c>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\,t + \sqrt{c}$; $ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}x\,t + c \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}$
Третя підстановка : α та β – дійсні корені тричлена ax^2+bx+c $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$; $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t$; $a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2 \Rightarrow x = \frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}$

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальні рівняння першого порядку

Основні поняття

Звичайним диференціальним рівнянням 1 порядку називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, її функцію та похідну першого порядку цієї функції (або диференціали незалежної змінної та функції): $$F(x,y,y')=0,$$ $$y'=f(x,y) \text{ або}$$ $$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$
Розв'язком диференціального рівняння називається диференційовна функція $y=\varphi(x)$, яка при підстановці в диференціальне рівняння перетворює його в тотожність: $$F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\equiv 0$$ $$(\varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x))).$$ Якщо розв'язок є неявною функцією, його називають ***інтегралом диференціального рівняння***.
Загальним розв'язком називається така функція $y=\varphi(x,C)$ (C – довільна стала), що: 1) є розв'язком для будь-якого значення C; 2) для будь-якої припустимої ***начальної умови*** $y(x_0)=y_0$ існує таке значення сталої $C=C_0$, що $\varphi(x_0,C_0)=y_0$. Якщо загальний розв'язок є неявною функцією, його називають ***загальним інтегралом диференціального рівняння***.
Функцію $y=\varphi(x,C_0)$ називають ***частинним розв'язком*** або розв'язком ***задачі Коші*** $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$.

Диференціальні рівняння, інтегровні в квадратурах

Найпростіше диференціальне рівняння

$$y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx; \quad y = F(x) + C$$

Диференціальні рівняння з подільними змінними

$$\left.\begin{aligned} & y' = f_1(x) f_2(y) \\ & p_1(x)p_2(y) + q_1(x)q_2(y)y' = 0 \\ & p_1(x)p_2(y)dx + q_1(x)q_2(y)dy = 0 \end{aligned}\right] \Rightarrow \quad \begin{aligned} & \varphi_2(y)dy = \varphi_1(x)dx \ ; \\ & \int \varphi_2(y)dy = \int \varphi_1(x)dx \ ; \\ & \Phi_2(y) = \Phi_1(x) + C \ . \end{aligned}$$

Функція $f(x, y)$ називається ***однорідною степеня*** n, якщо для будь-якого k має місце тотожність $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$.

Зокрема, якщо $f(kx, ky) = f(x, y)$, то $f(x, y)$ є ***однорідною функцією нульового степеня***.

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку:

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – однорідні однакового степеня;

$y' = f(x, y)$, $f(x, y)$ – однорідна нульового степеня .

Зводяться до $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Заміна $\dfrac{y}{x} = u$; $y = ux$; $y' = u'x + u$;

$$u'x + u = f(u) \ ; \quad u'x = f(u) - u \ ; \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Лінійні рівняння

$$y' + p(x)y = f(x)$$

$$y = uv \ ; \ y' = u'v + uv'$$

$$u'v + \underline{uv' + p(x)uv} = f(x)$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)$$

$$\begin{cases} 1. \ v' + p(x)v = 0 \\ 2. \quad u'v = f(x) \end{cases}$$

Рівняння Бернуллі

$$y' + p(x)y = f(x)y^k$$

$$y = uv \ ; \ y' = u'v + uv'$$

$$u'v + \underline{uv' + p(x)uv} = f(x)(uv)^k$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)u^k v^k$$

$$\begin{cases} 1. \ v' + p(x)v = 0 \\ 2. \quad u'v = f(x)u^k v^k \end{cases}$$

Рівняння в повних диференціалах

Рівняння $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ є ***рівнянням в повних диференціалах***, якщо виконується умова $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Загальний інтеграл рівняння розшукується з рівності

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C,$$

де (x_0,y_0)– деяка фіксована точка з області неперервності функцій $P(x,y)$, $Q(x,y)$ та їх частинних похідних.

Також загальний інтеграл рівняння $U=C$ можна побудувати виходячи з системи рівнянь $\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)\\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)\end{cases}$:

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx \quad\Rightarrow\quad U(x,y)=R(x,y)+\varphi(y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(R(x,y)+\varphi(y)\right)=Q(x,y) \quad\Rightarrow\quad \varphi'(y)=Q(x,y)-\frac{\partial R}{\partial y}.$$

Інтегруючий множник

Рівняння $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ зводиться до рівняння в повних диференціалах множенням на функцію μ (інтегруючий множник):

а) якщо $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\varphi(x)$, то $\mu=e^{\int\varphi(x)dx}$;

а) якщо $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}=\varphi(y)$, то $\mu=e^{\int\varphi(y)dy}$.

Деякі рівняння, які зводяться до найпростіших

$y' = f(ax+by+c)$.   Заміна $z = ax+by+c$; $z' = a+by'$; $y' = \frac{z'-a}{b}$. $\frac{z'-a}{b} = f(z)$ – рівняння з подільними змінними.
$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c}{a_2x+b_2y+c}\right)$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.   Заміна $\begin{cases} x = t+\alpha \\ y = z+\beta \end{cases}$, де α та β – розв'язок системи $\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c=0 \\ a_2\alpha+b_2\beta+c=0 \end{cases}$; $y' = z'_t$; $z' = f\left(\frac{a_1t+b_1z}{a_2t+b_2z}\right)$ – однорідне рівняння.

Диференціальні рівняння другого порядку

Загальній вигляд рівняння	$F(x,y,y',y'')=0$ або $y''=f(x,y,y')$
Загальний розв'язок	$y=\varphi(x,C_1,C_2)$
Загальний інтеграл	$\Phi(x,y,C_1,C_2)=0$
Початкові умови	$y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$

Рівняння, що припускають зниження порядку

Найпростіші: $y''(x) = f(x)$; $y'(x) = \int f(x)dx$; $y'(x) = f_1(x) + C_1$; $y(x) = \int (f_1(x) + C_1)dx$; $y(x) = f_2(x) + C_1 x + C_2$.
Рівняння, які явно не містять шукану функцію y: $F(x, y', y'') = 0$; $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$; $F(x, p, p') = 0 \Rightarrow p = f_1(x, C_1)$; $y' = f_1(x, C_1)$; $y = \int f_1(x, C_1)dx$; $y = f_2(x, C_1) + C_2$.
Рівняння, які явно не містять аргумент x: $F(y, y', y'') = 0$; $y' = p(y)$, $y'' = \frac{d}{dx}p(y) = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'(y)\cdot p$; $F(y, p, p'p) = 0 \Rightarrow p = f_1(y, C_1)$; $y' = f_1(y, C_1)$; $\frac{dy}{f_1(y, C_1)} = dx$; $\int \frac{dy}{f_1(y, C_1)} = \int dx$; $f_2(y, C_1) = x + C_2$.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку (ЛНДР-II) називається рівняння вигляду $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$.

Якщо рівняння має вигляд $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, то воно називається ***лінійним однорідним рівнянням (ЛОДР-II)***, або ***рівнянням без правої частини***.

Функції $y_1(x)$та $y_2(x)$ називаються ***лінійно незалежними*** на $[a,b]$, якщо тотожність $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\equiv 0$ виконується тільки якщо $C_1 = C_2 = 0$ (тобто у випадку $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv const$).

Визначник $W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ називається ***визначником Вронського*** (або ***вронскіаном***).

Якщо функції лінійно залежні на $[a,b]$, то $W[y_1, y_2] \equiv 0$.

Загальний розв'язок лінійного ***однорідного*** рівняння 2 порядку має структуру

$$\bar{y} = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x),$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$– лінійно незалежні частинні розв'язки.

Загальний розв'язок лінійного ***неоднорідного*** рівняння має структуру

$$y = \bar{y} + y^*,$$

де $\bar{y}$– загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а y^*– деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Метод варіації довільних сталих

$y^* = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2$, де функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ є розв'язком системи

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dx}\cdot y_1 + \dfrac{dC_2}{dx}\cdot y_2 = 0 \\ \dfrac{dC_1}{dx}\cdot y_1' + \dfrac{dC_2}{dx}\cdot y_2' = f(x) \end{cases}.$$

Лінійні однорідні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$y'' + p\,y' + q\,y = 0$, де $p, q = const$

$\bar{y} = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$

$y_{1,2} = e^{kx}$, k – корені ***характеристичного рівняння*** $k^2 + pk + q = 0$.

$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad \to \quad y'' \sim k^2,\ y' \sim k,\ y \sim 1 \quad \to \quad k^2 + pk + q = 0$

I. Корені характеристичного рівняння дійсні та різні $k_1 \neq k_2$ $(D > 0)$

$$y_1 = e^{k_1 x};\quad y_2 = e^{k_2 x}$$

$$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

II. Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні $k_1 = k_2$ $(D = 0)$

$$y_1 = e^{k_1 x};\quad y_2 = x e^{k_1 x}$$

$$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$$

III. Корені характеристичного рівняння комплексні $k_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i$ $(D < 0)$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x;\quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$\bar{y} = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Частинні випадки

1) $y'' + b\,y' = 0$	2) $y'' - \alpha^2 y = 0$	3) $y'' + \beta^2 y = 0$
$k^2 + bk = 0$	$k^2 - \alpha^2 = 0$	$k^2 + \beta^2 = 0$
$k(k + b) = 0$	$k^2 = \alpha^2$	$k^2 = -\beta^2$
$k_1 = 0$; $k_2 = -b$	$k_{1,2} = \pm\alpha$	$k_{1,2} = \pm\beta i$
$y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^{-bx}$	$y_1 = e^{\alpha x}$; $y_2 = e^{-\alpha x}$	$y_1 = \cos \beta x$; $y_2 = \sin \beta x$
$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-bx}$	$\bar{y} = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$	$\bar{y} = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$

Лінійні однорідні рівняння другого порядку
зі сталими коефіцієнтами
та спеціальною правою частиною

	$y'' + p\,y' + q\,y = f(x)$ $y = \bar{y} + y^*$	
	$f(x) = Kx^n + Lx^{n-1} + \ldots + N$	$f(x) = K$
$k_{1,2} \neq 0$	$y^* = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + F$	$y^* = A$
$k_1 = 0$ або $k_2 = 0$	$y^* = x\left(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + F\right)$	$y^* = Ax$
	$f(x) = \left(Kx^n + Lx^{n-1} + \ldots + N\right)e^{\alpha x}$	$f(x) = K\,e^{\alpha x}$
$k_{1,2} \neq \alpha$	$y^* = \left(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + F\right)e^{\alpha x}$	$y^* = A\,e^{\alpha x}$
$k_1 = \alpha$ або $k_2 = \alpha$	$y^* = x\left(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + F\right)e^{\alpha x}$	$y^* = x\,A\,e^{\alpha x}$
$k_1 = k_2 = \alpha$	$y^* = x^2\left(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + F\right)e^{\alpha x}$	$y^* = x^2\,A\,e^{\alpha x}$
	$f(x) = K\cos\beta x + L\sin\beta x$ ($f(x) = K\cos\beta x$, $f(x) = L\sin\beta x$)	
$k_{1,2} \neq \beta i$	$y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x$	
$k_1 = \beta i$	$y^* = x\,A\cos\beta x + x\,B\sin\beta x$	
	$f(x) = K\,e^{\alpha x}\cos\beta x + Le^{\alpha x}\sin\beta x$ ($f(x) = K\,e^{\alpha x}\cos\beta x$, $f(x) = Le^{\alpha x}\sin\beta x$)	
$k_{1,2} \neq \alpha + \beta i$	$y^* = A\,e^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x$	
$k_1 = \alpha + \beta i$	$y^* = x\,A\,e^{\alpha x}\cos\beta x + x\,B\,e^{\alpha x}\sin\beta x$	

Загальний випадок спеціальної правої частини

$$f(x) = P_n(x) e^{\alpha x} \cos\beta x + Q_l(x) e^{\alpha x} \sin\beta x \qquad (\lambda = \alpha + i\beta)$$

За відсутності $e^{\alpha x}$ вважаємо $\alpha = 0$
За відсутності $\sin\beta x, \cos\beta x$ вважаємо $\beta = 0$

$m = \max(n, l)$

$\lambda \neq k_{1,2}$	$y^* = R_m(x) e^{\alpha x} \cos\beta x + S_m(x) e^{\alpha x} \sin\beta x$
$\lambda = k_1$ або $\lambda = k_2$	$y^* = x\, R_m(x) e^{\alpha x} \cos\beta x + x\, S_m(x) e^{\alpha x} \sin\beta x$
$\lambda = k_1 = k_2$	$y^* = x^2\, R_m(x) e^{\alpha x} \cos\beta x + x^2\, S_m(x) e^{\alpha x} \sin\beta x$

Диференціальні рівняння вищих порядків

Рівняння, що припускають зниження порядку

Найпростіші: $y^{(n)}(x) = f(x)$;

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x)dx; \quad y^{(n-1)}(x) = f_1(x) + C_1 \ \ldots$$

Рівняння, які явно не містять шукану функцію y:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots y^{(n)}\right) = 0;$$

$$y^{(k)} = p(x);$$

$$F\left(x, p, p', \ldots p^{(n-k)}\right) = 0.$$

Рівняння, які явно не містять аргумент x:

$$F\left(y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0;$$

$$y' = p(y).$$

Лінійні рівняння вищих порядків

Лінійні однорідні рівняння

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=0;$$
$$\bar{y}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x),$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$,… $y_n(x)$– лінійно незалежні розв'язки рівняння, тобто

$$W[y_1,y_2,\ldots y_n]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Функції $y_1(x)$, $y_2(x)$,… $y_n(x)$ складають ***фундаментальну систему розв'язків*** рівняння

Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0$$

Частинні розв'язки розшукуються у вигляді $y_i=e^{kx}$, де k – корені ***характеристичного рівняння*** $k^n+a_1k^{n-1}+a_2y^{n-2}+\ldots+a_n=0$.

I. Дійсне число k є коренем кратності **1**– відповідний розв'язок $y=e^{kx}$.

II. Дійсне число k є коренем кратності m– відповідні розв'язки $y_1=e^{kx}$, $y_2=xe^{kx}$, … $y_m=x^{m-1}e^{kx}$.

III. Комплексно-спряжені числа $\alpha\pm i\beta$ є коренями кратності **1**– відповідні розв'язки $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

IV. Комплексно-спряжені числа $\alpha\pm i\beta$ є коренями кратності m– відповідні розв'язки $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x$,… $y_{2m-1}=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{2m}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

та спеціальною правою частиною

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\ldots+a_n y=f(x)$$

$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_l(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

$m=\max(n,l)$

$s=0$, якщо $\lambda=\alpha+i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння.

$s=j$, якщо $\lambda=\alpha+i\beta$ є коренем кратності j.

$y^*=x^s R_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+x^s S_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОТОЧНОГО КОНТРОЛЮ

Тема: «Диференціальні рівняння»

БІЛЕТ № 1

1. З'ясувати, чи буде функція $y = \frac{x-1}{3} + \frac{C}{\sqrt{2x+1}}$ розв'язком рівняння $(2x+1)y' + y = x$.

2. Рівняння $\cos x\, y' + y - \cos x\, y^3 = 0$ є :

а) рівнянням з відокремлюваними змінними ;

б) однорідним рівнянням ;

в) лінійним рівнянням ;

г) рівнянням Бернуллі .

3. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку (0;1), та кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої у кожній точці дорівнює $-ytgx$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$xy' - y = \sqrt{9x^2 + y^2}$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$y \sin x dx + (\cos x - 1)dy = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$y'' - 4y' - 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$.

8. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$y'' - y'\, tg\, x = \sin^2 x$.

Тема: «Диференціальні рівняння»

БІЛЕТ № 2

1. З'ясувати, чи буде функція $y = e^{x}\sqrt{1+x^2}$ розв'язком рівняння

$y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y$.

2. Рівняння $5x^3y' = y^2(2x - y)$ є :

а) рівнянням з відокремлюваними змінними ;

б) однорідним рівнянням ;

в) лінійним рівнянням ;

г) рівнянням Бернуллі .

3. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку (1; 1), та кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої у кожній точці дорівнює $-y$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y' - \dfrac{y}{x} = x\cos 2x$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$x \ln y \, y' - y = 0$, $y(1) = e^2$.

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$y'' - 4y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y'' + 9y = 72\sin 9x$.

8. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$y'' x^2 + y'' + x y' = 0$.

Тема: «Диференціальні рівняння»

БІЛЕТ № 3

1. З'ясувати, чи буде функція $y=\dfrac{1-\cos 2x}{2\cos x}$ розв'язком рівняння $y' - y\,tgx = 2\sin x$.

2. Рівняння $x^3 y' - \cos y = 1$ є :

а) рівнянням з відокремлюваними змінними ;

б) однорідним рівнянням ;

в) лінійним рівнянням ;

г) рівнянням Бернуллі .

3. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку $(\pi/2;1)$,та кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої у кожній точці дорівнює $y\,ctgx$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$xy' - y = xe^{-\frac{2y}{x}}$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$y'ctgx + y - 2 = 0$, $y(\pi) = 0$.

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$y'' + 16y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y'' - 4y' + 3y = x^2 + 2$.

8. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$1 + y'^2 = 2y\,y''$.

Тема: «Диференціальні рівняння»

БІЛЕТ № 4

1. З’ясувати, чи буде функція $y=\dfrac{1}{x\ln x}$ розв’язком рівняння $y'x+y=-xy^2$.

2. Рівняння $(y+2x)dy-ydx=0$ є :

а) рівнянням з відокремлюваними змінними ;

б) однорідним рівнянням ;

в) лінійним рівнянням ;

г) рівнянням Бернуллі .

3. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку (1; 1), та кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої у кожній точці дорівнює $3\dfrac{y}{x}$.

4. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y'-\frac{2y}{x}=\frac{\sin x}{x^2}.$$

5. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння:

$$(y'+1)e^y=4, \quad y(1)=0.$$

6. Знайти розв’язок задачі Коші:

$$y''-4y'+5y=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=-1\ .$$

7. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y''-4y'+13y=\cos 2x.$$

8. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння:

$$y''-2\,ctg\,x\ y'=\sin^3 x.$$

Тема: «Диференціальні рівняння»

БІЛЕТ № 5

1. З'ясувати, чи буде функція $y = \dfrac{C - x}{1 + Cx}$ розв'язком рівняння $\left(1 + x^2\right)y' + 1 + y^2 = 0$.

2. Рівняння $y' \sin 5x + y^2 = 4$ є :

а) рівнянням з відокремлюваними змінними ;

б) однорідним рівнянням ;

в) лінійним рівнянням ;

г) рівнянням Бернуллі .

3. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку (1;1), та кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої у кожній точці дорівнює $-2\sqrt{y}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$xy' - y = \sqrt{4x^2 - y^2}$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$xy' - y^2 = y$, $y(2) = 1$.

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$y'' + 9y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$.

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$

8. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$y'^2 + 2yy'' = 0$

Тема: «Диференціальні рівняння»

БІЛЕТ № 6

1. З'ясувати, чи буде функція $y = \dfrac{2x}{1+3x^2}$ розв'язком рівняння $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$.

2. Рівняння $x^2 dy + \left(x^2 - 4xy\right)dx = 0$ є :

а) рівнянням з відокремлюваними змінними ;

б) однорідним рівнянням ;

в) лінійним рівнянням ;

г) рівнянням Бернуллі .

3. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку (1; 2), та кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої у кожній точці дорівнює $-y^2x$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' - \frac{y}{x} = x\, ctg\, x .$$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy' - y = x\sin^2\frac{y}{x} \;,\quad y(1) = \frac{\pi}{2} .$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \;,\; y(0) = 2 \;,\; y'(0) = 0 .$$

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - y' = 3\sin x$$

8. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' + y'\, ctg\, x = \cos x$$

Тема: «Диференціальні рівняння»

БІЛЕТ № 7

1. З'ясувати, чи буде функція $y = xe^x$ розв'язком рівняння $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$.

2. Рівняння $y' + x^2 y = 3x^2$ є :

а) рівнянням з відокремлюваними змінними ;

б) однорідним рівнянням ;

в) лінійним рівнянням ;

г) рівнянням Бернуллі .

3. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку (1; 1), та кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої у кожній точці дорівнює $-y^2$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$xy' - y = x\cos^2\frac{y}{x}$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$y'\cos x = y\ln y, \quad y(0) = e$.

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$y'' + y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$.

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y'' + 5y' - 6y = e^x$

8. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$x^3 y'' - y'' - 3x^2 y' = 0$

Тема: «Диференціальні рівняння»

БІЛЕТ № 8

1. З’ясувати, чи буде функція $y = e^{-\sin x} + \sin x - 1$ розв’язком рівняння $y' + y\cos x = \sin x \cos x$.

2. Рівняння $\left(xy' - y^2\right)\ln x = 2y$ є :

а) рівнянням з відокремлюваними змінними ;

б) однорідним рівнянням ;

в) лінійним рівнянням ;

г) рівнянням Бернуллі .

3. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку (2;1), та кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої у кожній точці дорівнює $-\dfrac{y}{x}$.

4. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x}.$$

5. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння:

$$\left(2xy + y\right)y' = 3 - y^2, \quad y(0) = 2.$$

6. Знайти розв’язок задачі Коші:

$$y'' + 4y = 0, \; y(0) = -3, \; y'(0) = 1.$$

7. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y'' - 4y = \sin 2x$$

8. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння:

$$1 + y'^{\,3} - 3y\,y'y'' = 0$$

Тема: «Диференціальні рівняння»

БІЛЕТ № 9

1. З'ясувати, чи буде функція $y = C\ln x - x$ розв'язком рівняння $x\ln xy' - y = x(\ln x - 1)$.

2. Рівняння $y' tg 3x + y = 2$ є :

а) рівнянням з відокремлюваними змінними ;

б) однорідним рівнянням ;

в) лінійним рівнянням ;

г) рівнянням Бернуллі .

3. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку (-1;1), та кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої у кожній точці дорівнює $-\dfrac{y^2}{x^2}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy' - y = \frac{2x}{\cos\frac{3y}{x}}.$$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$\left(1 - e^x\right)\sin y\, y' = e^x \cos^3 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 3.$$

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - 2y' + 10y = x^2$$

8. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' + 2y'\, tg\, x = \cos^3 x$$

Тема: «Диференціальні рівняння»

БІЛЕТ № 10

1. З'ясувати, чи буде функція $x = y^2 - \frac{1}{y}$ розв'язком рівняння $x' = \frac{2xy + 3}{y^2}$.

2. Рівняння $y - xy' = y^2 - x^2 y'$ є :

а) рівнянням з відокремлюваними змінними ;

б) однорідним рівнянням ;

в) лінійним рівнянням ;

г) рівнянням Бернуллі .

3. Записати рівняння кривої, яка проходить через точку (0;1), та кутовий коефіцієнт дотичної до цієї кривої у кожній точці дорівнює $\frac{2xy}{x^2 - 4}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' - \frac{y}{2x} = \frac{5}{x^2}.$$

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = 2\sqrt{y}\ln x, \quad y(e) = 1.$$

6. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y'' - 4y = 0, \; y(0) = -2, \; y'(0) = 2.$$

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - 5y' + 4y = 5\sin 3x + 15\cos 3x$$

8. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$3y'^2 + y\,y'' = 0$$

Література

1. Дубовик В.П., Юрик І І. Вища математика : навч. посібник. К.: А.С.К., 2005. 648 с.
2. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: підручник: у 3 кн., Кн.3. Київ: Либідь, 1994. 352 с.
3. Овчинников П. П. та ін. Вища математика : підручник. К.: Техніка, 2003. Ч. 2. 600 с.
4. Вища математика. Збірник задач : навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. К.: А.С.К., 2004. 480 с.
5. Вища математика: Підручник: У 2 кн. Кн. 1. Основні розділи / За ред. Г.Л. Кулініча. К.: Либідь, 2003. 400с.
6. Слюсаренко В.Г., Ковтун І.І., Нікітіна І.А. Короткий курс вищої математики : навч. посібник. К.: Магістр –ХХІ сторіччя, 2005. 153 стор.
7. Русецький Ю.Й. Дослідження функцій : метод. посібник. Дніпропетровськ, 2003. 67с.
8. Т.С. Кагадій, Л.Ф. Сушко, В.Б. Говоруха. Інтегральне числення : навч. посіб. Дніпро : ДДАЕУ, 2018. 117 с.
9. Пономаренко В.Г., Дьяченко Н.К. Основи лінійної алгебри : навчальний посібник. Дніпропетровськ : ДДАУ, 1998.
10. Дьяченко Н.К. Аналітична геометрія на площині та у просторі. Елементи векторної алгебри : навч. посібник. Дніпропетровськ : ДДАУ, 2010. 76 с.
11. Дьяченко Н.К. Інтегрування. Частина І Невизначений інтеграл : навч. посібник. Дніпропетровськ : ДДАУ, 2013. 64 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Т.С. КАГАДІЙ, Л.Ф. СУШКО, І.В. ЩЕРБИНА,
О.Д. ОНОПРІЄНКО, А.Г. ШПОРТА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ: ТЕОРІЯ, ПРИКЛАДИ, РОЗВ'ЯЗАННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Друкується за авторською редакцією

Редакційно-видавничий відділ
Дніпровського державного аграрно-економічного університету
49600, Дніпро, вул. Сергія Єфремова, 25
Телефони: (056) 713-51-75, 713-51-57
E-mail: redviddday@i.ua, info@dsau.dp.ua

Підписано до друку________________ Формат 60×84/16
Обл.-вид. арк . 7,8. Умовно-друк. арк. 7,25
Папір офсетний. Зам. №________