

УДК 539.3

Т.С. КАГАДІЙ, А.Г. ШПОРТА
 Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
 О.В. БІЛОВА
 Український державний університет науки і технологій
 І.В. ЩЕРБИНА, В.Б. ГОВОРУХА
 Дніпровський державний аграрно-економічний університет

ДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ СТРИНГЕРУ ТА КРИВОЛІНІЙНОГО ОРТОТРОПНОГО НАПІВПРОСТОРУ

Актуальність дослідження динамічної взаємодії криволінійного ортотропного напівпростору з включенням не повинна викликати сумнівів. Такі задачі про передачу навантаження від підкріплюючого волокна до матриці безпосередньо відносяться до механіки композитів і допомагають при дослідженні проблем руйнування таких матеріалів. Як відомо, структура початкових напружень має довільну природу. Так, наприклад, вони можуть виникнути внаслідок технологічних операцій при виготовленні сучасних конструкційних матеріалів і машин. Внутрішні напруження, які можна розглядати як початкові в елементах конструкцій і деталях машин впливають на властивості матеріалів, змінюють динамічні характеристики конструкцій. Розв'язання складних контактних задач асимптотичним методом дає можливість отримати результати, що можна використовувати для поточення чисельних даних, оцінювання методики постановки певних експериментів. Досягнення задовільної практичної точності розв'язків, отриманих запропонованим методом збурення, також неодноразово демонструвалась на тестових задачах. Мета цього дослідження – застосування ефективного асимптотичного методу для отримання аналітичного розв'язку на випадок динамічної взаємодії стрингеру та ортотропного напівпростору. Розглянуто пружне ортотропне напівскінченне тіло з циліндричною анізотропією, посилене стрижнем кругового поперечного перерізу, що знаходиться під дією динамічного навантаження. Радіус стрижня вважається малим. Потрібно знайти розподіл контактних зусиль в матриці та зусилля в стрижні. Як і для плоского випадку, крайова задача зведена до послідовного розв'язання задач теорії потенціалу (основні функції знаходяться з рівнянь Лапласа). Для кожного типу напруженого стану сформульовані граничні умови. Знайдено розподіл зусиль в стрижні та функція, що визначає розподіл контактного напруження. Показано, що без врахування інерційних сил, зусилля в стрингері не залежать від часу (квазістатичний розрахунок). Виконано низку граничних переходів, що пов'язують динамічну і статичну постановку задачі. Показана відповідна поведінка основних шуканих функцій.

Ключові слова: асимптотичний метод, малий параметр, пружний стрижень, динамічне навантаження.

T.S. KAGADIY, A.H. SHPORTA
 National TU "Dnipro Polytechnic"
 O.V. BILOVA
 Ukrainian State University of Science and Technology
 I.V. CHERBINA, V.B. GOVORUKHA
 Dnipro State Agrarian and Economic University

DYNAMIC INTERACTION OF STRINGER AND CURVILINEAR ORTHOTROPIC HALF-SPACE

The relevance of studies of the dynamic interaction of a curvilinear orthotropic half-space with an inclusion should not cause doubts. Such problems of load transfer from the reinforcing fiber to the matrix are directly related to the mechanics of composites and help in the study of the problems of the destruction of such materials. As is known, the structure of the initial stresses has an arbitrary nature. So, for example, they can arise as a result of technological operations in the manufacture of modern construction materials and machines. Internal stresses, which can be considered initial in structural elements and machine parts, affect the properties of materials and change the dynamic characteristics of structures. Solving complex contact problems by the asymptotic method makes it possible to obtain results that can be used for streaming numerical data, evaluating the methodology of setting up certain experiments. Achieving satisfactory practical accuracy of the solutions obtained by the proposed perturbation method was also repeatedly demonstrated on test tasks. The purpose of this study is to apply an efficient asymptotic method for obtaining an analytical solution for the case of dynamic interaction of a stringer and an orthotropic half-space. An elastic orthotropic semi-finite body with cylindrical anisotropy reinforced by a rod of circular cross-section under dynamic load is considered. The radius

of the rod is considered small. It is necessary to find the distribution of contact forces in the matrix and forces in the rod. As in the flat case, the boundary value problem is reduced to the sequential solution of potential theory problems (the main functions are from Laplace's equations). Boundary conditions are formulated for each type of stress state. The distribution of forces in the rod and the function determining the distribution of contact stress were found. It is shown that without considering inertial forces, the forces in the stringer do not depend on time (quasi-static calculation). A number of boundary transitions connecting the dynamic and static formulation of the problem have been performed. The corresponding behavior of the main searched functions is shown.

Key words: asymptotic method, small parameter, elastic rod, dynamic load.

Постановка проблеми

Підвищення надійності і довговічності інженерних споруд і машин є однією з найбільш актуальних задач сучасного будівництва, конструювання машин та обладнання. Її успішному розв'язанню значною мірою сприяють широкі наукові дослідження в області механіки твердого деформівного тіла, зокрема, при вивченні проблеми передачі навантаження в конструкціях і деталях машин [6–9]. Поява нових матеріалів, необхідність підвищення експлуатаційних властивостей споруд і машин, зменшення їх ваги, збільшення термінів експлуатації, зниження вартості і досягнення економічної сумісності – все це залежить від методів розрахунків. Тому актуальність досліджень динамічної взаємодії криволінійного напівпростору з включеннями, особливо криволінійного ортотропного, не повинна викликати сумнівів. Як відомо, природа виникнення початкових напружень має довільну структуру. Так, наприклад, вони можуть виникнути внаслідок технологічних операцій при виготовленні сучасних конструкційних матеріалів і машин. Внутрішні напруження, які можна розглядати як початкові в елементах конструкцій і деталях машин впливають на характеристики матеріалів, змінюють динамічні характеристики конструкцій. Тому результати дослідження різними методами напружено-деформованого стану контактуючих об'єктів з урахуванням складних властивостей матеріалу і навантаження можуть бути корисними для практики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Як відомо, дія динамічного навантаження характеризується швидким наростанням напружень та деформацій. При цьому опір матеріалів деформуванню значно відрізняється від його опору при статичному навантаженні. Динамічне навантаження викликає суттєві прискорення частин конструкції в процесі її деформування або руху всієї конструкції в цілому.

Методика інженерних розрахунків на дію динамічного навантаження в опорі матеріалів будується на спрощуючих гіпотезах, в результаті яких динамічні фактори (зусилля, напруження, деформації, переміщення) виражаються через відомі статичні з допомогою введення так званого динамічного коефіцієнта (відношення динамічного переміщення до статичного, визначених динамічною і статичною дією певного навантаження). Контактні задачі про динамічне навантаження стрингерів, як підкріплюючих елементів конструкцій з ізотропних матеріалів достатньо досліджені. Для розв'язання використовуються різні методи, наприклад, метод скінченних елементів [1], або різноманітні методи інтегральних перетворень [2]. Актуальними залишаються задачі для сучасних композиційних матеріалів з криволінійною анізотропією. В представленій в даній роботі задачі розглядається така форма навантаження на пружний стрижень як удар, що викликає лише пружні деформації.

Мета дослідження

Розв'язання складних контактних задач асимптотичним методом дає задовільні результати щодо точності отриманих результатів, що було показано у роботах [3–5]. Мета цього дослідження – розвинути метод збурення, ефективність якого вже неодноразово доводилась, на випадок динамічної взаємодії стрингеру та ортотропного напівпростору.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо пружне ортотропне напівскінченне тіло ($0 \leq z < \infty$) з циліндричною анізотропією, яке посилене пружним напівскінченим стрижнем кругового поперечного перерізу. Площа F поперечного перерізу стрижня досить мала, тобто радіус a стрижня досить малий. Середня лінія стрижня перпендикулярна до площини, що обмежує напівпростір, і збігається з віссю $0z$. Потрібно визначити закон розподілу контактної напруги між стрижнем і напівпростором, коли в кінцевому перерізі ($z = 0$) стрижня діє динамічне навантаження $P = P_0 H(t)$ ($H(t)$ – ступінчаста функція Хевісайда), спрямована по осі стрижня. Стрижень трактується, як одновимірний пружний континуум у поєднанні з моделлю контакту циліндричної поверхні для напівпростору.

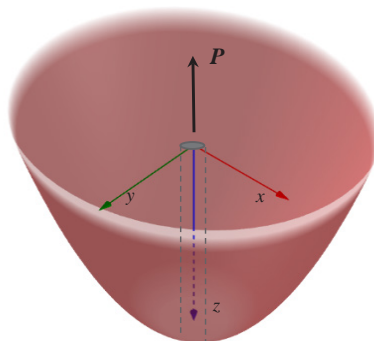


Рис. 1

У такій постановці задача зводиться до інтегрування рівняння руху стрижня

$$EF = \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} - \rho_1 F \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} = -\tau(z, t) \quad (1)$$

та рівняння руху напівпростору (осесиметрична задача)

$$\begin{aligned} E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + mG \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial z} + E_1 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - E_2 \frac{u}{r^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ G \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + E_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + mG \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + G \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + m_1 G \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

за наступних крайових умов (початкові умови – нульові):

$$\begin{aligned} N = EF \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = P_0 H(t), \quad \sigma_{33} = \sigma_{13} = 0 \quad (z = 0) \\ \omega = \omega_1, \quad u = 0 \quad (r = a), \end{aligned} \quad (3)$$

На нескінченності всі функції перетворюються на нуль. Тут u, ω – проекції вектора переміщень, E_1, E_2, E_3 – модулі пружності вздовж головних напрямків, G – модуль зсуву, E – модуль пружності матеріалу стрижня, $\rho(\rho_1)$ – щільність матеріалу напівпростору (стрижня), $\tau(z, t)$ – контактне напруження на одиницю довжини стрижня, що підлягає визначенню, причому $\tau(z, t) = 2\pi a \sigma_{13}(a, z, t)$.

Оскільки $u = 0 (\partial u / \partial z) = 0$ при $r = a$ напруження $\sigma_{13}(a, z, t)$ цілком визначається функцією $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ при $r = a$. Тому

$$\tau(z, t) = 2\pi a G(\partial\omega/\partial r) \quad (r = a) \quad (4)$$

Асимптотичний метод [3–5] дозволяє розкласти напружено – деформований стан напівпростору на два типи: що повільно змінюється вздовж координати z (напружений стан першого типу), який у першому наближенні зводиться до інтегрування рівняння

$$E_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + G \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

і напружений стан типу пограничного шару (другого типу), що описується у першому наближенні рівнянням

$$E_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - E_2 \frac{u}{r^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

Вирішальну роль у зазначених напружено-деформованих станах відіграють ті самі складові, що й у статичному випадку [3–5] тому крайові умови формуються аналогічно.

Оскільки контактна напруга (4) визначається лише функцією ω , розв’язування поставленої вище задачі зводиться до інтегрування рівнянь руху (1), (5) (з урахуванням (4)) за наступних крайових умов:

$$\begin{aligned} N &= EF(\partial\omega_1/\partial z) = P_0 H(t), \\ \sigma_{33} &= E_3(\partial\omega/\partial z) = 0 \quad (z = 0); \\ \omega &= \omega_1 \quad (r = a), \end{aligned} \quad (7)$$

на нескінченності всі функції перетворюються на нуль.

Після застосування перетворення Лапласа за часом та перетворення Фур’є за координатою z , розв’язки отриманого з (5) звичайного диференціального рівняння знаходимо у вигляді

$$\begin{aligned} W^*(r, s, p) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_0}{EF} \times \\ &\times \frac{K_0(r\sqrt{\alpha^2 s^2 + c^2 p^2})}{p \left[g_* \sqrt{\alpha^2 s^2 + c^2 p^2} K_1(a\sqrt{\alpha^2 s^2 + c^2 p^2}) + (s^2 + c_1^2 p^2) K_0(\alpha^2 s^2 + c^2 p^2) \right]} \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} W^*(r, s, p) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty W(r, s, p) \cos sz dz, \quad \alpha^2 = \frac{E_3}{G}, \quad c^2 = \frac{\rho}{G}, \\ W(r, s, p) &= \int_0^\infty \omega(r, s, p) e^{-pt} dt, \quad c_1^2 = \frac{\rho_1}{E}, \quad g_* = \frac{2\pi a G}{EF}. \end{aligned}$$

$K_0(x)$, $K_1(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

Виконуючи в (8) зворотне перетворення Лапласа та Фур’є, отримаємо потрібну функцію $\omega(r, z, t)$.

Припустимо, що напівпростір безінерційний, а вся інерція зосереджена в стрижні. В цьому випадку ($\rho = 0, c = 0$) вираз (8) приймає вигляд:

$$W^*(r, s, p) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_0}{EF} \frac{K_0(\alpha r s)}{p [g s K_1(\alpha a s) + (s^2 + c_1^2 p^2) K_0(\alpha a s)]}, \quad (9)$$

$$g = g_s, \alpha = 2\pi a G \alpha / EF = 2G \alpha / Ea \quad (F = \pi a^2).$$

Обернення перетворень Лапласа та Фур'є в (9) дає:

$$W(r, z, t) = -\frac{2P_0}{\pi EF} \int_0^\infty \frac{(1 - \cos[\omega(s)t]) K_0(\alpha r s)}{s [g K_1(\alpha a s) + s K_0(\alpha a s)]} \cos z s ds \quad (10)$$

$$\omega(s) = \frac{1}{c_1} \sqrt{s^2 + g s \frac{K_1(\alpha a s)}{K_0(\alpha a s)}}.$$

Зусилля в стрижні $N(z, t)$ та контактне зусилля $\tau(z, t)$ (4) визначаються за формулами:

$$N(z, t) = \frac{2P_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos[\omega(s)t]}{f(s)} \sin z s ds, \quad (11)$$

$$\tau(z, t) = \frac{2P_0 g}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos[\omega(s)t]}{f_1(s)} \cos z s ds, \quad (12)$$

$$f(s) = g \frac{K_1(\alpha a s)}{K_0(\alpha a s)} + s, \quad f_1(s) = g + s \frac{K_0(\alpha a s)}{K_1(\alpha a s)} \quad (S > 0).$$

Враховуючи наближені значення функції $K_0(x)$ при великих додатних аргументах, маємо:
 $f(s) \approx g + s, \quad f_1(s) \approx g + s,$

$$\cos[\omega(s)t] \approx \cos(ts/c_1) \quad (s \rightarrow +\infty)$$

При цьому зусилля в стрижні $N(z, t)$ і та контактне напруження $\tau(z, t)$ виражаються таким чином:

$$N(z, t) = 0 \quad (t^* \leq z^*),$$

$$N(z, t) = \frac{2P_0}{\pi} \{ \text{ci } z^* \sin z^* - \cos z^* \text{si } z^* +$$

$$+ 1/2 [\text{ci}(t^* - z^*) \sin(t^* - z^*) - \cos(t^* - z^*) \text{si}(t^* - z^*)] - \quad (t^* > z^*), \quad (13)$$

$$- 1/2 [\text{ci}(t^* + z^*) \sin(t^* + z^*) - \cos(t^* + z^*) \text{si}(t^* + z^*)] \}$$

$$\tau(z, t) = 0 \quad (t^* \leq z^*),$$

$$\tau(z, t) = -\frac{2P_0 g}{\pi} \{ \text{ci } z^* \cos z^* + \text{si } z^* \sin z^* -$$

$$- 1/2 [\text{ci}(t^* - z^*) \cos(t^* - z^*) + \text{si}(t^* - z^*) \sin(t^* - z^*)] - \quad (t^* > z^*), \quad (14)$$

$$- 1/2 [\text{ci}(t^* + z^*) \cos(t^* + z^*) \text{si}(t^* + z^*) \sin(t^* + z^*)] \}$$

$$z^* = gz, \quad t^* = gt/c_1.$$

Граничний перехід при $\rho_1 \rightarrow 0$ ($c_1 \rightarrow 0$) дає розв'язок відповідної статичної задачі:

$$N(z) = (2P_0/\pi)(\text{ci } z^* \sin z^* - \text{si } z^* \cos z^*) \tag{15}$$

$$\tau(z) = -(2P_0 g/\pi)(\text{ci } z^* \cos z^* + \text{si } z^* \sin z^*). \tag{16}$$

Великим значенням параметра s (11), (12) відповідають малі значення координати z .

Отже, поведінка зусиль у стрижні та контактних напружень між стрижнем і напівпростором при малих z повністю визначається формулами (13)–(16). З цих розв’язків випливає, що знайдені значення контактної напруженості на лінії ($r = a, z = 0$) мають логарифмічну особливість.

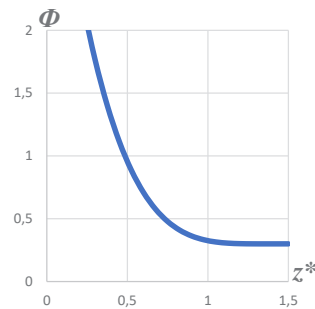


Рис. 2

На рис. 2 представлена величина $\Phi(z^*) = -(\text{ci } z^* \cos z^* + \text{si } z^* \sin z^*)$, що визначає поведінку контактних напружень у статичній задачі при малих значеннях координати z .

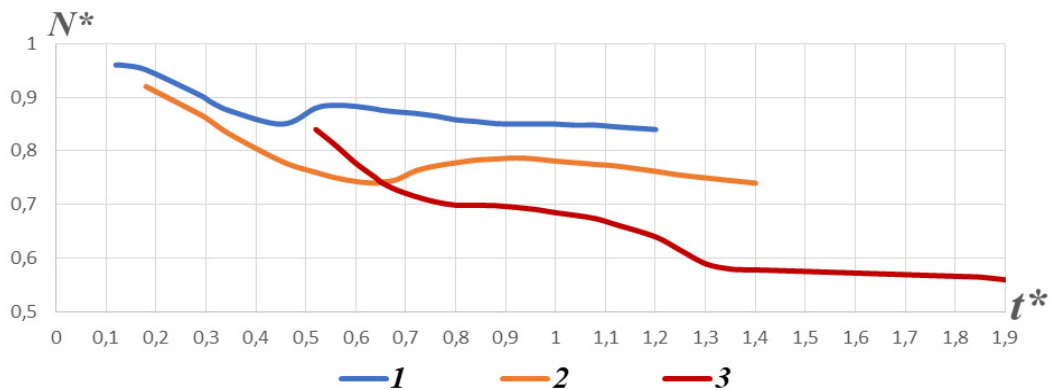


Рис. 3

На рис. 3 представлені результати розрахунку безрозмірних зусиль в стрижні ($N^* = \frac{N}{P_0}$) для перетинів $z^*=0,1$ (крива 1), $z^*=0,2$ (крива 2), $z^*=0,3$ (крива 3) в залежності від часу t^* . У випадку, коли інерційні сили не враховуються, значення зусилля в стрижні не залежать від часу (квазістатичний розрахунок) і на графіку виглядають як горизонтальні прямі.

При малих додатних значеннях аргументу x справедливі представлення

$$K_0(x) \approx \ln(2/\gamma x), \quad K_1(x) \approx 1/x \tag{17}$$

Тому при малих δ , що відповідає великим значенням координати z , зусилля в стрижні $N(z)$ (статична задача) можна представити у вигляді:

$$N(z) = \frac{2P_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} \frac{\sin zs}{s(\lambda(s) + 1)} ds \right], \quad (18)$$

$$\lambda(s) = \frac{Ea^2s^2}{2G} \ln \frac{2}{raas}. \quad (r - \text{константа Ейлера}).$$

Інтеграл в (18) при малих s достатньо швидко прямує до $\pi/2$.

Отже, при великих значеннях z характер поведінки зусиль у стрижні та контактних напружень між стрижнем і напівпростором такий самий, як і в статичній задачі про тонке пружне включення [4].

Висновки

Розв'язана задача про пружний напівпростір з включенням циліндричної форми малого діаметру, що знаходиться під динамічним навантаженням. Знайдено основні функції, що визначають напружено-деформований стан анізотропного тіла, виконано граничні переходи і порівняння з відомими розв'язками інших задач для тіл з прямолінійною анізотропією.

Список використаної літератури

1. Encyclopedia of Computational Mechanics / E. Stein, R.de Borst, T.J.R. Hughes, eds. Vol. 1. Solids, Vol. 2. Fluids. Wiley, 2004.
2. Vetrov O.S. Shevchenko V.P. Study of the stress-strain state of ortotropic shells under the action of dynamical impulse loads. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012. 183, № 2. P. 231–240.
3. Кагадій Т.С., Білова О.В., Щербина І.В., Шпорта А.Г. Математичне моделювання в задачах геометрично нелінійної теорії пружності. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2021. Т. 3. № 2.1. С. 107–117.
4. Кагадій Т.С., Шпорта А.Г., Білова О.В., Щербина І.В. Напружено-деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим елементом. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2020. Т. 3. № 2.1. С. 107–116.
5. Кагадій Т.С., Білова О.В., Щербина І.В. Застосування методу малого параметру при моделюванні задач теорії в'язкопружності. *Вісник Херсонського національного університету*. 2019. № 2(69). Ч. 3. С. 69–76.
6. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / ред.: І. О. Луковський, Г. С. Кіт, Р. М. Кушнір. Львів : Ін-т приклад. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. 412 с.
7. Wriggers P., Nackenhorst U. Analysis and Simulation of Contact Problems. LNACM Vol. 27, Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. 408 p.
8. С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов, В. Ф. Лазар. Динамічні процеси в тіла(матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 2. Плоскі динамічні контактні задачі для півплощини з початковими напруженнями. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту*. 2021. Вип. 38, № 1. С. 114–122.
9. A. Chao Correias, A. Casares Crespo, H. Ghasemnejad, G. Roshan. Analytical Solutions to Predict Impact Behaviour of Stringer Stiffened Composite Aircraft Panels. *Applied Composite Materials. An International Journal for the Science and Application of Composite Materials*. Vol. 28, 2021, pp. 1237–1254.

References

1. Encyclopedia of Computational Mechanics (2004). (E.Stein, R.de Borst, T.J.R. Hughes, Eds.). Vol. 1. Solids, Vol. 2. Fluids. Wiley [in English]
2. Vetrov, O.S., & Shevchenko, V.P. (2012). Study of the stress-strain state of ortotropic shells under the action of dynamical impulse loads. *Journal of Mathematical Sciences*. 183, № 2. P. 231–240 [in English]
3. Kahadii, T.S., Bilova, O.V., Shcherbyna, I.V., & Shporta, A.H. (2021). Matematychnе modeliuвання v zadachakh heometrychno nelineinoi teorii pruzhnosti [Mathematical modeling in problems of geometrically nonlinear theory of elasticity]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання – Applied problems of mathematical modeling*. 3 (2.1), 107–117 [in Ukrainian]

4. Kahadii, T.S., Shporta, A.H., Bilova, O.V., & Shcherbyna, I.V. (2020). Napruzhenno-deformovanyi stan sharuvatoi osnovy z pidkripliuuchym elementom [Stress-deformed state of a layered base with a reinforcing element]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання – Applied problems of mathematical modeling*. KhNTU. 3 (2.1), 107–116 [in Ukrainian]
5. Kahadii, T.S., Bilova, O.V., & Shcherbyna, I.V. (2019). Zastosuvannya metodu maloho parametru pry modeliuvanni zadach teorii v iazkopruzhnosti [Application of the small parameter method in modeling problems of the theory of viscoelasticity]. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho universytetu – Bulletin of the Kherson National University*. 2 (69). Ch.3, 69–76 [in Ukrainian]
6. Matematychni problemy mekhaniky neodnorodnykh struktur (2014). [Mathematical problems of the mechanics of inhomogeneous structures]. (Lukovskyi, I.O., Kit, H.S., & Kushnir, R.M. Eds.). Lviv : In-t pryklad. problem mekhaniky i matematyky im. Ya. S. Pidstryhacha NAN Ukrainy [in Ukrainian]
7. Wriggers, P., & Nackenhorst, U. (2006). Analysis and Simulation of Contact Problems. LNACM Vol. 27, Berlin–Heidelberg: Springer [in English]
8. Babych, S.Yu., Hlukhov, Yu.P., & Lazar, V.F. (2021). Dynamichni protsesy v tila(materialakh) z pochatkovyvy napruzheniamy. Chastyna 2. Ploski dynamichni kontaktni zadachi dlia pivploshchyny z pochatkovyvy napruzheniamy [Dynamic processes in bodies (materials) with initial stresses. Part 2. Planar dynamic contact problems for a half-plane with initial stresses]. *Nauk. visnyk Uzhhorod. un-tu – Science Uzhhorod Herald. university*. Vyp. 38, № 1. S. 114–122.
9. A. Chao Correias, A. Casares Crespo, H. Ghasemnejad, G. Roshan. (2021). Analytical Solutions to Predict Impact Behaviour of Stringer Stiffened Composite Aircraft Panels. *Applied Composite Materials*. Vol. 28, pp. 1237–1254 [in English].

Кагадій Тетяна Станіславівна – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: tkagadiy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6116-4971.

Білова Оксана Вікторівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри економічної інформатики Українського державного університету науки і технологій. E-mail: okbelova00@gmail.com, okbilova@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6258-6164.

Щербина Ірина Володимирівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики, фізики та загально інженерних дисциплін Дніпровського державного аграрно-економічного університету. E-mail: sherbinaiv@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3968-4326.

Шпорта Анна Григорівна – к.ф.-м.н., доцент кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: shportaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1260-7358

Говоруха Володимир Борисович – д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри вищої математики, фізики та загально інженерних дисциплін Дніпровського державного аграрно-економічного університету. E-mail: govorukhavb@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-0936-9272.

Kahadii Tetiana Stanislavivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Applied Mathematics of the National Technical University “Dnipro Polytechnic”. E-mail: tkagadiy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6116-4971.

Bilova Oksana Viktorivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Economic Informatics of the Ukrainian State University of Science and Technology. E-mail: okbelova00@gmail.com, okbilova@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6258-6164.

Shcherbyna Iryna Volodymyrivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer at the Department of Advanced Mathematics, Physics and General Engineering Disciplines of the Dnipro State Agrarian and Economic University. E-mail: sherbinaiv@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3968-4326.

Shporta Anna Hryhorivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer at the Department of Applied Mathematics of the National Technical University “Dniprovsk Polytechnic”. E-mail: shportaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1260-7358.

Govorukha Volodymyr Borysovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Physics and General Engineering Disciplines, Dnipro State Agrarian and Economic University. E-mail: govorukhavb@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-0936-9272.