ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2016, вип. **21**

УДК 517.5

Б. Г. Пелешенко*, **Т. М. Семиренко****

* Дніпровський державний аграрно-економічний університет,
Дніпро, 49600.*E-mail: dsaupelesh@ukr.net*
** Дніпровський державний аграрно-економічний університет,
Дніпро, 49600.*E-mail: tsemyrenko@ukr.net*

Про інтерполяцію операторів слабкого типу $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$ у просторах Лоренца у граничних випадках

Розглядаються квазілінійні оператори слабкого типу $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$, аналоги операторів Кальдерона, Бенета для вгнутих та опуклих функцій $\phi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\phi_1(t)$, $\psi_1(t)$. Доведені теореми інтерполяції операторів із простору Лоренца $\Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$ в простір $\Lambda_{\psi,a}(\mathbb{R}^n)$ в випадках, коли $0 < b \leq a \leq 1$ і відношення функції $\phi^{\frac{1}{b}}(t)$ до однієї з функцій $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ є повільно змінною функцією у нулі та на нескінченності.

Ключові слова: простір Лоренца, інтерполяція операторів, повільно змінні функції, незростаюча перестановка функцій, показники розтягу.

Рассматриваются квазилинейные операторы слабого типа $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$, аналоги операторов Кальдерона, Бенета для вогнутых и выпуклых функций $\phi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\phi_1(t)$, $\psi_1(t)$. Доказаны теоремы интерполяции операторов из пространства Лоренца $\Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\Lambda_{\psi,a}(\mathbb{R}^n)$ в случаях, когда $0 < b \leq a \leq 1$ и соотношение функции $\phi^{\frac{1}{b}}(t)$ к одной из функций $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ является медленно меняющейся функцией в нуле и в бесконечности.

Ключевые слова: пространство Лоренца, интерполяция операторов, медленно меняющиеся функции, невозрастающая перестановка функций, показатели растяжения.

The quaslinear operators of weak type $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$, analogs of the Calderon, Bennett operators in the case of concave and convex functions $\phi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\phi_1(t)$, $\psi_1(t)$ are considered. The theorems of interpolation of these operators from the Lorentz space $\Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$ into the space $\Lambda_{\psi,a}(\mathbb{R}^n)$ in cases when $0 < b \leq a \leq 1$ and relation of function $\phi^{\frac{1}{b}}(t)$ to one of functions $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ is slowly varying function are proved.

Key words: the Lorentz space, operators interpolation, slowly varying functions, nonincreasing permutation of functions, index of tension.

1. Вступ

У роботі [1] доведені теореми інтерполяції у просторах типу Лоренца при лінійних операторах умовно слабких типів (p_0, q_0), (p_1, q_1), де $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$. Важливу роль відіграла нерівність, що виконується для довільного оператора T і будь-якої функції $f(x)$ з суми просторів Лоренца $L^{p_0,1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1,1}(\mathbb{R}^n)$:

$$(Tf)^*(t) \leq ASf(t) = A \int_0^\infty f^*(s) d \min_{i=0,1} \left\{ \frac{s^{1/p_i}}{t^{1/q_i}} \right\}.$$

Метод А.Кальдерона застосовувався Д.Бойдом [2], Р.Шарплі [3], С.Г.Крейном, Є.М.Семеновим [4], Є.А.Павловим [5] та іншими для доведення теорем інтерполяції у перестановочно-інваріантних просторах лінійних операторів, що обмежено діють із пари просторів Лоренца $(\Lambda_{\phi_0}(\mathbb{R}^n), \Lambda_{\phi_1}(\mathbb{R}^n))$ у пару просторів Марцинкевича $(M_{\bar{\psi}_0}(\mathbb{R}^n), M_{\bar{\psi}_1}(\mathbb{R}^n))$ у випадку, коли $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$, $\bar{\psi}_0(t)$, $\bar{\psi}_1(t)$ - вгнуті функції. У роботі [6] доведені теореми інтерполяції для квазілінійних операторів, що обмежено діють із пари банахових просторів у пару просторів Марцинкевича.

У [7], [8] для квазілінійних операторів T слабкого типу (p_0, q_0, p_1, q_1), $0 < p_0 < p_1 \le \infty$, $0 < q_0 < q_1 \le \infty$, що задовольняють при будь-якому $t > 0$ і $f(x) \in L^{p_0,1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1,1}(\mathbb{R}^n)$ нерівності

$$(Tf)^*(t) \le CWf^*(t) = C\left\{ t^{1/q_0} \int\limits_0^{t^m} f^*(s) s^{1/p_0 - 1} ds + t^{1/q_1} \int\limits_{t^m}^{\infty} f^*(s) s^{1/p_1 - 1} ds \right\}, \qquad (1)$$

де $m = (1/q_0 - 1/q_1)/(1/p_0 - 1/p_1)$, доведені теореми інтерполяції у просторах Лоренца-Зігмунда $L^{p,a}(logL)^a(\mathbb{R}^n)$. Використання оператора W дозволило отримати загальний метод інтерполяції квазілінійних операторів умовно слабкого типу (p_0, q_0), обмежено діючих із простору $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ у простір $BMO(\mathbb{R}^n)$, а також умовно слабких типів (p_0, q_0), (p_1, q_1).

У [9] розглянуті квазілінійні оператори слабкого типу $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$, які є узагальненнями операторів (1) у випадку вгнутих і опуклих функцій $\phi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\phi_1(t)$, $\psi_1(t)$ і досліджені у роботах [2] - [4] у випадку $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ - вгнуті, $\phi_1(t) \ne signt$.

Отримана обмеженість квазілінійних операторів у відповідних просторах [10], [11] дала можливість у [11] дослідити інтерполяцію операторів слабкого типу (p_0, q_0, p_1, q_1) із простору Лоренца $\Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$ у простір $\Lambda_{\psi,a}(\mathbb{R}^n)$ за умови, що $0 < b \le a \le 1$ і показники розтягу функції ϕ [4] задовольняють нерівностям $\delta^b_{\phi_1} < \gamma_\phi \le \delta_\phi < \gamma^b_{\phi_0}$.

Інтерполяція квазілінійних операторів слабкого типу $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$ у просторах Лоренца, коли відношення однієї із фундаментальних функцій $\phi_0(t)$,$\phi_1(t)$ крайніх просторів $\Lambda_{\phi_0,1}(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda_{\phi_1,1}(\mathbb{R}^n)$ до функції, що визначає тип простору Лоренца $\Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$, є функцією, що повільно змінюється у нулі та на нескінченності і показник сумовності $a \ge b > 1$, доведена у [12].

У даній роботі доведена обмеженість квазілінійних операторів слабкого типу $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$ із простору Лоренца $\Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$ у простір $\Lambda_{\psi,a}(\mathbb{R}^n)$ у випадку, коли $0 < b \le a \le 1$, і відношення однієї з фундаментальних функцій $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$ просторів $\Lambda_{\phi_0,1}(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda_{\phi_1,1}(\mathbb{R}^n)$ до функції, що визначає тип простору Лоренца $\Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$, є функцією, повільно змінною у нулі та на нескінченності.

Теореми є новими і можуть використовуватися у теоремах вкладення, у теорії наближення функцій, у теорії диференціювання інтегралів у $\mathbb{R}^n$, встановленні апріорних оцінок диференціальних рівнянь у частинних похідних.

2. Позначення та визначення.

Нехай Φ - об'єднання функції $\phi(t) = signt$ і множини додатних, зростаючих, вгнутих або опуклих на півпрямій $[0,\infty)$ функцій $\phi(t)$, що задовольняють умовам $\lim\limits_{t\to+0}\phi(t) = \phi(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\phi(t) = \infty$ і $\phi(2t) = O(\phi(t))$, коли $t \to +0$, $t \to \infty$. Для функції $\phi(t)$ із множини Φ позначимо через $M_\phi(t) = \sup\limits_{0<s<\infty}\frac{\phi(st)}{\phi(s)}$ $(0 < t < \infty)$ і γ_ϕ, δ_ϕ відповідно її нижній та верхній показник розтягу [4].

Нехай LM - множина повільно змінних у нулі та у нескінченності функцій $h(t)$, тобто таких додатних вимірних на півосі $(0,\infty)$ функцій, що $\lim\limits_{t\to+0}\frac{h(\lambda t)}{h(t)} = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{h(\lambda t)}{h(t)} = 1$ для довільного $\lambda > 0$.

Для заданої майже всюди додатної, локально інтегровної на півпрямій $(0,\infty)$ функції $g(t)$ і $0 < p < \infty$ ваговий простір $L_{p,g}(0,\infty)$ визначається як множина вимірних функцій $f(x)$ на $(0,\infty)$ із скінченною квазінормою $(0 < p < 1)$ або нормою $(1 \le p < \infty)$

$$\|f\|_{p,g} = \left\{\int\limits_0^\infty |f(t)|^p g(t)dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Позначимо через $S(\mathbb{R}^n)$ простір дійсних вимірних функцій на $\mathbb{R}^n$ і $f^*(t)$ - незростаючу перестановку модуля функції $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$.

Нехай $a \in (0,\infty)$ і $\phi(t)$ - неспадаюча абсолютно неперервна функція на півпрямій $(0,\infty)$ така, що $\phi(0) = 0$. Простір Лоренца $\Lambda_{\phi,a}(\mathbb{R}^n)$ складаєтсья з функцій $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, для яких скінченна квазінорма $\|f\|_{\Lambda_{\phi,a}} = \left\{\int\limits_0^\infty (f^*(t))^a d\phi(t)\right\}^{\frac{1}{a}}$ у випадку $\phi(t) \ne signt$, $0 < a < \infty$, або квазінорма $\|f\|_{\Lambda_{\phi,\infty}} = \sup\limits_{0<t<\infty} f^*(t)\phi(t)$, якщо $a = \infty$. Будемо позначати $\Lambda_{\phi,a}(\mathbb{R}^n)$ символом $\Lambda_\phi(\mathbb{R}^n)$, якщо $a = 1$. У випадку, коли $\phi(t) = signt$, простір $\Lambda_{\phi,\infty}(\mathbb{R}^n)$ співпадає з простором $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Нехай функції $\phi_0(t), \phi_1(t) \in \Phi$ такі, що $\phi(t) \ne signt$ і $\frac{\phi_0(t)}{\phi_1(t)}$ зростає на $(0,\infty)$. Простір $\Lambda_{\phi_0}(\mathbb{R}^n) + \Lambda_{\phi_1}(\mathbb{R}^n)$ складається з функцій $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, для яких сума $\int\limits_0^1 f^*(t)d\phi_0(t) + \int\limits_1^\infty f^*(t)d\phi_1(t)$ скінченна. Якщо $\phi_1(t) = signt$ і виконується умова $\sup\limits_{0<u<1}(M_{\phi_0}(u)(1-lnu)) \le 1$, то через $\Lambda_{\phi_0}(\mathbb{R}^n) + L^{\infty 1}(\mathbb{R}^n)$ позначається простір таких функцій $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, що $\int\limits_0^1 f^*(t)d\phi_0(t) + \int\limits_1^\infty f^*(t)t^{-1}dt < \infty$.

Далі будемо вважати, що функції $\phi_0(t), \phi_1(t), \psi_0(t), \psi_1(t) \in \Phi$, $\frac{\phi_0(t)}{\phi_1(t)}$ зростає на $(0,\infty)$, область значень $\frac{\phi_0(t)}{\phi_1(t)}$ співпадає з областю значень $\frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}$ і $m(t)$ - вимірний додатний розв'язок рівняння

$$\frac{\phi_0(m(t))}{\phi_1(m(t))} = \frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}. \tag{2}$$

Квазилінійний оператор T називається оператором слабкого типу $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$, якщо знайдеться таке $C > 0$, що для довільної $f(x) \in \Lambda_{\phi_0}(\mathbb{R}^n) + \Lambda_{\phi_1}(\mathbb{R}^n)$ і $t > 0$ виконується нерівність

$$(Tf^*)(t) \leq C \left\{ (\psi_0(t))^{-1} \int\limits_0^{m(t)} f^*(u) d\phi_0(u) + (\psi_1(t))^{-1} \int\limits_{m(t)}^{\infty} f^*(u) d\phi_1(u) \right\},$$

коли $\phi_1(t) \neq signt$, або нерівність

$$(Tf^*)(t) \leq C \left\{ (\psi_0(t))^{-1} \int\limits_0^{m(t)} f^*(u) d\phi_0(u) + (\psi_1(t))^{-1} \int\limits_{m(t)}^{\infty} f^*(u) u^{-1} du \right\},$$

коли $\phi_1(t) = signt$ і $\sup\limits_{0<u<1} (M_{\phi_0}(u)(1 - lnu)) \leq 1$.

Нехай $\phi(t) \in \Phi$, для довільного $t > 0$ і будь-якої невід'ємної незростаючої на $(0, \infty)$ функції $g(t)$ покладемо:

$$A_\phi g(t) = [\phi(t)]^{-1} \int\limits_0^t g(u) d\phi(u), \quad \phi(t) \neq signt;$$

$$B_\phi g(t) = \begin{cases} [\phi(t)]^{-1} \int\limits_t^\infty g(u) d\phi(u), & \phi(t) \neq signt, \\ \int\limits_t^\infty g(u) u^{-1} du, & \phi(t) = signt; \end{cases}$$

$$C_\phi g(t) = [\phi(t)]^{-1} \sup_{0<u\leq t} (\phi(u) g(u)).$$

У роботі через $C_1, C_2, \ldots$ позначаються додатні константи, що залежать від несуттєвих параметрів (різні у різних теоремах).

3. Відомі результати.

Для доведення теорем 4 - 7 нам знадобляться теореми 1-3, доведені у роботі [11].

Теорема 1. *Нехай* $0 < b \leq a \leq 1$, $\tilde{\phi}(t) \in \Phi$, $\tilde{\phi}(t) \neq signt$, *функції* $g_1(t)$ *і* $g_2(t)$ - *невід'ємні, локально інтегровні на* $(0, \infty)$ *і виконується умова* $\int\limits_1^\infty [\tilde{\phi}(t)]^{-a} g_1(t) dt < \infty$. *Якщо величина*

$$\gamma(\tilde{\phi}, g_1, g_2, a, b) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\left\{ \int\limits_0^t g_1(z) dz + \tilde{\phi}^a(t) \int\limits_t^\infty \left[\tilde{\phi}(z)\right]^{-a} g_1(z) dz \right\}^{\frac{1}{a}}}{\left\{ \int\limits_0^t g_2(z) dz \right\}^{\frac{1}{b}}}$$

є скінченною, то для довільної незростаючої невід'ємної функції $f(t)$ із простору $L_{b,g_2}(0,\infty)$ з вагою $g_2(t)$ виконується точна нерівність

$$\left\{\int\limits_0^\infty \left[\left(A_{\tilde{\phi}}f\right)(t)\right]^a g_1(t)dt\right\}^{\frac{1}{a}} \leq \gamma(\tilde{\phi}, g_1, g_2, a, b)\left\{\int\limits_0^t f^b(t)g_2(t)dt\right\}^{\frac{1}{b}}.$$

Теорема 2. *Нехай $0 < b \leq a \leq 1$, $\tilde{\phi}(t) \in \Phi$, $\tilde{\phi}(t) \neq signt$, функції $g_1(t)$ і $g_2(t)$ - невід'ємні, локально інтегровні на $(0,\infty)$ і виконується умова $\int\limits_0^1[\tilde{\phi}(t)]^{-a}g_1(t)dt < \infty$. Якщо величина*

$$\delta(\tilde{\phi}, g_1, g_2, a, b) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\left\{\int\limits_0^t[\tilde{\phi}(t)-\tilde{\phi}(z)]^a[\tilde{\phi}(z)]^{-a}g_1(z)dz\right\}^{\frac{1}{a}}}{\left\{\int\limits_0^t g_2(z)dz\right\}^{\frac{1}{b}}}$$

є скінченною, то для довільної незростаючої невід'ємної функції $f(t)$ із простору $L_{b,g_2}(0,\infty)$ виконується точна нерівність

$$\left\{\int\limits_0^\infty \left[\left(B_{\tilde{\phi}}f\right)(t)\right]^a g_1(t)dt\right\}^{\frac{1}{a}} \leq \delta(\tilde{\phi}, g_1, g_2, a, b)\left\{\int\limits_0^\infty f^b(t)g_2(t)dt\right\}^{\frac{1}{b}}.$$

Теорема 3. *Нехай $0 < b \leq a \leq 1$, $\tilde{\phi}(t) = signt$, функції $g_1(t)$ і $g_2(t)$ - невід'ємні, локально інтегровні на $(0,\infty)$ і виконується умова $\int\limits_0^1 ln^a\frac{t}{z}g_1(z)dz < \infty$. Якщо величина*

$$\eta(g_1, g_2, a, b) = \sup_{0<t<\infty}\left(\left\{\int\limits_0^t\left[ln\frac{t}{z}\right]^a g_1(z)dz\right\}^{\frac{1}{a}}\left\{\int\limits_0^t g_2(z)dz\right\}^{-\frac{1}{b}}\right)$$

є скінченною, то для довільної незростаючої невід'ємної функції $f(t)$ із простору $L_{b,g_2}(0,\infty)$ виконується точна нерівність

$$\left\{\int\limits_0^\infty \left[\left(B_{\tilde{\phi}}f\right)(t)\right]^a g_1(t)dt\right\}^{\frac{1}{a}} \leq \eta(g_1, g_2, a, b)\left\{\int\limits_0^\infty f^b(t)g_2(t)dt\right\}^{\frac{1}{b}}.$$

4. Отримані результати.

Доведемо основні теореми статті.

Теорема 4. *Нехай* $0 < b \leq a \leq 1$, $a \in (0,1]$, *функції* $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ *із множини* Φ *такі, що* $\delta_{\phi_1} < \gamma_{\phi_0}$, $\phi_1(t) \neq signt$, $\frac{\phi_0(t)}{\phi_1(t)}$ *зростає,* $\frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}$ *зростає або спадає, області значень функцій* $\frac{\phi_0(t)}{\phi_1(t)}$ *і* $\frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}$ *співпадають.*

Нехай $h(t)$ *- неперервна функція із множини* LM *така, що* $\int\limits_0^1 \frac{dt}{th(t)} = \infty$, $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{th(t)} < \infty$ *і* $\phi(t) = \left(\int\limits_0^t [\phi_1(t) - \phi_1(u)]^a \frac{\phi_0^a(u)}{\phi_1^a(u)} \frac{du}{uh(u)} + \int\limits_0^t \phi_0^a(u) \frac{du}{uh(u)} + \phi_0^a(t) \int\limits_t^\infty \frac{du}{uh(u)} \right)^{\frac{b}{a}}$, $t \in (0, \infty)$.

Якщо

$$\sup_{0<t<\infty} \frac{\left[\int\limits_0^t [\phi_1(t) - \phi_1(u)]^a \frac{\phi_0^a(u)}{\phi_1^a(u)} \frac{du}{uh(u)} + \int\limits_0^t \phi_0^a(u) \frac{du}{uh(u)} + \phi_0^a(t) \int\limits_t^\infty \frac{du}{uh(u)} \right]^{\frac{1}{a}}}{\phi^{\frac{1}{b}}(t)} < \infty$$

і T *- квазілінійний оператор слабкого типу* $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$, *то існує така константа* $C_1 > 0$, *що для усіх функцій* $f(x) \in \Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$ *виконується нерівність*

$$\left[\int\limits_0^\infty (\psi_0(m^{-1}(t))(Tf)^*(m^{-1}(t)))^a \frac{dt}{th(t)} \right]^{\frac{1}{a}} \leq C_1 \left[\int\limits_0^\infty (f^*(t))^b d\phi(t) \right]^{\frac{1}{b}}.$$

Доведення. Спочатку відмітимо, що з умови теореми 4

$$\sup_{0<t<\infty} \frac{\left[\int\limits_0^t [\phi_1(t) - \phi_1(u)]^a \frac{\phi_0^a(u)}{\phi_1^a(u)} \frac{du}{uh(u)} + \int\limits_0^t \phi_0^a(u) \frac{du}{uh(u)} + \phi_0^a(t) \int\limits_t^\infty \frac{du}{uh(u)} \right] |^{\frac{1}{a}}}{\phi^{\frac{1}{b}}(t)} < \infty$$

випливає виконання умов теореми 1 (теореми 1 із [11]) для функцій $\tilde{\phi}(t) = \phi_0(t)$, $g_1(t) = \frac{\phi_0^a(t)}{th(t)}$, $g_2(t) = \phi'(t)$ і теореми 2 (теореми 2 із [11]) для $\tilde{\phi}(t) = \phi_1(t)$ і тих самих функцій $g_1(t)$ і $g_2(t)$.

Тоді з цих теорем і задання $\phi(t)$ для будь-якої функції $f(x) \in \Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$ маємо:

$$\left[\int\limits_0^\infty \left([A_{\phi_0} + B_{\phi_1}] f^*(t) \right)^a \phi_0^a(t) \frac{dt}{th(t)} \right]^{\frac{1}{a}} \leq \left[\int\limits_0^\infty (A_{\phi_0} f^*(t))^a \phi_0^a(t) \frac{dt}{th(t)} + \int\limits_0^\infty (B_{\phi_1} f^*(t))^a \phi_0^a(t) \frac{dt}{th(t)} \right]^{\frac{1}{a}} \leq$$

$$\left[\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t f^*(u) d\phi_0(u) \right)^a \frac{dt}{th(t)} + \left(\int\limits_0^t f^*(u) d\phi_1(u) \right)^a \frac{\phi_0^a(t) dt}{\phi_1^a(t) th(t)} \right]^{\frac{1}{a}} \leq C_2 \left[\int\limits_0^\infty (f^*(t))^b \phi'(t) dt \right]^{\frac{1}{b}}. \tag{3}$$

Так як інтеграли $\int\limits_0^t f^*(t) d\phi_0(t)$, $\int\limits_t^\infty f^*(t) d\phi_1(t)$ збігаються при будь-якому $t \in (0, \infty)$, то $f(x) \in \Lambda_{\phi_0}(\mathbb{R}^n) + \Lambda_{\phi_1}(\mathbb{R}^n)$. Якщо T - оператор слабкого типу $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$, то із роботи маємо, що для довільної функції $f(x) \in \Lambda_{\phi_0}(\mathbb{R}^n) + \Lambda_{\phi_1}(\mathbb{R}^n)$ виконується або нерівність

$$\psi_0(t)\left(\left[C_{\psi_0} + D_{\psi_1}\right](Tf^*)(t)\right) \leq C_3\phi_0(t)\left(\left[A_{\psi_0} + B_{\psi_1}\right]f^*(m(t))\right) \tag{4}$$

у випадку, коли $\frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}$ зростає, або нерівність

$$\psi_0(t)\left(\left[C_{\psi_1} + D_{\psi_0}\right](Tf^*)(t)\right) \leq C_3\phi_0(t)\left(\left[A_{\psi_0} + B_{\psi_1}\right]f^*(m(t))\right), \tag{5}$$

якщо $\frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}$ спадає.

Враховуючи, що $(Tf)^*(t) \leq C_{\psi_i}(Tf)^*(t)$, $(Tf)^*(t) \leq D_{\psi_i}(Tf)^*(t)$, $i = 1, 2$, для довільного $t > 0$, то з нерівностей (4), (5), (3) отримуємо твердження теореми. Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Нехай $0 < b \leq a \leq 1$, $a \in (0, 1]$, функції $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ із множини Φ такі, що $\delta_{\phi_1} < \gamma_{\phi_0}$, $\phi_1(t) \neq signt$, $\frac{\phi_0(t)}{\phi_1(t)}$ зростає, $\frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}$ зростає або спадає, області значень функцій $\frac{\phi_0(t)}{\phi_1(t)}$ і $\frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}$ співпадають.*

Нехай $h(t)$ - неперервна функція із множини LM така, що $\int\limits_0^1 \frac{dt}{th(t)} < \infty$, $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{th(t)} = \infty$ і $\phi^{\frac{a}{b}}(t) = \phi_1^a(t)\int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)} + \phi_0^a(t)\int\limits_t^\infty \frac{\phi_1^a(u)}{\phi_0^a(u)}\frac{du}{uh(u)}$, $t \in (0, \infty)$.

Якщо T - квазілінійний оператор слабкого типу $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$, то існує така константа $C_4 > 0$, що для усіх функцій $f(x) \in \Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$ виконується нерівність

$$\left[\int\limits_0^\infty (\psi_0(m^{-1}(t))(Tf)^*(m^{-1}(t)))^a \frac{dt}{th(t)}\right]^{\frac{1}{a}} \leq C_4\left[\int\limits_0^\infty (f^*(t))^b d\phi(t)\right]^{\frac{1}{b}}.$$

Доведення. Спочатку відмітимо, що для будь-якого $\phi_1(t) \in \Phi$ і $t \in (0, \infty)$ виконуються нерівності

$$\int\limits_0^t (\phi_1(t) - \phi_1(u))^a \frac{du}{uh(u)} \leq \phi_1^a(t)\int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)}, \quad \int\limits_0^t \phi_1^a(t)\frac{du}{uh(u)} \leq \phi_1^a(t)\int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)}.$$

Теорема 5 доводиться за допомогою тих самих міркувань, що і для теореми 4. Із задання функції $\phi(t)$ випливає, що

$$\sup_{0<t<\infty} \frac{\left[\int\limits_0^t \left[\phi_1(t) - \phi_1(u)\right]^a \frac{du}{uh(u)} + \int\limits_0^t \phi_1^a(u)\frac{du}{uh(u)} + \phi_0^a(t)\int\limits_t^\infty \frac{\phi_1^a(u)}{\phi_0^a(u)}\frac{du}{uh(u)}\right]^{\frac{1}{a}}}{\phi^{\frac{1}{b}}(t)} < \infty.$$

Тоді нерівність, вірну для будь-якої функції $f(x) \in \Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left[\int\limits_0^\infty \left(\left[A_{\phi_0} + B_{\phi_1}\right]f^*(t)\right)^a \phi_1^a(t)\frac{dt}{th(t)}\right]^{\frac{1}{a}} \leq C_5\left[\int\limits_0^\infty \left(f^*(t)\right)^b d\phi(t)\right]^{\frac{1}{b}} \tag{6}$$

отримуємо за допомогою теорем 1 і 2 (теорем 1, 2 із [11]), застосованих відповідно до функцій $\tilde{\phi}(t) = \phi_0(t)$, $g_1(t) = \frac{\phi_1^a(u)}{uh(u)}$, $g_2(t) = \phi'(t)$ і для $\tilde{\phi}(t) = \phi_1(t)$, $g_1(t) = \frac{\phi_1^a(u)}{uh(u)}$, $g_2(t) = \phi'(t)$. З умови теореми маємо для довільного $t \in (0, \infty)$:

$$\left[\int_0^\infty (A_{\phi_0} f^*(t))^a \phi_1^a(t) \frac{dt}{th(t)}\right]^{\frac{1}{a}} \leq C_6 \left[\int_0^\infty (f^*(t))^b \, d\phi(t)\right]^{\frac{1}{b}}, \tag{7}$$

$$\left[\int_0^\infty (B_{\phi_1} f^*(t))^a \phi_1^a(t) \frac{dt}{th(t)}\right]^{\frac{1}{a}} \leq C_7 \left[\int_0^\infty (f^*(t))^b \, d\phi(t)\right]^{\frac{1}{b}}. \tag{8}$$

Далі, застосовуючи нерівності $(Tf)^*(t) \leq C_{\psi_i}(Tf)^*(t)$, $(Tf)^*(t) \leq D_{\psi_i}(Tf)^*(t)$, $i = 1, 2$, вірні для довільного $t > 0$, і (4), (5), (6), отримаємо доведення теореми 5.

Теорема 6. *Нехай $0 < b \leq a \leq 1$, $a \in (0, 1]$, $\phi_1(t) = signt$ і функції $\phi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ із множини Φ такі, що $\gamma_{\phi_0} > 0$, функція $\frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}$ зростає або спадає і її множиною значень є $(0, \infty)$.*

Нехай $h(t)$ - неперервна функція із множини LM така, що $\int_0^1 \frac{dt}{th(t)} = \infty$, $\int_1^\infty \frac{dt}{th(t)} < \infty$ і $\phi^{\frac{a}{b}}(t) = \int_0^t \phi_0^a(u) ln^a \frac{t}{u} \frac{du}{uh(u)} + \phi_0^a(t) \int_t^\infty \frac{du}{uh(u)}$, $t \in (0, \infty)$.

Якщо T - квазилінійний оператор слабкого типу $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$, то існує така константа $C_8 > 0$. що для будь-якої функції $f \in \Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$ виконується нерівність

$$\left[\int_0^\infty \left(\psi_0(m^{-1}(t))(Tf)^*(m^{-1}(t))\right)^a \frac{dt}{th(t)}\right]^{\frac{1}{a}} \leq C_8 \left[\int_0^\infty (f^*(t))^b \, d\phi(t)\right]^{\frac{1}{b}}.$$

Доведення. Спочатку відмітимо, що для довільного $t \in (0, \infty)$ виконується нерівність

$$\int_0^t \phi_0^a(u) \frac{du}{uh(u)} \leq \int_0^t \phi_0^a(u) ln^a \frac{t}{u} \frac{du}{uh(u)},$$

з якої випливає виконання умови

$$\sup_{0<t<\infty} \frac{\left[\int_0^t \phi_0^a(u) ln^a \frac{t}{u} \frac{du}{uh(u)} + \int_0^t \phi_0^a(u) \frac{du}{uh(u)} + \phi_0^a(t) \int_t^\infty \frac{du}{uh(u)}\right]^{\frac{1}{a}}}{\phi^{\frac{1}{b}}(t)} < \infty.$$

Доведення теореми 6 повторює доведення теореми 4 із тою різницею, що при встановленні нерівності

$$\left[\int_0^\infty ([A_{\phi_0} + B_{\phi_1}] f^*(t))^a \phi_0^a(t) \frac{dt}{th(t)}\right]^{\frac{1}{a}} \leq C_9 \left[\int_0^\infty (f^*(t))^b \, d\phi(t)\right]^{\frac{1}{b}}$$

для будь-якої функції $f(x) \in \Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$ замість теореми 2 використовується теорема 3 (теорема 3 із [11]), в умовах якої $\tilde{\phi}(t) = signt$, $g_1(t) = \frac{\phi_0^a(u)}{uh(u)}$, $g_2(t) = \phi'(t)$. Для оператора A_{ϕ_0} маємо таку саму оцінку, як і у теоремі 4, для оператора B_{ϕ_1} отримуємо:

$$\left[\int\limits_0^\infty (B_{\phi_1} f^*(t))^a \phi_0^a(t) \frac{dt}{th(t)}\right]^{\frac{1}{a}} \le \left[\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_t^\infty f^*(u)\frac{du}{u}\right)^a \phi_0^a(t)\frac{dt}{th(t)}\right]^{\frac{1}{a}} \le C_{10}\left[\int\limits_0^\infty (f^*(t))^b\, d\phi(t)\right]^{\frac{1}{b}}.$$

Нерівність з умови теореми 3, $\sup\limits_{0<u<1}(M_{\phi_0}(u)(1-lnu)) \le 1$, виконується, тому що $\gamma_{\phi_0} > 0$. Теорему 6 доведено.

Теорема 7. *Нехай $0 < b \le a \le 1$, $a \in (0,1]$, $\phi_1(t) = signt$ і функції $\phi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ із множини Φ такі, що $\gamma_{\phi_0} > 0$, функція $\frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}$ зростає або спадає і її множиною значень є $(0,\infty)$. Нехай $h(t)$ - неперервна функція із множини LM така, що $\int\limits_0^1 ln^a \frac{1}{t}\frac{dt}{th(t)} < \infty$, $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{th(t)} = \infty$ і*

$$\phi^{\frac{a}{b}}(t) = \int\limits_0^t \ln^a \frac{t}{u}\frac{du}{uh(u)} + \phi_0^a(t)\int\limits_t^\infty \frac{1}{\phi_0^a(u)}\frac{du}{uh(u)}, \quad t \in (0,\infty).$$

Якщо T - квазилінійний оператор слабкого типу $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$, то існує така константа $C_{11} > 0$, що для усіх функцій $f(x) \in \Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$ виконується нерівність

$$\left[\int\limits_0^\infty \left(\psi_1(m^{-1}(t))(Tf)^*(m^{-1}(t))\right)^a \frac{dt}{th(t)}\right]^{\frac{1}{a}} \le C_{11}\left[\int\limits_0^\infty (f^*(t))^b d\phi(t)\right]^{\frac{1}{b}}.$$

Доведення. Для будь-якого $t \in (0,\infty)$ виконується нерівність

$$\int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)} \le \int\limits_0^t ln^a \frac{t}{u}\frac{du}{uh(u)},$$

із якої випливає виконання умови

$$\sup_{0<t<\infty} \frac{\left[\int\limits_0^t ln^a \frac{t}{u}\frac{du}{uh(u)} + \int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)} + \phi_0^a(t)\int\limits_t^\infty \frac{du}{uh(u)}\right]^{\frac{1}{a}}}{\phi^{\frac{1}{b}}(t)} < \infty.$$

Доведення теореми 7 проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 5. При встановленні нерівності

$$\left[\int\limits_0^\infty \left([A_{\phi_0} + B_{\phi_1}] f^*(t)\right)^a \phi_1^a(t)\frac{dt}{th(t)}\right]^{\frac{1}{a}} \le C_{12}\left[\int\limits_0^\infty (f^*(t))^b\, d\phi(t)\right]^{\frac{1}{b}}$$

для будь-якої функції $f(x) \in \Lambda_{\phi,b}(\mathbb{R}^n)$ спочатку застосовується теорема 1 (теорема 1 із [11]) при умові, що $\tilde{\phi}(t) = \phi_0(t)$, $g_1(t) = \frac{1}{uh(u)}$, $g_2(t) = \phi'(t)$, а потім замість теореми 2 використовується теорема 3 (теорема 3 із [11]), коли $\tilde{\phi}(t) = \phi_1(t)$, $g_1(t) = \frac{1}{uh(u)}$, $g_2(t) = \phi'(t)$. Виконання у теоремі 3 нерівності $\sup\limits_{0<u<1}(M_{\phi_0}(u)(1 - lnu)) \le 1$, випливає із того факту, що $\gamma_{\phi_0} > 0$. Тоді отримуємо при заданих в умові $\phi_1(t) = signt$ і $\phi(t)$ доведення теореми 7.

Зауваження. Для квазилінійних операторів слабкого типу (p_0, q_0, p_1, q_1), де $0 < p_0 < p_1 \le \infty$, $0 < q_0, q_1 \le \infty$, заданих на сумі просторів Лоренца $L^{p_0,1} + L^{p_1,1}$, інтерполяція розглядалася у [7] у випадку, коли $1 \le a < b \le \infty$, а $\alpha + \frac{1}{a} = \beta + \frac{1}{b} > 0$ або $\alpha + \frac{1}{a} = \beta + \frac{1}{b} < 0$. Цей випадок інтерполяції у [7] названо граничним.

Бібліографічні посилання

1. *Calderon A.P.* Spaces between L^1 and L^∞ and theorem of Marcinkiewich [Text]/ A.P. Calderon// Studia Math. – 1966. – Vol.26. – P.273-299.
2. *Boyd D.W.* Indices of function spaces and their relationship to interpolation [Text]/ D.W. Boyd// Canad. Math. J. – 1969. – Vol.21. – P.1245-1254.
3. *Sharpley R.C.* Spaces $\Lambda_\alpha(X)$ and interpolation [Text]/ R.C. Sharpley// J. Functional Anal. – 1972. – Vol.11, №4. – P.479-513.
4. *Крейн С.Г.* Интерполяция линейных операторов [Текст]/ С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов. – М.: Наука, 1978. – 400с.
5. *Павлов Е.А.* Об операторе Кальдерона [Текст]/ Е.А. Павлов// Analysis Math. – 1978. – Vol.4, №2. – P.117-124.
6. *Dmitriev V.* Interpolation of operator weak type [Text]/ V. Dmitriev, S.G. Krein// Analysis Math. – 1978. – Vol.4, №2. – P.83-99.
7. *Bennett C.* On Lorentz-Zygmund spaces [Text]/ C. Bennett, K. Rudnick. –Warszava: Panstw.wydawn.nauk., 1980. –73 p.
8. *Bennett C.* Interpolation of Operators [Text]/ C. Bennett, R. Charpley// Pure and apllied mathematics. – 1988. – Vol.129. – P.1-469.
9. *Пелешенко Б.И.* Об операторах слабого типа [Текст]/Б.И. Пелешенко// Праці укр. мат. конгресу - 2001. Функціон. аналіз. – Київ, 2002. – С.234-244.
10. *Буренков В.И.* Вычисления нормы положительного оператора на конусе монотонных функций [Текст]/ В.И. Буренков, М.Л. Гольдман// Тр. Мат. ин-та РАН. – 1995. – Т.210. – С.65-89.
11. *Пелешенко Б.И.* Интерполяция операторов слабого типа $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$ в пространствах Лоренца [Текст]/Б.И. Пелешенко// Укр. мат. журнал. – 2005. –Т.57, №11. – С.1490-1507.
12. *Пелешенко Б.И.* Интерполяция операторов слабого типа в предельных случаях [Текст]/Б.И. Пелешенко// Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика. – 2006. – Вип.13 – С.71-83.

Надійшла до редколегії 15.04.2018