I. ТЕОРІЯ ПРОЦЕСІВ ТА МАШИН

Дем'яненко А. Г.
к.т.н., професор

Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет

Demianenko A. G.

Dnipropetrovsk State Agrarian and Economic University

УДК 534.113:539.3

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ І АНАЛОГІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ПРУЖНИХ ОБ'ЄКТІВ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

До 170 річчя зі дня виникнення проблеми дії рухомого навантаження

Світлій пам'яті учителя, професора Горошко О.О. присвячена

Розглянуто механічні і, відповідні їм, математичні моделі деяких задач динаміки пружних об'єктів під дією рухомого інерційного навантаження та деяких інших пружних об'єктів, дослідження яких зводиться до таких математичних моделей. Основна увага приділена аналогіям їх математичних моделей. Ро'звязок задачі будується на основі метода двохвильового подання коливань у вигляді суперпозиції власних та супровідних коливань.

Ключові слова: *динаміка, інерція, навантаження, частота, критична швидкість.*

Вступ, постановка проблеми. У травні 2017 року виповнилося 170 років зі дня виникнення та початку досліджень динамічної дії рухомого навантаження на пружні конструкції і споруди. Приводом послужило руйнування Честерського мосту в Англії у травні 1847 року. У відомому огляді [5], присвяченому 100 річчю з дня виникнення проблеми, відомий фахівець з МТДТ Пановко Я.Г. писав: «Проблема динамического действия подвижной нагрузки, столетний юбилей которой исполнился в 1947 году, до наших дней не утратила своей актуальности, жизнь продолжает ставить все новые задачи и тем вызывает дальнейшее движение теории вперед». У динамічному ХХ-ХХІ сторіччі суттєве збільшення мас і швидкостей руху ставить нові задачі, потребує їх вирішення, викликаючи в свою чергу появу нових підходів у механічному та математичному моделюванні, нових і удосконалення старих методів їх дослідження, які дозволяють більш повно виявити усі кількісні та якісні особливості кінематичних та динамічних характеристик руху таких систем. Підвищений інтерес до цієї проблеми останнім часом обумовлений появою і застосуванням інформаційних технологій, які дозволяють більш повно та детально досліджувати математичні моделі та аналізувати отримані результати. Суттєво змінилося і традиційне уявлення про механічні системи з рухомим інерційним навантаженням. Простими прикладами таких систем є мости з рухомим потоком транспорту, трубопроводи, стержні, пластинки, оболонки під дією рухомого потоку рідини чи газу. До цього класу задач в рамках певних аналогій [1,2] можна віднести об'єкти змінної за часом довжини та об'єкти, які рухаються у поздовжньому напрямку, такі як нитки, дроти, профільні стержні у прокатному виробництві, смугові та ланцюгові пили, паски пасових передач, канати шахтних підіймальних машин і таке інше. В залежності від способу схематизації інерційних властивостей пружної конструкції і рухомого навантаження існують чотири принципово різних варіантів постановки задачі про вплив рухомого навантаження на пружні конструкції та споруди [6]. Найбільш складним з точки зору практики є четвертий варіант, де враховуються як сили інерції самої конструкції так і сили інерції рухомого навантаження. Дослідження якісних та кількісних характеристик руху таких об'єктів зводиться до аналізу математичної моделі

$$L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)w = L_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot q(x,t)$$

з відповідними крайовими та початковими умовами, де

$$q(x,t) = -\frac{q_0+q_1}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\frac{q_1 v}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \frac{q_1 v^2}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Основними особливостями математичних моделей таких задач, по - перше, є наявність у диференціальних рівняннях у тому чи іншому вигляді інерційного оператора q(x,t), який визначає силову дію на пружний об'єкт рухомого масового навантаження. Характерним є той факт, що силова дія залежить, як від інтенсивності $q_1(x)$ і швидкості руху v потока навантаження, так і від деформації пружного об'єкта w(x,y,t), причому, чітко видно залежність силової дії від прискорення деформації $w_{tt}(x,y,t)$, швидкості кутової деформації $w_{tx}(x,y,t)$ та зміни кривини пружної лінії об'єкта $w_{xx}(x,y,t)$ тобто в такого роду системах силова дія є слідкуюча за поведінкою системи змінюючи свою величину и напрямок в процесі деформації. Таким чином, силова дія на пружний об'єкт, викликана рухомою масою, не є заздалегідь визначеною а визначається поточним станом системи. Це є другою особливістю задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень. Третьою суттєвою особливістю цих задач є наявність в математичній моделі у тій чи іншій формі непарної за часом змішаної похідної, яка обумовлена прискоренням Коріоліса рухомого масового навантаження і не дозволяє розділити просторову x і часову t змінні за класичною схемою Фур'є в дійсній області шуканих функцій. До вигляду інерційного оператора зводиться і аеродинамічна дія на пружний об'єкт рухомого потоку рідини чи газу. Швидкості рідини у трубопроводах літальних апаратів досягають 50-80 м/с, газів 200 – 250 м/с, а відмови літальних апаратів по причині втрати стійкості і руйнування трубопроводів складають до 60 % від загальної кількості відмов [4]. У механічних системах такого типу можливі флатерні, дивергентні режими руху та інші нестаціонарні процеси і явища. Рухоме навантаження буває рівномірно розподіленим або змінюватися за певним законом, дискретним або розподіленим з певними дискретними включеннями, мати сталу або змінну швидкість. З практики відомо, що прикладне математичне дослідження складної задачі має структуру послідовного наближення. Спочатку будується грубий розв'язок, після чого за його допомогою уточняється механічна та відповідна математична модель або метод дослідження математичної моделі, що в свою чергу призводить до більш точного розв'язку, який у подальшому також можна уточнювати. Грубий розв'язок має допоміжне. початкове значення для побудови більш точного розв'язку. Перевага грубих наближених моделей і розв'язків полягає у їх простоті, прозорості і наочності а, відповідно до цього, і схема застосування цих розв'язків у багатьох випадках є доцільною та виправданою з цілої низки міркувань та позицій. Саме така ідеологія і використовується у роботах [1-3] при дослідженні задач динаміки пружних тіл за дії рухомого інерційного навантаження, які мають цілу низку специфічних особливостей та за значимістю мають самостійний напрямок у будівельній механіці МТДТ.

Одновимірні пружні об'єкти. Відомо, що метод Фур'є належить до методів математичної фізики, які дають можливість отримати розв'язки певного класу диференціальних рівнянь у частинних похідних в явній формі [2,3]. Лише у порівняно простих випадках маємо можливість побудувати явні розв'язки рівнянь у частинних похідних як суми часткових розв'язків у вигляді добутку відокремлених функцій. До таких рівнянь належать рівняння коливань струни, мембрани, балки та деякі інші. Пряме застосування такого методу до задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням у загальному випадку не є можливим. У зв'язку з цим зроблені спроби застосування цього методу шляхом його модифікації та узагальнення. Однією з перших відомих публікацій була праця H. Steuding [8], де розглядалися поперечні коливання балки за дії рухомих розподілених і зосереджених інерційних навантажень. Другою була стаття G. W. Housner [7], де показано, що загальний розв'язок диференціального рівняння у частинних похідних, яке описує пружні коливання об'єкта за дії рухомого інерційного навантаження, являє лінійну комбінацію часткових розв'язків, які містять як симетричні, так і антисиметричні, зсунуті по фазі на 90^0, форми коливань. Причому антисиметричні форми коливань обумовлені наявністю змішаної похідної непарної за часом, тобто силами інерції Коріоліса рухомого навантаження, і зв'язані через них з симетричними формами. Симетричні ж форми коливань при нерухомому навантаженні являють собою власні форми коливань навантаженої системи. Власне ці роботи започаткували метод двохвильового подання коливань пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження, фізична інтерпретація якого вперше була наведена О. О. Горошко [1,2]. При застосуванні методу двохвильового подання коливань до дослідження таких систем, який дозволяє у деяких випадках отримати точні розв'язки задач, загальний розв'язок диференціального рівняння подається у вигляді суми двох рядів, один з яких являє собою класичну частину розв’язку, а другий ту частину, яка обумовлена наявністю змішаної непарної за часом похідної а, саме, інерційністю рухомого навантаження і не виявляється при традиційному застосуванні прямих методів математичної фізики. Форми першої групи названі власними формами, а форми другої груп – супровідними формами коливань пружної системи. Супровідні коливання обумовлені і нетривіальні лише при наявності рухомого інерційного навантаження. Сьогодні більш повному та детальному дослідженню задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням методом двохвильового подання сприяють сучасні інформаційні технології, чого не було раніше, не кажучи вже про часи H. Steuding, G. W. Housner, Я.Г. Пановко та інших. Що стосується аналогій математичних моделей, то неважко показати, що задача про коливання балки з рухомим рівномірно розподіленим інерційним навантаженням у наближеній постановці зводиться до розв’язання наступного диференціального рівняння [6]

$$EJ_{\min}u^{IV}(x)=-mV_{cr}^2\,u^{II}(x)$$

з відповідними крайовими та початковими умовами а для визначення критичної сили для такої ж стиснутої балки приходимо до розв’язування диференціального рівняння

$$EJ_{\min}\,u^{IV}(x)=-F_{cr}\,u^{II}(x)$$

Аналіз цих рівнянь показує, що математичні моделі цих задач ідентичні, тобто існує їх певна математична аналогія, використовуючи яку і визначимо наближено значення критичної швидкості руху навантаження, за якої шарнірно закріплена балка втрачає стійкість, а саме

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 E\,I_{\min}}{l^2}=mV_{cr}^2 \quad \text{або} \quad V_{cr}=\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{E\,I_{\min}}{m}}.$$

Аналогічно, неважко навести ідентичність математичних моделей динаміки пружного об’єкту з рухомим інерційним навантаженням та об’єкту змінної довжини [1,2]. Задача про поперечні коливання натягнутої осьовою силою T струни з погонною вагою q_1 за дії розподіленого навантаження інтенсивності q_2, яке рухається зі швидкістю V, зводиться до розв’язування диференціального рівняння [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2a\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}-b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad (1)$$

де $a=\dfrac{Vq_2}{q_1+q_2}; \quad b^2=\dfrac{Tg-V^2q_2}{q_1+q_2}.$

В основі дослідження першої основної задачі динаміки пружних об'єктів змінної довжини лежить диференціальне рівняння [1]

$$\frac{q}{g}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=q\left(1\pm\frac{\ddot{l}}{g}\right) \qquad (2)$$

в змінній за часом геометричній області інтегрування

$$l(t)\le x\le l_0.$$

Заміною змінної $y=\dfrac{l_0(x-1)}{l_0-l}$ рівняння (2) набирає вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2a(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial t}-b^2(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (3)$$

де в сталій області інтегрування $0\le y\le l_0$

$$a(y)=\frac{\dot{l}(l_0-y)}{l_0-l};\quad b^2(y)=\frac{\frac{g}{q}EAl_0^2-\dot{l}^2(l_0-y)^2}{(l_0-l)^2}. \qquad (4)$$

Як видно, диференціальні рівняння (3) і (1), що описують рух пружних об'єктів змінної довжини і об'єктів з рухомим інерційним навантаженням за своїм виглядом ідентичні, що і підкреслює аналогію їх математичних моделей. На відміну від класичної схеми відокремлення змінних розв’язок еталонного рівняння (1) відшукуємо у вигляді [2]

$$u(x,t)=\varphi(x)\cos\omega t+\psi(x)\sin\omega t \qquad (5)$$

Остаточно, загальний розв’язок рівняння (1) маємо у вигляді суперпозиції двох груп стоячих хвиль

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l_0}\cos\frac{n\pi a x}{l_0\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\omega_n t+a_n)-\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l_0}\sin\frac{n\pi a x}{l_0\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\omega_n t+\alpha_n) \qquad (6)$$

Якщо швидкість рухомого навантаження V дорівнює нулю, то і розв’язок (6) рівняння (1) перетворюється у відомий класичний

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l_0}\cos(\omega_n t+\alpha_n),$$

Коливання першої групи, форми яких при $V\to 0$ переходять в класичні форми коливань об'єкта, названі «власними» коливаннями, коливання другої групи названі «супровідними» коливаннями об'єкта [1,2]. Аналогічно коливання об'єкта змінної довжини представимо у вигляді двох груп коливань, власних і супровідних, а часткові розв’язки відшукуємо у вигляді двочлена (5). При цьому рівняння для знаходження форм коливань матимуть змінні коефіцієнти [1,2]

$$\Phi''(y)+2i\omega\frac{a(y)}{b^2(y)}\Phi'(y)+\frac{\omega^2}{b^2(y)}\Phi(y)=0. \quad (7)$$

Підстановкою

$$\Phi(y)=\psi(y)\exp\left\{-\int_0^y\frac{i\omega a(y)}{b^2(y)}dy\right\}$$ рівняння (7)

зведемо до вигляду

$$\psi''(y)+\frac{\omega^2\left(a^2+b^2\right)}{b^4}\psi(y)=0, \quad (8)$$

де a і b визначаються виразами (4). Форми «власних» і «супровідних» коливань об'єкта змінної довжини матимуть вигляд [1,2]

$$\varphi_n(y)=\psi^*{}_n(y)\cos\int_0^y\frac{a\omega_n}{b^2}dy; \quad (9)$$

$$\psi_n(y)=-\psi^*{}_n(y)\sin\int_0^y\frac{a\omega_n}{b^2}dy.$$

де $\psi^*{}_n(y)$- розв'язок рівняння (8), яке задовольняє граничним умовам поставленої задачі. Якщо швидкість зміни довжини об'єкта менше швидкості поширення в ньому пружною хвилі , то рівняння (8) не має особливих точок в межах $0\le y\le l_0$ і його розв’язок знаходять у вигляді рядів [1,2]. Розв’язок рівняння (8), побудований за допомогою асимптотичного методу Боголюбова-Митропольського, має вигляд

$$\psi(y)=\sin\left[ky-k\frac{\dot{l}^2}{c}\cdot\frac{l_0}{3}\left(\frac{l_0-y}{l_0}\right)^3+k\frac{\dot{l}^4}{c^4}\cdot\frac{l_0}{10}\left(\frac{l_0-y}{l_0}\right)^5+\alpha\right].$$

де $k=\dfrac{\omega(l_0-l)}{cl_0},\ c=\sqrt{\dfrac{g}{q}EA}$.

Висновки. Наведена аналогія математичних моделей деяких задач динаміки пружних одновимірних об’єктів показує спорідненість зазначених задач в математичному формулюванні. Природно, що ця спорідненість позначається і в характері рухів досліджуваних об'єктів. Характерним в русі цих об'єктів є те, що він здійснюється у вигляді двох груп коливань, а саме, власних і супроводних, які мають однакові частоти, різні форми і зсунуті по фазі. Супровідні коливання обумовлені і нетривіальні лише при наявності рухомого інерційної навантаження або зміни довжини об'єкта з деякою швидкістю і істотно видозмінюються при збільшенні швидкості руху і співвідношення рухомої і нерухомої мас системи. Власні форми коливань також при цьому істотно змінюються, а при відсутності рухомого інерційного навантаження перетворюються в класичні власні форми коливань. Що ж стосується об'єктів зі змінною за часом довжиною, то ці задачі виходять за рамки традиційних класичних крайових задач математичної фізики бо в них фундаментальні поняття власних частот і власних функцій виходять за рамки загальноприйнятих в класичній математичній фізиці, які зі зміною довжини пружного об'єкта стають деякими функціями часу [1,2]. Цей некласичний розділ математичної фізики чекає свого розвитку, нових досліджень і узагальнення. В цілому, задачі динаміки пружних систем, що несуть рухоме інерційне навантаження, по постановці, методам дослідження, кількісним, якісним результатам, важливості для практики створення і експлуатації інженерних конструкцій і споруд, являють самостійну наукову дисципліну в будівельній механіці пружних деформованих систем. Суттєвою ознакою такого роду систем є наявність навантаження, яке, в тому чи іншому вигляді, представлене в математичній моделі інерційним оператором. При проектуванні і експлуатації інженерних конструкцій і споруд за дії рухомих масових навантажень необхідно не забувати, що критичні швидкості їх руху, при яких можлива втрата стійкості конструкцій, можуть бути досить малими, досяжними на практиці, особливо, у випадках дії на елементи конструкцій і споруд стискуючих сил, близьких до критичних значень за Ейлером.

Список використаних джерел

1. Горошко О.А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины / О.А. Горошко, Г.Н. Савин. - К: Наукова думка, 1973. - 224 с.

2. Горошко О. О. Двохвильові процеси в механічних системах/ О.О.Горошко, А.Г.Дем'яненко, С.П.Киба. - К.: Либідь, 1991. - 188 с.

3. Дем'яненко А. Г. Механічні і математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням та їх дослідження/ А.Г.Дем'яненко // Вібрації в технінці та технологіях.- 2014.- № 2(74). С. 12-22.

4. Доценко П.Д. Динамика трубопроводных систем / П.Д.Доценко. – Харьков.: Основа, 1998. - 223 с.

5. Пановко Я. Г. Исторический очерк развития теории динамического действия подвижной нагрузки / Я.Г. Пановко // Труды ЛКВВИА. – 1948. - Л, - С. 8-38.

6. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г.Пановко, И. И Губанова. – М.: Наука, 1987 – 352 с.

7. Housner G. W. Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. Journal of Applied Mechanics. / G. W.Housner // Trans ASME – 1952. - vol.19, №2, - P. 205-209.

8. Steuding H. Die Schwingung von Trager bei bewegten Lasten / H. Stending // Jng.Acch. - 1934.- P.275-305.

Список джерел в транслітерації

1. Horoshko O.O. Vvedenie v mekhanichu deformiruemikh odnomernikh tel peremenoy dlini/ O.O. Horoshko, H.N. Savin. – K; Naukova dumka, 1973. - 224 s.

2. Horoshko O.O. Dvokhilevi protsesi v mekhanichnikh sistemakh/O.O. Horoshko, A.G. Demianenko, S.P. Kiba. - К.;Libid, 1991, - 188 s.

3. Demianenko A.G. Mekhanichni i matematichni modeli zadach dynamiki pruzhnih system z rukhomim inertsionnim navantahzenniam ta ikh doslidhzennia/ A.G. Demianenko // Vibratsiy v tekhitsi ta tekhnologiiakh. - № 2(74), 2014, s. 12-22.

4. Dotsenko P.D. Dinamika truboprovodnikh system / P.D. Dotsenko. Kharkov,: Osnova, 1998, - 223 s.

5. Panovko Ia.G. Istoricheskiy ocherk razvitiia teorii dinamicheskogo deystviia podvizhoy nagruzki / Ia.G. Panovko // Trudi LKVVIA. – 1948. – L, - s. 8-38.

6. Panovko Ia.G. Ustoychivost I kolebaniia uprugikh system/ Ia.G.Panovko, I.I.Hubanova. – M.: Nauka, 1987 – 352 s.

7. Housner G. W. Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. Journal of Applied Mechanics. / G. W.Housner // Trans ASME – 1952. - vol.19, №2, - P. 205-209.

8. Steuding H. Die Schwingung von Trager bei bewegten Lasten / H. Stending // Jng.Acch. - 1934.- P. 275-305.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ И АНАЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ ИНЕРЦИОННОЙ НАГРУЗКИ

Аннотация. *Рассмотрены механические и, соответствующие им, математические модели некоторых задач динамики упругих объектов под действием подвижной инерционной нагрузки и некоторых других упругих объектов, исследование которых приводится к аналогичным математическим моделям. Основное внимание уделено именно аналогии их математических моделей Решение задачи отыскивается с помощью метода двухволнового представления движения в виде суперпозиции собственных и сопровождающих колебаний.*

Ключевые слова: *динамика, инерция. сила, частота, критическая скорость.*

SOME ANALOGIES AND FEATURES OF THE MATHEMATICAL MODELS IN THE STRUCTURAL MECHANICS FOR THE ELASTIC ELEMENTS WITH MOVABLE LOAD AND CHANGEABLE LENGTH

Annotation. *This paper describes some analogies and features of the mathematical models for the elastic elements with movable load and for the elastic elements of changeable length. In these systems two forms of own oscillations - the own component and the accompanying one, displaced in phase to the right angle correspond to every frequency of the system. The accompanying component is caused by the mobile inertia load or by the changeable length and they are not trivial only when this factor exists.*

Key words: *frequencie, mobile, inertia load, critical speed, dynamics.*