

## ЗАСТОСУВАННЯ ВИХРОВОЇ ТЕОРІЇ ПЛАНЕТАРНИХ СИСТЕМ ДО ПОШУКУ НАСЕЛЕНИХ ПЛАНЕТ У «ЗЕЛЕНИХ ЗОНАХ» ЗІРОК

**Перехрест Володимир Іванович**

доцент кафедри диференціальних рівнянь Дніпропетровського національного університету ім. О.Гончара

**Осипчук Микола Миколайович**

асистент кафедри вищої математики Придніпровської державної академії будівництва та архітектури

На основі теорії планетарного вихору розроблена і застосована методика розрахунку повних рядів планет у екзопланетних системах з кількома відкритими планетами. Теоретичний аналіз дозволяє простежити процеси міграції протопланет та визначити ті з них, які попадають у населені зони зірок.

Ключові слова: планетарний вихор, планетні відстані, екзопланетні системи, населені зони зірок, міграція планет.

## USING OF THE VORTEX THEORY OF ORBITAL SYSTEMS IN SEARCHING OF HABITABLE PLANETS IN "GREEN ZONES" OF STARS

**Perekhrest V.I.,**

assistant professor of the department Differential Equations, Dnipropetrovsk National University named after O. Gonchar

**Osypchuk N.N.,**

assistant of the department High Mathematics, Prydniprov'ska State Acad-emy of Civil Engineering and Architecture

There was elaborated and used the method of calculation the complete series of planets in exoplanetary systems with several discovered planets, which based on the theory of orbital vortex.

The theoretically analysis allows to retrace the migration processes of protoplanets and to identify that planets, which fall within inhabited zones of stars.

Key words: planetary vortex, planetary distances, exoplanetary systems, inhabited zones of stars, migration of planets.

Вступ. У астрономічній науці й досі немає коректної загальної теорії утворення планетних систем зірок, зокрема Сонячної системи (далі СС), – теорії, яка б адекватно описала її первинний стан, з котрого еволюційно випливали б її сучасні характеристики та глобальна структура з центральною зіркою, планетами, супутниками та астероїдами, що рухаються за експериментально встановленими законами. Численні гіпотези й теорії про походження та еволюцію Сонячної системи (І. Кант, П. Лаплас, Дж. Джинс, О.Ю. Шмідт, Ф. Хойл, К. Вайцзекер та ін.) залишилися цікавими, іноді дуже плідними ідеями, які зрештою виявилися неспроможними в цілому пояснити кілька основних властивостей СС, які на основі фізичних законів збереження та динаміки випливали б із її первинного стану.

Основний підхід, який домінує й до сьогодні – це випадкові стохастичні збурення фізичних полів протопланетної туманності, які спричиняють певну нестабільність її однорідного стану (ротаційну, турбулентну, термо-, гідро-, магнітодинамічну тощо), що зрештою приводить до конденсації газів та утворення зародків скупчення речовини у так звані планетозималі [1]. За логікою такого підходу випадкові у просторі й часі процеси привели б і до випадкових і не співставних законів розподілу планетних відстаней у Сонячній та інших екзопланетних системах. Однак експериментальні дані [2] переконливо говорять про єдину закономірність законів розподілу планетних відстаней у всіх екзопланетних системах: із збільшенням номерів планет взаємні відстані між ними збільшуються. До сьогодні жодна теорія не пояснила, чому великі планети зародилися саме у такій кількості (для Сонця – 10, 11 чи 13) і стали саме на їх сучасні відстані.

Відомий у космогонічних теоріях Сонячної системи закон планетних відстаней Тиціуса-Бодє (1772 р.)

$$r_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n \text{ а.о.} \quad (1)$$

є вдалим емпіричним наближенням реальної послідовності відстаней планет від Сонця. При цьому першій планеті – Меркурію – відповідає значення  $n \rightarrow -\infty$ , Венері  $n=0$ , Землі  $n=1$  і т.д., а умовній несформованій планеті між Марсом і Юпітером треба приписати значення  $n=3$ . Попри чудову відповідність цього закону для середнього ряду планет, для першої та віддалених планет Нептуна й Плутона закон (1) не виконується [3].

У ХХ-му столітті були здійснені деякі спроби теоретично отримати закон планетних відстаней, але в основу цих теорій авторам довелося закладати нові довільні гіпотези, наприклад, деякий час популярною була гіпотеза «викиду-захоплення» [4-5]. З іншого боку, О.Ю. Шмідт [6] вводить гіпотетичну функцію розподілу кінетичних моментів по масах первинної туманності і для найпростіших функцій отримує квадратичний закон, геометричну прогресію та ін. Г.П. Койпер [7] виводить свій закон на основі теорії припливної стійкості з використанням поняття «критичної густини Роша». Проте отриманий ним закон на кілька порядків розбігається з реальними відстанями між планетами.

Окремо слід відзначити гіпотезу К. Вайцзекера (1943 р.) про вихровий характер руху космічних утворень та його дослідження вихрових процесів у протопланетному диску. Зокрема, він висловив гіпотезу, що СС була утворена просторовим вихором, масштаб якого був співмірним з розмірами Сонячної системи, а кількість його вихрових зон дорівнювали кількості великих планет [8]. Хоча його модель була механістичною і не ґрунтувалася на розв'язках гідродинамічних рівнянь, ми побачимо, що він у загальних рисах передбачив властивості точного розв'язку рівнянь Ейлера для сферичних вихроутворень, отриманого нами в роботі [9].

Цей розв'язок описує кільцеву систему осесиметричних торієвих вихорів, центральна частина (n) кілець знаходяться у замкнених непроникних сферах, а зовнішні

( $m$ ) вільно висять у просторі й обтікаються незамкнутими лініями течії (рис.1а). Центри (центральної кола) зовнішніх тороїдних вихрових кілець лежать у екваторіальній площині і разом зі своїми кільцями обертаються у один бік, як і усі планетні системи. В силу очевидних аналогій та цікавих властивостей цей розв'язок названо планетарним вихором структури ( $n,m$ ) [10]. На рис.1б) наведено фото реального процесу утворення зірки та її системи в EggNebula вигляді кільцевої системи стоячих хвиль, що еквівалентна теоретичній картині планетарного вихору.

Різновиди структур вихорів визначаються одним параметром  $\alpha$  у розв'язку (2) рівнянь і при змінюванні цього параметра зазнають численних бифуркацій; у поперед-

ній роботі [10] обраховано детальні таблиці відповідності структур ( $n,m$ ) проміжкам параметра  $\alpha$  (табл. 3).

Описаний вище планетарний вихор як складна вихрова течія є початковим етапом утворення зіркової планетарної системи з первинної туманності, що попала у область вихору (рис. 1а,б). Подальша тривала еволюція цього вихору до стану планетарної системи характеризується різноманітними складними фізичними процесами як-то: конденсація, зіткнення, акреція, скупчення масивних тіл та їх гравітація; утворення масивної зірки та її світлова і гравітаційна дія; взаємний гравітаційний та резонансний вплив структур системи тощо – усі ці процеси можна у подальшому розглядати на основі теорії планетарного вихору.

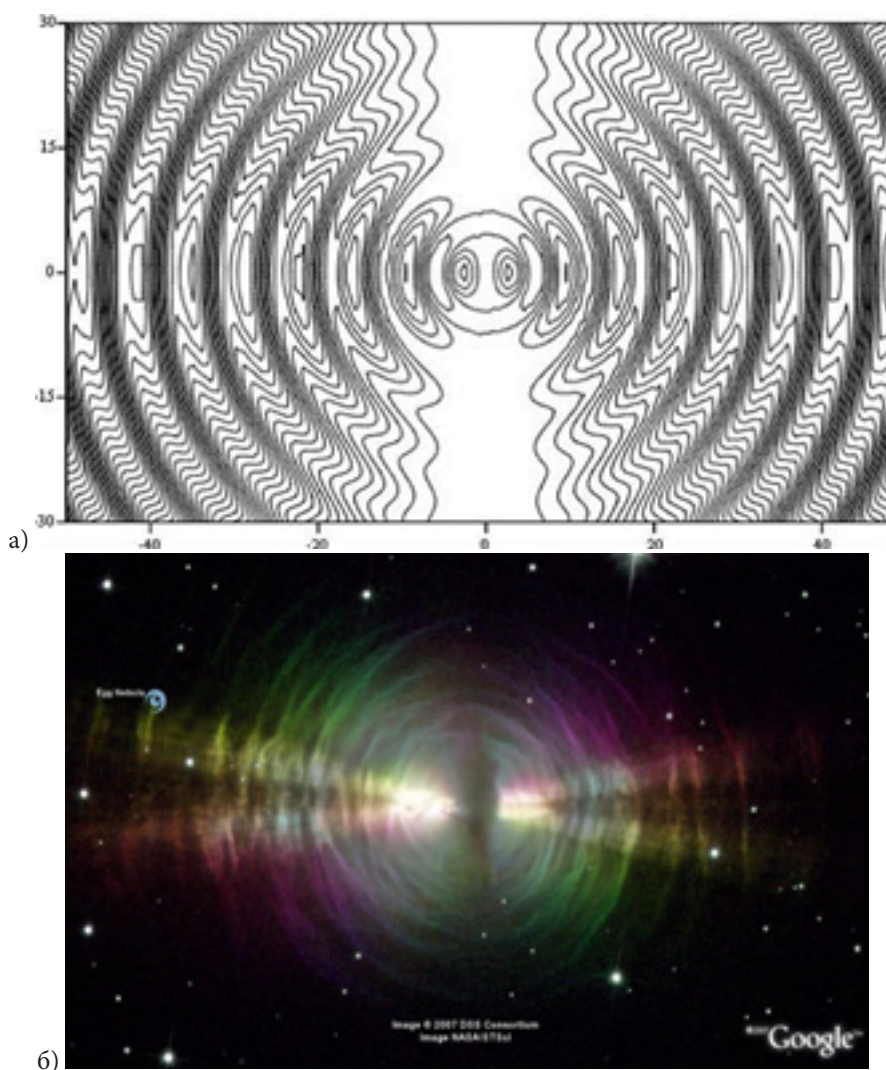


Рис.1. а) Загальний вигляд планетарного вихороструктури (2,11) – теорія;  
б) утворення зірки і системи в туманності EggNebula (фотоNASA).

На основі математичної вихрової моделі утворення планетарних систем отримано аналітичний закон планетних відстаней [11] для будь-яких планетарних систем, який дає хороше узгодження з реальними відстанями у Сонячній системі, хоча за формою відрізняється від (1) і узгоджується з реальним розподілом відстаней краще, ніж закон Тиціуса-Бодє.

Задача планетних відстаней. Наведемо без детального доведення основні співвідношення вказаних задач, розв'язаних з допомогою теорії планетарного вихору [11, 13].

Методика інтегрування повної нелінійної системи гідродинамічних рівнянь Ейлера у осесиметричному випадку полягає у введенні, як звичайно, функції течії  $\Psi(r,\theta)$ , побудові спеціальних форм представлення визначальних функцій та, зрештою, відокремлення змінних. Таким чином побудована функція течії у сферичних координатах  $(r,\theta,\varphi)$  [9], неперервний варіант якої має таку форму:

$$\Psi = C_2 \Phi(y) \cdot \sin^2 y, \quad \Phi(y) = \alpha y^2 + (\cos y - \sin y)/y, \quad (2)$$

де  $y = C_0 r$  – безрозмірний радіус,  $C_0, C_2, \alpha$  – константи.

Через функцію (2) поле швидкостей визначається формулами [12]:

$$\begin{aligned} V_r &= -(r^2 \sin\theta)^{-1} \partial\Psi/\partial\theta = -2B \Phi(y)/y^2 \cos\theta, \\ V_\theta &= (r \sin\theta)^{-1} \partial\theta/\partial r = B/y \partial\Phi/\partial y \sin\theta, \\ V_\varphi &= (C_0 \Psi)/(r \sin\theta) = B \Phi(y)/y \sin\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

де B – коефіцієнт швидкостей з розмірністю м/с.

Як і у роботах [11, 13], далі як приклад розглядається планетарний вихор структури (2,11) – аналог Сонячної системи, якому відповідає значення  $\alpha = -0,00655$  (рис.1). Цей вихор як течія є первинним станом протопланетної туманності, а планети і Сонце будуть одночасно формуватися з нього на протязі мільйонів років.

Отже, будемо виходити з того, що нам відомі геометричні параметри планетарного вихору та його кільця, які утворюються у околі горизонтальної площини вихору (рис. 1) і виділяються петлею сепаратриси (рис. 2). Геометрія кожного вихорового кільця визначається трьома точками  $y_1$ , (нижній радіус кільця),  $y^*$  (центр кільця),  $y_2$  (точка самоперетину сепаратриси) на горизонтальній осі та кутом  $\theta^*$  розхилу кільця. Усі ці параметри для структури (2,11) подані у таблиці 1.

Перші 2 точки  $y^*$  відповідають центрам 2-м внутрішніх вихорів і не мають спарених з ними сідлових точок, – їх роль відіграють 2 радіуси непроникних сфер  $y_2$  (рис. 2). Точки

$y_i^*$  у відповідності з роботою [11] стають центрами скупчення мас і зародження майбутніх планет. Тому величини  $\{y_i^*, \omega_i^*\}$ ,  $i = 3 \div 13$ , є первинними параметрами геометрії й руху тороїдних кілець, з яких після тривалої еволюції утворюється планетна система зірки.

Будемо вважати, що всілякі маси (гази, пари, пил, тіла), що попали у тороїдні кільця, (рис. 2), зрештою сконцентруються у маси Сонця, планет та їх супутників.

Далі, оскільки ми не знаємо первинного розподілу густини мас у області кожного тороїдного кільця, будемо вважати у першому наближенні цей розподіл рівномірним зісталою густиною.

Оскільки сили взаємодій та інші, які діють між окремими частинами вихору, є внутрішніми, то вони не змінюють його інтегральних фізичних інваріантів, зокрема кінетичного моменту відносно осі Oz; гравітаційна сила тяжіння Сонця є центральною і також дає нульові осьові моменти. Тому в основу співвідношення між параметрами  $\{r, \omega\}$  первинного і  $\{R, \Omega\}$  кінцевого станів еволюції кожного тороїдного кільця покладемо закон збереження його осьового кінетичного моменту.

Таблиця 1.

Параметри вихорів кілець планетарного вихору (2,11)

№ Кіл.	$y_1$	$y^*$	$y_2$	$\theta^*$ рад.
1	0	2,790261	4,638225	0
2	4,638225	6,034193	7,359051	0
3(1)	7,364163	9,44280	12,32219	0,053788
4(2)	14,05479	15,85436	18,54972	0,773685
5(3)	20,65132	22,2421	24,76168	1,025749
6(4)	27,20958	28,62399	30,96569	1,176713
7(5)*	33,74923	35,00554	37,16352	1,278034
8(6)	40,28123	41,3898	43,35503	1,351129
9(7)	46,81397	47,77943	49,53890	1,406816
10(8)	53,35627	54,17790	55,71247	1,451239
11(9)	59,92070	60,59087	61,87050	1,488292
12(10)	66,53253	67,03061	68,00099	1,520926
13(11)	73,28304	73,54281	74,05844	1,552969

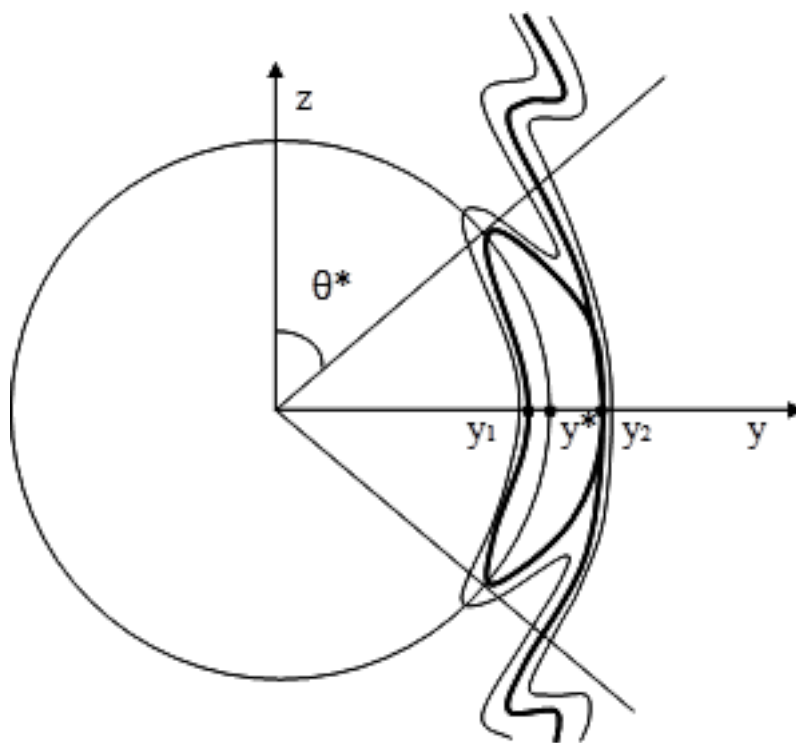


Рис.2. Геометрія зовнішніх вихрових кілець.

Позначимо масу вихрового кільця, первинний радіус його центра та кутову швидкість відповідно через  $\{m, r, \omega\}$ , індекси  $i$  та  $*$  опустимо. Кутову швидкість центра тора  $\omega = V_\phi / r$  за формулою (3) подамо у вигляді

$$\omega = \omega_0 \Phi(y) / y^2, \quad (4)$$

де  $\omega_0 = C_0 \Omega$ . Після еволюції мас вихрового тора до стану твердої планети у полі тяжіння зірки її радіус і кутова швидкість набудуть нових значень  $R, \Omega$ . Закон збереження осьового моменту  $I_z$  дає рівняння:

$$r^2 \omega = R^2 \Omega, \Rightarrow \beta \Phi(y) = R^2 \Omega. \quad (5)$$

Після утворення Сонця та формування твердої планети її рівноважною орбітою буде коло радіуса  $R$ , на якому урівноважуються сила тяжіння Сонця та відцентрова сила обертання, тобто:

$$G M m / R^2 = m R \Omega^2, \quad (6)$$

де  $M$  – маса зірки,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ нм}^2/\text{кг}^2$  – універсальна гравітаційна стала.

Розв'яжемо систему двох рівнянь (5), (6) відносно змінних  $R, \Omega$ , і надамо формулам такого вигляду

$$R = K_R \Phi^2(y) = K_R (\alpha y^2 + \cos y - \sin y) / y^2, \quad (7)$$

$$\Omega = K_\Omega / \Phi^3(y), \quad (8)$$

де  $\beta = C_0 C_2$  – параметр кутового моменту вихору,  $K_R = \beta^2 / \mu$ ,  $K_\Omega = \mu^2 / \beta^3$ ,  $\mu = GM$  – константи, що визначаються параметрами системи.

Формула (7) і є законом планетних відстаней, який впливає з теорії планетарного вихору. Зважаючи на те, що функція  $\Phi(y)$  є квадратичною за  $y$ , закон планетних відстаней (7) є близьким до параболи 4-го степеня. З формули (7) видно, що другий і третій доданки є обмеженими, і для великих значень  $y$  у формулі (7) домінує перший доданок, що і дає зростання за параболою 4-го степеня. Та при досить малих значеннях  $\alpha$ , як у нас  $\alpha = -0,00655$ , оцінка  $\alpha y^2 > 10$  при  $|\cos y| \leq 1$  виконується для  $y > 39$ , що знаходиться у околі 6-гокільця-планети (табл. 1).

Очевидно, що остаточне співвідношення між радіусами (7) та кутовими швидкостями (8) руху планет у полі тяжіння Сонця точно відповідає 3-му закону Кеплера  $R^3 \Omega^2 = \mu$ .

За формулами (7), (8) було пороховано сучасні планетні відстані та кутові швидкості вихору структури (2, 11); відповідні значення цих величин наведено у таблиці 2 поряд з реальними відстанями. З таблиці видно, що теоретичні значення планетних відстаней для середніх і далеких планет збігаються з реальними з похибками у межах 20%, і лише для ближніх 2-х планет ці похибки складають 50-70%, хоча абсолютні похибки для ближніх планет є значно меншими, ніж ті, що для далеких планет складають 10%.

Для можливості порівняння довільна стала  $C_2$  вибиралася таким чином, щоб урівняти відстані та кутові швидкості 4-ї планети (Марса). Цей варіант порівняння є найкращим, бо це ж саме значення коефіцієнта відповідає порівнянню за відстанню та кутовій швидкості також і 7-ї планети (Сатурна), що видно з таблиці 2. Це значить, що первинне співвідношення радіуса та кутової швидкості центра 4-го тороїда повинно відповідати їх рівноважним значенням для планети у полі тяжіння сформованого Сонця. Точку з вказаною властивістю надалі будемо називати точкою рівноваги вихору з координатою  $r_0^* (y_0^*)$ . Принаймні ясно, що така точка рівноваги повинна існувати у первинному ряді значень радіусів  $r_i$  центрів або й десь між ними (рис.3).

Для обґрунтування цього положення порівнюємо закони зміни за радіусом кутової швидкості  $\omega$  у планетарному вихорі (4) із законом кеплерового обертання

$$\omega_k = (C_0)^{3/2} \sqrt{\mu} y^{-3/2}, \quad (9)$$

обчисливши їх значення у центрах  $y = y^*$  вихрових кілець (табл. 2). Оскільки обидві функції є монотонно спадними на  $(0, \infty)$  і

$$\lim_{y \rightarrow 0} \omega = \omega_0 (\alpha - 1/3),$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \omega_k = +\infty,$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \omega = \omega_0 \alpha,$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \omega_k = 0, \quad (10)$$

то графіки сімейств функцій (4) і (9) при будь-якому виборі констант повинні мати одну точку перетину  $r = r_0^*$ , ( $y = y_0^*$ ), яка і є вказаною вище точкою рівноваги. Це демон-

струє рис. 3, де константи були підібрані так, щоб перетин відбувся на радіусі центра 4-го планетарного кільця.

Визначимо точку рівноваги  $y_0^*$  з умови рівності сили тяжіння та відцентрової сили для того кільця первинного вихору, яке залишається незміщеним, тобто у формулі (7) покладемо  $R_0 = r_0$ ,  $\Omega_0 = \omega_0$ . Маємо

$$r_0 = K_R \Phi^2(y_0) \rightarrow y_0 = k_\mu \Phi^2(y_0), \quad (11)$$

$$\text{де } k_\mu = -(V_\infty \beta) / 2\alpha\mu = (C_0 \beta^2) / \mu.$$

Це трансцендентне рівняння для знаходження рівноважного радіуса  $y_0 = y_0^*$  як його кореня. Очевидно, що корінь  $y_0^*$  рівняння (11) може як дорівнювати радіусу центра якогось кільця, так і відрізнятись від них. Рівняння (11) завжди має хоч один корінь, бо  $\Phi(y_0)_{y_0=0} = 0$ , і  $\Phi^2(y_0) = O(y_0^4)$  при  $y_0 \rightarrow \infty$ .

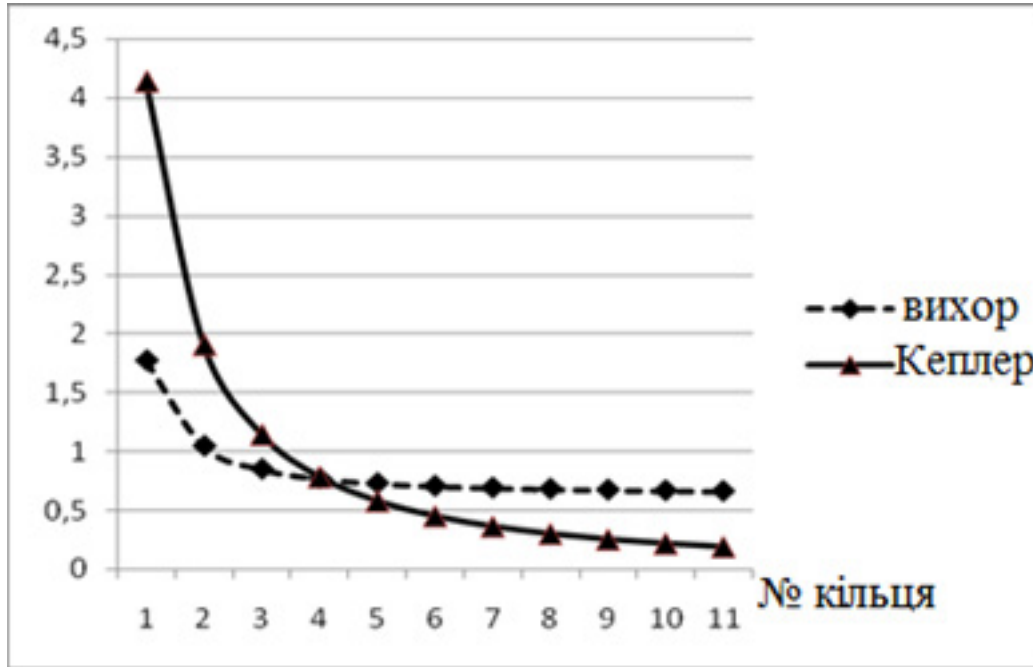


Рис. 3. Порівняння швидкостей обертання у планетарному вихорі з кеплеровим обертанням.

Ясно, що для  $r < r_0^*$  домінуюча сила тяжіння зірки притягує ближчі кільця-планети на менші відстані, а при  $r > r_0^*$  відцентрові сили зовнішніх планет з надлишком кутових швидкостей моментів віддаляють їх від первинних положень (рис. 1, 3). Первинна система вихорів розходить у різні боки від точки рівноваги, і цю міграцію описує закон планетних відстаней (7).

При цьому зовнішні центри мігрують на досить значні відстані, – наприклад, центр 10-го кільця з первинним радіусом  $r_{10}^{(1)} = 3,569$  а.о. переходить на відстань Плуто-

на  $r_{10}^{(2)} = 34,404$  а.о., що є у 9,642 разів більшою (табл. 2). У таблиці 2 подано також значення коефіцієнтів міграції  $k_i(4) = r_i^{(2)} / r_i^{(1)}$  усіх 11 кілець-планет при виборі, як на рис. 3, за точку рівноваги радіуса 4-го кільця (Марс). Як бачимо, перша планета мігрує до відстані у  $0,1915 r_1^{(1)}$ , четверта залишається на місці, шоста відходить на відстань у 2,54 рази більшу за первинну і т.д., а коефіцієнт 12,517 для останнього кільця визначає масштаб глобального розширення усього вихору в полі тяжіння Сонця.

Таблиця 2

Теоретичні та реальні значення планетних відстаней у Сонячній системі;  
 $\alpha = -0,00655$ , структура (2,11).

№ кільця (планет)	$y^*$	$r^{(1)} \text{ AU}$	$R_{\text{теор}} \text{ AU}$	$R_{\text{exp}} \text{ AU}$	$\Delta r\%$	$k(4)$
1	9,44280	0,50278	0,09626	0,3871	-75,1	0,1914
2	15,85436	0,84415	0,265329	0,72333	-63,3	0,3144
3	22,2421	1,18427	0,67777	1,00	-32,2	0,5725
4	28,62398	1,5237	1,5237	1,5237	0,0	1,00
5-Cer	35,00554	1,86385	3,05696	2,766	10,5	1,6405
6	41,38978	2,20377	5,59516	5,2042	7,5	2,5395
7	47,77943	2,54398	9,51998	9,5361	-0,18	3,743
8	54,1779	2,88466	15,2776	19,1985	-20,4	5,2975
9	60,59087	3,22612	23,3793	30,0709	-22,2	7,2487
10-Plu	67,0306	3,56900	34,4037	39,4813	-12,8	9,6419
11	73,5428	3,91574	49,0014	46,762	4,8	12,517

Дані показники міграції можуть бути ключем до розуміння механізмів раннього формування складу планет: утворення твердих, рідких та газових їх складових; перехід із зон середніх температур до зон низьких чи високих та ін.

Обернена задача планетних відстаней. Закон планетних відстаней (7)-(8) встановлює залежність між первинними параметрами  $(r_p, \omega_p)$  руху на центральних колах вихрових кілець планетарного вихору та кінцевими значеннями  $(R_p, \Omega_p)$ , цих величин для планет у сформованій у полі тяжіння зірки планетарній системі. Ці залежності сформульовано вище у вигляді функцій

$$\begin{aligned} R_i &= f(r_p, \omega_p, \alpha, C_0, C_2, M), \\ \Omega_i &= g(r_p, \omega_p, \alpha, C_0, C_2, M), \quad i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (12)$$

які залежать від параметрів вихору  $\alpha, C_0, C_2$  та  $M$  маси зірки. Якщо задати значення цих чотирьох параметрів, то формули (7)-(8) дають однозначну відповідність між двома вихідними змінними  $(r_p, \omega_p)$  та двома їх функціями  $(R_p, \Omega_p)$ . Важливе значення для знаходження нових екзопланет має

Обернена задача: За замірними експериментально значеннями змінних  $(R_p, \Omega_p)$  для кількох екзопланет знайти основні параметри первинного вихору  $\{\alpha, C_0, C_2, M\}$  даної планетної системи та потім за формулами прямого закону (7) визначити загальну кількість та положення усіх планет, більшість яких є невідомими.

Оскільки прямі залежності (7)-(8) не є простими алгебраїчними, то встановлення обернених залежностей (12) зводиться до систем нелінійних трансцендентних рівнянь, що залежать від кількох параметрів.

Припустимо, що нам відомі хоча б 2 набори параметрів  $(R_p, \Omega_p), i=k, k+1$  для двох планет у деякій екзопланетній системі. Ці планети можуть бути як послідовними (відповідати суміжним вихровим кільцям), так і несуміжними, з пропусками. Окремою задачею є встановлення номерів  $k$  та  $k+1$  цієї пари, порохованого від зірки, але поки що будемо вва-

жати його відомим.

Поставимо задачу: За даними експериментальними значеннями параметрів руху двох планет  $(R_k, \Omega_k)$ , і  $(R_{k+1}, \Omega_{k+1})$ , знайти параметри  $\{\alpha, C_0, C_2, M\}$  первинного вихору системи і визначити: 1) загальну кількість планет у системі; 2) їх планетні відстані  $R_i$  від зірки; 3) кутові швидкості  $\Omega_i$  їх обертання навколо зірки.

Як буде видно з наступного, даних 2-х планет достатньо, щоб сформулювати коректну систему рівнянь оберненої задачі. Можна запропонувати кілька варіантів вибору системи визначальних рівнянь для оберненої задачі ідентифікації. Ми користувались системою визначальних рівнянь оберненої задачі, що побудована на основі закону планетних відстаней (7) та рівняння для особливих точок – центрів  $y_i^*$  вихрових кілець:

$$\begin{cases} R_1 - K_R \Phi^2(\alpha, y_1) = 0 \\ R_2 - K_R \Phi^2(\alpha, y_2) = 0 \\ \Phi'(\alpha, y_1) = 0 \\ \Phi'(\alpha, y_2) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \beta &= I_2 / \Phi(\alpha, y_2) = 0 \\ \mu &= \Omega_1^2 R_1^3, \\ K_R &= \beta^2 / \mu. \end{aligned} \quad (14)$$

Блок з перших 4-х рівнянь (13) зав'язано в ітераційну схему пошуку значень 4-х змінних,  $(\alpha, K_R, y_1, y_2)$ , які є коренями цієї нелінійної системи рівнянь при заданих значеннях радіусів  $R_1, R_2$  планет. При цьому допоміжні співвідношення (14) дозволяють підрахувати всі інші визначальні параметри системи, зокрема параметр кутового момента  $\beta$ . Початкове значення вибираємо з припущення про вірогідну структуру  $(n, m)$  вихору на основі побудованих раніше таблиць відповідності цих структур значенням  $\alpha$  [10], дані яких узагальнено у таблиці 3.

Таблиця 3

Відповідність структур  $(n, m)$  значенням параметра  $\alpha$ .

Інтервали $\alpha$	n	m
$0,011868127 < \alpha < 1/3$	1	0 – 6
$-0,028723631 < \alpha < -0,0065198875$	2	2 – 11
$0,0041285321 < \alpha < 0,011868127$	3	5 – 18
$-0,0065198875 < \alpha < -0,0028507108$	4	10 – 26

Система (13) має ту перевагу, що безпосередньо варіюванням основного параметра  $\alpha$  ми практично завжди добиваємось точного співпадіння двох експериментальних радіусів  $R_1, R_2$  (табл. 4) з теоретичними їх значеннями (7). До розв'язування системи (13) застосовуємо функцію `fsolve()` в пакеті `Maple`, – вона реалізує метод Ньютонa для пошуку розв'язків нелінійної системи рівнянь за допомогою спеціального ступінчастого алгоритму [10], який дозволяє узгодити порядок вибраних планет з порядком кілець планетарного вихору та відсіяти з набору особливі точки вузлів сепаратрис.

Порядкові номери 2-х базових планет з радіусами  $R_1, R_2$  можна вибирати по-різному, що ми також робили при розрахунках. Для точно ідентифікованої системи, очевидно, що результат не повинен залежати від вибору цієї пари. Але у розглянутих прикладах точність ідентифікації системи слабо залежала від такого варіювання.

Очевидно, що чим більший набір експериментальних даних, тобто відкритих планет, тим надійнішими будуть гіпотези про структуру й параметри тестованої системи та точність її ідентифікації. Розглянуті нами реальні екзопланетні системи мають не менше чотирьох планет, – таких є біля 30 [2]. Але порядкові номери цих планет, пороховані від зірки, насправді є невідомими. Тому часто доводиться варіювати порядком першої планети та вставляти проміжні кільця між ними, що зроблено у програмі чисельної реалізації оберненої задачі (13), [13].

Найкращим наближенням результату ідентифікації ми вибирали таке, у якому сума модулів відносних відхилень розрахованих і реальних відстаней відомих планет є найменшою.

Ідентифікація екзопланетних систем, міграція планет і «зелені зони» зірок. Продемонструємо застосування описаної вище методики оберненої задачі на прикладах іден-

тифікації планет Сонячної системи та кількох екзопланетних систем з 4-6 відкритими планетами[2].

Для СС ми вибрали за базові параметри Землі та Сатурна і отримали вихрову структуру (4,13) з чотирма внутрішніми та 13 зовнішніми вихровими кільцями (табл.4). Оскільки СС майже повністю вивчена, то вона може слугувати тестовим прикладом для випробування наших методик, і ми приділяємо їй особливу увагу.

Як видно з таблиць 2, 4, структура (4,13) є більш адекватною від (2,11), якою раніше ми спочатку моделювали Сонячну систему (табл. 2), – похибки для перших планет складають уже 50-36%. Опишемо стисло її особливості. По-перше, 5-му кільцю, як і всюди, відповідає Церера; останньому 13-му відповідає планетоїд Еріда. При зіставленні теоретичного ряду з реальними відстанями планет виявилось, що 8-му кільцю не відповідає жодна велика планета. Але у цій області існує група астероїдів Кентаври, два з них – Хірон і Харікло – мають діаметри 218 і 258 км та дуже близькі орбіти. У таблицю 4 внесено середнє значення їх великих півосей.

Далі, у обох таблицях 2, 3 для трансеплутонових об'єктів важко встановити відповідність десятків планетоїдів 1-2-м кільцям первинного вихору. Якщо ще врахувати, що зона впливу Сонця поширюється до великого планетоїда Седни з піввіссю  $a = 502$  а.о. і перигелієм  $a_p = 76$  а.о., то виникає питання, скільки кільць первинного вихору відповідає протяжному до 150 а.о. поясу Койпера. Це відповідно приводить до висновку про потребу вдосконалення наших методик.

На основі аналізу останніх даних стосовно хімічного складу і положення екзопланет більшість астрономів роблять якісно подібні висновки про значну міграцію планет від їх первинних положень [14]. Так, автор роботи [15] в результаті аналізу даних кількох «гарячих юпітерів» (HD149026b, HD209495b, TrES-1, HD189733b) підсумовує: «Подібно до усіх низькообертальних планет, історія HD149026b свідчить про її міграцію з високої на білязіркову орбіту» і ще: «Початкові орбіти газорідних планет, Юпі-

тера і особливо Сатурна, значно відрізнялись від сучасних, а «льодяні гіганти» Уран і Нептун утворилися зовсім не там, де сьогодні розташовані їх орбіти».

Автори іншої роботи [16] говорять про це ж саме: «Згідно вивчення диск-індукованої міграції та гравітаційних зіткнень планет з іншими вони могли бути сформованими де-небудь ще і переміститися у сучасне положення. У даному випадку орбіти більшості, а може й усіх планет, пов'язаних із зірками головної послідовності, зазнали значної орбітальної еволюції».

У зв'язку з цим появились і розвиваються теоретичні моделі міграції тіл у протопланетних дисках [17-18], які, проте не дають настільки точних оцінок цього процесу, як результати даної глави (табл. 5,6); останні можна систематично застосувати до аналізу експериментальних даних. У будь-якому разі дані результати не лише обґрунтовують поширену концепцію про значну міграцію планет, але й дають кількісні характеристики такої міграції (табл. 5-7).

Наведемо кілька таблиць міграції у розглянутих вище зіркових системах (табл. 4-7); у них наведено первинні відстані  $r^{(1)}$  центрів кільць вихору, розраховані теоретичні значення радіусів  $R_{\text{теор}}$  планет, реальні радіуси  $R_{\text{exp}}$  відкритих планет, похибки  $\epsilon\%$  та коефіцієнти міграції  $k(i) = R/r^{(1)}$  протопланет, причому коефіцієнт міграції містить у дужках номер рівноважного кільця. Червоним кольором виділено параметри 2-х базових планет. При виділенні зелених зон зірок ми користувалися відомим законом визначення їх центрів [17]

$$R_g = \sqrt{\frac{T}{T_{\text{Sun}}}} \text{ AU} \tag{15}$$

де  $T$  і  $T_{\text{Sun}}$  – ефективні температури або світності зірки та Сонця. Радіус  $R_g$  визначає положення центрів зелених зон зірок; відповідно жовтим кольором залито «гарячі зони», зеленим – «зелені зони», а синім – «льодові зони» зірок.

Таблиця 4

Параметри ідентифікації Сонячної системи структурою (4,13),  
 $\alpha = -0,0053305$ ,  $K_R = 0,035632$ ,  $R_g = 1,00$  а.о.

№план.	$\mu m$	$r^{(1)}$ а.о.	$(R)_{\text{теор}}$ а.о.	$R_{\text{exp}}$ а.о.	$\epsilon\%$	$k(5)$
1	15,8143	1,359	0,1919	0,3871	-50,79	0,1412
2	22,1850	1,907	0,4608	0,7233	-36,00	0,2416
3	28,5487	2,454	1	1	0,00	0,4075
4	34,9104	3,001	1,9644	1,5237	28,92	0,6546
5-Цер.	41,2722	3,548	3,5476	2,766	28,07	1,00
6	47,6357	4,095	5,9823	5,2034	14,97	1,461
7	54,0015	4,642	9,5371	9,5371	0,00	2,055
8*Хір.	60,3730	5,189	14,531	14,72*	-1,29	2,800
9	66,7504	5,738	21,306	19,191	11,03	3,713
10	73,1373	6,287	30,255	30,069	0,61	4,813
11-Плу.	79,5395	6,837	41,8071	39,482	5,87	6,115
12	85,9708	7,389	56,4352	46,672	20,92	6,115
13-Ері.	92,4998	7,951	74,6596	67,96	9,86	9,390

Далі описаний метод було застосовано для ідентифікації екзопланетної системи зірки 55 rho Cancri A, у якій відкрито

5 планет з орбітальними параметрами, взятими з таблиці [2]. З таблиці 5 видно, що найкращим варіантом ідентифіка-

ції 55 Cancri A виявився вибір як базових 2-ї та 5-ї планет системи, але між 3-ю та 5-ю вставлено одну невідому планету. При цьому в середній зоні маємо низку 4-х невідомих

планет, а за 10-ю відкритою планетою повинно існувати ще 8 планет.

Таблиця 5

Ідентифікація планетної системи 55 Cancri A:  $\alpha = -0,003897$ ;  
 $K_R = 0,013861$ , Структура (4,18), базові планети 2 і 4,  $R_g = 0,9483$  а.о.

№ пл.	$y_m$	$r^{(1)}$ а.о.	$R_{\text{теор}}$ а.о.	$R_{\text{exp}}$ а.о.	$\epsilon\%$	$k(8)$
1	15,7678	0,8163	0,05344	0,0384	39,15	0,06546
2	22,1193	1,1451	0,116	0,116	0,00	0,1013
3	28,4630	1,47352	0,23678	0,242	-2,16	0,1607
4	34,8036	1,8017	0,44778			0,2485
5	41,1429	2,1299	0,789	0,789	0,00	0,3705
6	47,4820	2,4580	1,30848			0,5323
7	53,8215	2,7862	2,06225			0,7402
8	60,1618	3,1144	3,11440			1,00
9	66,5034	3,4427	4,53704			1,3179
10	72,8468	3,7711	6,41033	5,94	7,918	1,6999
11	79,1925	4,0996	8,82249			2,1521
12	85,5412	4,4282	11,8699			2,6805
13	91,8938	4,7571	15,6569			3,2913
14	98,2516	5,0862	20,2962			3,9904
15	104,617	5,4157	25,9086			4,7840
16	110,992	5,7458	32,6235			5,6779
17	117,386	6,0767	40,5789			6,6778
18	123,821	6,4099	49,9223			5,4157

Найкращі результати наближення теоретичних і експериментальних значень планетних відстаней ми мали для екзопланетної системи HD 10180. При цьому отримана нами повна система відповідає вихору (4,10), тобто має 10 планет, тоді як на сьогодні відкрито 7 з них (табл. 6). Відзначимо, що

таблиця 6 була обрхована нами в 2011 році, а у 2012 році була відкрита 7-ма планета HD 10180h, яка у нашій таблиці є 9-ю і позначена \*. Таким чином, за нашим прогнозом у цій системі можна ще віднайти 3 планети, положення яких вказано у таблиці 6.

Таблиця 6

Ідентифікація планетної системи зірки HD10180:  $\alpha = -0,00629758$ ;  
 $K_R = 0,0036454$ , структура (4,10), базові планети 4 і 5,  $R_g = 1,0114$  а.о.

№ пл.	$y_m$	$r^{(1)}$ а.о.	$R_{\text{теор}}$ а.о.	$R_{\text{exp}}$ а.о.	$\epsilon\%$	$k(5)$
1	15,8460	0,1889	0,02395	0,023	7,39	0,1268
2	22,2302	0,2650	0,06048	0,0641	-5,65	0,2283
3	28,6082	0,3409	0,13509	0,129	4,72	0,3962
4	34,9854	0,4169	0,27	0,27	0	0,6476
5	41,3647	0,493	0,493	0,493	0	1,00
6	47,7484	0,5691	0,83748			1,4716
7	54,1391	0,6453	1,34246	1,42	-5,46	2,0805
8	60,54111	0,7216	2,05263			2,8447
9*	66,96227	0,7981	3,01849	3,4*	-11,2*	3,7822
10	73,4237	0,8751	4,29656			4,9098

Після запуску в 2009 році орбітального телескопа "Kepler", спеціалізованого для пошуку т.з. «населених планет», було відкрито кілька десятків екзопланетних систем серії Kepler, з них біля 10 на сьогодні мають 5 – 7 відомих планет [2]. Ми вибрали екзосистему Kepler62 з 5-ма відомими планетами як таку, у якій відстані планет від зірки мо-

жуть лежати у «зеленій зоні» цієї зірки. Результати застосування методики ідентифікації (13) до цієї системи подано у таблиці 7. Отже, у системі Kepler62 за нашим прогнозом повинні існувати всього 12 планет, причому з 7-ми невідомих планет одна знаходиться між 3-ю й 4-ю, а інші 6 – за 5-ю.



З наведених таблиць видно, що у кожній системі є кілька невідомих планет, які знаходяться у «зеленій зоні»: у системі 55Cncr1A це 6-а планета з відстанню  $R_6=1,3085a.o.$ ; у си-

стемі HD10180 6-а з радіусом  $R_6=0,8375 a.o.$  і, можливо, 8-а з  $R_8=2,0526 a.o.$ ; у системі Kepler 62 – це 7-а планета з радіусом  $R_7=1,1498 a.o.$

Таблиця 7

Ідентифікація планетної системи Kepler 62:  $\alpha=-0,005421$ ,  $K_R=0,0041591$ , структура (4,12): базові планети 3 і 5.  $R_g = 0,92324 a.o.$

№ пл.	$y_m$	$r^{(1)}a.o.$	$R_{teor} a.o.$	$R_{exp} a.o.$	$e\%$	$k(5)$
1	15,8173	0,1636	0,02284	0,0553	-58,7	0,1396
2	22,1892	0,2295	0,05513	0,0929	-40,66	0,2402
3	28,5542	0,2954	0,12	0,12	0	0,4063
4	34,9173	0,3612	0,2362			0,6539
5	41,2807	0,4272	0,427	0,427	0	1,00
6	47,6459	0,4928	0,7206	0,718	0,364	1,4622
7	54,0143	0,5587	1,1498			2,0579
8	60,3876	0,6246	1,7521			2,8049
9	66,768	0,6906	2,5698			3,7209
10	73,1591	0,7567	3,6499			4,8232
11	79,5679	0,8230	5,0446			6,1292
12	86,7293	0,8971	6,8007			7,5807

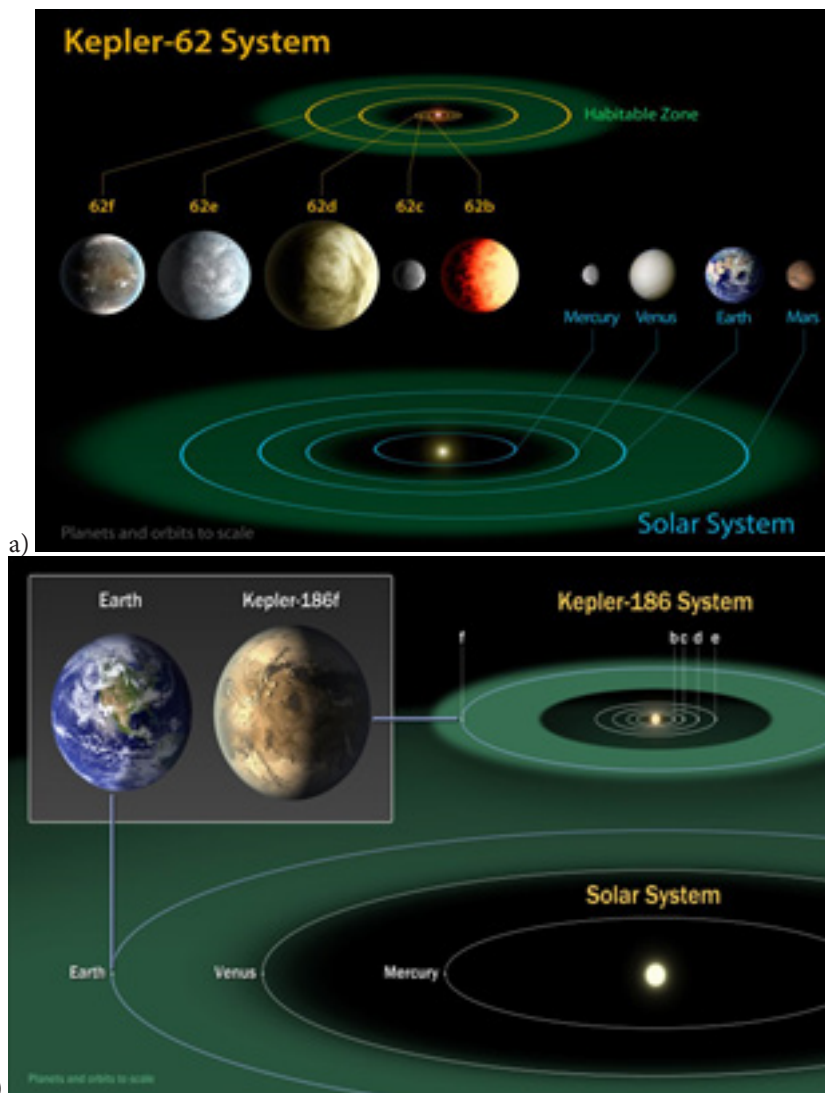


Рис. 4. Зелені зони екзопланетних систем: а) Kepler 62, б) Kepler 186 і Сонячної.

Висновок. На основі наших розрахунків можна стверджувати, що усі екзопланетні системи серій Kepler, Gliese, HD та ін., у яких 5 перших планет розташовані у межах 0,015 – 0,5 а.о., містять не менше 10 планет, і з них 1-2 планети обов'язково попадуть у «зелену зону» (табл.5-7). Таким чином, не кожна 5-а, як зараз вважається у астрономічних колах, а кожна друга екзопланетна система повинна мати потенційно населені планети.

Методика оберненої задачі ідентифікації дозволяє для систем з 4-7 відкритими планетами встановити повний ряд планет, загальна кількість яких лежить у межах 10-20

для зірки. Очевидно, що з допомогою нашого аналізу різко збільшиться кількість кандидатів на «супер Землі», які знаходяться у «зелених зонах» своїх зірок, де температурний режим нагрівання від зірки при наявності води та кисню дозволяє існування форм біологічного життя. Тому астрономи беруть усі такі планети на облік та більш ретельно вивчають їх характеристики. Звичайно, теоретично знайдені нові екзопланети треба ще відкрити практично, але приклад відкриття 7-ї планети HD10180h надає нам оптимізму щодо таких можливостей нашої теорії.

#### Список літератури:

1. Кононович Э.В. Общий курс астрономии / Э.В. Кононович, В.И. Мороз. – М., МГУ, «Эдиториал УРСС», –2004, –544 с.
2. The Extrasolar Planet Encyclopedia [Electronic resource] – Available from <http://exoplanets.org/exotable/exotable.html>
3. Альфвен Х. Структура и эволюционная история Солнечной системы / Х. Альфвен, Г. Аррениус. – Киев : Наукова думка, 1981. – 332 с.
4. Jeans J. H. Astronomy and cosmogony. / J. H. Jeans / Cambridge, –1929.
5. Woolfson M. M. A capture theory of the origin of the Solar System / M. M. Woolfson // Proceedings of the Royal Society of London, A282. – 1964. – P. 485-507.
6. Шмидт О. Ю. Происхождение Земли и планет / О.Ю. Шмидт. – М. Изд-во АН СССР, 1962. – 132 с.
7. Kuiper G. P. On the Origin of the Solar System / G. P. Kuiper, J. F. Hynek. – Astrophysics, McGraw-Hill, New York, 1951. – 465 p.
8. Weizsäcker C. F. Über die Entstehung des Planeten systems / C.F.Weizsäcker. – Z. Astrophys 22, 1944. – P. 319-355.
9. Перехрест В. І. Новий розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для сферичних вихрових течій / В. І. Перехрест, Р.В. Іванов // Вісник ДНУ. Серія : Механіка. – Д. : Вид-во ДНУ. – 2002. – Вип.6, т. 1. – С. 60-64.
10. Перехрест В. І. Про структури планетарних вихорів і закономірності їх обертання / В. І. Перехрест, М. М. Осипчук // Вісник ДНУ. Серія : Механіка. – Д. : Вид-во ДНУ. – 2010. – Вип. 14, т. 1. – С. 110-118.
11. Перехрест В. І. Закон планетних відстаней у вихровій теорії планетарних систем / В. І. Перехрест // Вісник ДНУ. Серія : Механіка. – Д. : Вид-во ДНУ. – 2011. – Вип. 15, т. 1. – С. 21-33.
12. Милн-Томпсон Л. Теоретическая гидродинамика / Л. Милн-Томпсон. – М., 1964. – 660 с.
13. Перехрест В. І. Обернена задача планетних відстаней / В. І. Перехрест, М. М. Осипчук // Вісник ДНУ. Серія : Моделювання. – Д. : Вид-во ДНУ. – 2012. – №8, Вип. 4, т. 20. – С. 116-128.
14. Wuchterl G. Giant planet formation / G. Wuchterl, T. Guillot, J. J. Lissauer. – Protostars&Planets IV, Arizona Press, 2000. – P. 1081-1109.
15. Ксанфомалити Л.В. Солнечная система, планетные системы звёзд и теория последовательной аккреции / Л. В. Ксанфомалити // Кинематика и физика небесных тел. – К. Вид. ГАО НАНУ. – 2010. – Т. 26, №4.– С. 84-106.
16. Bodenheimer P. Multiple fragmentataion of protostars / P. Bodenheimer, A. Burkert, R. J. Klein, A. P. Boss. – Protostars&Planets IV, Arizona Press, 2000. – P. 675-701.
17. Levison H. F. Planet migration in planetesimal disks / H.F. Levison, A. Morbidelli, R. Gomes and B. Backman // Arizona Press, Tucson, PROTOSTARS & PLANETS IV. – 2009 – P. 837-850.
18. Stamatellos D. The migration of gas giant planets in gravitationally unstable discs [Electronic resources] / D. Stamatellos – ExoPlanet News, no 83, November, 2015. – Available from <http://arxiv.org/abs/1508.01196>.