

СЕРІЯ «Техніка»

УДК 539.3:534.1

[https://doi.org/10.52058/2786-6025-2023-1\(15\)-226-237](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2023-1(15)-226-237)

Дем'яненко Анатолій Григорович кандидат технічних наук, професор кафедри вищої математики, фізики та загальноінженерних дисциплін, Дніпровський державний аграрно-економічний університет, вул. Сергія Єфремова, 25, м. Дніпро, 49600, тел.: (056) 744-81-32, <https://orcid.org/0000-0001-6467-597X>.

Гурідова Вікторія Олександрівна старша викладачка кафедри вищої математики, фізики та загальноінженерних дисциплін, Дніпровський державний аграрно-економічний університет, вул. Сергія Єфремова, 25, м. Дніпро, 49600, тел.: (056) 744-81-32, <https://orcid.org/0000-0002-7684-5072>.

ДО ПРОБЛЕМИ ДИНАМІКИ ПРУЖНИХ ОБ'ЄКТІВ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Анотація. У травні 2022 року виповнилося 175 років з дня виникнення та початку досліджень динамічної дії рухомого навантаження на пружні конструкції і споруди, приводом чого послужило руйнування Честерського мосту в Англії у травні 1847 року. У динамічному XX-XXI сторіччі суттєве збільшення мас і швидкостей руху та інтенсифікації виробничих процесів ставить нові задачі, потребує їх вирішення, викликаючи у свою чергу появу нових гіпотез та підходів у механічному та математичному моделюванні, нових і удосконалення старих методів їх дослідження, які дозволяють більш повно виявляти усі кількісні та якісні особливості кінематичних та динамічних характеристик поведінки таких систем. Підвищений інтерес до цієї проблеми останнім часом обумовлений появою і застосуванням інформаційних технологій, які дозволяють більш повно та детально досліджувати математичні моделі, аналізувати отримані результати та впроваджувати їх на практиці. Суттєво змінилося і традиційне уявлення про механічні системи з рухомим інерційним навантаженням. Простими прикладами таких систем є мости з рухомим потоком транспорту, трубопроводи, стержні, пластинки, оболонки під дією рухомого потоку рідини чи газу. До цього класу задач в рамках певних аналогій можна віднести об'єкти

змінної за часом довжини та об'єкти, які рухаються у поздовжньому напрямку, такі як нитки, дроти, профільні стержні у прокатному виробництві, смугові та ланцюгові пили, паски пасових передач, канати шахтних підймальних машин і багато інших, де природа і характер зовнішньої дії можуть бути іншими. В залежності від способу схематизації інерційних властивостей пружної конструкції і рухомого навантаження існують чотири принципово різних механічних моделей задач динаміки пружних конструкцій та споруд за дії рухомого навантаження. Найбільш складним з точки зору практики є четвертий варіант механічної моделі, де враховують як сили інерції самої конструкції чи споруди так і сили інерції рухомого навантаження. В роботі на основі методу двохвильового подання руху розглянуто коливання та стійкість одновимірного пружного об'єкту за дії рухомого розподіленого інерційного навантаження на основі моделі Тимошенко з урахуванням сил інерції повороту поперечних перерізів та деформацій зсуву. Математична модель містить непарну за часом змішану похідну не тільки у основному операторі диференціального рівняння руху а і у крайових умовах.

Ключові слова: балка, рухоме навантаження, частота, критична швидкість

Demianenko Anatoliy Hryhorovych Candidate of Technical Sciences, Professor of the Department of higher mathematics, physics and general engineering disciplines Dnipro State Agrarian and Economic University, Serhiy Yefremov St., 25, Dnipro, 49600, tel.: (056) 744-81-32, <https://orcid.org/0000-0001-6467-597X>.

Guridova Viktoriya Oleksandrivna Senior Lecturer of the Department of higher mathematics, physics and general engineering disciplines Dnipro State Agrarian and Economic University, Serhiy Yefremov St., 25, Dnipro, 49600, tel.: (056) 744-81-32, <https://orcid.org/0000-0002-7684-5072>.

TO THE PROBLEM OF THE DYNAMICS OF ELASTIC OBJECTS WITH A MOVING INERTIAL LOAD

Abstract. In May 2022, 175 years have passed since the day of the emergence and beginning of research into the dynamic effect of moving loads on elastic structures and structures, which was caused by the destruction of the Chester Bridge in England in May 1847. In the dynamic 20th-21st centuries, a significant increase in masses and speeds of movement and intensification of production processes poses new problems, requires their solution, causing in turn the emergence of new hypotheses and approaches in mechanical and mathematical modeling, new and improvement of old methods of their research, which allow more fully reveal all the

quantitative and qualitative features of the kinematic and dynamic characteristics of the behavior of such systems. Recently, the increased interest in this problem is due to the emergence and use of information technologies, which allow more complete and detailed research of mathematical models, analysis of the obtained results and their implementation in practice. The traditional idea of mechanical systems with a moving inertial load has also changed significantly. Simple examples of such systems are bridges with a moving flow of transport, pipelines, rods, plates, shells under the action of a moving flow of liquid or gas. To this class of problems, within the framework of certain analogies, objects of variable length over time and objects that move in the longitudinal direction, such as threads, wires, profile rods in rolling production, band and chain saws, belts of belt drives, ropes can be attributed to this class of problems mine lifting machines and many others, where the nature and character of the external action may be different. Depending on the method of schematizing the inertial properties of the elastic structure and the moving load, there are four fundamentally different mechanical models of problems of the dynamics of elastic structures and structures under the action of a moving load. The most difficult from the point of view of practice is the fourth variant of the mechanical model, which takes into account both the inertial forces of the structure or building itself and the inertial forces of the moving load. The paper considers the oscillations and stability of a one-dimensional elastic object on the basis of the refined Timoshenko model under the action of a moving distributed inertial load, taking into account the forces of inertia of rotation of cross-sections and shear deformations. The mathematical model contains an odd time-mixed derivative not only in the main operator of the differential equation of motion, but also in the boundary conditions.

Keywords: beam, moving load, frequency, critical speed.

Постановка проблеми. Дослідження якісних та кількісних характеристик руху пружних об'єктів за дії інерційного поля рухомого навантаження зводиться до аналізу математичної моделі

$$L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) w = L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot q(x, t)$$

з відповідними крайовими та початковими умовами, де при сталій швидкості руху

$$q(x, t) = -\frac{q_0 + q_1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2 \frac{q_1 v}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \frac{q_1 v^2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Основними особливостями математичних моделей таких задач, по-перше, є наявність у диференціальних рівняннях у тому чи іншому вигляді інерційного оператора $q(x, t)$, який визначає дію на пружний об'єкт рухомого масового навантаження. Характерним є той факт, що силова дія залежить як

від інтенсивності $q_1(x)$ і швидкості руху v потоку навантаження, так і від деформації пружного об'єкта $w(x,y,t)$, причому, чітко видно залежність силової дії від прискорення деформації $w_{tt}(x,y,t)$, швидкості кутової деформації $w_{tx}(x,y,t)$ та зміни кривини пружної лінії об'єкта $w_{xx}(x,y,t)$ тобто в такого роду системах силова дія є слідкуюча за поведінкою системи змінюючи свою величину и напрямок в процесі деформації. Таким чином, силова дія на пружний об'єкт, викликана рухомою масою, не є заздалегідь визначеною а визначається поточним станом системи. Це є другою особливістю задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень. Третьою суттєвою особливістю цих задач є наявність в математичній моделі у тій чи іншій формі непарної за часом змішаної похідної, яка обумовлена прискоренням Коріоліса рухомого масового навантаження і утворює деякі труднощі при побудові розв'язків, а саме, не дозволяє розділити просторову x і часову t змінні за класичною схемою Фур'є в дійсній області шуканих функцій. До вигляду інерційного оператора зводиться і аеродинамічна дія на пружний об'єкт рухомого потоку рідини чи газу. Відомо, що швидкості рідини у трубопроводах літальних апаратів досягають 50-80 м/с, газів 200-250 м/с, а відмови літальних апаратів по причині втрати стійкості і руйнування трубопроводів складають до 60 % від загальної кількості відмов. Рухоме навантаження буває рівномірно розподіленим або змінюватися за певним законом, дискретним або розподіленим з певними дискретними включеннями, мати сталу або змінну швидкість.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. До дослідження математичних моделей задач динаміки пружних об'єктів з рухомим інерційним навантаженням у більшій частині випадків використовують наближені математичні методи. Відомо, що класичний метод відокремлення змінних Фур'є належить до методів математичної фізики, які дають можливість отримати розв'язки певного класу диференціальних рівнянь у частинних похідних в явній формі. Лише у порівняно простих випадках маємо можливість побудувати явні розв'язки рівнянь у частинних похідних як суми часткових розв'язків у вигляді добутку відокремлених функцій. До таких рівнянь належать рівняння коливань струни, мембрани, балки та деякі інші. Пряме застосування такого методу до задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням у загальному випадку не є можливим. У зв'язку з цим зроблені спроби застосування цього методу шляхом його модифікації та узагальнення [1-6]. Власне роботами [8-9] започатковано метод двохвильового подання коливань пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження, фізична інтерпретація якого вперше была наведена професором О.О. Горошко [1]. При застосуванні до дослідження таких систем методу двохвильового подання коливань, який дозволяє у деяких випадках отримати

точні розв'язки задач, загальний розв'язок диференціального рівняння руху подається у вигляді суми двох рядів, один з яких являє собою класичну частину розв'язку, а другий ту частину, яка обумовлена наявністю змішаної непарної за часом похідної a , саме, інерційністю рухомого навантаження і не виявляється при традиційному застосуванні прямих методів математичної фізики. Форми першої групи названі власними формами, а форми другої груп – супровідними формами коливань пружної системи. Супровідні коливання обумовлені і нетривіальні лише при наявності рухомого інерційного навантаження. Залежно від способу схематизації інерційних властивостей елементів, що утворюють систему, існують чотири принципово різних варіанти постановки задач про дію рухомого навантаження на пружні конструкції. Найбільш складним є четвертий варіант, де враховуються інерційні властивості рухомого навантаження і самої конструкції. Перші важливі результати в цій області, в яких рішення досліджуваної задачі представлені у вигляді рядів, відносяться до тридцятих років минулого сторіччя. Детальний огляд досліджень виконаних в XIX і початку XX століття наведено Пановко Я.Г. у відомому історичному нарисі розвитку теорії динамічної дії рухомого навантаження до сторіччя постановки проблеми [7]. Сучасний інтенсивний розвиток техніки, суттєве збільшення мас і швидкостей руху продовжує ставити нові завдання і викликає подальший рух і розвиток теорії. І якщо за часів XIX сторіччя актуальною була проблема динаміки мостів за дії піхоти, кавалерії і артилерії то в XXI столітті актуальними проблемами є динаміка мостів за руху потягів TGV зі швидкістю 400 км/год, динаміка трубопроводів в охолоджувальних системах РРД і гідроприводах літальних апаратів, де швидкість рідини досягає 250 км/год, пневмопроводів і повітряних охолоджувальних систем зі швидкістю газів до 750 км/год при тиску до 10 МПа. Результати ґрунтовних досліджень з проблеми динаміки пружних систем з рухомим навантаженням, обширна бібліографія [1-4] та аналіз наведені в працях В.В. Болотіна, Я.Г. Пановко, Н.З. Якушева, М.Н. Серазутдінова, А.П. Філіппова, Є.Г. Голоскокова, С.С. Кохманюка, Г.Ф. Кравченко, А.Б. Моргаєвского, І.А. Колесніка, П.Д. Доценко, О.А. Горошко, С.П. Киби, В.І. Пожуєва, Н.Г. Бондаря, С.І. Конашенко, А.С. Распопова, Wacław Szczesniak. На даний час проблема дослідження якісного та кількісного впливу рухомого навантаження на коливання і стійкість стрижнів, пластин і оболонок ще далека до свого остаточного завершення і привертає увагу інженерів і науковців у багатьох країнах світу.

Як приклад, наведемо дослідження коливань одновимірною пружного об'єкту під дією рухомого інерційного навантаження. Механічна модель побудована на основі моделі Тимошенко. Дослідження відповідної

математичної моделі виконано на основі неklasичного методу відокремлення змінних – методу двохвильового подання коливань.

Мета статті – дослідити методом двохвильового подання руху динаміку пружного одновимірного об'єкту за дії рухомого інерційного навантаження на основі моделі Тимошенко.

Виклад основного матеріалу. Становить теоретичний та практичний інтерес дослідження коливань одновимірного пружного об'єкта на основі моделі Тимошенко за дії рухомого розподіленого інерційного навантаження, де математична модель містить непарну за часом змішану похідну не тільки у основному операторі диференціального рівняння руху, а і у крайових умовах. Математична модель задачі побудована на основі уточненої механічної моделі балки на пружній основі з урахуванням сил інерції повороту поперечних перерізів, деформацій зсуву, сил інерції рухомого навантаження, зовнішнього опору та осової стискуючої сили. Система рівнянь, які описують поперечні коливання одновимірного пружного об'єкта за уточненою моделлю Тимошенко, має вигляд

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{GF}{k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = q(x, t), \\ EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{GF}{k} \left(\theta - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Крайові умови для даної моделі об'єкту візьмемо у вигляді

$$\begin{cases} u|_{x=0,l} = 0, \\ \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{GF} q(x, t) \right) \Big|_{x=0,l} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В виразах (1)-(2) $k = \left(\frac{FS^*}{bI} \right)^2$ – коефіцієнт зсуву, який залежить від

форми поперечного перерізу, $\theta(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma$ – повний кут повороту поперечного перерізу балки, де γ – додатковий кут повороту поперечного перерізу балки, який пов'язаний з деформацією зсуву. У випадку врахування сил інерції Коріоліса вираз для дії рухомого масового навантаження запишемо наступним чином

$$q(x, t) = -q_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (3)$$

Розглянемо коливання елемента стиснутого осью силою N , з урахуванням сил опору зовнішнього середовища пропорційного швидкості поперечного руху перерізу з коефіцієнтом α та пружної основи з коефіцієнтом жорсткості c . Математична модель такої задачі зводиться до дослідження системи двох зв'язаних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{GF}{k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + cu = q(x, t), \\ EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{GF}{k} \left(\theta - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Розв'язок цієї системи підпорядковується граничним умовам (2). Дана задача при використанні виразу (3) є досить загальною, але не враховує прискорення руху рівномірного навантаження. Щоб врахувати це прискорення, необхідно записати вираз для навантаження $q(x, t)$ наступним чином

$$q(x, t) = -q_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (5)$$

де $a = \frac{\partial v}{\partial t}$ – прискорення рухомого навантаження.

Таким чином, математична модель (4)-(2) при використанні виразу (5) є найбільш загальною. Щоб отримати результати часткових випадків, необхідно буде покласти рівними нулю відповідні доданки у відповідних диференціальних рівняннях математичної моделі.

Виключаючи з системи (4) невідому функцію $\theta(x, y)$, отримуємо одне диференціальне рівняння відносно невідомої функції прогину $u(x, t)$

$$\begin{aligned} & \left(EI + kN \frac{EI}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \left(k\rho \frac{EI}{G} + \rho I + k\rho N \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + k\rho^2 \frac{I}{G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \\ & - \alpha k \frac{EI}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \alpha k \rho \frac{I}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \left(ck \frac{EI}{GF} + N \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\rho F + ck\rho \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ & + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + cu = q(x, t) - k \frac{EI}{GF} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + k \frac{\rho I}{GF} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничні умови (2) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} u|_{x=0, l} = 0, \\ \left(-GF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - kq(x, t) \right) \Big|_{x=0, l} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Після підстановки в диференціальне рівняння (6) та граничні умови (7) виразу (5) для $q(x, t)$ матимемо наступну крайову задачу

$$\begin{aligned} & \left(EI + kN \frac{EI}{GF} - kq_0 v^2 \frac{EI}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2kq_0 v \frac{EI}{GF} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} - \\ & - \left(k\rho \frac{EI}{G} + kq_0 \frac{EI}{GF} + \rho I + k\rho N \frac{I}{GF} - k\rho q_0 v^2 \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + 2kq_0 v \rho \frac{I}{GF} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} + \\ & + \left(k\rho^2 \frac{I}{G} + k\rho q_0 \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - kq_0 a \frac{EI}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha k \frac{EI}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + k\rho q_0 a \frac{I}{GF} \frac{\partial^3 q}{\partial x \partial t^2} + \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & + \alpha k \rho \frac{I}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \left(q_0 v^2 - ck \frac{EI}{GF} - N \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2q_0 v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \\ & + \left(\rho F + q_0 + ck \rho \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_0 a \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + cu = 0 \\ & \left\{ \begin{aligned} & u|_{x=0, l} = 0, \\ & \left((kq_0 v^2 - GF) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2kq_0 v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + (k\rho F + kq_0) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kq_0 a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0, l} = 0 \end{aligned} \right. \quad (9) \end{aligned}$$

Функцію прогину $u(x, t)$, перейшовши до безрозмірних параметрів, відшукуємо у вигляді

$$u(z, \tau) = \varphi(z) \cos \omega \tau + \phi(z) \sin \omega \tau. \quad (10)$$

Функції $\varphi(z)$ та $\phi(z)$ є формами поперечних коливань стержня, z – безрозмірна координата, $\varphi(z)$ – форма власних коливань, $\phi(z)$ – супровідних, для визначення яких отримуємо наступні системи звичайних зв'язаних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_4 \varphi^{IV} + \alpha_3 \varphi^{III} - \beta_3 \phi^{III} + \alpha_2 \varphi^{II} - \beta_2 \phi^{II} + \alpha_1 \varphi^I - \beta_1 \phi^I + \alpha_0 \varphi - \beta_0 \phi = 0, \\ \alpha_4 \phi^{IV} + \alpha_3 \phi^{III} + \beta_3 \varphi^{III} + \alpha_2 \phi^{II} + \beta_2 \varphi^{II} + \alpha_1 \phi^I + \beta_1 \varphi^I + \alpha_0 \phi + \beta_0 \varphi = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \varphi|_{z=0, 1} = 0, \\ \phi|_{z=0, 1} = 0, \\ b_0 \varphi^{II} + b_3 \varphi^I + b_1 \omega \phi^I - b_2 \omega^2 \varphi \Big|_{z=0, 1} = 0, \\ b_0 \phi^{II} + b_3 \phi^I - b_1 \omega \varphi^I - b_2 \omega^2 \phi \Big|_{z=0, 1} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

або використовуючи комплексну згортку матимемо

$$\alpha_4(\varphi^{IV} + i\phi^{IV}) + (\alpha_3 + i\beta_3)(\varphi^{III} + i\phi^{III}) + (\alpha_2 + i\beta_2)(\varphi^{II} + i\phi^{II}) + (\alpha_1 + i\beta_1)(\varphi^I + i\phi^I) + (\alpha_0 + \beta_0)(\varphi + i\phi) = 0 \quad (13)$$

$$\begin{cases} \varphi + i\phi|_{z=0,1} = 0, \\ b_0(\varphi^{II} + i\phi^{II}) + (b_3 - ib_1\omega)(\varphi^I + i\phi^I) - b_2\omega^2(\varphi + i\phi)|_{z=0,1} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Ввівши комплексні коефіцієнти $\gamma_j = \alpha_j + i\beta_j$ та комплексну функцію дійсного аргументу $\Phi(z) = \varphi(z) + i\phi(z)$, отримаємо одне звичайне диференціальне рівняння з граничними умовами відносно цієї функції $\Phi(z)$

$$\sum_{j=0}^4 \gamma_j \frac{d^j \Phi}{dz^j} = 0, \quad (15)$$

$$\begin{cases} \Phi(z)|_{z=0,1} = 0, \\ b_0\Phi^{II}(z) + (b_3 - ib_1\omega)\Phi^I(z) - b_2\omega^2\Phi(z)|_{z=0,1} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Розв'язки диференціального рівняння (15) шукаємо у вигляді $\Phi(z) = \sum_{j=1}^4 C_j e^{k_j z}$, де k_j – корені характеристичного рівняння $\sum_{j=0}^4 \gamma_j k^j = 0$, що є алгебраїчним рівнянням четвертого порядку з комплексними коефіцієнтами, розв'язки якого знайдемо за допомогою методу градієнтного спуску Воеводіна; C_j – невідомі сталі, що визначаються за граничними умовами у вигляді

$$\begin{cases} \Phi(0) = 0, \\ \Phi(1) = 0, \\ b_0\Phi^{II}(0) + (b_3 - ib_1\omega)\Phi^I(0) - b_2\omega^2\Phi(0) = 0, \\ b_0\Phi^{II}(1) + (b_3 - ib_1\omega)\Phi^I(1) - b_2\omega^2\Phi(1) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Після підстановки $\Phi(z) = \sum_{j=1}^4 C_j e^{k_j z}$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно чотирьох невідомих сталих C_i

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0, \\ C_1 e^{k_1} + C_2 e^{k_2} + C_3 e^{k_3} + C_4 e^{k_4} = 0, \\ d_1 C_1 + d_2 C_2 + d_3 C_3 + d_4 C_4 = 0, \\ d_1 e^{k_1} C_1 + d_2 e^{k_2} C_2 + d_3 e^{k_3} C_3 + d_4 e^{k_4} C_4 = 0, \end{cases} \quad (18)$$

де $d_j = b_0 k_j^2 + (b_3 - ib_1\omega)k_j - b_2\omega^2$.

Отримана система (18) є системою однорідних алгебраїчних лінійних рівнянь з комплексними коефіцієнтами, нетривіальні розв'язки якої будуть існувати тільки у випадку, коли визначник цієї системи дорівнюватиме нулю, тобто треба розв'язати рівняння $\Delta(\omega) = 0$, що вимагає розв'язання системи двох рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\Delta(\omega)) = 0, \\ \operatorname{Im}(\Delta(\omega)) = 0, \end{cases}$$

корені рівнянь якої, якщо співпадатимуть, будуть власними значеннями крайової задачі та власними частотами коливань об'єкта з рухомим інерційним навантаженням a , відповідно, функції $\varphi(z)$ власними та $\phi(z)$ супровідними формами його коливань.

Остаточно загальний розв'язок задачі має вигляд

$$u(z, t) = \sum_n a_n \left[\operatorname{Re}(\Phi_n(z)) \cos(\omega_n t + \alpha_n) + \operatorname{Im}(\Phi_n(z)) \sin(\omega_n t + \alpha_n) \right].$$

Висновки. Метод двохвильового подання руху дозволяє побудувати точний розв'язок математичної моделі при дослідженні динаміки пружного об'єкта під дією рухомого інерційного навантаження в межах вихідних гіпотез. Для чисельної реалізації алгоритму методу двохвильового подання і дослідження динаміки пружного елемента була складена програма для ПЕОМ та з'ясована залежність між власними частотами поперечних коливань одновимірного об'єкта та швидкістю руху навантаження.

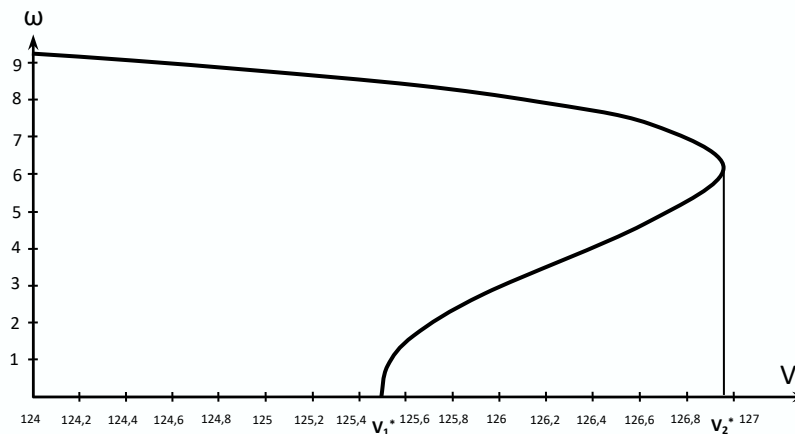


Рис.1 Залежність власної частоти ω_7 від швидкості рухомого навантаження

На рис. 1 наведено графік для власної частоти коливань ω_7 , звідки видно, що при збільшенні швидкості руху навантаження частота зменшується. Але при досягненні швидкості певного значення v_1^* з'являється нова власна частота, і залежність цієї частоти від швидкості вже є зростаючою. На деякому проміжку мають місце початкова та нова власні частоти, і при цьому вони наближуються одна до одної. При v_2^* вони стають рівними. Значення швидкості v_1^* назовемо

першою критичною швидкістю руху інерційного навантаження для об'єкта, при досягненні якої відбуваються його статична втрата стійкості, тобто у об'єкта з'являється нова рівноважна форма, відносно якої в подальшому відбуваються коливання. Значення швидкості v_2^* назовемо другою критичною швидкістю, при досягненні якої відбувається динамічна втрата стійкості, коли дві власні частоти співпадають або близькі до цього. В нашому випадку при досягненні v_2^* будуть спостерігатися значні збільшення амплітуд коливань об'єкту, що є небезпечним. Зауважимо, що такий результат якісної поведінки об'єкту за дії рухомого інерційного навантаження не вдається виявити наближеними методами при розгляді спрощених механічних моделей.

Література:

1. Горошко О.О., Дем'яненко А.Г., Киба С.П. Двохвильові процеси в механічних системах : монографія. Київ: Либідь, 1991. 188 с.
2. Дем'яненко А.Г., Ключник Д.В. К проблеме динамики упругих систем в поле сил инерции подвижных нагрузок и систем, приводящихся к этой модели. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Warsaw. 2002. №10, v. 2. P. 632-638.
3. Дем'яненко А.Г., Киба С.П. Об одном обобщении метода разделения переменных и некоторых его приложениях в механике. *VII Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике* : зб. тез. М.: МГУ, 1991. С. 128.
4. Дем'яненко А.Г., Евстратенко Д.А. Метод двухволнового представления колебаний и его развитие в задачах строительной механики упругих конструкций с подвижной инерционной нагрузкой. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. 2010. Дніпропетровськ: ПГАСА. № 6. С. 43-50.
5. Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод : монографія. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2002. 292 с.
6. Киба С.П., Дем'яненко А.Г. Узагальнення методу розділення змінних та деякі його застосування в механіці. Київ, 1991. 120 с.
7. Пановко Я.Г. Исторический очерк развития теории динамического действия подвижной нагрузки. *Труды Ленингр. КВВИА*. 1946. Вып. 17. С. 54-69.
8. Steuding H. Die Schwingung von Trägern bei bewegten Lasten. *Ing. Arch* 5. 1934. P. 275-305.
9. Housner G.W. Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. *Journal of Applied Mechanics*. Trans ASME. 1952. Vol. 19, № 2. P. 205-209.

References:

1. Horoshko, O.O., Demianenko, A.G., & Kiba, S.P. (1991). *Dvokhilevi protsesi v mekhanichnikh sistemakh* [Two-wave processes in mechanical systems]. Kyiv: Lybid [in Ukrainian].
2. Demianenko, A.G., & Kluishnik, D.V. (2002). K probleme dynamiky uprugih system v polie sil inertsyi podvizhnykh nagruzok i sistiem, privodiashchykh k etoi modeli [On the problem of the dynamics of elastic systems in the field of inertial forces of moving loads and systems reduced to this model]. *Theoretical Foundation of Civil Engineering*, Warsaw, 10 (2), 632-638.

3. Demianenko, A.G., & Kiba S.P. (1991). Ob odnom obobtchenii metoda razdeleniia peremennih I nekotoryh ego prilozheniiah v mehanike [On a generalization of the method of separation of variables and some of its applications in mechanics]. Proceedings of the Conference: VII Vsiesoiuznyi siezd po tieorietichieskoi i prikladnoi miekhanikie – VII All-Union Congress on Theoretical and Applied Mechanics. (p. 128). Moscow: MGU [in Russian].

4. Demianenko, A.G., & Eyvstratenko, D.A. (2010). Metod dvuhvolnovogo predstavleniia kolebaniy I ego razvitie v zadachah stroitelnoy miekhaniki upruhikh konstruktsyi s podvignoy inertsiionnoy nagruzkoy [The method of two-wave representation of vibrations and its development in the problems of structural mechanics of elastic structures with a moving inertial load]. Visnik PGASA – Bulletin of PGASA, 6, 43-50 [in Russian].

5. Kalenyuk, P., & Nytrebych, Z. (2002). Uzahalnena skhema vidokremlennia zminnykh. Dyferentsialno-symvolnyi metod [Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method]. Lviv: «Lvivska politekhnika» [in Ukrainian].

6. Kiba, S.P., & Demianenko, A.G. (1991). Uzahalnennia metodu rozdilennia zminnykh ta deiaki yoho zastosuvannia v mekhanitsi [Generalization of the method of separation of variables and some of its applications in mechanics]. Kyiv [in Ukrainian].

7. Panovko, Ia.G. (1946). Istoricheskiy ocherk razvitiia teorii dinamicheskogo deystviia podvizhoy nagruзки [Historical outline of the development of the theory of dynamic action of a moving load]. Trudy LKVVIA – Works of LKVVIA, 17, 54-69 [in Russian].

8. Steuding, H. (1934). Die Schwingung von Tragern bei bewegten Lasten. Ing. Arch 5.

9. Housner, G.W. (1952). Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. Journal of Applied Mechanics. Trans ASME, vol. 19, №2, 205-209.