

УДК 378.147:51

І. В. Щербина,

к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри вищої математики, фізики та загально-інженерних дисциплін, Дніпровський державний аграрно-економічний університет

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-3968-4326>

Т. С. Кагадій,

д. ф.-м. н., професор, професор кафедри прикладної математики, НТУ Дніпровська політехніка

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6116-4971>

Л. Ф. Сушко,

старший викладач кафедри вищої математики, фізики та загально-інженерних дисциплін, Дніпровський державний аграрно-економічний університет

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7505-9184>

Д. В. Бабець,

д. т. н., професор кафедри прикладної математики, НТУ Дніпровська політехніка

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5486-9268>

DOI: 10.32702/2306-6792.2022.19.40

РОЗВИНЕННЯ МЕТОДОЛОГІЙ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ ПРИ ФОРМУВАННІ ФАХОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ЕКОНОМІСТІВ

I. Scherbina,

PhD in Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Physics and GED, Dnipro State Agrarian and Economic University

T. Kagadiy,

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,

Professor of the Department of Applied Mathematics, Dnipro University of Technology

L. Sushko,

Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics,

Physics and GED, Dnipro State Agrarian and Economic University

D. Babets,

Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics, Dnipro University of Technology

DEVELOPMENT OF METHODS OF TEACHING MATHEMATICS IN THE FORMATION OF PROFESSIONAL COMPETENCES OF ECONOMISTS

Стаття присвячена проблемі спрямованості курсу вищої математики під час професійної підготовки майбутніх економістів у вищих навчальних закладах України. Проаналізовано зв'язки між математичними та фаховими економічними дисциплінами: наведений перелік основних розділів курсу вищої математики та їх застосування при вивченні професійно-орієнтованих дисциплін. Визначені головні напрямки підвищення ефективності навчання здобувачів економічних спеціальностей при вивченні курсу вищої математики. Для ілюстрації матеріалу статті наведені приклади задач економічного спрямування, розв'язання яких ґрунтовано на застосуванні різних розділів вищої математики. Побудовані математичні моделі цих задач, та наведено їх детальне розв'язання. Підкреслено необхідність докладного вивчення деяких розділів вищої математики, наприклад, лінійної алгебри, диференціальних рівнянь, що часто і в повному обсязі використовують в економіці.

One of the important directions of modern pedagogy is the study of issues related to the mathematical education of economics specialists. This paper is devoted to the actual problem of the direction of the course of advanced mathematics during the professional training of future economists in higher educational institutions of Ukraine in such a way, that a students, receiving the degree, can see the connection between fundamental disciplines and applied professional tasks from the very first classes. The necessity of a detailed study of some sections of advanced mathematics, for example, linear algebra or differential equations, which are often and fully used in economics, is emphasized.

The authors have identified the main directions for improving the effectiveness of teaching for students of economic specialties who are studying a course of higher mathematics. Examples of problems with an economic direction, which solution is based on the application of various sections of advanced mathematics, are given to illustrate the material of the paper. Mathematical models of these problems are built, and their detailed solutions are given. The plan of optimal transportation of goods is obtained by solving the system of linear inhomogeneous algebraic equations by the Giordano-Gauss method. The problem of calculating individual types of raw materials for the manufacturing of various products produced by the enterprise and the required annual amount of credit for purchasing these raw materials is solved using algebraic operations on matrices. This paper is considering the application of the "Differential Equations" section. Following models have been complied: a mathematical model of production growth under competitive conditions, a dynamic model of Keynes, a neoclassical model of economic growth, and corresponding differential equations of the first or second order. Following models were compiled: a mathematical model of production growth under competitive conditions, a dynamic model of Keynes, a neoclassical model of economic growth, and corresponding differential equations of the first or second order. This allows to include such problems in a lecture course or solve them during practical classes.

Thus, it can be concluded that mathematical modeling of economic processes makes it possible to solve modern applied problems of agricultural industry. It is important to use reliable data, to meaningfully describe an object, its quantitative characteristics, and dependencies between constituent elements.

Ключові слова: економічна спрямованість задач, елементи лінійної алгебри, математична модель, система лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь, загальний розв'язок диференціального рівняння.

Key words: economic directivity of problems, elements of linear algebra, mathematical model, system of linear non-homogeneous algebraic equations, deep decoupling of differential equations.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Зростання вимог до сучасних фахівців у галузі економіки формує потребу такої системи навчання, яка б оптимізувала навчальний процес і забезпечувала високий рівень сформованості професійних умінь. Необхідний рівень професіоналізму випускників економічного профілю можливий лише за умови відповідної математичної підготовки. Математичний апарат так чи інакше використовується і при розгляді економіко-математичної моделі, і для емпіричної перевірки економічної гіпотези. Навіть зручна та знайома система позначень дає змогу легко формалізувати економічний процес. Ускладнення виробничих і технологічних процесів викликають необхідність аналізу й обробки великих обсягів інформації для успішного прийняття рішень та прогнозування. Це

приводить до необхідності вивчення більш сучасних розділів математики, таких, як теорія ігор, системний аналіз, дискретна математика та інші. Ефективність навчання здобувачів економічних спеціальностей багато в чому залежить від вміння викладача математики підібрати і донести до слухача спектр професійно спрямованих математичних задач з економічною складовою. Це, звісно, потребує додаткових зусиль, часу, підготовки, але першокурсники вже з перших занять зрозуміють, що вони дійсно навчаються за обраним фахом.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Майбутні фахівці економічної галузі набувають потрібних компетенцій у закладах вищої освіти не тільки при вивченні різних курсів з еко-

номіки, а і при вивченні всього комплексу дисциплін відповідної спеціальності. Аналіз останніх досліджень і публікацій показує, що залишається багато проблем в професійній спрямованості навчання математики на економічних спеціальностях ВНЗ. Широкий спектр питань навчання математики здобувачів вищої освіти, у тому числі питання, пов'язані з використанням математичного моделювання, досліджені А.П. Гусак [1], Г.Я. Дуткою [2], С.А. Кирилащук [3], А.І. Нічуговською [4], К.Є. Румянцевою [5; 8], та ін. Аналіз наукової та методичної літератури, свідчить, що проблема формування готовності майбутніх економістів до застосування методів математичного моделювання ще недостатньо досліджена в як в теорії так і на практиці.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Метою статті є обґрунтування необхідності нових методологічних підходів при викладанні математики здобувачам вищої освіти економічного напрямку.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Майже всі розділи вищої математики мають економічне застосування і класичний підхід до введення основних понять не виключає сучасний ілюстративний матеріал [6; 7]. Авторами проаналізована відповідність між програмою вищої математики та найбільш відомими та обов'язковими для вивчення економічними задачами.

Вже на першому курсі студенти можуть ознайомитись з цими проблемами, побачити хоча б спрощене розв'язання, відчути необхідність оволодіння математичним апаратом.

Розділ "Лінійна алгебра" вчить використання алгебри матриць, лінійних перетворень, систем лінійних рівнянь в економічних дослідженнях. Можуть бути розглянуті задачі прогнозу випуску продукції, лінійна модель багатогалузевої економіки, продуктивні моделі Леонтьєва, лінійна модель торгівлі. Матричні методи дозволяють обробляти величезний і дуже різноманітний статистичний матеріал, з різними вихідними даними.

Застосування теорії графів дозволить студентам на сучасному рівні розглянути транспортну задачу, задачу оптимального використання ресурсів, зрозуміти класичні підходи, що виникають в таких еталонних задачах, як задача комівояжера.

Основи математичного аналізу застосовуються при дослідженні функцій та графіків в

економічному моделюванні, теорія границь використовується в соціально-економічній сфері. Студентам важливо нагадати елементи фінансової математики (прості відсотки, складні відсотки, нарахування відсотків в умовах інфляції). Потрібно звернути увагу на поняття функції, що є дуже поширеним в економіці (виробнича функція — функція, що описує залежність певного результату виробничої діяльності від факторів, які його зумовлюють; функція корисності описує залежність корисності, тобто результату, або ефекту деякої дії, від рівня (інтенсивності) цієї дії; функція випуску (один із видів виробничої функції) описує залежність обсягу виробництва від наявності або споживання ресурсів, функція витрат описує залежність витрат виробництва від обсягу, функція попиту, споживання чи пропозиції).

Основні поняття диференціального числення використовують при розв'язанні задачі про продуктивність праці, вивченні законів спадної прибутковості, дослідженні поведінки функції корисності та ін.

Функції декількох змінних зустрічаються при вивченні таких понять, як ізокванти, криві індивідуальності, криві байдужості, ізокліни, загальні і граничні витрати виробництва, виробнича функція Кобба — Дугласа, середні та граничні значення ефективності ресурсів, масштаб і ефективність виробництва, максимізація прибутку від виробництва.

Інтегральне числення функції однієї змінної застосовують при знаходженні функцій витрат, прибутку, споживання, при розв'язуванні задачі про визначення коефіцієнта Джині, що характеризує ступінь нерівності в розподілі доходів населення країни.

Диференціальні і різницеві рівняння використовують при моделюванні економічних процесів, таких, як природне зростання випуску продукції, динаміка ринкових цін, зростання в соціально-економічній сфері з урахуванням різноманітних факторів.

В процесі розв'язування прикладних задач основну увагу студентів треба спрямовувати на побудову математичної моделі. Задачі мають бути різного рівня складності, для того, щоб студент з будь-якою підготовкою зміг розв'язати фахову проблему, хоча і не складну.

Наведені нижче приклади можуть бути розв'язані студентами вже після вивчення першої теми "Лінійна алгебра".

Задача 1. Два заводи поставляють двом сільськогосподарським підприємствам універсальні сівалки, у кількості 30 і 35 сівалок відповідно. Перший завод випустив 40 сівалок, дру-

гий — 25. Витрати з перевезення сівалок з першого заводу до першого та другого підприємств дорівнюють 15 та 12 грошових одиниць. А з другого заводу до першого підприємства — 10 гр. одиниць, до другого — 20 гр. одиниць. Мінімальні витрати на перевезення дорівнюють 875 гр. одиниць. Знайти оптимальний план перевезення сівалок.

Позначимо x_1, x_2 — кількість сівалок, перевезених з першого заводу до першого та другого сільськогосподарських підприємств відповідно, x_3, x_4 — кількість сівалок, перевезених з другого заводу до тих же підприємств.

Математична модель поставленої задачі буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 40 \\ x_3 + x_4 &= 25 \\ x_1 + x_3 &= 30 \\ x_2 + x_4 &= 35 \\ 15x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 20x_4 &= 875 \end{aligned}$$

Маємо систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь, що складається з 5 рівнянь з 4 невідомими, яку розв'яжемо методом Жордано-Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 25 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 35 \\ 15 & 12 & 10 & 20 & 875 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 25 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Отримали наступний розв'язок: з першого заводу до першого підприємства буде перевезено 15 сівалок, до другого — 25 сівалок, з другого заводу відповідно 15 та 10.

Звісно, отриману систему рівнянь можна розв'язати комп'ютерними засобами, наприклад за допомогою програмного пакету Mathcad, але для застосування будь яких комп'ютерних засобів треба скласти та проаналізувати математичну модель задачі.

Задача 2. Цех виготовляє дитячі іграшки. В таблиці наведено потребу деталей для виготовлення відповідної продукції та сировини для виготовлення цих деталей, кількість днів на протязі року, коли цех виробляє ці іграшки та вартість сировини:

	Деталі	Види іграшок					Сировина		
		Пожежна машина	Трактор	самоскид	кран	Екскаватор	пластмаса	гумка	залізо
1	Колесо	3	28	6	6	4	0,1	0,2	0,5
2	Вісь	2	14	3	3	2	0	0	0,6
3	Корпус	1	5	1	2	1	0,5	0,3	0,6
4	Руль	2	0	1	1	1	0,1	0,1	0,4
Кількість іграшок, виготовлених за день							Вартість сировини		
Кількість робочих днів за рік							4,2	5,6	6,8
		200	212	208	224	218			

Знайти:

кількість усіх видів іграшок кожного виду, вироблених за рік; річну потребу кожного виду сировини; річну суму кредитування для закупки сировини, яка необхідна для виробництва кожного виду іграшок при даній кількості робочих днів, протягом яких виробляються ці іграшки.

Для розв'язання поставленої задачі побудуємо наступні матриці:

$A = (5 \ 7 \ 6 \ 4 \ 4)$ — матриця готових іграшок, виготовлених за день,

$B = (200 \ 212 \ 208 \ 224 \ 218)$ — матриця робочих днів, протягом яких виробляється продукція.

Кількість іграшок, вироблених за рік дорівнює добутку $A \cdot B^T$, де B^T — матриця, транспонована до матриці B .

$$A \cdot B^T = (5 \ 7 \ 6 \ 4 \ 4) \begin{pmatrix} 200 \\ 212 \\ 208 \\ 224 \\ 218 \end{pmatrix} =$$

$$= 5 \times 200 + 7 \times 212 + 6 \times 208 + 4 \times 224 + 4 \times 218 = 5500 \text{ шт.}$$

Тобто, за рік виготовлено всього 5500 іграшок, з них — 1000 пожежні машини, 1484 трактори, 1248 — самоскиди, 896 — крани, 872 — екскаватори.

Матриця витрат сировини для кожного типу деталей:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Перший рядок матриці Q — витрата пластмаси, гумки та заліза на одне колесо, другий — витрати тих же видів сировини на вісь, третій — на один корпус, четвертий — на один руль.

Матриця різного типу деталей, необхідних для випуску іграшок кожного найменування:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 28 & 6 & 6 & 4 \\ 2 & 14 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо потребу в різних видах сировини на виготовлення одиниці виробів:

$$R = Q^T \cdot P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 0,3 & 0,6 \\ 0,5 & 0,6 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 28 & 6 & 6 & 4 \\ 2 & 14 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5,3 & 1,2 & 1,7 & 1,1 \\ 2,1 & 7,1 & 2,1 & 2,4 & 2,3 \\ 4,1 & 25,4 & 5,8 & 6,4 & 4,6 \end{pmatrix}.$$

Елементи останньої матриці виражають потребу різних типів сировини (перший рядок — пластмаси, другий рядок — гумки, третій рядок — заліза) для виготовлення однієї одиниці іграшок кожного виду (перший стовпець — пожежних машин, другий — тракторів, третій — самоскидів, четвертий — будівельних кранів, та п'ятий — екскаваторів). Для отримання кількості потреби сировини кожного виду для річного обсягу продукції дістанемо матрицю, яка є результатом множення кожного стовпця матриці R на кількість річного випуску іграшок відповідного типу:

$$G = \begin{pmatrix} 1000 & 7865,2 & 1540,8 & 1523,2 & 959,2 \\ 2100 & 10536,4 & 2620,8 & 2150,4 & 2005,6 \\ 4100 & 37963,6 & 7447,2 & 5734,4 & 4011,2 \end{pmatrix}$$

Матриця вартості 1кг сировини має вигляд:
 $S = (4,2 \ 5,6 \ 6,8)$.

Вартість сировини, яка необхідна для виготовлення іграшок протягом року дорівнює

$$T = S \cdot G = (4,2 \ 5,6 \ 6,8) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1000 & 7865,2 & 1540,8 & 1523,2 & 959,2 \\ 2100 & 10536,4 & 2620,8 & 2150,4 & 2005,6 \\ 4100 & 37963,6 & 7447,2 & 5734,4 & 4011,2 \end{pmatrix} =$$

$$= (43840 \ 350190,16 \ 71788,8 \ 57433,6 \ 42536,16),$$

де у першому стовпці вартість сировини пожежних машин, другому — тракторів, третьому — самоскидів, четвертому — кранів, та п'ятому — екскаваторів.

Можна навести ще багато прикладів, де економічні задачі розв'язуються засобами аналітичної геометрії, математичного аналі-

зу, теорії ймовірностей, тощо. В даній роботі ми розглянемо застосування розділу "Диференціальні рівняння" до динамічної моделі Кейнса та моделі випуску в умовах конкуренції.

Модель зростання випуску в умовах конкуренції. Розглянемо модель зростання випуску продукції, коли фірма-виробник продає свою продукцію за фіксованою ціною. Позначимо через $q(t)$ обсяг продукції, що реалізується за ціною p у момент часу t . Тоді фірма на цей час отримає прибуток $R = p q(t)$. Передбачається, що частка цього доходу $I(t)$ інвестується у виробництво цієї продукції, тобто

$$I(t) = m p q(t) \quad (1),$$

де m — норма інвестиції ($m = \text{const}$, $0 < m < 1$).

Якщо фірма здатна реалізувати всю вироблену продукцію (ринок ненасичений), то внаслідок розширення виробництва вона дістане приріст доходу, частка якого знов інвестується у виробництво. Це викличе зростання швидкості випуску продукції, причому швидкість випуску пропорційна збільшенню інвестицій, тобто

$$\frac{d q(t)}{d t} = l I(t) \quad (2),$$

де $1/l$ — норма акселерації ($l = \text{const}$). Після підстановки (1) в (2) виникає диференціальне рівняння,

$$\frac{d q}{d t} = l m p q \quad (3),$$

що є рівнянням з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок — $q = C e^{m l p t}$, де C — довільна стала. Якщо у початковий момент при $t=0$ обсяг випуску склав q_0 , то $C = q_0$. Звідси дістанемо частинний розв'язок рівняння $q = q_0 e^{m l p t}$.

Більш привабливі за своїм економічним змістом висновки можна дістати з моделі зростання випуску в умовах конкуренції. За цією моделлю знімається умова ненасиченості ринку і припускається, що ціна на продукцію фірми із зростанням обсягів виробництва спадає, тобто $p = p(q)$ — спадаюча функція; $\frac{d p}{d q} < 0$. Тоді (3)

зводиться до нелінійного диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$\frac{d q}{d t} = l m p(q) q \quad (4).$$

Усі множники правої частини рівняння (4) додатні, тому $\frac{d q}{d t} > 0$, і функція $q(t)$ — зроста-

юча. Характер цього зростання визначається її другою похідною. З рівняння (4) дістаємо

$$\begin{aligned}\frac{d^2 q}{dt^2} &= lm \left(q'p(q) + q \frac{dp}{dq} q' \right) = \\ &= lm q' p \left(1 + \frac{q}{p} \frac{dp}{dq} \right) = lm q' p \left(1 - \frac{1}{|E|} \right).\end{aligned}$$

де E — еластичність попиту за ціною. При еластичному попиті, коли еластичність попиту за модулем більше одиниці, друга похідна від функції обсягу продукції додатна, що свідчить про прогресуюче зростання випуску. За умови нееластичного попиту, коли друга похідна від обсягу продукції від'ємна, можна спостерігати уповільнення збільшення випуску.

У випадку лінійної інверсної функції попиту $p(q) = a - bq$ рівняння (4) набуває вигляду

$$\frac{dq}{dt} = lm(a - bq)q.$$

Звідки

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = lm \frac{dq}{dt} (a - 2bq).$$

З цих двох рівнянь випливає, що

$$1. \frac{dq}{dt} = 0 \text{ при } q=0 \text{ або при } q = \frac{a}{b}.$$

$$2. q = \frac{a}{2b} \text{ — точка перегину графіка функції}$$

$q = q(t)$, бо при $q < \frac{a}{2b}$ друга похідна $q'' > 0$, а при $q > \frac{a}{2b}$ ця похідна від'ємна.

Динамічна модель Кейнса. Ця макроекономічна модель базується на таких балансових співвідношеннях:

1. Загальна умова рівноваги ринку — сукупні витрати мають дорівнювати національному доходу країни. Тобто

$$Y(t) = E(t) + I(t) + C(t) \quad (5),$$

де $Y(t)$ — національний дохід, $E(t)$ — державні витрати, $I(t)$ — інвестиції, $C(t)$ — споживання

2. Загальне споживання складається з внутрішнього споживання певної частини національного доходу у народному господарстві та кінцевого споживання, тобто

$$C(t) = a(t)Y(t) + b(t) \quad (6),$$

де $a(t)$ — коефіцієнт схильності до споживання ($0 < a(t) < 1$), $b(t)$ — автономне (кінцеве споживання)

3. Інвестиції залежать від норми акселерації, що характеризуються рівнем техно-

логічного виробництва та інфраструктурою країни, тобто

$$I(t) = k(t)Y'(t) \quad (7),$$

де $Y'(t)$ — граничний національний продукт.

Динаміка функцій $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$, $E(t)$ задається екзогенно, причому вони можуть бути сталими, зростати за даним темпом, або мати складнішу динаміку.

За цих умов визначимо національний дохід як функцію часу. Підстановка виразів для $C(t)$ з рівняння (6) і $I(t)$ з рівняння (7) у перше балансове співвідношення приводить до лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку відносно функції $Y(t)$:

$$Y'(t) = \frac{1-a(t)}{k(t)} Y - \frac{b(t)+E(t)}{k(t)} \quad (8).$$

Дістати загальний розв'язок такого рівняння — задача досить складна. Але у спрощеному випадку, коли основні ендогенні параметри a , b , k , E сталі, рівняння перетворюється на диференціальне рівняння першого порядку із сталими коефіцієнтами

$$Y'(t) = \frac{1-a}{k} Y - \frac{b+E}{k} \quad (9).$$

Як відомо, загальний розв'язок $Y(t)$ неоднорідного рівняння дорівнює сумі будь-якого його частинного розв'язку Y_p та загального розв'язку $y(t)$ відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок відповідного диференціального рівняння задається функцією

$$y(t) = Ae^{\frac{1-a}{k}t} \quad (10),$$

де A — довільна стала. За частинний розв'язок Y_p можна вибрати так званий рівноважний розв'язок, що впливає з умови $Y' = 0$, тобто

$$Y_p = \frac{b+E}{1-a} > 0 \quad (11).$$

Таким чином шуканий загальний розв'язок визначається сумою

$$Y(t) = Ae^{\frac{1-a}{k}t} + \frac{b+E}{1-a} \quad (12).$$

Проаналізуємо загальний розв'язок якісно.

1. Якщо у початковий момент часу, при $t = 0$ $Y(0) < Y_p$, то $A = Y(0) - Y_p < 0$ і з часом інтегральні криві віддаляються від рівноважного розв'язку (11), тобто з часом при фіксованих параметрах a , b , k і E національний дохід падає (бо показник експоненти додатний).

2. За умови, що $t = 0$ (в початковий момент часу) $Y(0) > Y_p$ і національний дохід зростає — інтегральні криві віддаляються догори від рівноважної прямої $Y = Y_p$.

Неокласична модель економічного зростання. Основний інструмент неокласичного аналізу економічного зростання - виробнича функція. У спрощеному випадку двофакторна виробнича функція задається як $Y = F(K, L)$ де Y — національний дохід, K — капітал (виробничі фонди), L — обсяг витрат праці, $F(K, L)$ — однорідна функція першого порядку, тобто $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$. Якщо ввести у розгляд величини капіталоозброєності праці $k = \frac{K}{L}$ і продуктивності праці $y = \frac{Y}{L}$, то у виробничій функції можна перейти до нових змінних:

$$Y = F(K, L) = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right) = Lf(k) \Rightarrow y = f(k) \quad (13).$$

Рациональний зміст виробничої функції має відповідати спробі визначення найбільш доцільних комбінацій капіталу та праці для досягнення максимального обсягу продукції. Модель ґрунтується на таких передумовах:

1. Природний приріст трудового населення відбувається за сталим темпом зростання, тобто

$$L' = \alpha L \quad (14).$$

2. Інвестиції витрачаються на збільшення виробничих фондів та амортизацію, тобто

$$I = K' + \beta K \quad (15),$$

де β — норма амортизації.

Якщо норма інвестицій дорівнює I , має вигляд

$$K' = IY - \beta K = I F(K, L) - \beta K \quad (16),$$

або

$$K' = I L f(k) - \beta K$$

Далі логарифмуємо функцію $k = \frac{K}{L}$, та знаходимо її повний диференціал

$$\frac{k' dt}{k} = \frac{K' dt}{K} - \frac{L' dt}{L}$$

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}$$

Останню рівність можна переписати за допомогою виразів (14) та (16)

$$k' = I f(k) - (\alpha + \beta) k \quad (17).$$

Здобуте рівняння є диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними відносно функцій $k(t)$. При аналізі розв'язків рівняння важливо виявити їхні різні властивості, дослідити повну картину інтегральних кривих. Особливу роль тут відіграють нулі правої частини рівняння, які називають стаціонарними точками. Для рівняння (17) стаціонарні точки відшукуємо з умови $k' = 0$, тобто $I f(k) - (\alpha + \beta) k = 0$.

Корінь цього алгебраїчного рівняння $k_{st} = const$ і буде стаціонарною точкою.

Задача 3. Виробництво національного доходу характеризується виробничою функцією $Y = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$. Описати динаміку фондоозброєності праці та подати її як функцію t .

Залежність виробничої функції від фондоозброєності праці k виражається функцією $y = k^{\frac{1}{2}}$, отже рівняння (17) набуває вигляду $\frac{dk}{dt} = I \sqrt{k} - (\alpha + \beta) k$.

Розділимо змінні $\frac{dk}{I \sqrt{k} - (\alpha + \beta) k} = dt$ і проінтегруємо, замінивши $k^{\frac{1}{2}} = u$, після чого остаточно визначимо загальний розв'язок рівняння

$$k(t) = \left(\frac{1}{\alpha + \beta} + C e^{-\frac{1}{2}(\alpha + \beta)t} \right)^2 \quad (18),$$

де C — довільна стала.

Стаціонарний розв'язок рівняння (18) визначаємо з умови $k' = 0$ або $I \sqrt{k} - (\alpha + \beta) k = 0$.

Отже ненульовий частинний розв'язок рівняння $k_{st} = \frac{I^2}{(\alpha + \beta)^2}$.

При $t \rightarrow \infty$ загальний розв'язок прямує до частинного розв'язку k_{st} , тобто $k = k_{st}$. Це обумовлює при незмінних вихідних параметрах I , α та β прямування функції фондоозброєності до стаціонарного значення незалежно від початкових умов. В такому разі кажуть, що $k = k_{st}$ — точка стійкої рівноваги.

ВИСНОВКИ

Таким чином можна зробити висновок, що математичне моделювання економічних процесів дає можливість розв'язувати сучасні прикладні задачі аграрної промисловості, особливо, якщо використовувати надійні та достовірні данні, змістовно описувати об'єкт, його кількісні характеристики, вигляд залежності між складовими елементами. Вивчення базового матеріалу при розв'язанні задач прикладного характеру має бути основною рисою сучасної методології викладання математики.

Література:

1. Гусак А.П., Гулівата І.О. Математичне моделювання як засіб здійснення професійної спрямованості навчання математики на економічних спеціальностях ВНЗ. Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Педагогіка.

Соціальна робота. 36. наук. праць. 2016. Вип. 1 (38). С. 105—107.

2. Дутка Г.Я. Фундаменталізація математичної освіти майбутніх економістів: монографія. Київ: УБС НБУ, 2008. 478 с.

3. Кириласчук С.А. Прикладна спрямованість викладання вищої математики студентам економічного профілю ВНЗ / С.А. Кириласчук, З.В. Бондаренко // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. 2017. Вип. 4 (90). С. 22—26.

4. Нічуговська Л.І. Адаптивна концепція математичної освіти студентів ВНЗ і конкурентоспроможність випускників: методологія, теорія, практика: монографія. Полтава: РВВ ПУСКУ, 2008. 153 с.

5. Рум'янцева К.Є. Міждисциплінарна спрямованість курсу вищої математики в економічній освіті. Фізико-математична освіта: науковий журнал. 2017. Вип. 1 (11). С. 97—100.

6. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: 5-те вид. Навч. посіб. К.: Центр учбової літератури, 2010. — 448 с.

7. Берегова Г.І. Математика для економістів: вища математика (перша частина): навч. посібник / Г. І. Берегова, В. Н. Гладунський. — К.: УБС НБУ, 2014. — 374 с.

8. Рум'янцева К.Є. Впровадження математичних методів у професійну підготовку майбутніх економістів. / Науковий Вісник Ужгородського університету. Серія: "Педагогіка. Соціальна робота". Випуск 2 (39) 2016. С. 216—220.

References:

1. Husak, L.P. and Hulivata, I.O. (2016), "Mathematical modeling as a means of implementing the professional orientation of mathematics education in economic specialties of universities", *Naukovy visnyk Uzhhorods'koho universytetu. Serii: Pedagogika. Sotsial'na robota*, vol. 1(38), pp. 105—107.

2. Dutka, H.Ya. (2008), *Fundamentalizatsiia matematychnoi osvity majbutnikh ekonomistiv* [Fundamentalization of mathematical education of future economists], Kyiv, Ukraine.

3. Kyrylaschuk, S.A. and Bondarenko Z.V. (2017), "The applied orientation of teaching higher mathematics to students of the economic profile of higher educational institutions", *Visnyk Zhytomyr's'koho derzhavnoho universytetu imeni Ivana Franka*, vol. 4 (90), pp. 22—26.

4. Nichuhov's'ka, L.I. (2008), *Adaptyvna kontseptsiiia matematychnoi osvity studentiv VNZ i konkurentospromozhnist' vypuskykiv: metodolohiia, teoriia, praktyka* [Adaptive concept of

mathematical education of university students and competitiveness of graduates: methodology, theory, practice], Poltava, Ukraine.

5. Rum'iantseva, K.Ye. (2017), "Interdisciplinary orientation of the higher mathematics course in economic education", *Fizyko-matematychna osvita*, vol. 1 (11), pp. 97—100.

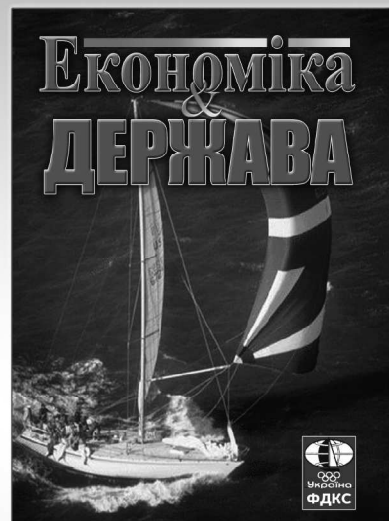
6. Barkov's'kyj, V.V and Barkov's'ka, N.V. (2010), *Vyscha matematyka dlia ekonomistiv* [Higher mathematics for economists], 5th ed, Kyiv, Ukraine.

7. Berehova, H.I. and Hladun's'kyj, V.N. (2014), *Matematyka dlia ekonomistiv: vyscha matematyka (persha chastyna)* [Mathematics for economists: higher mathematics (part one)], Kyiv, Ukraine.

8. Rum'iantseva, K.Ye. (2016), "Implementation of mathematical methods in the professional training of future economists", *Naukovy visnyk Uzhhorods'koho universytetu. Serii: Pedagogika. Sotsial'na robota*, vol. 2 (39), pp. 216—220.

Стаття надійшла до редакції 20.09.2022 р.

Науково-практичний журнал «ЕКОНОМІКА ТА ДЕРЖАВА»



Передплатний індекс: 01751

Виходить 12 разів на рік

**наукове фахове видання України
З ПИТАНЬ ЕКОНОМІКИ**

(Категорія «Б»)

Наказ Міністерства освіти і науки України від 28.12.2019 №1643

Спеціальності — **051, 071, 072, 073, 075, 076, 292.**

www.economy.in.ua

e-mail: **economy_2008@ukr.net**

тел.: (044) 223-26-28

(044) 458-10-73