

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТА ПРАКТИКА

дніпро 2025

**ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**

О.Й. ДІДОБОРЕЦЬ, О.М. КЛЄЦКОВ, В.М. САХНО

**ФІЗИКА. ОСНОВИ ТЕОРІЇ
ТА ПРАКТИКА**

Дніпро
Журфонд
2025

Рекомендовано до друку вченою радою Дніпровського державного аграрно-економічного університету (протокол № 5 від 27.02.2025 р.)

Рецензенти:

Наталія ГУК – д. ф.-м. н., професор, в.о. проректора з науково-педагогічної роботи
(Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара);

Володимир ЛОБОДА – д. ф.-м. н., професор, завідувач кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки
(Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара);

Ельчін АЛІСВ – д.т.н., професор кафедри інжинірингу технічних систем
(Дніпровський державний аграрно-економічний університет);

Микола НЕСТЕРЕНКО – к. ф.-м. н., доцент кафедри енергетики
(Навчально-науковий інститут «Український державний хіміко-технологічний університет» УДУНТ)

Дідоборець О. Й.

Д44

Фізика. Основи теорії та практика: навчальний посібник / О. Й. Дідоборець, О. М. Клєцков, В. М. Сахно; Дніпровський державний аграрно-економічний університет – Дніпро: Журфонд, 2025. – 234 с.

У даному навчальному посібнику наводяться основні теоретичні відомості, які будуть корисні здобувачам вищої освіти, як для розв'язання конкретних задач з фізики, так і в якості фундаменту для вивчення інших дисциплін інженерно-технічного спрямування. Після розгляду конкретних розділів наведені приклади розв'язку та задачі для самоперевірки, які враховують в собі специфіку конкретних спеціальностей та дозволять здобувачам якісно опанувати будь-яку з тем, що розглядається у даному навчальному посібнику. Також у посібнику наведені найбільш показові лабораторні роботи, виконання яких дозволить здобувачам вищої освіти опанувати загальні правила проведення лабораторних та наукових досліджень.

Навчальний посібник рекомендується як для самостійної роботи так і для аудиторного використання. Призначений для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Харчові технології» спеціальності 181 Харчові технології та ОПП «Агроінженерія» спеціальності 208 Агроінженерія.

Навчальний посібник може бути корисним у процесі викладання та опанування навчальної дисципліни «Фізика» здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти інших ОП / спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1. ПРАКТИЧНІ РОБОТИ	6
ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ З ТЕОРІЇ. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ	
1.1. МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА	6
1.1.1 Кінематика поступального руху	6
1.1.2 Кінематика обертального руху	18
1.2. МЕХАНІКА. ДИНАМІКА	26
1.2.1 Поступальний рух. Закони Ньютона. Сила пружної деформації. Сила тертя	26
1.2.2 Закон збереження імпульсу. Робота. Механічна енергія. Закон збереження енергії	33
1.2.3 Основне рівняння динаміки обертального руху	45
1.3. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА	53
1.3.1 Основні положення молекулярної фізики. Рівняння стану ідеального газу	53
1.3.2 Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії. Розподіл Максвелла. Барометрична формула	60
1.4. ТЕРМОДИНАМІКА	68
1.4.1 Термодинаміка. Кінетична теорія теплоти	68
1.4.2 Теплоємність. Адіабатний процес. Ідеальна теплова машина Карно	80
1.5. ЕЛЕКТРИКА	90
1.5.1 Постійне електричне поле. Напруженість і потенціал. Ємність конденсатора	90
1.5.2 Постійний електричний струм. Закон Ома. Закони Кірхгофа	102
1.6. МАГНЕТИЗМ	110
1.7. ОПТИКА	118
1.8. КВАНТОВА ФІЗИКА. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ	124
2. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ	134
2.1. ВСТУП ДО ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМУ	134
Основні правила роботи в лабораторіях	134
Методика лабораторних занять	134
Приклад звіту про лабораторну роботу	135
Побудова графіків	137
Короткі відомості про МІЖНАРОДНУ СИСТЕМУ	138
ОДИНИЦЬ ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН (SI)	
2.2. <i>Лабораторна робота № 1. «Методика обробки результатів вимірювань. Елементи теорії похибок»</i>	143
<i>Лабораторна робота № 2. «Дослідження сил тертя за допомогою плоского трибометра»</i>	162

<i>Лабораторна робота № 3. «Дослідження основного закону динаміки обертального руху»</i>	168
<i>Лабораторна робота № 4. «Вивчення гармонічних коливань на прикладі математичного маятника»</i>	177
<i>Лабораторна робота № 5. «Дослідження відношення маси тяжіння до маси інерції»</i>	184
<i>Лабораторна робота № 6. «Дослідження в'язкості рідини методом Стокса»</i>	191
<i>Лабораторна робота № 7. «Визначення показника адіабати повітря»</i>	197
<i>Лабораторна робота № 8. «Дослідження вологості повітря»</i>	203
<i>Лабораторна робота № 9. «Визначення горизонтальної складової напруженості магнітного поля Землі»</i>	212
<i>Лабораторна робота № 10. «Дослідження лазерного випромінювання за допомогою дифракційної ґратки»</i>	219
3. ДОДАТКИ	229
4. ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	233

ВСТУП

Цей навчальний посібник запрошує читачів у дивовижний світ фізики, відкриваючи перед ними унікальну можливість досліджувати та глибоко розуміти природу різноманітних явищ через практичні завдання, експерименти та лабораторні роботи. Вивчення фізичних принципів починається з фундаментального поняття — руху матерії, що є її невід’ємною властивістю. Рух матерії у різних її формах виступає ключовим елементом для пояснення природних явищ, формуючи основу для розуміння складних процесів у природничих і технічних науках, таких як хімія, біологія та інженерія.

Навчальний посібник розроблений для того, щоб показати, як фізика інтегрується у ширший контекст сучасної науки. Фізика розглядається як наука, що встановлює глибокий зв'язок із такими дисциплінами, як геологія, хімія, біологія, астрономія та технічні науки. Цей взаємозв'язок не тільки сприяє розвитку фізики, а й формує основи для інновацій у інших галузях науки й технологій.

У навчальному посібнику докладно висвітлюється широкий спектр тем, від класичних основ механіки до революційних концепцій квантової механіки. Розглядаються закони руху як великих об'єктів, що належать до макросвіту, так і мікроскопічних частинок, які є фундаментальними для розуміння структури матерії. Аналізуючи різноманітні форми руху, здобувачі отримають цілісне бачення фізичних принципів та їхнього значення у сучасному світі.

Навчальний посібник покликаний не лише ознайомити здобувачів з теоретичними основами фізики, а й навчити їх використовувати отримані знання на практиці. Практичні вправи та лабораторні роботи дозволять здобувачам освіти розвинути критичне мислення, аналітичні навички та здатність вирішувати складні задачі. Це стане основою для подальшого розвитку їхньої професійної діяльності та впровадження інноваційних технологій у різних галузях.

Цей навчальний посібник є універсальним ресурсом для студентів, викладачів та всіх, хто цікавиться фізикою і прагне зрозуміти її застосування у сучасному світі. Особливо він стане у нагоді здобувачам вищої освіти першого (бакалаврського) рівня освіти, що навчаються за спеціальностями:

«Агроінженерія», яка пов'язана із проєктуванням, впровадженням і використанням сучасних технологій у сільському господарстві;

«Харчові технології», де фізичні принципи допомагають удосконалювати виробництво та забезпечувати якість і безпеку харчових продуктів.

Крім того, навчальний посібник може використовуватися у процесі викладання навчальної дисципліни «Фізика», опанування дисципліною здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти інших ОП / спеціальностей ДДАЕУ.

Навчальний посібник стане важливим інструментом у підготовці фахівців, здатних впроваджувати знання фізики у своїй професійній діяльності та сприяти розвитку сучасного суспільства.

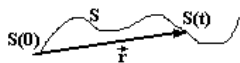
1. ПРАКТИЧНІ РОБОТИ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ З ТЕОРІЇ. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1.1. МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА

1.1.1. Кінематика поступального руху

Скорочена теорія



Траєкторія – це сукупність точок у просторі, які тіло послідовно проходить при своєму русі. Якщо висловитись простіше, траєкторія – це лінія, вздовж котрої тіло переміщується у просторі.

Шлях (S) – це скалярна величина, яка характеризує відстань між початковим і кінцевим положенням тіла, що виміряна вздовж траєкторії. Шлях – це довжина траєкторії.

Переміщення ($\vec{r}$) – це векторна величина, яка вказує напрямок руху тіла. Переміщення чисельно дорівнює відрізку прямої, який з'єднує початкове і кінцеве положення тіла. Переміщення чисельно співпадає із шляхом тільки у одному випадку, коли траєкторією є пряма лінія (при прямолінійному русі).

Середня швидкість ($V_{\text{сеп}}$) – це відношення всього шляху, який пройшло тіло, до всього часу руху:

$$V_{\text{сеп}} = \frac{S_{\text{зар}}}{t} = \frac{(S_1 + S_2 + \dots + S_n)}{(t_1 + t_2 + \dots + t_n)}$$

Миттєва швидкість – швидкість у даній точці траєкторії (чи у даний момент часу). Бо кожна точка траєкторії однозначно пов'язана з певним моментом часу.

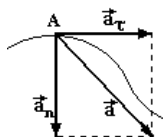
Миттєва швидкість дотична до траєкторії руху. Вектор миттєвої швидкості

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

дорівнює першій похідній за часом від радіус-вектора, який визначає положення тіла у просторі. Для модуля миттєвої швидкості можна записати рівняння:

$$V = \frac{dS(t)}{dt}$$

Як видно з виразу, він дорівнює першій похідній за часом t від функції шляху $S(t)$.



Прискорення $\vec{a}$ – міра зміни швидкості (ΔV) з часом (t).

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

За зміну швидкості за напрямком відповідає **нормальне** (чи центрострем-ке) **прискорення** $\vec{a}_n$. Воно спрямоване перпендикулярно до напрямку руху. І його модуль дорівнює:

$$a_n = \frac{V^2}{R}$$

де v – миттєва швидкість тіла; R – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

За зміну швидкості за модулем відповідає **тангенційне прискорення** $\vec{a}_\tau$. Тому модуль тангенційного прискорення ми можемо дорівнювати першій похідній за часом t від швидкості $V(t)$:

$$a_\tau = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{d^2S(t)}{dt^2}$$

Величина повного прискорення знаходиться за теоремою Піфагора

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Види поступального руху.

Система рівнянь, що описує рух тіла.

Прямолінійний рівномірний рух:

$$\begin{cases} a(t) = 0; \\ v(t) = \text{const} = v_0; \\ S(t) = v_0 t; \end{cases}$$

Прямолінійний рівноприскорений рух:

$$\begin{cases} a(t) = \text{const} = a; \\ v(t) = v_0 + a t; \\ S(t) = v_0 t + at^2/2; \end{cases}$$

Прямолінійний рівносповільнений рух:

$$\begin{cases} a(t) = \text{const} = -a; \\ v(t) = v_0 - a t; \\ S(t) = v_0 t - at^2/2; \end{cases}$$

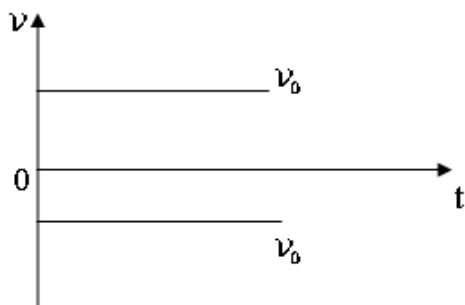
Два останніх рухи об'єднують у один тип руху – **рівнозмінний рух**.

Бо у наведених рівняннях змінюється тільки знак прискорення.

Графіки рівномірного прямолінійного руху:

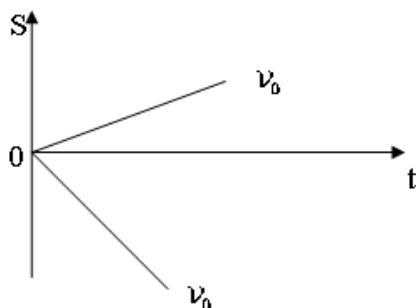
1) $v(t) = v_0$ – функція швидкості

Графік швидкості – пряма лінія, паралельна осі часу.



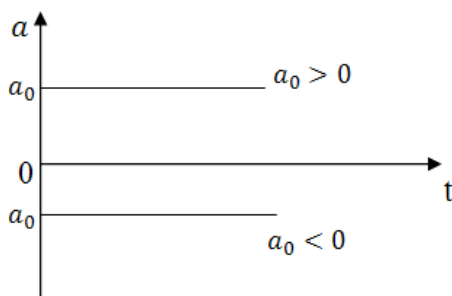
2) $S(t) = v \cdot t$ – функція переміщення

Графік шляху – пряма лінія, яка будується «по точках».

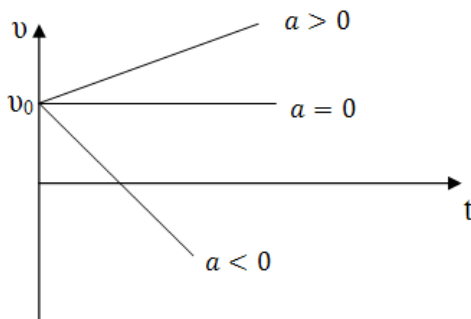


*Графіки рівнозмінного (рівноприскореного/рівносповільненого)
прямолінійного руху:*

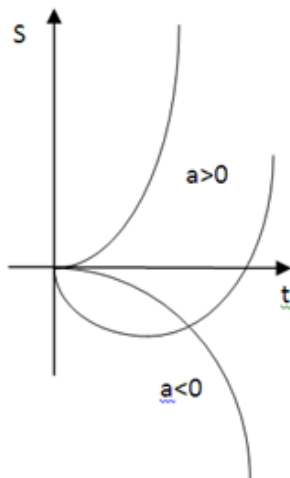
1) $a(t) = \text{const} = \pm a$ – Графік прискорення – пряма лінія, паралельна осі часу.



2) $v(t) = v_0 \pm a t$ – Графік швидкості – пряма лінія, яка будується «по точках», завжди починається з початкової швидкості.



3) $S(t) = v_0 t - at^2/2$ – Графік шляху – парабола.



Відносність руху

Відносність руху проявляється у тому, що такі характеристики руху, як траєкторія, шлях, переміщення, швидкість, прискорення – відносні. Тобто вони можуть бути різні у різних системах відліку.

1) Рух пов'язаних тіл – рух тіл, які впливають на рух один одного (наприклад, катер пливе зі швидкістю $\vec{v}_1$ за течією річки $\vec{v}_2$):

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ – векторний закон визначення швидкості тіла відносно нерухомої системи відліку (в нашому наприкладі, $\vec{v}_1$ – швидкість катера, $\vec{v}_2$ – швидкість течії ріки).

а) Рух по прямій в одному напрямі:

$$v = v_1 + v_2;$$

б) Рух по прямій в протилежних напрямках:

$$v = v_1 - v_2;$$

в) Перпендикулярний рух один відносно іншого:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2};$$

г) Рух під кутом α один до одного:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha};$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Протягом якого часу швидкий поїзд довжиною 150 м, що їде зі швидкістю 72 км/год, буде проходити повз товарний потяг довжиною 300 м, що їде назустріч зі швидкістю 36 км/год?

Розв'язок

$$l_1 = 150 \text{ м}$$

$$v_1 = 72 \text{ км/год}$$

$$= 72 \times 1000 \text{ м}$$

$$/3600 \text{ с} = 20 \text{ м/с}$$

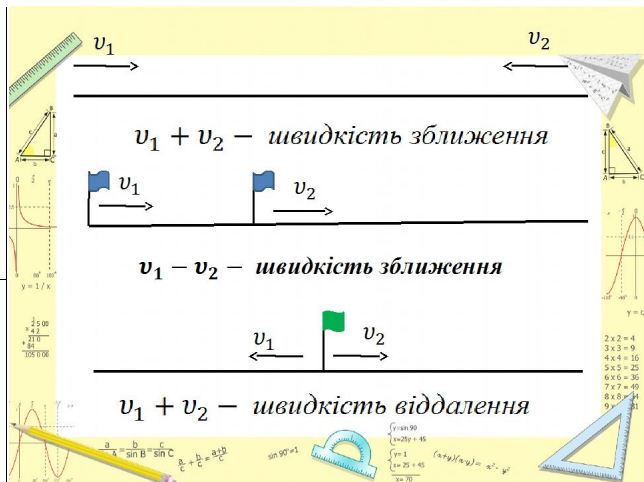
$$l_2 = 300 \text{ м}$$

$$v_2 = 36 \text{ км/год}$$

$$= 36 \times 1000 \text{ м}$$

$$/3600 \text{ с} = 10 \text{ м/с}$$

$t = ?$



Швидкість зближення потягів (відносна швидкість):

$$v_{\text{відн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2$$

Потяги мають пройти один повз другого відстань, що дорівнює сумі їх довжин:

$$S = l_1 + l_2$$

Тому для проїзду знадобиться час t :

$$t = \frac{S}{v_{\text{відн}}} = \frac{l_1 + l_2}{v_{\text{відн}}}$$

Визначимо розмірність знайденої фізичної величини за попереднім співвідношенням:

$$[t] = \frac{M}{M/c} = \frac{M \cdot c}{M} = c.$$

Розмірність є відповідною.

Знайдемо числове значення t :

$$t = \frac{(150M + 300M)}{(20M/c + 10M/c)} = \frac{450M}{30M/c} = 15c$$

Відповідь: $t = 15 \text{ с.}$

Задача 2. Гумова кулька впала з висоти $h_1 = 5 \text{ м}$ і відскочила від підлоги. Кульку спіймали на висоті $h_2 = 2 \text{ м}$. Чому дорівнює значення шляху S і модуля переміщення $|\Delta \vec{r}|$?

Розв'язок

$$h_1 = 5 \text{ м}$$

$$h_2 = 2 \text{ м}$$

$$S ? |\Delta \vec{r}| - ?$$

а



б



За визначенням, шлях — це скалярна величина, яка чисельно дорівнює довжині траєкторії. Тобто для знаходження значення шляху необхідно знайти відстань, яку кулька пройшла за час руху.

Тоді, у нашому випадку, шлях — це відстань від точки А до підлоги і від підлоги до точки В (дивись **рис. а** — ліва частина):

$$S = h_1 + h_2 = 5 \text{ м} + 2 \text{ м} = 7 \text{ м.}$$

За визначенням, переміщення чисельно дорівнює відрізку прямої, який з'єднує початкове і кінцеве положення тіла. Переміщення ($\vec{r}$) — це векторна величина, яка вказує напрямок руху тіла

Для визначення переміщення необхідно знайти: 1) напрям вектора переміщення; 2) модуль вектора переміщення (довжину цього вектора).

Як видно з рисунка (**рис. б** — права частина), цей вектор з'єднує початок руху (точка А) і кінець руху (точка В). Тобто, переміщення — вектор, який починається в точці А і закінчується в точці В. Напрямок цього вектора і є напрям руху.

Використовуючи графічне зображення (**рис. б** — права частина), знайдемо довжину(модуль) вектора переміщення:

$$|\Delta \vec{r}| = h_1 - h_2 = 5 \text{ м} - 2 \text{ м} = 3 \text{ м.}$$

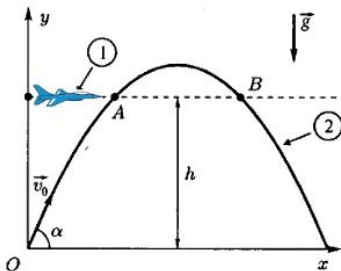
Відповідь: $S = 7 \text{ м}$, $|\Delta \vec{r}| = 3 \text{ м}$.

Задача 3. Горизонтально, вздовж поверхні землі, летить літак зі швидкістю 200 м/с. Висота польоту дорівнює 1500 м. Коли літак знаходиться над гарматою, із гармати роблять постріл по літаку. Початкова швидкість снаряду 100 м/с. Який кут до горизонту має бути у гармати, щоб влучити у літак? Який час польоту снаряда до влучання у літак? При розрахунках нехтувати опором повітря.

Розв'язок

$$\begin{aligned} h &= 1500 \text{ м} \\ v_0 &= 100 \text{ м/с} \\ v &= 200 \text{ м/с} \\ g &= 9,8 \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

$$\alpha, t - ?$$



Розташуємо початок координат у точці, де знаходиться гармата. Спрямуємо вісь X вздовж поверхні землі, вісь Y – перпендикулярно поверхні.

Розкладемо рух снаряду на дві складові: горизонтальний рух і вертикальний рух. Вертикальний – це рівнозмінний рух. Бо на снаряд діє сила тяжіння, яка спрямована вертикально до поверхні землі. Горизонтальний – це рівномірний рух. Бо вздовж поверхні землі на снаряд не діють ніякі сили (опором повітря ми нехтуємо).

Тоді для двох координат снаряду можна записати такі рівняння:

$$x_1 = (v_0 \cdot \cos \alpha) \cdot t; \quad (1)$$

$$y_1 = (v_0 \cdot \sin \alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}. \quad (2)$$

А от рух літака – це тільки рівномірний горизонтальний рух. Для його координат, відповідно, запишемо теж два рівняння:

$$x_2 = v \cdot t; \quad (3)$$

$$y_2 = h = \text{const} \quad (4)$$

Координати x_1 і y_1 снаряда і координати x_2 і y_2 літака співпадають у мить влучання снаряду у літак. Таким чином, можна записати:

$$x_1 = x_2 \quad \text{і} \quad y_1 = y_2.$$

Якщо прирівняти праві частини рівнянь (1) і (3), а також (2) і (4), одержимо:

$$v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha = v \cdot t; \quad (5)$$

$$v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t^2}{2} = h \quad (6)$$

З рівняння (5) можна знайти $\cos(\alpha)$:

$$\cos \alpha = \frac{v}{v_0}, \quad \text{або} \quad \cos \alpha = \frac{200}{900} = 0,222.$$

Тоді кут, під яким треба зробити постріл, має бути 77° .

Запишемо рівняння (6), для визначення часу польоту снаряда до влучання, в такому вигляді:

$$t^2 - \left(2 \frac{v_0}{g} \sin \alpha \right) \cdot t + \frac{2h}{g} = 0.$$

Маємо рівняння другого ступеню. Рішення квадратичного рівняння має вигляд:

$$t = \frac{v_0}{g} \sin \alpha \pm \sqrt{\frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{g^2} - \frac{2h}{g}}.$$

Визначимо розмірність:

$$[t] = \frac{m \cdot c^2}{c \cdot m} \pm \sqrt{\frac{m^2}{c^2} \cdot \frac{c^4}{m^2} - \frac{m \cdot c^2}{m}} = c \pm \sqrt{c^2 - c^2} = c \pm c = c.$$

Розмірність є відповідною розмірності часу.

Знайдемо числове значення t :

$$t = \frac{(900 \cdot 0,974)}{9,81} \pm \sqrt{\frac{(900 \cdot 0,974)^2}{9,81^2} - \frac{2 \cdot 1500}{9,81}} = (89,4 \pm 87,8) \cdot c$$

Як бачимо з розрахунків, ми маємо два значення часу влучання:

$$t_1 = 1,6 \text{ с} \quad \text{і} \quad t_2 = 177 \text{ с}.$$

З'ясуємо, чому це відповідає дійсності.

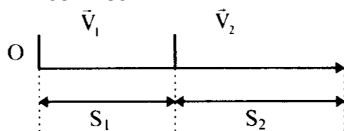
Бо гармата може влучити у літак у двох випадках: 1) влучання у літак під час руху снаряду при русі доверху (точка А, час t_1); 2) при русі снаряду після проходження через найвищу точку траєкторії, тобто під час зниження (точка В, час t_2).

Відповідь: $\alpha = 77^\circ$, $t_1 = 1,6 \text{ с}$ і $t_2 = 177 \text{ с}$.

Задача 4. Автомобіль проходить першу третину шляху зі швидкістю v_1 , а решту шляху – зі швидкістю $v_2 = 50 \text{ км/год}$. Визначити швидкість на першій ділянці шляху, якщо середня швидкість на всьому шляху $v_{\text{сеп}} = 37,5 \text{ км/год}$.

Розв'язок

$$\begin{aligned} S_1 &= 1/3 S \\ S_2 &= 2/3 S \\ v_2 &= 50 \text{ км/год} = 50 \times 1000 \\ &\text{м} / 3600 \text{ с} = 13,89 \text{ м/с} \\ v_{\text{сеп}} &= 37,5 \text{ км/год} = 37,5 \times \\ &1000 \text{ м} / 3600 \text{ с} = 10,42 \text{ м/с} \\ v_1 &= ? \end{aligned}$$



Позначимо весь шлях через S . Час, витрачений на проходження першої ділянки шляху – через t_1 , час руху на другій ділянці шляху – через t_2 .

За визначенням, середня швидкість ($V_{\text{сеп}}$) – це відношення всього шляху, який пройшло тіло, до всього часу руху:

$$v_{\text{сеп}} = \frac{S}{t}. \quad (1)$$

У цьому випадку t це загальний час руху:

$$t = (t_1 + t_2). \quad (2)$$

З іншого боку, для першої і другої ділянок, можемо записати:

$$v_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{S}{3t_1}; \quad (3)$$

$$v_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{2S}{3t_2}. \quad (4)$$

Щоб знайти v_1 з (3) нам потрібно знати повний шлях S і час руху на першій ділянці t_1 . З (2) запишемо t_1 через загальний час t і час руху на другій ділянці t_2 :

$$t_1 = t - t_2. \quad (5)$$

Загальний час t можна з (1) записати через загальний шлях S і відому середню швидкість $v_{\text{сеп}}$:

$$t = S/v_{\text{сеп}}. \quad (6)$$

Час руху на другій ділянці t_2 можна з (4) теж записати через загальний шлях S і відому швидкість на другій ділянці v_2 :

$$t_2 = \frac{2S}{3v_2}. \quad (7)$$

Тоді, підставляючи (6) і (7) в (5), отримаємо:

$$t_1 = \frac{S}{v_{\text{сеп}}} - \frac{2S}{3v_2} = S \left(\frac{1}{v_{\text{сеп}}} - \frac{2}{3v_2} \right) = S \left(\frac{3v_2 - 2v_{\text{сеп}}}{3v_{\text{сеп}}v_2} \right). \quad (8)$$

Підставляючи (8) в (3), остаточно отримуємо:

$$v_1 = \frac{\frac{1}{3}S}{S \left(\frac{3v_2 - 2v_{\text{сеп}}}{3v_{\text{сеп}}v_2} \right)} = \frac{v_{\text{сеп}}v_2}{3v_2 - 2v_{\text{сеп}}}.$$

Знайдемо числове значення v_1 :

$$v_1 = \frac{10,42 \text{ м/с} \cdot 13,89 \text{ м/с}}{3 \cdot 13,89 \text{ м/с} - 2 \cdot 10,42 \text{ м/с}} = 6,94 \text{ м/с}$$

Відповідь: $v_1 = 6,94 \text{ м/с}$, чи 25 км/год

Задача 5. Рух двох матеріальних точок визначається рівняннями:

$x_1 = 20 + 2t - 4t^2$ та $x_2 = 2 - 2t + t^2$ (у системі СІ довжина вимірюється в метрах, час – в секундах). У який момент часу t швидкості обох точок будуть однакові?

Розв'язок

$x_1 = 20 + 2t - 4t^2$	
$x_2 = 2 - 2t + t^2$	
$v_1(t_1) = v_2(t_1)$	
$t_1 - ?$	

За визначенням, миттєва швидкість – це перша похідна від переміщення.

Тоді ми можемо з виразів рівнянь руху знайти зміну миттєвих швидкостей точок **1 і 2** за часом:

$$v_1(t) = x_1' = (20 + 2t - 4t^2)' = 2 - 8t,$$

$$v_2(t) = x_2' = (2 - 2t + t^2)' = -2 + 2t$$

У момент часу t_1 швидкості матеріальних точок, за умовами задачі, дорівнюють одне одному $v_1(t_1) = v_2(t_1)$. Тому можемо записати:

$$2 - 8 \cdot t_1 = -2 + 2 \cdot t_1 \rightarrow 10 \cdot t_1 = 4$$

Остаточно отримуємо: $t_1 = 0,4$ (с)

Відповідь: $t_1 = 0,4$ с

Задачі для самостійного розв'язання

1. Яку площу **Q** може викосити безлафетна жатка за 8-годинну зміну ($t = 8$ год), якщо вона рухається зі швидкістю $V = 10$ км/год? Враховувати, що ширина захвату жатки для збирання зернових культур дорівнює $l = 4,9$ м.
2. Знайти швидкість відносно берега річки: човна, що пливе вздовж течії. Швидкість течії $U = 1$ м/с. Швидкість човна відносно води $V = 18$ км/год.
3. Знайти швидкість відносно берега річки: човна, що пливе проти течії. Швидкість течії $U = 1$ м/с. Швидкість човна відносно води $V = 18$ км/год.
4. Знайти швидкість відносно берега річки: човна, що пливе під кутом 90° до течії. Швидкість течії $U = 1$ м/с. Швидкість човна відносно води $V = 18$ км/год.
5. Першу половину шляху мотоцикліст рухався зі швидкістю $V_1 = 80$ км/год, а другу половину зі швидкістю $V_2 = 40$ км/год. Яка середня швидкість автомобіля?
6. Третину шляху автомобіль рухався з постійною швидкістю $V_1 = 80$ км/год, а останню частину – зі швидкістю $V_2 = 40$ км/год. Яка середня швидкість автомобіля?
7. Легковик рухається першу третину шляху зі швидкістю $v_1 = 60$ км/год, а останні дві третини шляху – зі швидкістю v_2 . Визначити швидкість на останніх двох третинах шляху у випадку, коли середня швидкість легковика на всьому шляху дорівнює $v_{\text{сер.}} = 36$ км/год.

8. Гумова кулька впала з висоти $h_1 = 10$ м. Відскочила від підлоги і була зловленою на висоті $h_2 = 3$ м. Чому дорівнює модуль переміщення $|\Delta \vec{r}|$ і шлях S ?
9. Тіло падає з висоти $H = 19,6$ м з початковою швидкістю $V_0 = 0$. Скільки часу (t) буде падати тіло? Який шлях пройде тіло за перші 0,1 секунди свого руху?
10. Залежність переміщення тіла від часу подається рівнянням:

$$S(t) = A + B \cdot t + C \cdot t^2 + D \cdot t^3,$$
де $A=0,5$ м, $B=0,1$ м/с, $C = 0,14$ м/с² і $D = 0,01$ м/с³.
Знайти за який час після початку руху прискорення тіла буде дорівнювати $a(t_1)=1$ м/с²?
11. Залежність переміщення тіла від часу подається рівнянням

$$S(t) = A + B \cdot t + C \cdot t^2 + D \cdot t^3,$$
де $A=0,5$ м, $B=0,1$ м/с, $C = 0,14$ м/с² і $D = 0,01$ м/с³.
Знайти швидкість тіла у час $t_1 = 5$ с?
12. Рух двох матеріальних точок визначається рівнянням $x_1 = 20 + 2t - 4t^2$ та $x_2 = 2 - 2t + t^2$ (в системі СІ довжина вимірюється в метрах, час – в секундах). Знайти швидкості v_1 і v_2 у момент часу $t_1 = 5$ с?
13. Тіло кинуто вертикально до гори, повернулося на землю через час $t = 3$ с. Яка початкова швидкість тіла V_0 ?
14. Тіло кинуто вертикально до гори, повернулося на землю через час $t = 3$ с. На яку висоту H воно піднялося?
15. Відстань між станціями метрополітену складає $L = 2$ км. Першу половину шляху потяг їхав рівноприскорено, другу половину – рівносповільнено, з однаковим модулем прискорення. Максимальна швидкість потяга $V_{\max} = 72$ км/год. Знайти прискорення a , та час руху потяга між станціями t .
16. Першу половину шляху між станціями метрополітену потяг їхав рівноприскорено. Максимальна швидкість потяга $V_{\max} = 72$ км/год. Знайти прискорення a , якщо час руху потяга до середини між станціями складає $t = 100$ с.
17. Відстань між станціями метрополітену складає $L = 2$ км. Першу половину шляху потяг їхав рівноприскорено. Знайти прискорення a , якщо час руху потяга до середини між станціями складає $t = 100$ с.
18. З башти висотою $H = 25$ м горизонтально кинутий камінь зі швидкістю $V_x = 15$ м/с. Який час t камінь буде рухатись до зіткнення з землею?
19. З башти висотою $H = 25$ м горизонтально кинутий камінь зі швидкістю $V_x = 15$ м/с. З якою швидкістю V він впаде до землі?
20. З башти висотою $H = 25$ м горизонтально кинутий камінь зі швидкістю $V_x = 15$ м/с. Який кут ϕ буде у траєкторії руху в момент зіткнення?

21. Два потяга рухаються паралельно один одному у одному напрямку зі швидкостями 40 км/год. та 60 км/год. Визначити довжину першого потяга, якщо пасажир, який знаходиться у вагоні другого потяга, помітив, що перший потяг проходить повз нього за 1,5 хвилини.
22. Впродовж 0,52 години потяг йшов зі швидкістю 60 км/год., потім впродовж 0,24 години – зі швидкістю 30 км/год., а потім впродовж 0,71 години – зі швидкістю 80 км/год. Визначити середню швидкість.
23. Потяг рухається зі схилу. За 20 с він пройшов шлях 340 м. Кінцева швидкість 19 м/с. З яким прискоренням рухався потяг? Яка була швидкість на початку руху?
24. Поїзд починає рух із стану спокою. Він рівномірно збільшує свою швидкість протягом всього руху. На першому кілометрі швидкість потяга збільшилася на 10 м/с. На скільки збільшиться швидкість потяга на наступному другому кілометрі?
25. Каміння підкинули вертикально вгору на висоту 10 м. Через який час він впаде на землю? Якою буде кінцева швидкість у каменя? При розрахунках опором повітря нехтувати.
26. Камінь, вільно падає з висоти h без початкової швидкості. За останню секунду свого падіння камінь проходить половину всього шляху падіння. З якої висоти впав камінь? Опором повітря нехтувати.
27. У горизонтальному напрямі із точки А рухається тіло, Початкова швидкість дорівнює 3 м/с. Прискорення, з яким рухається тіло, дорівнює 2 м/с^2 . Через секунду після початку руху, з точки В виходить друге тіло назустріч першому і рухається зі сталою швидкістю 5 м/с. Відстань $AB = 100 \text{ м}$. Скільки часу буде рухатись перше тіло до зустрічі з другим?
28. Рух двох матеріальних точок описується згідно з рівняннями: $x_1 = 15 + t^2$; $x_2 = 2t^2 - 10$. Визначити, момент часу, коли вони зустрінуться? Знайти значення координати точки де вони зустрінуться.
29. Весляр направляє човен поперек річки. Однак течія відносить його так, що він рухається під кутом 60° відносно берега зі швидкістю 2 м/с. Визначити швидкість течії ріки і швидкість з якою рухався б човен при відсутності течії.
30. Два літаки одночасно знаходяться на аеродромі. Перший літак починає рух на південний захід зі швидкістю 270 км/год, а другий – на північний захід зі швидкістю 360 км/год. Яка буде відстань між літаками через 2 години 30 хвилин?

1.1.2. Кінематика обертального руху

Скорочена теорія

«Тверде тіло – це сукупність жорстко зв'язаних матеріальних точок. При обертанні твердого тіла навколо довільної вісі всі матеріальні точки, з яких складається тверде тіло будуть рухатися по колах різних радіусів.»

Тому, за однаковий проміжок часу, ці матеріальні точки будуть проходити різні шляхи. Виходячи з цього, всі матеріальні точки будуть мати різні лінійні швидкості. Щоб описувати обертальний рух твердого тіла за допомогою лінійних швидкостей нам треба буде записати безліч рівнянь руху для кожної матеріальної точки, з яких складається тверде тіло. Це доволі складно.

Однак, якщо проаналізувати рух матеріальних точок, можна побачити, що за однаковий проміжок часу всі точки рухаючогося тіла повертаються навколо осі на один і той же кут φ . Таким чином, для опису обертального руху твердого тіла використовують кутове переміщення (кут оберту навколо вісі обертання):

$$\varphi = \varphi(t).$$

На підставі цього, швидкість обертання можна характеризувати кутовою швидкістю:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Таким чином, кутова швидкість буде вимірюватись в радіанах за секунду і характеризувати швидкість обертання тіла навколо вісі обертання. Кутова швидкість ω пов'язана з лінійною швидкістю v співвідношенням:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\Delta \varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Кутова швидкість, по аналогії з лінійною швидкістю, це псевдовектор, напрям якого залежить від напрямку обертання. Він визначається за правилом правого буравчика (правого гвинта).

Для опису зміни кутової швидкості вводять характеристику, яка носить назву кутового прискорення ε :

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Кутове прискорення, як і кутова швидкість, є псевдовектором. Напрямок кутового прискорення, за аналогією з тангенціальним прискоренням, співпадає з вектором кутової швидкості під час прискореного руху і протилежний під час сповільненого руху.

Одиниця вимірювання кутового прискорення:

$$[\varepsilon] = \text{рад/с}^2.$$

Рівномірний обертальний рух, як і рівномірний прямолінійний рух, здійснюється з постійною кутовою швидкістю. Він може бути визначений за такими рівняннями:

$$\begin{cases} \varepsilon = 0 \\ \omega = \text{const} \\ \varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t, \end{cases}$$

де φ_0 – початкове значення кута повороту, t – час оберту.

Є ще дві характеристики обертального руху – період обертання T і частота ν .

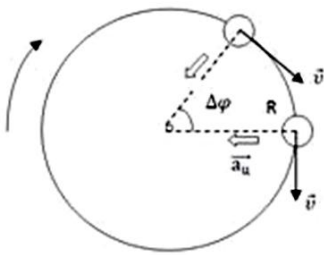
T – період обертання це час одного повного оберту;

ν – частота обертання це число обертів за 1с.

При рівномірному русі по колу модуль швидкості не змінюється, тобто $\vec{v} = \text{const}$ (постійна довжина вектору швидкості, тобто її значення).

Період обертання по колу – час одного повного оберту. За цей час точка, що обертається, повертається в те саме положення, з якого почався відлік руху.

Аналогом йому, при коливальному русі, є період коливання. Період коливання T – це мінімальний час між двома однаковими станами коливальної системи.



$$T = \frac{t}{N}$$

N – число обертів за час t .

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

R – радіус кола.

Частота обертання по колу – це кількість обертів, яке робить тіло, за одиницю часу. Зрозуміло, що ця фізична величина зворотня до періоду:

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}.$$

Аналогом частоті обертання, при коливальному русі, є так само частота коливання.

Кутова швидкість пов'язана з періодом обертання і частотою наступним чином:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Рівнозмінний обертальний рух, аналогічно рівнозмінному прямолінійному руху, відбувається з сталим, тільки кутовим прискоренням. Цей рух може бути визначений за такими рівняннями:

$$\begin{cases} \varepsilon = \text{const}; \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t; \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}. \end{cases}$$

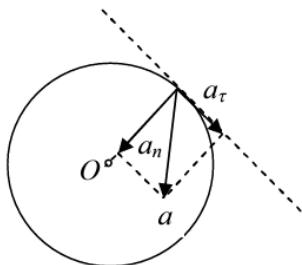
Нагадаємо, що при криволінійному русі тангенційне (чи дотичне) прискорення характеризує зміну швидкості за величиною і має вигляд:

$$a_{\tau} = dv/dt.$$

Нормальне (доцентрове) прискорення характеризує зміну швидкості за напрямком і має вигляд:

$$a_n = v^2/R,$$

тут v – швидкість тіла; R – радіус кривизни траєкторії в даній точці.



Повне прискорення, за теоремою Піфагора, дорівнює

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}.$$

Для обертального руху нормальне (доцентрове) прискорення можна зв'язати з кутовою швидкістю і радіусом обертання:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R,$$

Якщо ж обертальний рух рівнозмінний, то тангенціальне прискорення можна пов'язати з кутовим прискоренням:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta(\omega \cdot R)}{\Delta t} = R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = R \cdot \varepsilon$$

Остаточно, запишемо порівняльну таблицю поступального і обертального рухів для деяких фізичних величин і рівнянь, які описують рух:

Поступальний рух	Обертальний рух
$v = ds/dt$	$\omega = d\varphi/dt$
$a = dv/dt$	$\varepsilon = d\omega/dt,$
рівномірний прямолінійний рух	рівномірний обертальний рух
$a(t) = 0; v(t) = \text{const}; s(t) = v \cdot t$	$\varepsilon(t) = 0; \omega(t) = \text{const}; \varphi(t) = \omega \cdot t$
рівнозмінний прямолінійний рух	рівнозмінний обертальний рух
$a(t) = \text{const}; v(t) = v_0 + a \cdot t$	$\varepsilon(t) = \text{const}; \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$
$s(t) = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$	$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$
$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot S$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon \cdot \varphi$

де s – шлях; φ – кут повороту; v – лінійна швидкість; ω – кутова швидкість; t – час; v_0 – початкова швидкість; ω_0 – початкова кутова швидкість; a – тангенційне (дотичне) прискорення; ε – кутове прискорення.

Зв'язок модуля лінійних і кутових величин:

$$S = \varphi R;$$

$$v = \omega R;$$

$$a_{\tau} = \varepsilon \cdot R;$$

$$a_n = \omega^2 \cdot R.$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Рівняння, яке описує обертання диска навколо нерухомої осі має вигляд: $\varphi(t) = 5t^2 - 10t + 5$ (виміри φ – в *радіанах*, t – в *секундах*). Знайти кутову швидкість ω та кутове прискорення ε диска в момент часу, коли час дорівнює $t = 2$ с.

Рішення:

Визначимо кутову швидкість диска як першу похідну від кута обертання $\varphi(t)$:

$$\omega(t) = d\varphi/dt = d(5t^2 - 10t + 5)/dt = 10t - 10 \text{ (рад/с)}.$$

$$\text{При } t = 2\text{с: } \omega = 10t - 10 = 10 \cdot 2 - 10 = 10 \text{ (рад/с)}.$$

Визначимо кутове прискорення диска першу похідну від кутової швидкості:

$$\varepsilon(t) = d\omega/dt = d(10t - 10)/dt = 10 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

$$\text{Відповідь: } \omega = 10 \text{ (рад/с)}, \varepsilon = 10 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Задача 2. Ротор обертається з частотою $\nu = 1200$ об/хв. З моменту вимкнення електродвигуна його ротор зробив до зупинки $N=100$ *обертів*. Який час ротор обертався з моменту вимкнення електродвигуна до повної зупинки, якщо вважати обертання ротора рівносповільненим.

Рішення:

$\nu=1200$ об/хв	Переведемо частоту обертання з об/хв. в одиниці системи СІ – об/с: $\nu = 1200$ об/хв. = 1200 об/60 с = 20 об/с. Оскільки рух ротора рівносповільнений, то у цьому випадку можна використати рівняння рівносповільненого обертально-го руху:
$N=100$ <i>обертів</i>	
$\omega(t) = 0$	
$t - ?$	

$$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t - \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}; \quad (1)$$

$$\omega(t) = \omega_0 - \varepsilon \cdot t. \quad (2)$$

З іншого боку, для кута оберту треба враховувати, що ротор зробив N *обертів*.

Тоді:

$$\varphi(t) = 2\pi N. \quad (3)$$

Оскільки кінцева кутова швидкість вкінці руху $\omega(t) = 0$ (ротор зупинився), то з формули (2) визначимо:

$$0 = \omega_0 - \varepsilon \cdot t, \text{ чи } \varepsilon = \omega_0/t.$$

Тоді:
$$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t - \frac{\omega_0 \cdot t^2}{2t} = \omega_0 \cdot t - \frac{\omega_0 \cdot t}{2} = \frac{\omega_0 \cdot t}{2}.$$

Отже, враховуючи (3), отримаємо:
$$2\pi N = \frac{\omega_0 \cdot t}{2}. \quad (4)$$

Кутова швидкість пов'язана з частотою обертання:

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot \nu. \quad (5)$$

Знайдемо t з (4), враховуючи (5):

$$t = 4\pi N / \omega_0 = 4\pi N / (2 \cdot \pi \cdot \nu) = 2N/\nu = 2 \cdot 100 \text{об} / (20 \text{об/с}) = 10 \text{ с}.$$

Відповідь: $t = 10 \text{ с}.$

Задача 3. Ротор приладу обертається з частотою $\nu = 2 \cdot 10^4$ об/хв. Двигун вимкнули. Після вимкнення двигуна, рух ротору припиняється через 8 хв. Вважаючи рух ротора рівносповільненим, треба знайти число обертів, зроблених ротором від моменту вимкнення двигуна до його повної зупинки. Визначити кутове прискорення, з яким рухався ротор.

Рішення:

$$\nu = 2 \cdot 10^4 \text{ об/хв}$$

$$t = 8 \text{ хв}$$

$$\omega(t) = 0$$

$$\varepsilon - ? \quad N - ?$$

Для даних цієї задачі використаємо систему одиниць СІ:

$$\nu = 2 \cdot 10^4 \text{ об/хв} = 333 \text{ об/с}; t = 8 \text{ хв} = 480 \text{ с}.$$

Кутова швидкість під час рівносповільненого руху описується рівнянням:

$$\omega(t) = \omega_0 - \varepsilon \cdot t.$$

Звідси, можна знайти кутове прискорення, якщо врахувати, що наприкінці руху кутова швидкість буде дорівнювати нулю:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi\nu}{t}.$$

Отримаємо числове значення кутового прискорення:

$$\varepsilon = \frac{2\pi \cdot 333}{480} = 4,36 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right).$$

Кут оберту ротора приладу, при рівносповільненому русі, за час t буде дорівнювати:

$$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t - \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2},$$

Якщо врахувати вираз для кутового прискорення, який отримали раніше, знаходимо:

$$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t - \frac{\omega_0}{t} \frac{t^2}{2} = \frac{\omega_0 \cdot t}{2} = \pi \cdot \nu \cdot t.$$

Таким чином, кількість обертів ротора за час 8 хв. буде дорівнювати:

$$N = \frac{\varphi(t)}{2\pi} = \frac{\pi \cdot \nu \cdot t}{2\pi} = \frac{\nu \cdot t}{2} = 8 \cdot 10^4 \text{ об.}$$

Відповідь: $\varepsilon = 4,36 \text{ (рад/с}^2\text{)}$, $N = 8 \cdot 10^4 \text{ (об)}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Рівняння, яке описує обертання диска навколо нерухомої вісі, має вигляд $\varphi(t) = 7 \cdot t^3 - 15 \cdot t^2 + 5 \cdot t$ (φ – в радіанах, t – в секундах). Знайти кутову швидкість ω та кутове прискорення ε диска у момент часу $t = 2$ с.
2. Рівняння, яке описує обертання диска навколо нерухомої вісі, має вигляд $\varphi(t) = 8 \cdot t^2 - 7 \cdot t + 10$ (φ – в радіанах, t – в секундах). Знайти кутову швидкість ω та кутове прискорення ε диска у момент часу $t = 2$ с.
3. Рівняння, яке описує обертання диска навколо нерухомої вісі, має вигляд $\varphi(t) = 5 \cdot t^4 - 15 \cdot t^2 + 5$ (φ – в радіанах, t – в секундах). Знайти кутову швидкість ω та кутове прискорення ε диска у момент часу $t = 2$ с.
4. З моменту вимкнення електродвигуна його ротор, що обертався з частотою $\nu = 2100$ об/хв, зробив до зупинки $N = 150$ обертів. Скільки часу минуло з моменту вимкнення електродвигуна. Обертання ротора вважати рівносповільненим.
5. З моменту вимкнення електродвигуна його ротор, що обертався з частотою $\nu = 1800$ об/хв, зробив до зупинки $N = 50$ обертів. Скільки часу минуло з моменту вимкнення електродвигуна. Обертання ротора вважати рівносповільненим.
6. З моменту вимкнення електродвигуна його ротор, що обертався з частотою $\nu = 1200$ об/хв, зробив до зупинки $N = 150$ обертів. Скільки часу минуло з моменту вимкнення електродвигуна. Обертання ротора вважати рівносповільненим.
7. Відомо, що швидкість точки на ободі колеса V_1 у три рази віща за швидкість V_2 точки, що обертається на 5 см ближче до вісі, ніж перша точка. Знайти радіус R колеса, яке обертається.
8. Колесо, обертається рівноприскорено. Воно досягло кутової швидкості $\omega = 20$ рад/с через $N = 10$ обертів. Знайти значення кутового прискорення колеса ξ .

9. Колесо радіусом 10 см рухається з кутовим прискоренням $\epsilon = 3,14 \text{ рад/с}^2$.
Знайти через $t = 1 \text{ с}$ після початку руху тангенційне прискорення a_τ .
10. Колесо радіусом 10 см рухається з кутовим прискоренням $\epsilon = 3,14 \text{ рад/с}^2$.
Знайти через $t = 1 \text{ с}$ після початку руху нормальне прискорення a_n .
11. Колесо радіусом 10 см рухається з кутовим прискоренням $\epsilon = 3,14 \text{ рад/с}^2$.
Знайти через $t = 1 \text{ с}$ після початку руху лінійну швидкість на ободі колеса $v(t)$.
12. З якою кутовою швидкістю ω обертається Земля за одну добу.
13. З якою кутовою швидкістю ω обертається стрілка механічного годинника, яка рахує години.
14. З якою кутовою швидкістю ω обертається хвилинна стрілка механічного годинника.
15. Знайти кутову швидкість ω штучного супутника Землі. Супутник рухається по коловій орбіті. Період такого обертання становить $T = 88 \text{ хв}$.
16. Супутник рухається по коловій орбіті з періодом обертання $T = 88 \text{ хв}$. Орбіта розташована на відстані $h = 200 \text{ км}$ від поверхні Землі. Чому дорівнює лінійна швидкість v руху штучного супутника Землі? (значення радіусу Землі вважати 6400 км).
17. Точка рухається по коловій траєкторії радіусом $R = 30 \text{ см}$ зі сталим кутовим прискоренням. За час $t = 4 \text{ с}$ вона виконала $N = 3$ оберти. Знайти тангенціальне прискорення точки.
18. Колесо, що обертається рівноприскорено, досягло кутової швидкості $\omega = 20 \text{ рад/с}$ через $N = 10$ обертів після початку обертання. Знайти кутове прискорення ϵ колеса.
19. Точка рухається по коловій траєкторії радіусом $R = 20 \text{ см}$ з тангенційним прискоренням $a_\tau = 5 \text{ см/с}^2$. Через який час t тангенційне прискорення буде дорівнювати нормальному прискоренню a_n ?
20. З якою швидкістю повинен рухатися літак на екваторі зі сходу на захід, що б сонце для пасажирів літака було нерухомим?
21. Вісь, на якій закріплено два диски, які розташовані на відстані $0,5 \text{ м}$, обертається з частотою $\gamma = 1800 \text{ об/хв}$. Куля, що рухалася вздовж вісі, пробила обидва диска. При цьому, перший отвір змістився відносно другого отвору на кут $\phi = 12^\circ$. Знайти швидкість кулі v ?
22. Ротор центрифуги робить обертання під впливом електродвигуна. Після вимкнення двигуна його обертання припиняється за 8 хв . Знайдіть кутове прискорення і кількість обертів, зроблених ротором від моменту вимкнення двигуна до його повної зупинки, припускаючи, що рух ротора рівносповільнений.

23. Диск обертається навколо нерухомої осі за рівнянням $\varphi(t) = 5 \cdot t^2 - 10 \cdot t + 5$ (φ у радіанах, t у секундах). Визначте кутову швидкість ω та кутове прискорення ϵ диска у момент часу $t = 2$ с.
24. Після вимкнення електродвигуна ротор, що обертався з частотою $\nu = 1200$ об/хв, зробив до зупинки $N = 100$ обертів. Скільки часу пройшло з моменту вимкнення електродвигуна до зупинки, якщо обертання ротора вважається рівносповільненим?
25. Автомобіль рухається по коловій траєкторії радіусом 0.5 м. За перших 10 секунд його кутовий шлях дорівнює 60 радіан. Знайдіть кутову швидкість та лінійну швидкість автомобіля у цей момент.
26. Колесо велосипеда має радіус 0.35 м. Яку відстань пройхав велосипедист, якщо колесо за цей час зробило 120 обертів?
27. Переднє колесо мотоцикла обертається зі швидкістю 300 об/хв. Яка лінійна швидкість точки на ободі колеса, якщо радіус колеса дорівнює 0.4 м?
28. Вал робить 180 об/хв. З деякого моменту вал гальмується і обертається рівносповільнено з кутовим прискоренням рівним -3 рад/с². Скільки обертів він зробить до зупинки? Через який час вал зупиниться?
29. Маховик, що був нерухомим, почав рухатись рівноприскорено і, зробивши 40 повних обертів, набрав кутову швидкість 10 рад/с. Визначити кутове прискорення маховика і тривалість рівноприскореного обертання.
30. Вентилятор обертається зі швидкістю 1800 об/хв. Після вимкнення, обертаючись рівносповільнено, він зробив до зупинки 150 обертів. Скільки часу пройшло з моменту вимкнення вентилятора до зупинки?

1.2. МЕХАНІКА. ДИНАМІКА

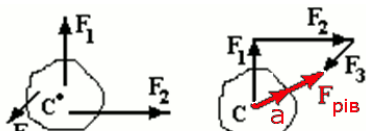
1.2.1. Поступальний рух. Закони Ньютона. Сила пружної деформації. Сила тертя

Скорочена теорія

1-й закон Ньютона (закон інерції): «Всяке тіло продовжує зберігати стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху, допоки цей стан не змінять зовнішні сили, застосовані до нього. Властивість тіл зберігати набутий стан (спокою, чи руху) називається інертністю».

Густина (ρ): $\rho = \frac{m}{V}, \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right].$

2-й закон Ньютона – «Прискорення ($\vec{a}$), з яким рухається центр маси тіла С, прямо пропорційне векторній сумі сил, що діють на нього (рівнодіючій $\vec{F}_{\text{рів}}$), і обернено пропорційне масі тіла. Прискорення спрямоване туди ж, куди діє рівнодіюча і прикладене до центру маси тіла».



$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{m} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n}{m} = \frac{\vec{F}_{\text{рів}}}{m}$$

$$F_{\text{рів}} = m \cdot a,$$

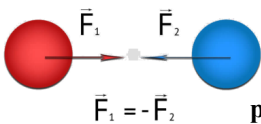
імпульс (кількість руху): $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Вид 2-го закону Ньютона з використанням імпульсу:

$$F \cdot dt = d(m \cdot v),$$

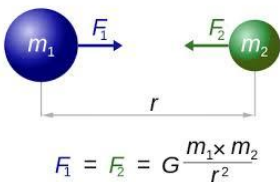
де $F \cdot dt$ – елементарний імпульс сили; $d(m \cdot v)$ – елементарна зміна імпульсу (кількості руху) тіла.

3-й закон Ньютона формулюється у такому вигляді: «Два тіла взаємодіють між собою з силами F_1 і F_2 , однаковими за величиною і протилежними за напрямком. Вони не зрівноважують одна іншу, так як прикладені до різних тіл».



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Закон всесвітнього тяжіння (закон гравітаційної взаємодії):



«Сила, з якою притягуються одне тіло до іншого, прямо пропорційна добуткові мас m_1 і m_2 цих тіл, і обернено пропорційна квадрату відстані r між їх центрами мас. Сила взаємодії спрямована по лінії, яка з'єднує центри мас тіл».

$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

Математичне формулювання має вигляд:

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

де $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравітаційна стала.

Напруженість гравітаційного поля ($\vec{G}$) є силовою характеристикою гравітаційного поля. Це векторна фізична величина яка дорівнює силі, яка діє на тіло одиничної маси з боку гравітаційного поля:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_o} = \gamma \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Як бачимо з визначення, напруженість вимірюється в одиницях прискорення:

$$[G] = \text{Н/кг} = (\text{кг} \cdot \text{м}) / (\text{с}^2 \cdot \text{кг}) = \text{м/с}^2.$$

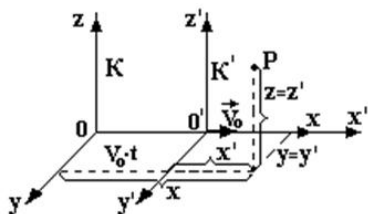
Якщо не враховувати добове обертання Землі, гравітаційну силу біля поверхні Землі можна прирівняти силі тяжіння mg . Тоді одержимо:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_o} = \frac{m_o \vec{g}}{m_o} = \vec{g} = \gamma \frac{M_z}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Таким чином, напруженість гравітаційного поля поблизу поверхні Землі в точності співпадає з прискоренням вільного падіння.

Принцип відносності Галілея. Правило складання швидкостей.

«У всіх інерціальних системах відліку одні і ті ж механічні явища протікають однаковим чином і ніякими механічними дослідами, які проводяться всередині інерціальної системи, неможливо встановити – рухається ця система чи ні».



Користуємось правилом складання швидкостей в класичній механіці:

Абсолютна швидкість тіла $\vec{V}$ дорівнює векторній сумі відносно $\vec{V}^I$ і переносної $\vec{V}_o$ швидкостей.

Щоб знайти швидкість руху в одній системі координат треба до швидкості руху тіла у другій системі координат векторно додати швидкість руху однієї інерціальної системи координат відносно другої системи координат:

$$\vec{V} = \vec{V}^I + \vec{V}_o$$

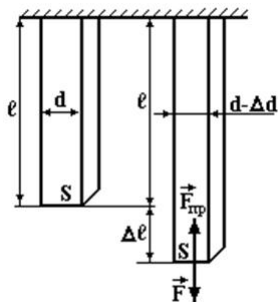
Сили пружності. Закон Гука для деформації (розтягування / стиснення).

При малих пружних деформаціях сила пружності пропорційна величині деформації (закон Гука):

$$F = -k\Delta\ell,$$

Модуль Юнга (модуль пружності) – фізична величина, що характеризує здатність матеріалу чинити опір розтягуванню, стиску при пружній деформації. Одиниці виміру – $[H/m^2]$. Розраховується як:

$$E = \frac{Fl}{S\Delta\ell},$$



де: F – нормальна складова сили,

S – площа поверхні, по якій розподілено дію сили,

l – довжина деформованого стрижня,

Δl – зміни довжини стрижня в результаті пружної деформації (вимірюного в тих же одиницях, що і довжина).

Модуль Юнга є характеристикою пружних властивостей матеріалу і це стала величина для кожного матеріалу.

Відносна деформація ($\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}$) – це відношення абсолютної деформації $\Delta\ell$ до початкового розміру. Відносна деформація – величина безрозмірна.

Механічна напруга ($\sigma = \frac{F}{S}$) – це відношення сили F , яка діє на зразок, до площі його поперечного перерізу S . Механічна напруга вимірюється у H/m^2 .

Закон Гука, з урахуванням відносної деформації і механічної напруги, приймає вигляд

$$\sigma = -E\varepsilon.$$

Закон Амонтона-Кулона:

«Сила тертя ковзання завжди дорівнює добуткові коефіцієнта тертя ковзання k і сили нормального тиску на поверхню N ».

$$F_{\text{ковз}} = k_{\text{ковз}} \cdot N.$$

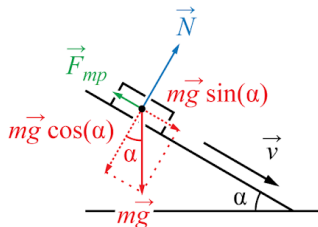
Для похилої площини реакція опору N буде дорівнювати складовій сили тяжіння тіла:

$$N = mg \cos(\alpha)$$

де α – кут нахилу похилої площини.

У випадку похилої площини, сила тертя буде дорівнювати:

$$F_{\text{тер}} = kN = k mg \cos(\alpha)$$

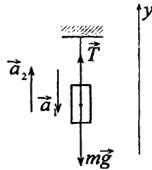


Приклади розв'язання задач

Задача 1. Вантаж масою 1 кг прикріплений до нерозтяжної нитки. Вантаж спочатку підіймали з прискоренням 5 м/с^2 . Потім почали опускати з тим самим прискоренням. Знайти натяг нитки у першому і другому випадках.

Розв'язок

$$\begin{array}{l} m = 1 \text{ кг} \\ g = 9,81 \text{ м/с}^2 \\ a = 5 \text{ м/с}^2 \\ \hline F_1, F_2 = ? \end{array}$$



У першому випадку, при підйманні, на вантаж діють дві сили: вниз – сила тяжіння $m \cdot g$, вгору – сила натягу нитки F_1 . Рівнодіюча цих сил $(F_1 - m \cdot g)$, надає вантажу прискорення, яке спрямоване у бік F_1 .

Застосовуючи другий закон Ньютона, запишемо:

$$m \cdot a = F_1 - m \cdot g,$$

звідки знаходимо силу натягу нитки: $F_1 = m (g + a)$.

Розмірність – $[F] = \text{кг} \cdot (\text{м/с}^2 + \text{м/с}^2) = \text{Н}$.

Чисельно – $F_1 = 1 \cdot (9,81 + 5) = 14,81 \text{ Н}$.

У другому випадку, на вантаж, що опускається, діє вниз сила тяжіння $m \cdot g$ і вгору – сила натягу нитки F_2 .

Тіло має прискорення, спрямоване у бік $m \cdot g$, тому за другим законом Ньютона рівнодіюча двох протилежно спрямованих сил має дорівнювати $m \cdot a$:

$$m \cdot a = m \cdot g - F_2,$$

$$F_2 = m (g - a).$$

Розмірність – $[F_2] = \text{кг} \cdot (\text{м/с}^2 - \text{м/с}^2) = \text{Н}$.

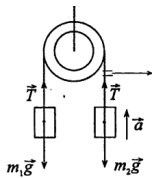
Чисельно – $F_2 = 1 \cdot (9,81 - 5) = 4,81 \text{ Н}$.

Відповідь: $F_1 = 14,81 \text{ Н}$, $F_2 = 4,81 \text{ Н}$.

Задача 2. Нитку перекинута через невагомий блок. До нитки з обох кінців приєднані дві гіри масами 2 кг і 1 кг. Знайти натяг нитки і прискорення, з яким рухаються гіри. Вважати блок невагомим, нитку нерозтяжною. Тертям у блоці знехтувати.

Розв'язок

$$\begin{array}{l} g = 9,81 \text{ м/с}^2 \\ m_1 = 1 \text{ кг} \\ m_2 = 2 \text{ кг} \\ \hline a, T = ? \end{array}$$



На кожний вантаж діє сила натягу вертикально вгору. За умовами, нитка нерозтяжна.

Отже, на перше тіло діють: сила натягу нитки F_1 – вгору і сила тяжіння $m_1 \cdot g$ – вниз.

На друге тіло діють: сила натягу нитки F_2 – вгору і сила $m_2 \cdot g$ – вниз.

Оскільки блок вважається невагомим, то – $F_1 = F_2 = T$.

Припустимо, що гіря m_1 рухається до низу з деяким прискоренням (хоча,

за логікою, він повинен підніматись, бо він легший. Покажемо, що рішення виправить наше помилкове припущення).

Тоді тягар m_2 повинен підійматися, з таким самим прискоренням.

Згідно з другим законом Ньютона:

$$m_1 \cdot a = m_1 \cdot g - F_1 ,$$

$$m_2 \cdot a = F_2 - m_2 \cdot g ,$$

або, враховуючи, що $F_1 = F_2 = T$, перепишемо останню систему у вигляді

$$m_1 \cdot a = m_1 \cdot g - T ,$$

$$m_2 \cdot a = T - m_2 \cdot g .$$

Розв'язуючи наведенусистему двох рівнянь, знаходимо:

$$a = (m_1 - m_2) / (m_1 + m_2) \cdot g ,$$

$$T = (2 \cdot m_1 \cdot m_2) / (m_1 + m_2) g .$$

Аналізуючи розв'язок, робимо висновок: оскільки $m_1 < m_2$, то прискорення буде від'ємним $a < 0$ і спрямованим протилежно прискоренню вільного падіння g . Тобто попереднє припущення про те, що тягар m_1 рухається до низу з прискоренням, помилкове.

З розрахунку ми бачимо, що m_1 повинен підійматись вгору з прискоренням a .

Розмірності: $[a] = (\text{кг/кг}) \cdot \text{м/с}^2 = \text{м/с}^2$; $[T] = (\text{кг}^2/\text{кг}) \cdot \text{м/с}^2 = \text{Н}$.

Чисельно: $a = -9,81/3 = -3,27 \text{ м/с}^2$, $T = (4/3) \cdot 9,81 = 13,08 \text{ Н}$.

А на вісь блока діє сила, яка складається з суми двох сил натягіння нитки:

$$F_1 + F_2 = 2 \cdot T = 26,16 \text{ Н} .$$

Відповідь: $a = 3,27 \text{ м/с}^2$, $T = 13,08 \text{ Н}$.

Задача 3. Вантаж масою 10^3 кг піднімають з прискоренням $1,2 \text{ м/с}^2$. Який переріз повинен мати сталевий трос, щоб ним можна було підіймати цей вантаж при п'ятиразовому запасу міцності тросу. Межа міцності сталі дорівнює $7 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$?

Розв'язок

$$\begin{array}{l} a = 1,2 \text{ м/с}^2 \\ \sigma_m = 7 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2 \\ n = 5 \\ g = 9,81 \text{ м/с}^2 \\ S = ? \end{array}$$

Згідно з другим законом Ньютона, вантаж буде прискорюватись рівнодіючою сил, які діють на вантаж. Вона дорівнює різниці між силою натягу троса і силою тяжіння, яка діє на вантаж:

$$m \cdot a = F - m \cdot g ,$$

де F – сила натягу троса.

Якщо урахувати коефіцієнт запасу міцності n , то сила натягу має бути в n разів більшою:

$$F = n \cdot F .$$

За визначенням, пружне напруження (межа міцності) складає $\sigma = F / S$,

Тоді, з цих співвідношень одержуємо:

$$S = n \cdot m \cdot (g - a) / \sigma .$$

Знайдемо розмірність цієї величини:

$$[S] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2 / (\text{с}^2 \text{ Н}) = \text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Н} = \text{м}^2 .$$

Отримаємо числове значення площі перерізу троса

$$S = 5 \cdot 10^3 \cdot (1,2 + 9,8) / (7 \cdot 10^8) = 7,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

Відповідь: $S = 7,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Визначити масу 0,2 л повітря, води, сталі (густина води та повітря дорівнює відповідно 1000 та 1,29 кг/м³, густина сталі 7800 кг/м³).
2. Моток мідного дроту діаметром 1 мм має масу 1500 г. Густина міді дорівнює 8,9 т/м³. Визначити довжину цього дроту.
3. До дроту підвішена куля масою $m = 5$ кг. Знайти силу натягу дроту, якщо дріт з грузом підіймати з прискоренням $a_1 = 10 \text{ м/с}^2$.
4. До дроту підвішена куля масою $m = 5$ кг. Знайти силу натягу дроту, якщо дріт з грузом опускати з прискоренням $a_2 = 5 \text{ м/с}^2$.
5. Після включення двигунів космічна ракета збільшила свою швидкість на 60 см/с за 15 мілісекунд. Визначити силу тяги двигунів, якщо маса ракети дорівнює 80 тон.
6. Куля масою 0,2 кг рухається з прискоренням 4 м/с^2 . Знайдіть силу, яка викликала це прискорення.
7. Тіло зісковзує рівномірно з похилої площини. Кут нахилу площини дорівнює 40° . Знайти коефіцієнт тертя тіла об площину.
8. На автомобіль масою $m = 1$ тона діє сила тертя. Коефіцієнт тертя дорівнює $k = 0,02$. Яка потрібна бути сила тяги двигуна щоб автомобіль рухався рівномірно по дорозі.
9. На автомобіль масою $m = 1$ тона діє сила тертя. Коефіцієнт тертя дорівнює $k = 0,02$. Яка потрібна бути сила тяги двигуна щоб рухався з прискоренням $a = 2 \text{ м/с}^2$.
10. Два груза масами $m_1 = 5$ кг і $m_2 = 10$ кг з'єднані дротом, що перекинутий через невагомий блок. Знайти прискорення, з яким рухаються маси. Знайти силу натяжіння дроту?
11. Два груза масами $m_1 = 15$ кг і $m_2 = 10$ кг з'єднані дротом, що перекинутий через невагомий блок. Знайти прискорення, з яким рухаються маси. Знайти силу натяжіння дроту?
12. На столі стоїть візок маса якого 4 кг. До візка прив'язаний шнур, перекинутий через блок, що закріплений за край стола. З яким прискоренням почне рухатись візок, якщо до другого кінця дроту прив'язати вантаж масою 1 кг?
13. Брусок має масу 2 кг і знаходиться на горизонтальній поверхні. Він починає рух під дією натягу нитки, яка перекинута через нерухомий блок, що закріплений за край стола. Натяг нитки здійснюється за рахунок вантажу масою 0,5 кг, який прикріплено до кінця цієї нитки. Коефіцієнт тертя бруска об поверхню дорівнює 0,1. Визначити прискорення руху бруска і силу натягу нитки. Масами блока і нитки, а також тертям у блоці знехтувати.
14. Шар, що висить на дроті, прикріпили до стелі трамваю. Трамвай за час

- $t = 3$ с змінив швидкість рівностало з $v_1 = 18$ км/год до $v_2 = 6$ км/год. В якому напрямі і на який кут відхилиться дріт з кулею?
15. Тіло, рухаючись рівноприскорено, зісковзнуло з похилої площини. Похила площина утворює кут 25^0 з площиною горизонту і має довжину 2 м. Час руху тіла по похилій площині дорівнює 2 с. Визначити коефіцієнт динамічного тертя тіла об площину.
 16. Поїзд масою 2000 т при під'їзді до станції за 0,5 хв. зменшив швидкість з 80 км/год до 30 км/год. Знайти силу гальмування.
 17. Гальмівний шлях поїзда масою 3000 т при швидкості 54 км/год. дорівнює 600 м. Визначити силу гальмування.
 18. Яку силу потрібно прикласти до автомобілю, щоб утримати його на похилій площині довжиною 5 м і висотою 3 м, якщо маса автомобіля 800 кг, а коефіцієнт тертя 0,02?
 19. Камінь падає з якоїсь висоти Н. Час падіння $t = 2$ с. Знайти цю висоту Н, з якої падав камінь.
 20. Внаслідок взаємодії два тіла отримали прискорення 5 м/с^2 та 2 м/с^2 . Знайти відношення мас цих тіл.
 21. Дві людини розтягують динамометр. Кожен прикладає силу 100 Н. Що показує динамометр?
 22. Гумовий жмут розтягується на 5 см при підвішуванні гирі масою 100 г. Чому дорівнює коефіцієнт жорсткості жмута?
 23. Тіло масою 1,5 кг рухається рівномірно прямолінійно по горизонтальній площині під дією сили, що дорівнює 6 Н. Визначити коефіцієнт тертя.
 24. Тягач надає порожньому причепу прискорення $0,4 \text{ м/с}^2$. Другому, завантаженому причепу, той самий тягач, з тією ж самою силою тяги, надає прискорення $0,1 \text{ м/с}^2$. Яке прискорення буде надавати тягач обом причепам, якщо їх з'єднати між собою? Силу, з якою тягач діє на причепа, вважати в усіх випадках однаковою.
 25. На вантаж, який знаходиться на горизонтальній площині, діє сила 294 Н. Сила спрямована під кутом 30^0 до лінії горизонту. Вантаж має масу 45 кг. Коефіцієнт тертя вантажу об площину дорівнює 0,1. Визначити прискорення, з яким буде рухатись вантаж.
 26. Канат витримує натяг в 6000 Н. На цьому канаті піднімають вантаж масою 480 кг. Яке прискорення при русі вгору є максимальним, щоб не розірвався канат?
 27. Космічна ракета масою 150 т піднімається з Землі вертикально вгору. Сила тяги двигуна $4 \cdot 10^6$ Н. Яка швидкість ракети наприкінці третьої хвилини руху?
 28. Космічний супутник летить на Місяць. У якій точці, між Місяцем та Землею ракета буде притягатися до Місяця та Землі з однаковою силою?
 29. Знайдіть силу тяжіння, яка діє на тіло масою 5 кг, якщо воно знаходиться на поверхні планети, маса якої $8 \cdot 10^{24}$ кг, і радіус її $6,4 \cdot 10^6$ м.
 30. На якій відстані від поверхні Землі сила тяжіння буде у 9 разів менша, ніж на поверхні? Радіус Землі дорівнює 6370 км.

1.2.2. Закон збереження імпульса. Робота. Механічна енергія. Закон збереження енергії

Скорочена теорія

Імпульс тіла. «Імпульсом тіла (чи кількістю руху) називають добуток маси тіла на його швидкість.»

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

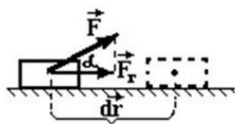
Закон збереження імпульсу. Геометрична (векторна) сума імпульсів тіл, які складають замкнену систему, є величина стала:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n = \text{const}$$

Цей закон можна застосувати для системи будь-яких тіл, якщо система замкнена. Тобто, умовою використання закону збереження імпульсу для системи тіл є рівняння нулю результуючої всіх зовнішніх сил, які діють на цю систему. Інакше кажучи, зовнішні сили повинні бути скомпенсованими.

Елементарна робота змінної сили.

«Елементарна механічна робота дорівнює скалярному добутку сили, яка діє на тіло, на переміщення цього тіла».



$$dA = F \cdot ds \cdot \cos \alpha,$$

де F – проекція сили на переміщення; ds – елементарне переміщення.

При сталій силі –

$$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha.$$

Енергія.

Енергія – це загальна міра для визначення роботи при різних форм руху матерії.

Енергія – є функцією стану системи, а робота – є функцією процесу переходу системи з одного стану в інший.

Механічний рух, у повсякденні, може частково чи повністю перетворюватись в інші форми енергії. Такі, як теплову енергію чи енергію електромагнітних полів.

Енергія може характеризувати як рух системи, так і взаємодію тіл чи частинок системи, з можливістю переходу з енергії руху в енергію взаємодії і навпаки.

Кінетична енергія.

Кінетична енергія – це властивість тіла, виконувати роботу за рахунок руху цього тіла. Кінетична енергія – енергія руху має вигляд:

$$E_k = \frac{mV^2}{2}.$$

Потенційна енергія.

Потенційна енергія – це властивість тіла, виконувати роботу за рахунок взаємодії, або взаємного положення частин тіла, тобто за рахунок деформації. Потенційна енергія – це енергія взаємодії.

Вигляд математичного виразу для потенційної енергії різняться в залежності від видів взаємодії:

Потенційна енергія тіла, яке знаходиться над поверхнею землі:

$$E_{\text{п}} = mgh$$

Потенційна енергія пружно деформованого тіла:

$$W_{\text{р}} = \frac{k \cdot x^2}{2},$$

де k – коефіцієнт пружності; x – величина деформації.

Потенційна енергія гравітаційної взаємодії двох тіл:

$$W_{\text{г}} = - \frac{\gamma \cdot m_1 \cdot m_2}{r},$$

де r – відстань між точковими тілами масами m_1 і m_2 ; γ – гравітаційна стала.

Повна механічна енергія тіла дорівнює сумі кінетичної та потенційної енергій:

$$E_{\text{повн}} = E_{\text{к}} + E_{\text{п}}$$

Види енергії:

1. Механічна енергія тіла (кінетична і потенційна енергії).
2. Внутрішня енергія.
3. Електромагнітна енергія (енергія електричного і магнітного полів).
4. Хімічна енергія.
5. Світлова енергія.
6. Ядерна, або атомна енергія.

Закон збереження енергії:

«Енергія не звідки не виникає і нікуди не зникає, вона тільки перетворюється із одного виду в інший, чи передається від одного тіла до іншого в рівних кількостях.»

«У консервативній (замкненій) системі повна механічна енергія залишається незмінною: $E_{\text{повн}} = E_{\text{кін}} + E_{\text{пот}} = \text{const}$ »

Потужність:

Потужність – це робота, виконана тілом за одиницю часу.

Тобто, інакше кажучи, це швидкість виконання роботи:

$$N = dA/dt \quad (N = A/t \text{ – при сталій потужності}),$$

де A – робота, що виконується за час t .

Ще один вираз потужності, якщо значення сили незмінне:

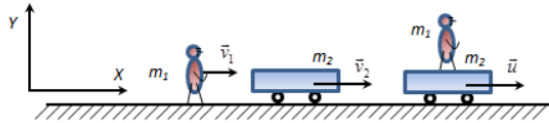
$$N = F \cdot v, \text{ де } v \text{ – швидкість, з якою рухається тіло.}$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Людина масою $m_1 = 80$ кг наздоганяє зі швидкістю $v_1 = 7,2$ км/год віз масою $m_2 = 120$ кг, який рухається зі швидкістю $v_2 = 3,6$ км/год і заскакує на нього. З якою швидкістю буде рухатися віз разом з людиною?

Розв'язок

$m_1 = 80$ кг
 $v_1 = 7,2$ км/год $= 2$ м/с
 $m_2 = 120$ кг
 $v_2 = 3,6$ км/год $= 1$ м/с
 $u = ?$



За умовами задачі, з початку руху людина наздоганяє віз, отже, вони рухались в одному напрямку. Виберемо цей напрям руху за позитивний і спрямуємо вісь «х» у цьому напрямку. Логічно уявити, що після того, як людина заскочила на віз, вони разом будуть рухатися у тому ж самому напрямі. Це класичний приклад абсолютно непружного зіткнення – після зіткнення обидва об'єкти рухаються як одне ціле.

Зовнішні сили, які діють на тіла у системі «людина-віз», це сили тяжіння людини та возу і сили реакції опору. Вони перпендикулярні до руху і, при дії на кожний об'єкт (тобто людину і віз), компенсують одна одну. На підставі цього, можна вважати, що система «людина-віз» замкнена.

Для замкненої системи ми можемо застосувати закон збереження імпульсу. Як видно з малюнка, імпульси об'єктів до зіткнення і після нього позитивні. Бо всі вони спрямовані вздовж вісі «х».

Запишемо імпульс системи «людина-віз» до взаємодії:

$$\vec{P}_{\text{сис.1}} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Імпульс системи «людина-віз» після взаємодії:

$$\vec{P}_{\text{сис.2}} = (m_1 + m_2) \vec{u}$$

Згідно з закону збереження імпульса для замкненої системи, можемо дорівняти імпульс системи до взаємодії імпульсу системи після взаємодії:

$$\vec{P}_{\text{сис.1}} = \vec{P}_{\text{сис.2}}$$

Звідки, враховуючи напрями імпульсів, для їх модулів можна записати:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$$

Остаточно знайдемо для швидкості u :

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$

Обчислення величин, які треба знайти за умовами задачі:

$$u = \frac{80\text{кг} \cdot 2 \frac{\text{м}}{\text{с}} + 120\text{кг} \cdot 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{(80\text{кг} + 120\text{кг})} = 1,4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Відповідь: $u = 1,4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Задача 2. Камінь масою $m = 1$ кг кинули догори зі швидкістю $v_1 = 10$ м/с. На яку максимальну висоту підніметься камінь?

Розв'язок

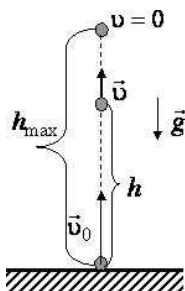
$$m_1 = 1 \text{ кг}$$

$$v_0 = 10 \text{ м/с}$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$v = 0 \text{ м/с}$$

$$h_{\max} = ?$$



Цю задачу можна вирішити двома способами.

Перший спосіб – це класичне рішення з використанням рівнянь рівносповільненого руху кінематики:

$$\begin{cases} a(t) = \text{const} = -a; \\ v(t) = v_0 - a t; \\ S(t) = v_0 t - at^2/2. \end{cases}$$

Де: прискорення – це прискорення вільного падіння $a(t) = \text{const} = -a = -g$, кінцева швидкість (у верхній точці траєкторії) нульова $v(t) = 0$, а шлях – це максимальна висота підйому каменю $S(t) = h_{\max}$. Розв'язуючи наведену систему трьох рівнянь, за цими умовами, можна знайти, хоч і доволі складно, висоту підйому каменя.

Другий спосіб, більш оригінальний і спрощений. Спосіб, пов'язаний з використанням закону збереження повної механічної енергії. Цей спосіб ми і будемо зараз використовувати при розв'язанні наведеної задачі.

При підйомі каменя ми вважаємо, що на нього не діють дисипативні сили (сили тертя), а діє тільки потенційна сила – сила тяжіння. Тобто систему можемо вважати консервативною (замкненою). У консервативній системі, згідно закону збереження повної механічної енергії, повна механічна енергія зберігається.

На підставі цього ми можемо прирівняти повну механічну енергію на початку руху (тобто на поверхні землі) до повної механічної енергії у вищій точці підйому.

Запишемо повну механічну енергію на початку руху:

$$E_{\text{повн1}} = E_{\text{кін1}} + E_{\text{пот1}}.$$

На початку руху, потенційна енергія $E_{\text{пот1}}$ дорівнює нулю. Так як тіло не

піднялося на поверхню і не має потенційної енергії підйому. А кінетична енергія $E_{\text{кін1}}$, згідно її визначення, буде дорівнювати:

$$E_{\text{кін1}} = \frac{m v_0^2}{2}.$$

Тоді повна механічна енергія на початку руху буде дорівнювати:

$$E_{\text{повн1}} = \frac{m v_0^2}{2} + 0.$$

У вищій точці підйому ситуація зовсім інша. У каменя немає швидкості ($v(t) = 0$). Тому у цій точці траєкторії відсутня кінетична енергія $E_{\text{кін2}} = 0$. Але є потенційна енергія підйому $E_{\text{пот2}} = mgh_{\text{max}}$.

Таким чином, повна механічна енергія у вищій точці траєкторії буде дорівнювати:

$$E_{\text{повн2}} = E_{\text{кін2}} + E_{\text{пот2}} = 0 + mgh_{\text{max}}.$$

На підставі закону збереження повної механічної енергії прирівняємо ці енергії $E_{\text{повн1}}$ і $E_{\text{повн2}}$ між собою:

$$\frac{m v_0^2}{2} + 0 = 0 + mgh_{\text{max}}.$$

Звідки, майже одразу, отримаємо значення максимальної висоти підйому каменя:

$$\frac{m v_0^2}{2} = mgh_{\text{max}} \rightarrow h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Обчислення величин, які треба знайти за умовами задачі:

$$h_{\text{max}} = \frac{\left(\frac{10 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{2}\right)^2}{9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 5,1 \text{ м}.$$

Відповідь: $h_{\text{max}} = 5,1 \text{ м}$.

Задача 3. Куля масою 10 г влучає у дерев'яний брусок масою 6 кг, який підвішений на нитках. Після влучання, брусок з кулею, в якому вона застрягла, піднімається на висоту 49 мм. Знайти: а) яка початкова швидкість кулі?; б) чому дорівнює кінетична енергія кулі у момент пострілу?; в) яка частина механічної енергії перетвориться у внутрішню енергію нагрівання Q ?

Розв'язок

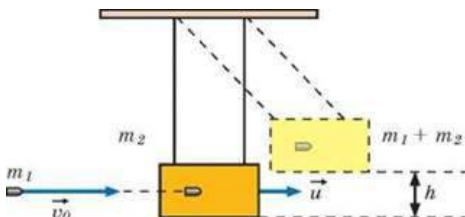
$$m_1 = 10 \text{ г} = 10^{-2} \text{ кг}$$

$$m_2 = 6 \text{ кг}$$

$$h = 49 \text{ мм} = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$V_0 - ?$$

$$E_k - ? \quad Q - ?$$



Опором повітря нехтуємо. Оскільки у момент потрапляння кулі в брусок усі сили, що діяли на них, зрівноважені, то систему (брусок – куля) у момент влучання кулі в брусок можна вважати ізольованою.

Тоді можна записати закони збереження імпульсу та енергії у загальному вигляді:

$$\begin{cases} m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \vec{U} \\ \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) U^2}{2} + Q \end{cases}$$

Для проекції на горизонтальну вісь можна записати:

$$v_1 = v_0, v_2 = 0, U = u.$$

Тоді перше рівняння (закон збереження імпульсу системи) має вигляд:

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) u.$$

Звідки початкова швидкість кулі:

$$v_0 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u.$$

Швидкість бруска з кулею у момент удару u можна визначити, як і в попередній задачі, якщо застосувати закон збереження повної механічної енергії для системи брусок – куля, коли вони рухаються, як одне ціле:

$$\frac{m_1 + m_2}{2} u^2 = (m_1 + m_2) gh.$$

Звідки

$$u = \sqrt{2gh}.$$

Тоді, початкова швидкість кулі

$$v_0 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}.$$

Тепер можна знайти кінетичну енергію кулі у момент пострілу

$$E_k = \frac{m_1 v_0^2}{2}.$$

Щоб знайти частину механічної енергії ΔE , яка перетворюється у внутрішню енергію нагрівання Q , треба визначити різницю між кінетичною енергією кулі у початковий момент і потенційною енергією бруска разом з кулею у кінцевий момент руху:

$$Q = \Delta E = \frac{m_1 v_0^2}{2} - (m_1 + m_2) gh.$$

Обчислення величин, які треба знайти за умовами задачі:

$$v_0 = \frac{6\text{кг} + 0,01\text{кг}}{0,01\text{кг}} \sqrt{2 \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 4,9 \cdot 10^{-2} \text{м}} = 589 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

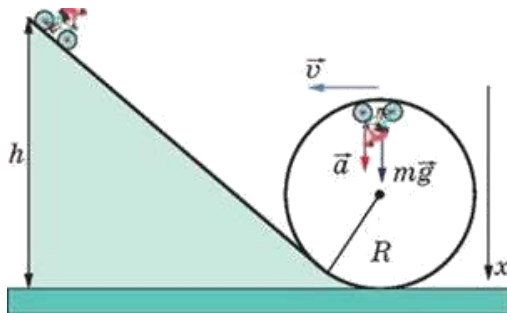
$$E_k = \frac{10^{-2} \text{кг} \cdot \left(589 \frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{2} = 1734,6 \text{ Дж}$$

$$Q = \Delta E = 1734,6 \text{ Дж} - 6,01 \text{ кг} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 0,049 \text{ м} \approx 1731,7 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $v_0 = 589 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $E_k = 1734,6 \text{ Дж}$; $Q = 1731,7 \text{ Дж}$.

Задача 4. Велосипедист рухається за інерцією по внутрішній стороні велотреку у вигляді «мертвої петлі» радіусом R . З якої висоти h має спускатись велосипедист, щоб він пройшов верхню точку кола «мертвої петлі» без відриву

від внутрішньої поверхні? Силою тертя знехтувати.



Розв'язок

Для розв'язання задачі треба визначити нульовий рівень потенційної енергії. Як правило, його пов'язують з поверхнею землі.

Тоді, відносно цього рівня, велосипедист на висоті h має таку потенційну енергію:

$$E_{\text{пл}} = mgh.$$

Так як у системі тертя відсутнє, згідно законом збереження енергії, при русі велосипедиста до низу потенційна енергія зменшується й переходить у кінетичну енергію руху.

При досягненні поверхні землі потенційна енергія велосипедиста буде дорівнювати нулю ($h=0$), а кінетична енергія набирає максимальне значення. Запишемо це значення кінетичної енергії у вигляді:

$$E_{\text{кл}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}.$$

Далі велосипедист починає рухатись по колу. При цьому він піднімається угору. Тобто буде зростати його потенційна енергія і зменшуватись кінетична енергія.

У верхній точці траєкторії, при русі по колу, велосипедист буде мати якусь швидкість v .

Отже, для кінетичної енергії у верхній точці кола ми можемо записати:

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}.$$

Звичайно, що ця кінетична енергія менша ніж її максимальне значення, бо велосипедист піднявся на висоту $2R$. Він отримав, за рахунок кінетичної енергії, потенційну енергію в цій точці.

Отже, для потенційної енергії у верхній точці кола ми можемо записати:

$$E_{\text{п}} = mg2R.$$

Як визначалося раніше, у системі тертя відсутнє. Тоді, згідно законом збереження енергії, сума потенційної та кінетичної енергій у будь-якій точці траєкторії руху велосипедиста є величиною сталою.

Визначимо повну механічну енергію у двох точках траєкторії руху – у

точці початку руху на висоті h і у верхній точці кола «мертвої петлі».

Тоді, згідно з законом збереження енергії:

$$E_{\text{пл}} = E_{\text{к}} + E_{\text{п}}.$$

Або:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + mg2R.$$

Скоротивши множник – масу в правій і лівій частинах рівняння, знайдемо значення для висоти h :

$$h = \frac{v^2}{2g} + 2R.$$

При русі по колу, велосипедист має доцентрове прискорення $a_{\text{ц}}$, яке змінює напрям руху велосипедиста. Воно спрямоване до центра кола і, згідно визначення, має значення:

$$a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R}.$$

У верхній точці кола на велосипедиста діє тільки сила тяжіння. Сила тиску коліс за умовами задачі повинна бути відсутня (рух у верхній точці кола без відриву коліс). Тому ми можемо записати для цього стану другий закон Ньютона у вигляді:

$$F = ma_{\text{ц}} \Rightarrow mg = ma_{\text{ц}} \Rightarrow a_{\text{ц}} = g \Rightarrow \frac{v^2}{R} = g.$$

Звідки отримаємо:

$$v^2 = Rg.$$

Підставимо це значення квадрату швидкості у вираз для висоти h :

$$h = \frac{v^2}{2g} + 2R = \frac{Rg}{2g} + 2R = 2,5 R.$$

Відповідь: $h = 2,5 R$.

Задача 5. Вагон масою 20 т рухається по коліям сортувального тупика. При ударі о стіну тупика кожен з буферів вагону стиснувся на 10 см. Відомо, що пружина кожного з буферів стискується на 1 см під дією сили $9,8 \cdot 10^3$ Н. Знайти з якою швидкістю рухався вагон?

Розв'язок

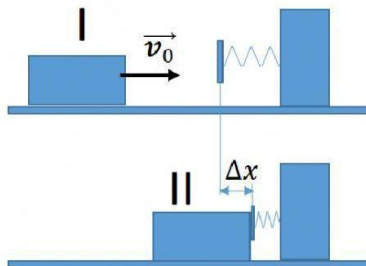
$$m = 20 \text{ т} = 2 \cdot 10^4 \text{ кг}$$

$$\Delta x = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

$$\Delta x_1 = 1 \text{ см} = 0,01 \text{ м}$$

$$F_1 = 9,8 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

$$v_0 \text{ ?}$$



Згідно з законом збереження енергії, при зіткненні вагона зі стіною тупика кінетична енергія вагону перетворюється в потенціальну енергію деформації двох стиснених пружин:

$$E_k = 2 \cdot W_p . \quad (1)$$

Згідно визначень, кінетична енергія руху дорівнює:

$$E_k = \frac{m v_0^2}{2} , \quad (2)$$

а потенційна енергія деформації має вигляд:

$$W_p = \frac{k \Delta x^2}{2} , \quad (3)$$

де m і v_0 – маса і швидкість вагона;

k – жорсткість пружини буфера;

Δx – величина стиснення пружини.

У виразі для потенційної енергії деформації нам невідома жорсткість пружини буфера. Для знаходження цієї величини використаємо умови задачі:

$$F_1 = k \cdot \Delta x_1 ,$$

де F_1 – сила, яка викликає пружну деформацію x_1 .

Звідки:

$$k = \frac{F_1}{\Delta x_1} . \quad (4)$$

Тепер ми можемо записати рівняння (1), підставивши у нього значення (2), (3) і (4):

$$\frac{m v_0^2}{2} = 2 \frac{F_1}{\Delta x_1} \cdot \frac{\Delta x^2}{2} ,$$

Звідки одержимо остаточно вираз для швидкості:

$$v_0 = \Delta x \sqrt{\frac{2 F_1}{m \Delta x_1}} .$$

Розрахуємо розмірність $[v] = m \sqrt{\frac{H}{кгм}} = m \sqrt{c^{-2}} = m/c .$

Числове значення – $v_0 = 0,1 \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}}} = 0,99 \text{ м/с} .$

Відповідь: $v_0 = 0,99 \text{ м/с} .$

Задача 6. Визначити швидкість падіння метеорів на поверхню Землі, якщо вважати, що їх початкові швидкості на нескінченності, відносно Землі, дорівнюють нулю. При розрахунках опором повітря нехтувати.

Розв'язок

$r_1 = \infty$ $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ $r_2 = R = 6,67 \cdot 10^7 \text{ м}$ $v = ?$
--

Використаємо закон збереження енергії. Згідно цього закону, повна

механічна енергія метеору на нескінченності має дорівнювати його повній енергії на поверхні Землі.

На нескінченності, потенційну енергію взаємодії метеору з Землею можна записати як:

$$W_p = -\frac{\gamma M_3 m}{r_1} = -\frac{\gamma M_3 m}{\infty} = 0.$$

Як бачимо, потенційна енергія метеора на нескінченності дорівнює нулю.

Але і кінетична енергія також дорівнює нулю, тому що, за умовами задачі, його швидкість у нескінченності відносно Землі дорівнює нулю.

Отже, згідно з законом збереження енергії, на поверхні Землі повна механічна енергія метеору має вираз:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma M_3 m}{r_2} = 0.$$

Звідки знаходимо швидкість метеору у поверхні Землі:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_3}{r_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_3 \cdot R}{R^2}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot R},$$

де R – радіус Землі; $g = \gamma M_3 / R^2$ – прискорення вільного падіння у поверхні Землі.

Розмірність швидкості за розрахунковою формулою:

$$[v] = \sqrt{\frac{m \cdot m}{c^2}} = m / c.$$

Обчислимо швидкість:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6,67 \cdot 10^7} = 11,4 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v = 11,4 \cdot 10^3 \text{ м/с}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. У дерев'яний брусок, що причеплений на нитці, влучає куля і застряє у ній. Маса кулі 5 г. Маса дерев'яного бруска 10 кг. Довжина нитки 2 м. Знайти швидкість кулі, якщо нитка відхилилась від вертикалі на кут 3° . Розміром кулі знехтувати. Удар вважати центральним непружним.
2. Молот, що має масу 3 кг, ударяється у нерухому заготовку масою теж 3 кг. Швидкість молота 4 м/с. Яка кількість тепла виділиться при ударі? Удар вважати центральним і непружним.
3. Дві кулі рухаються в одному напрямку. Перша куля наздоганяє другу кулю Маса першої кулі 2 кг. Вона рухається зі швидкістю 3 м/с. Маса другої 3 кг. Друга куля рухається зі швидкістю 1 м/с. Знайти швидкість куль після зіткнення. Удар вважати центральним, абсолютно непружним.
4. Дві кулі рухаються в одному напрямку. Перша куля наздоганяє другу кулю Маса першої кулі 2 кг. Вона рухається зі швидкістю 3 м/с. Маса другої 3 кг. Друга куля рухається зі швидкістю 1 м/с. Знайти швидкість

- куль після зіткнення. Удар вважати центральним, абсолютно пружним.
5. Людина наздоганяє віз і заскакує на нього. Швидкість, з якою рухалася людина – $v_1 = 8 \text{ км/год}$. Його маса $m_1 = 60 \text{ кг}$. Віз має масу $m_2 = 80 \text{ кг}$. Він рухався зі швидкістю $v_2 = 3 \text{ км/год}$. З якою швидкістю буде рухатися віз і людина разом, після стрибка людини?
 6. Період обертання штучного супутника навколо Землі дорівнює 2 години. Траєкторія супутника колова. Знайти висоту, на якій рухається супутник над поверхнею Землі. (радіус Землі $R = 6400 \text{ км}$, маса Землі $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$, гравітаційна стала $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$).
 7. Штучний супутник обертається по коловій орбіті навколо Землі на висоті 3500 км. Знайти лінійну швидкість супутника. (радіус Землі $R = 6400 \text{ км}$, маса Землі $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$, гравітаційна стала $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$).
 8. Кулю, що висить на дроті, прикріпили до стелі трамваю. Трамвай за час $t = 3 \text{ с}$ змінив швидкість рівностало з $v_1 = 18 \text{ км/год}$ до $v_2 = 6 \text{ км/год}$. На який кут відхилиться дріт з кулею?
 8. При підйомі вантажу масою $m = 2 \text{ кг}$ на висоту $h = 1 \text{ м}$ сила F здійснила роботу $A = 80 \text{ Дж}$. З яким прискоренням сила F підіймала вантаж?
 9. Камінь падає з якоїсь висоти H . Час падіння дорівнює $t = 2 \text{ с}$. Знайти цю висоту H , з якої упав камінь.
 10. Камінь падає з якоїсь висоти H . Час падіння дорівнює $t = 2 \text{ с}$. Знайти кінетичну енергію каменя у кінці шляху. Маса каменя $m = 2 \text{ кг}$.
 11. Камінь падає з якоїсь висоти H . Час падіння дорівнює $t = 2 \text{ с}$. Знайти потенційну енергію каменя у кінці шляху. Маса каменя $m = 2 \text{ кг}$.
 12. При підйомі вантажу масою $m = 2 \text{ кг}$ на висоту $h = 1 \text{ м}$ сила F здійснила роботу $A = 80 \text{ Дж}$. Який натяг тросу, що підійме вантаж?
 13. Молекула масою $m = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$, яка рухається нормально до стіни судини зі швидкістю $V = 600 \text{ м/с}$, зіткнувшись зі стіною абсолютно пружно та відлітає від неї без втрати швидкості. Знайти імпульс сили, який зазнала стінка судини.
 14. Два тіла масою 2 кг і 3 кг рухаються назустріч одне одному зі швидкостями 3 м/с і 2 м/с відповідно. Які будуть їх швидкості після абсолютно пружного зіткнення?
 15. Людина масою $m_1 = 60 \text{ кг}$ їде на візку масою $m_2 = 80 \text{ кг}$ зі швидкістю $v = 3 \text{ км/год}$. В якийсь момент, людина зіскакує з візка в протилежному руху напрямі зі швидкістю $v_1 = 8 \text{ км/год}$, відносно поверхні землі. З якою швидкістю буде рухатися віз без людини?
 16. Людина масою $m_1 = 60 \text{ кг}$ біжить зі швидкістю $v_1 = 8 \text{ км/год}$ до візка, що рухається. Віз має масу $m_2 = 80 \text{ кг}$, і рухається назустріч людині зі швидкістю $v_2 = 3 \text{ км/год}$. З якою швидкістю буде рухатися віз, коли людина заскочить на віз?
 17. Кулька масою 5 кг рухається зі швидкістю 5 м/с і наздоганяє кульку масою 15 кг, що рухається зі швидкістю 3 м/с. Які швидкості будуть мати кульки, якщо вважати удар прямим центральним абсолютно

пружним?

18. Кулька масою 5 кг рухається зі швидкістю 5 м/с, а назустріч йому рухається кулька масою 15 кг зі швидкістю 3 м/с. Які швидкості будуть мати кульки, якщо вважати удар прямим центральним абсолютно пружним?
19. Два тіла, маса яких 2 кг та 6 кг, рухаються назустріч одне одному зі швидкостями 2 м/с кожне. Визначити модуль та напрямок швидкості цих тіл після абсолютно непружного центрального удару.
20. Дві кулі зіштовхуються одна з одною. Перша куля має масу 5 кг і рухається зі швидкістю 5 м/с. Друга куля має масу 2 кг. Друга куля перебувала у стані спокою. Удар – прямий, центральний, абсолютно непружний. Визначити швидкості куль після удару.
21. Якої швидкості і в якому напрямі набере човен, що спочатку покоївся, якщо людина, котра знаходиться у човні, зробить постріл з рушниці у горизонтальному напрямі? Човен з людиною має масу 200 кг. Маса ж кулі 10 г, її швидкість складає 800 м/с.
22. Дитяча електрична іграшка піднімає з силою 30 Н по похилій площині вантаж масою 2 кг на висоту 2,5 м. Прискорення, з яким рухається вантаж, дорівнює 5 м/с^2 . Сила діє паралельно похилій площині. Яку роботу виконує сила при підйомі вантажу по похилій площині? Тертям тіла на площині нехтувати.
23. Яка робота буде виконана при стисканні пружини буферу залізничного вагона на 5 см, якщо для стискання цієї ж пружини на 1 см потрібна сила $3 \cdot 10^4 \text{ Н}$?
24. Брусок масою 5 кг під дією сил тертя проходить по горизонтальній площині 0,5 м і зупиняється. Коефіцієнт тертя між бруском і площиною дорівнює 0,2. Яку роботу виконала сила тертя?
25. Яка робота виконується сталою силою 200 Н при підніманні вантажу масою 10 кг на висоту 10 м? Яку потенціальну енергію матиме піднятий вантаж?
26. Куля рухається і ударає у нерухому кулю такої ж маси. Після зіткнення кулі стали рухатися як одне ціле. Яка частина механічної енергії перейде у теплову?
27. Шайба ковзає по горизонтальній поверхні льоду. Шайба зупинилася коли пройшла відстань 48 м. Сила тертя ковзання шайби по льоду становить 0,06 ваги шайби. Яка початкова швидкість шайби?
28. Швидкість кулі масою 4 кг, яка падає вільно, на деякому шляху падіння збільшилась з 2 до 8 м/с. Яку роботу виконала сила тяжіння на цьому шляху для збільшення швидкості?
29. Використовуючи баланс сил, які діють на штучний супутник, знайти і розрахувати першу космічну швидкість супутника у поверхні Землі.
30. На підставі закону збереження енергії, вивести і розрахувати другу космічну швидкість, яку повинен мати космічний корабель, щоб стати штучним супутником Сонця.

1.2.3. Основне рівняння динаміки обертального руху

Скорочена теорія

Обертальний рух твердого тіла

Модуль моменту сили відносно вісі обертання дорівнює:

$$M = F \cdot r,$$

де r – плече сили (відстань від вісі обертання до напрямку дії сили).

Момент інерції твердого тіла відносно вісі обертання

$$J = \int r^2 \cdot dm,$$

де r – відстань від елементарної маси dm до вісі обертання.

Інтегрування треба проводити по всьому об'єму тіла.

Момент інерції матеріальної точки відносно вісі обертання

$$J = m \cdot r^2,$$

де m – маса матеріальної точки; r – відстань від вісі обертання до матеріальної точки.

Таке ж значення мають **кільце і полий обід**.

Момент інерції однорідного циліндра (чи диска) відносно вісі циліндра

$$J = \frac{m \cdot R^2}{2},$$

де m і R – маса і радіус циліндра (диска).

Момент інерції кулі відносно вісі, яка проходить через центр кулі –

$$J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2.$$

Момент інерції стрижня

$$J = \frac{1}{12} m \ell^2.$$

Основний закон динаміки обертального руху

$$M \cdot dt = d(J \cdot \omega),$$

де $M \cdot dt$ – елементарний імпульс моменту сил, $d(J \cdot \omega)$ – елементарна зміна моменту імпульсу тіла.

Якщо момент інерції тіла J незмінний:

$$M = J \cdot \varepsilon,$$

де ε – кутове прискорення.

Кінетична енергія тіла, що обертається,

$$W_k = \frac{J \cdot \omega^2}{2}.$$

Робота і потужність при обертальному русі -

$$A = M \cdot \varphi ;$$

$$N = M \cdot \omega,$$

де M – момент сили; φ – кут повороту; ω – кутова швидкість.

Порівняльна таблиця

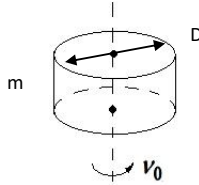
Поступальний рух	Обертальний рух
S – шлях	φ – кут повороту
a_t дотичне прискорення	ε – кутове прискорення
$v = ds/dt$	$\omega = d\varphi/dt$
$a = dv/dt$	$\varepsilon = d\omega/dt$,
Рівномірний рух $a = 0$; $v = \text{const}$; $s = v \cdot t$	Рівномірний рух $\varepsilon = 0$; $\omega = \text{const}$; $\varphi = \omega \cdot t$
Рівноприскорений рух $a = \text{const}$; $v = v_0 + a \cdot t$ $s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$ $v^2 - v_0^2 = 2a \cdot S$	Рівноприскорений рух $\varepsilon = \text{const}$; $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$ $\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \varepsilon \cdot \varphi$
m – маса	J – момент інерції
F – сила	M – момент
$P = mV$ – імпульс	$L = J\omega$ – момент імпульсу
$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ – робота	$A = \int M \cdot d\varphi$ – робота
$N = \vec{F} \cdot \vec{V}$ – потужність	$N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$ – потужність
$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$ – 2-й з-н Ньютона	$\vec{M} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt}$ – осн. рівн-ня дин. оберт. руху.
$E_k = \frac{m \cdot V^2}{2}$ – кінетична енергія поступального руху	$E_k = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$ – кінетична енергія обертання тіла

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Визначити момент сили, який слід прикласти до валу, що обертається з частотою 12 об/с, щоб він зупинився протягом 8 с. Діаметр валу 30 см. Вал, масою 6 кг, вважати рівномірно розподіленою масою по його об'єму.

Розв'язок

$$\begin{aligned}v_0 &= 12 \text{ об/с} \\v &= 0 \text{ об/с} \\t &= 8 \text{ с} \\D &= 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м} \\m &= 6 \text{ кг} \\M &= ?\end{aligned}$$



Основне рівняння динаміки обертального руху:

$$M = J \cdot \varepsilon, \quad (1)$$

де ε – кутове прискорення валу; J – момент інерції валу.

Момент інерції суцільного однорідного циліндра (диска) відносно вісі циліндра

$$J = \frac{m \cdot R^2}{2} = \frac{m \cdot D^2}{8}.$$

Вважаючи рух вала рівносповільненим, визначимо кутове прискорення з рівняння рівносповільненого обертального руху.

Рівнозмінний обертальний рух, що відбувається з сталим кутовим прискоренням, можна записати системою рівнянь:

$$\begin{cases} \varepsilon = \text{const} \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} \end{cases}$$

З другого рівняння знайдемо кутове прискорення:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi \nu_0}{t}.$$

Підставляючи значення моменту інерції циліндра J і знайдене кутове прискорення ε в рівняння (1), отримаємо кінцеву формулу:

$$M = \frac{m \cdot D^2 \cdot 2\pi \nu_0}{8t}.$$

Підставляючи чисельні дані, отримаємо остаточно:

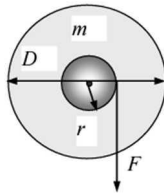
$$M = \frac{6 \text{ кг} \cdot (0,3 \text{ м})^2 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 12 \text{ об/с}}{8 \cdot 8 \text{ с}} = 17 (\text{Н м})$$

Відповідь: $M = 17 \text{ Н м}$.

Задача 2. На шків маховика радіусом $r = 12$ см намотана мотузка. Маховик має вигляд однорідного диска діаметром $D = 75$ см і масою $m = 40$ кг (дивись рис.). До мотузки прикладена сила $F = 1$ кН., Відстань, на якій прикладається сила до маховика, дорівнює радіусу шків. Визначити кутове прискорення ε і частоту обертання маховика ν через час $t = 10$ с після початку дії сили. Силою тертя у шківі нехтувати.

Розв'язок

$$\begin{aligned} D &= 75 \text{ см} = 0,75 \text{ м} \\ m &= 40 \text{ кг} \\ F &= 1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н} \\ t &= 10 \text{ с} \\ r &= 12 \text{ см} = 0,12 \text{ м} \\ \varepsilon - ? \quad \nu - ? \end{aligned}$$



Для рішення використаємо основне рівняння динаміки обертального руху:

$$M = J \cdot \varepsilon, \rightarrow \varepsilon = \frac{M}{J}, \quad (1)$$

де ε – кутове прискорення валу; J – момент інерції валу, M – момент прикладеної сили.

Момент інерції диска дорівнює:

$$J = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} m D^2, \quad (2)$$

де R – радіус диска, D – його діаметр.

Момент сили F , згідно визначенню, знайдемо із співвідношення:

$$M = F R \sin(\alpha) = F R \quad (3)$$

Підставляючи співвідношення (2) і (3) в (1), отримаємо:

$$\varepsilon = \frac{F R}{\frac{1}{8} m D^2} = \frac{8 F R}{m D^2} \quad (4)$$

Під дією сталого моменту сили обертальний рух диска є рівноприскореним. Враховуючи, що рух почався без початкової кутової швидкості, можемо записати рівняння рівноприскореного обертального руху в такому вигляді:

$$\omega = \varepsilon t = \frac{8 F R}{m D^2} t.$$

Кутова швидкість ω пов'язана з частотою обертання ν співвідношенням:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Звідки отримаємо:

$$2\pi v = \frac{8FR}{mD^2}t.$$

Остаточно:

$$v = \frac{8FR}{2\pi mD^2}t = \frac{4FR}{\pi mD^2}t. \quad (5)$$

Підставляючи числові значення у вирази (4) і (5), отримаємо результат:

$$\varepsilon = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0,12}{40 \cdot (0,75)^2} = 42,67 \text{ (рад/с}^2\text{)},$$

$$v = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0,12}{3,14 \cdot 40 \cdot (0,75)^2} = (67,9 \text{ с}^{-1}).$$

Перевіримо розмірність отриманих величин:

$$[\varepsilon] = \frac{8 [F] [R]}{[m] [D]^2} = \frac{H \cdot M}{кг \cdot M^2} = \frac{кг \cdot M}{с^2 \cdot кг \cdot M} = \frac{1}{с^2}$$

$$[v] = \frac{4 [F] [R] [t]}{\pi [m] [D]^2} = \frac{H \cdot M \cdot c}{кг \cdot M^2} = \frac{кг \cdot M \cdot M \cdot c}{с^2 \cdot кг \cdot M^2} = \frac{1}{с}$$

Відповідь: $\varepsilon = 42,67 \text{ рад/с}^2$, $v = 67,9 \text{ с}^{-1}$.

Задача 3. Маховик має вигляд доцільного диска. Його маса дорівнює 50 кг. Радіус диска – 20 см. Маховик за допомогою електродвигуна розкручено до частоти обертання 480 об/хв. Після чого двигун вимкнено. Під впливом сил тертя маховик зупинився. До повної зупинки маховик зробив 200 обертів. Знайти момент сил тертя (гальмівний момент), вважаючи його сталим.

Розв'язок

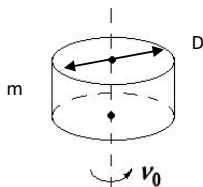
$$m = 50 \text{ кг}$$

$$r = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

$$v = 480 \text{ об/хв} = 8 \text{ об/с}$$

$$N = 200$$

$$M - ?$$



Циклічна частота обертання (кутова швидкість) ω пов'язана з частотою обертання ν співвідношенням:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu$$

У нашому випадку, з початкових даних, ми можемо її знайти:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 2 \cdot \pi \cdot 8 \text{ об/с} = 16 \cdot \pi \text{ рад/с}$$

Робота подолання сил тертя виконується за рахунок кінетичної енергії маховика:

$$A = (J \cdot \omega^2) / 2, \quad (1)$$

де ω – кутова швидкість маховика; J – момент інерції маховика.

Робота при обертальному русі, у випадку коли момент сили $M = \text{const}$:

$$A = M \cdot \varphi, \quad (2)$$

де φ – кут оберту (при вимірі у радіанах – $\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N$); M – момент діючих сил тертя.

Якщо підставити виписане співвідношення у формулу (1), одержимо

$$(J \cdot \omega^2) / 2 = M \cdot 2 \cdot \pi \cdot N. \quad (3)$$

Підставимо у рівняння (3) момент інерції диску відносно його вісі J :

$$\left(\frac{1}{2} m r^2 \cdot \omega^2 \right) / 2 = M \cdot 2 \cdot \pi \cdot N$$

Остаточно отримаємо розрахункову формулу:

$$M = m \cdot r^2 \cdot \omega^2 / (8 \cdot \pi \cdot N). \quad (4)$$

Розрахуємо розмірність моменту сил за формулою (4) :

$$[M] = (\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{рад}^2) / (\text{рад} \cdot \text{с}^2) = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Звернемо увагу, що момент сили має розмірність $[\text{Дж}] = [\text{Н}] \cdot [\text{м}]$, як і розмірність енергії. Але на практиці, для того, щоб було зрозуміло, що йдеться мова про момент сили, а не якусь енергетичну величину, завжди пишуть $[\text{Н} \cdot \text{м}]$.

Числове значення:

$$M = (50 \cdot 0,2^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 480^2) / (8 \cdot \pi \cdot 200 \cdot 60 \cdot 60) = 1,00 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Відповідь: $M = 1,0 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти момент інерції Землі відносно вісі її обертання. Землю вважати однорідною кулею радіусом 6400 км і масою $6 \cdot 10^{24}$ кг.
2. Маховик трактора рівномірно обертається за допомогою двигуна. Двигун вимкнули. Після цього маховик протягом 30 с робить 120 обертів і зупиняється. Момент інерції маховика дорівнює $0,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Визначити кутове прискорення маховика і момент сил тертя (гальмівний момент). Вважати кутове прискорення маховика після вимикання двигуна сталим.

3. Колесо має форму диска. Радіус колеса 0,5 м. Його маса – 50 кг. До обода колеса прикладений дріт, до якого прикладено постійну дотичну силу величиною 100 Н. Яке кутове прискорення буде у колеса? Через який час після початку дії сили колесо буде обертатись з частотою обертання 100 об/с?
4. При гальмуванні колесо автомобіля зменшило свою частоту обертання від 300 об/хв до 180 об/хв за час, який дорівнює одній хвилині. Момент інерції колеса має значення $2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Знайти: 1) кутове прискорення колеса; 2) момент сил тертя (гальмівний момент). Вважати, що колесо при гальмуванні почало обертатись рівносповільнено.
5. Барабан молотарки за допомогою двигуна розкручено до частоти 20 об/с. Момент інерції барабану молотарки дорівнює $20 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Барабан молотарки зупиняється через 3 хв 20 с після вимкнення двигуна. Визначити момент сил тертя (гальмівний момент), що діє на барабан. Момент сил тертя вважати сталим.
6. На барабан намотано шнур, до кінця якого прив'язаний вантаж масою 10 кг. Радіус барабана 0,5 м. Після того, як вантаж відпустили, він почав опускатися з прискоренням $2,04 \text{ м/с}^2$. Знайти момент інерції барабана.
7. Махове колесо за допомогою двигуна розкручено до частоти 20 об/хв. Момент інерції колеса становить $245 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Після вимкнення двигуна махове колесо зупиняється через 1 хв. Знайти момент сил тертя (гальмівний момент). Момент сил тертя вважати сталим.
8. До ободу колеса у вигляді диска надана дотична сила 98 Н. Радіус диска 0,5 м. Його маса 50 кг. Знайти: 1) кутове прискорення, з яким буде рухатись колесо; 2) час, за який колесо придбає, під дією обертального моменту сили, частоту обертання 100 об/с.
9. Диск масою 2 кг і радіусом 10 см обертається навколо горизонтальної вісі, що проходить через його центр. Частота обертання диска становить 600 об/хв. До диска притискають гальмову колодку. Диск починає обертатись рівносповільнено. Через 20 секунд під дією гальмівного моменту диск зупиняється. Знайти момент сил тертя (гальмівний момент).
10. Маховик рівномірно обертається за допомогою двигуна. Маховик має вигляд диска масою 49 кг і діаметром 40 см. Двигун розкрутив маховик до частоти 480 об/хв. Після цього двигун вимкнули. Під впливом сил тертя він зупинився через 3с. Знайти момент сил тертя (гальмівний момент), вважаючи його сталим.
11. Маховик рівномірно обертається за допомогою двигуна. Маховик має вигляд диска масою 50 кг і діаметром 20 см. Двигун розкрутив маховик до частоти 480 об/хв.. Після цього двигун вимкнули. Під впливом сил тертя він зупинився. Знайти момент сил тертя (гальмівний момент),

- якщо маховик до повної зупинки зробив 100 обертів. Гальмовий момент вважати сталим.
12. Однорідний диск обертається навколо горизонтальної вісі, що проходить через його центр. Закон обертання має вигляд:
 $\varphi(t) = 8 \text{ рад} + 2 \text{ рад/с} \cdot t + 6 \text{ рад/с}^2 \cdot t^2$. Маса диска 0,5 кг. Його радіус 0,06 м. Визначити момент сили, що діє на диск.
 13. Маховик, у вигляді однорідного диска, з'єднаний з мотором за допомогою привідного ремня. Натяг ремня, що йде без проковзування, сталий і дорівнює 14,7 Н. Радіус маховика дорівнює 0,2 м. Його маса 10 кг. Яке число обертів за хвилину буде робити маховик через 10 с після початку руху?
 14. Однорідний диск обертається навколо горизонтальної вісі, що проходить через його центр. Маса диска 2 кг. Його радіус 0,1 м. Закон обертання має вигляд: $\varphi(t) = 5 \text{ рад} + 6 \text{ рад/с}^2 \cdot t^2 + 1 \text{ рад/с}^3 \cdot t^3$. Визначити момент сил, що діють на диск, в момент часу 4 с.
 15. Однорідний диск обертається навколо вісі, яка проходить через центр диска і перпендикулярна площині диска. Радіус диска – 0,2 м. До обода диска прикладено дотичну силу 98,1 Н. Знайти масу диска, якщо відомо, що він обертається з кутовим прискоренням 100 рад/с^2 .
 16. Маховик обертається з кутовою швидкістю $31,4 \text{ рад/с}$. Момент інерції маховика дорівнює $63,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Під дією якого моменту сил гальмування маховик зупиниться через 20 с? Маховик вважати однорідним диском.
 17. Вал обертався із частотою 8 с^{-1} . Маса вала дорівнює 100 г. Радіус – $R = 5 \text{ см}$. До циліндричної поверхні вала притисли гальмівну колодку з силою 40 Н, під дією якої вал зупинився через 40 с. Визначити коефіцієнт тертя між колодкою та валом.
 18. За допомогою двигуна розкручено маховик і він рівномірно обертається навколо вісі. Момент інерції маховика дорівнює $0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Після вимкнення двигуна маховик виконує 120 обертів і зупиняється. Час від відключення двигуна до повної зупинки складає 30 с. Визначити момент сили, що гальмує маховик.
 19. Система складається з чотирьох точкових мас $m = 5 \text{ кг}$, розташованих у вершинах квадрата із стороною $a = 20 \text{ см}$. Визначити момент інерції системи, відносно вісі, що проходить через центр квадрата, якщо вісь лежить у площині квадрата і розташована паралельно двом його сторонам.
 20. Система складається з чотирьох точкових мас $m = 5 \text{ кг}$, розташованих у вершинах квадрата із стороною $a = 20 \text{ см}$. Визначити момент інерції системи, відносно вісі, що проходить через центр квадрата і перпендикулярно його площині.

1.3. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

1.3.1. Основні положення молекулярної фізики. Рівняння стану ідеального газу

Скорочена теорія

Ізопроееси:

Ізотермічний процес ($m = \text{const}$, $T = \text{const}$): це процес, який відбувається при незмінній масі і температурі. При цьому процесі добуток тиску на об'єм залишається незмінним

Закон Бойля-Маріотта - $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$,

де P_1, P_2 і V_1, V_2 – початкові і кінцеві значення тиску і об'єму газу.

Ізобарний процес ($m = \text{const}$, $P = \text{const}$): це процес, який відбувається при незмінній масі і тискові термодинамічної системи. Об'єм газу лінійно залежить від температури

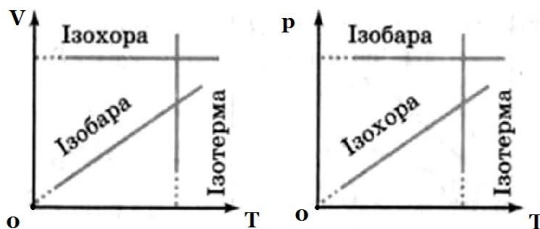
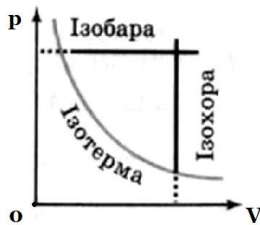
Закон Гей-Люссака – $V_1/T_1 = V_2/T_2$,

де T_1, T_2 – початкова і кінцева температури; V_1, V_2 – початковий і кінцевий об'єми газу.

Ізохорний процес ($m = \text{const}$, $V = \text{const}$): це процес, який відбувається при незмінній масі і об'ємові. Тиск газу прямо пропорційний температурі

Закон Шарля – $P_1/T_1 = P_2/T_2$,

де P_1, P_2 – відповідні температурам T_1 і T_2 значення тисків газу.



Графіки ізопроеесів

Рівняння стану ідеального газу.

Рівняння Клапейрона (об'єднаний газовий закон) -

$$P_1 \cdot V_1 / T_1 = P_2 \cdot V_2 / T_2,$$

Рівняння Менделєєва-Клапейрона –

$$P \cdot V = (m/\mu) \cdot R \cdot T,$$

де m – маса газу; μ – молярна маса; $R=8,31$ Дж/(моль К) – універсальна газова стала; $\gamma = m/\mu$ – кількість молів речовини у термодинамічній системі:

Закон Авогадро стверджує, що у рівних обсягах будь-яких газів, взятих при однакових температурах і тисках, міститься одна і та ж кількість молекул.

Згідно закону Авогадро, кількість молекул у одному молі речовини дорівнює $N_A \equiv 6,022 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

Об'єм одного моля будь-якого газу за нормальних умов є сталим і дорівнює $V_m = 2,24 \cdot 10^{-2}$ м³.

Нормальні умови: тиск $P_n = 1,01 \cdot 10^5$ Па, температура $T_0 = 273$ К.

Число молекул у термодинамічній системі –

$$N = (m/\mu) \cdot N_A,$$

де N_A – число Авогадро, m – маса газу, μ – молярна маса.

Густина газу (кількість речовини в одиниці об'єму):

$$\rho = m / V.$$

Стала Больцмана

$$k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}.$$

Рівняння стану для суміші ідеальних газів.

Закон Дальтона доводить, що «загальний тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі парціальних тисків компонентів суміші».

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_n}{\mu_n} \right) \cdot \frac{RT}{V} = \frac{m_c}{\mu_c} \cdot \frac{RT}{V}$$

де $P_1, P_2, \dots, P_n$ – парціальні тиски компонентів суміші газів.

Парціальний тиск – це тиск кожного газу, який буде встановлений в судині, при умові, що в ній буде знаходитися тільки цей газ, а інші відсутні.

Молярну масу суміші газів можна розрахувати за формулою:

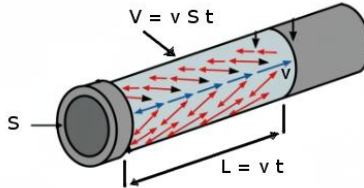
$$\mu_c = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_n}{\mu_n}}.$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Розрахувати яка швидкість течії газу по трубі газогону, якщо за 5 хв через поперечний переріз площею 6 см^2 протікає $2,5 \text{ кг CO}_2$. Тиском газу складає $4,9 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Його температура дорівнює 290 К .

Розв'язок

$$\begin{aligned} p &= 4,9 \cdot 10^5 \text{ Па} \\ T &= 290 \text{ К} \\ t &= 5 \text{ хв} = 300 \text{ с} \\ S &= 6 \text{ см}^2 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \\ m &= 2,5 \text{ кг} \\ \mu(\text{CO}_2) &= 0,044 \text{ кг/моль} \\ R &= 8,314 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} \\ v &= ? \end{aligned}$$



За деякий час t через поперечний переріз S протікає об'єм газу, який дорівнює добутку швидкості течії v , площини S і часу t :

$$V = v \cdot S \cdot t. \quad (1)$$

Якщо густина газу ρ , то маса газу, що протекла, буде дорівнювати:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot v \cdot S \cdot t. \quad (2)$$

Густину газу знайдемо за рівнянням Менделєєва-Клапейрона:

$$P \cdot V = (m / \mu) \cdot R \cdot T.$$

Звідки, використовуючи визначення густини. Отримаємо:

$$\rho = m / V = (P \cdot \mu) / (R \cdot T).$$

Підставимо її у формулу (2):

$$m = P \cdot \mu / (R \cdot T) \cdot v \cdot S \cdot t.$$

Звідки знайдемо швидкість течії газу:

$$v = (m \cdot R \cdot T) / (P \cdot \mu \cdot S \cdot t).$$

Знайдемо розмірність v за останньою формулою:

$$[v] = (\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}) / (\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{Па} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}) = \text{Дж} / (\text{Па} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}) = \text{м/с}.$$

Числове значення –

$$v = (2,5 \cdot 8,314 \cdot 290) / (4,9 \cdot 10^5 \cdot 0,044 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot 300) = 1,55 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v = 1,55 \text{ м/с}$.

Задача 2. Скільки молекул кисню у судині об'ємом 100 см^3 , якщо температура газу складає $t=27^\circ\text{C}$, а тиск $9,81 \cdot 10^3 \text{ Па}$?

Розв'язок

$$\begin{aligned} N_A &= 6,02 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль} \\ V &= 10^{-4} \text{ м}^3 \\ P &= 9,81 \cdot 10^3 \text{ Па} \\ \mu &= 0,032 \text{ кг/моль} \\ t &= 27^\circ\text{C} \text{ чи } T = (27 + 273) \text{ К} = 300 \text{ К} \\ N &= ? \end{aligned}$$

Використаємо і запишемо **рівняння Менделєєва-Клапейрона**

$$P \cdot V = m/\mu \cdot R \cdot T. \quad (1)$$

Перетворимо рівняння до вигляду

$$P \cdot V = \gamma \cdot R \cdot T, \quad (2)$$

де γ – кількість молей газу, що міститься в об'ємі V .

Універсальну газову сталу представимо у вигляді добутку сталої Больцмана k на число Авогадро N_A :

$$R = k \cdot N_A.$$

Загальне число молекул в об'ємі V

$$N = \gamma \cdot N_A.$$

Тоді рівняння (1) приймає вигляд:

$$P \cdot V = N \cdot k \cdot T,$$

Звідки:

$$N = (P \cdot V) / (k \cdot T). \quad (3)$$

Це рівняння запишемо у такому вигляді:

$$N = N_A (P \cdot V) / (R \cdot T). \quad (4)$$

де зроблена зворотня заміна $k = R / N_A$.

Знайдемо розмірність N за розрахунковою формулою

$$[N] = 1/\text{моль} \cdot (\text{Па} \cdot \text{м}^3) / ((\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})) \cdot \text{К}) = (\text{Па} \cdot \text{м}^3) / (\text{Дж}) = [1]$$

$[N]$ – безрозмірне, як і повинно бути.

Числове значення N :

$$N = (6,02 \cdot 10^{23} \cdot 9,81 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4}) / (8,314 \cdot 300) = 2,37 \cdot 10^{20}.$$

Відповідь: $N = 2,37 \cdot 10^{20}$.

Задача 3. Тиск повітря у закупореній бутилі дорівнює 100 кПа і температура 27°C . Бутиль нагріли так, що пробка вилетіла при тиску 130 кПа. До якої температури нагріли бутиль?

Розв'язок

$$P_1 = 100 \text{ кПа} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$P_2 = 130 \text{ кПа} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$$

$$t_1 = 27^\circ\text{C} \text{ чи}$$

$$T_1 = (27^\circ\text{C} + 273^\circ) = 300\text{K}$$

$$t_2 = ?$$

Процес відбувається при незмінному об'ємі повітря у бутилі.

Тобто **процес ізохорний**.

Використаємо і запишемо **Закон Шарля** для ізохорного процесу:

$$P_1/T_1 = P_2/T_2. \quad (1)$$

Звідси знайдемо питому температуру

$$T_2 = P_2 \cdot T_1 / P_1. \quad (2)$$

Знайдемо числове значення T_2 :

$$T_2 = (1,3 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 300\text{K}) / (1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}) = 390\text{K}.$$

Перерахуємо температуру у градуси Цельсія:

$$t_2 = (T_2 - 273^0) = (390\text{K} - 273^0) = 117^0\text{C}.$$

Відповідь: $t_2 = 117^0\text{C}$.

Задача 4. У скільки разів густина повітря у приміщенні взимку при температурі 7^0C більша, ніж густина повітря влітку при температурі 37^0C ? Тиск у приміщенні рахувати сталим.

Розв'язок

$t_1 = 7^0\text{C}$ чи $T_1 = (7^0 + 273^0)\text{K} = 280\text{K}$ $T_2 = 37^0\text{C}$ чи $T_2 = (37^0 + 273^0)\text{K} = 310\text{K}$ $\frac{\rho_1}{\rho_2} = ?$

Використаємо і запишемо рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$P \cdot V = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T. \quad (1)$$

Поділимо праву і ліву частини рівняння на значення об'єму V :

$$P = R \cdot T \cdot m / (V \mu). \quad (2)$$

Замінімо відношення маси до об'єму на густину газу ρ .

Перетворимо рівняння до вигляду:

$$P = R \cdot T \cdot \frac{\rho}{\mu}. \quad (3)$$

Запишемо рівняння для двох станів системи, враховуючи, що тиск сталий:

$$P = R \cdot T_1 \cdot \frac{\rho_1}{\mu}, \quad (4)$$

$$P = R \cdot T_2 \cdot \frac{\rho_2}{\mu}. \quad (5)$$

Звідки:

$$R \cdot T_1 \cdot \frac{\rho_1}{\mu} = R \cdot T_2 \cdot \frac{\rho_2}{\mu}. \quad (6)$$

Остаточно отримуємо:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (7)$$

Знайдемо числове значення $\frac{\rho_1}{\rho_2}$:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{310\text{K}}{280\text{K}} = 1,1 \text{ рази.}$$

Відповідь: $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1,1$ рази.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Яке число молекул буде містити 10 г кисню? Вважати $\mu_{\text{O}_2} = 32$ г/моль – молярна маса кисню.
2. Використовуючи закон Авогадро, знайти число атомів у 1 г водню. ($\mu_{\text{H}_2} = 2$ г/моль).
3. Знайти масу однієї молекули води, якщо відома молярна маса води $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 18$ г/моль.
4. Скільки молекул міститься в 1 м³ води? Температура води 4°C, її молярна маса $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 18$ г/моль.
5. Скільки молекул молекул міститься в 10 г кисню? Молярна маса кисню – $\mu_{\text{O}_2} = 32$ г/моль.
6. Молярна маса сірководню складає $\mu_{\text{SH}_2} = 34$ г/моль. Яка маса 30 молекул сірководню?
7. Молярна маса ртуті складає $\mu_{\text{Hg}} = 200,59$ г/моль. Скільки атомів у 1 г ртуті?
8. Молярна маса азоту складає $\mu_{\text{N}_2} = 28$ г/моль. Скільки молекул в 0,5 кг азоту?
9. Молярна маса сірчаної кислоти складає $\mu_{\text{H}_2\text{SO}_4} = 98$ г/моль. Знайти масу 106 молекул сірчаної кислоти.
10. Молярна маса кухонної солі складає $\mu_{\text{NaCl}} = 58$ г/моль. Скільки молекул в 1 г кухонної солі?
11. Молярна маса гелію складає $\mu_{\text{He}} = 4$ г/моль. Тиск гелію дорівнює 1 атм = $1,01 \cdot 10^5$ Па. У судині знаходиться $2,408 \cdot 10^{28}$ атомів гелію. Яка маса газу у судині?
12. Яке число молекул знаходиться у кімнаті об'ємом 80 м³ при температурі 17°C та тиску 100 кПа? (молярна маса повітря $\mu_{\text{повітря}} = 29$ г/моль).
13. Процес відбувається при сталому об'ємі. Температура газу, за час процесу, знизилася на 5 К. При цьому тиск зменшився на 1/200 частку від початкового тиску. Яка початкова температура газу?
14. Воднем наповнили балон. Маса водню складає 10 кг. Його густина – 0,3 кг/м³. Тиск водню в балоні 0,1 МПа. Молярна маса водню – $\mu = 2$ г/моль. Яка температура водню в балоні?
15. Деякий газ має густину 6,1 кг/м³. Температура газу дорівнює 320 К. Його тиск 4 атм. Визначити молярну масу цього газу. При розрахунках вважати значення 1 атм як 760 мм.р.с, чи 1,01 Бар = 0,101 МПа.
16. Тиск повітря у закупореній бутилі дорівнює 100 кПа і температура 27°C. Бутиль нагріли так, що пробка вилетіла при тиску 150 кПа. До якої температури нагріли бутиль?

17. На скільки густина повітря у приміщені взимку при температурі -3°C більша, ніж густина повітря влітку при температурі 37°C ? Тиск рахувати сталим. ($\mu_{\text{повітря}} = 29 \text{ г/моль}$).
18. Процес відбувається при сталому об'ємі. При нагріванні деякої маси газу на 1 К тиск газу збільшився від початкового тиску на $1/350$ частку. Знайти початкову температуру газу.
19. При перевірці автомобіля, повітря в його шинах складає 3 атм . Температура повітря навколишнього середовища дорівнює -23°C . Знайти тиск в шинах, який буде при температурі 27°C .
20. При зниженні температури від 393 К до 363 К тиск газу у судині змінився на $0,5 \text{ атм}$. Об'єм вважати сталим. Який був початковий тиск газу?
21. Газ знаходиться при деякій температурі T_0 . При сталому тиску його нагріли і об'єм подвоївся. До якої температури було нагріто газ?
22. При нагріванні газу при сталому об'ємі тиск його потроївся. Газ початково знаходився при температурі 290 К . Визначити, на скільки зросла температура газу.
23. Азот має масу 2 г , і займає об'єм 820 см^3 . Тиск дорівнює $0,2 \text{ МПа}$? Яку температуру має азот? Молярна маса азоту $\mu_{\text{N}_2} = 28 \text{ г/моль}$.
24. Кисень масою 4 кг знаходиться у судині об'ємом 2 м^3 . Температура газу 473 К . Визначити тиск кисню. Молярна маса кисню $\mu_{\text{O}_2} = 32 \text{ г/моль}$.
25. У балоні знаходиться водень. Його маса 10 кг , а густина $0,3 \text{ кг/м}^3$. Тиск газу в балоні $0,1 \text{ МПа}$. Яка температура водню? Молярна маса водню $\mu_{\text{H}_2} = 2 \text{ г/моль}$.
26. Азот знаходиться при тиску 2 атм і температурі 330 К . Молярна маса азоту $\mu_{\text{N}_2} = 28 \text{ г/моль}$. Знайти густину азоту.
27. Об'єм приміщення, у якому міститься повітря, дорівнює 1200 м^3 . Знайти кількість молів повітря у приміщені. Вважати, що повітря знаходиться при нормальних умовах ($T_{\text{норм}} = 273 \text{ К}$, $P_{\text{норм}} = 1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$).
28. У балоні ємністю 20 л міститься 500 г вуглекислого газу. Тиск газу складає 13 атм . Визначити температуру газу. Вважати $1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$.
29. Густина деякого газу дорівнює $6,1 \text{ кг/м}^3$. Температура газу 323 К . Його тиск дорівнює 4 атм . Визначити молярну масу цього газу. Вважати $1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$.
30. Повітря має температуру 500 К . Його густина його дорівнює $0,9 \text{ кг/м}^3$. Який тиск повітря? Вважати, що молярна маса повітря дорівнює $\mu_{\text{повітря}} = 29 \text{ г/моль}$.

1.3.2. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії. Розподіл Максвелла. Барометрична формула

Скорочена теорія

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії має вид

$$P = \frac{2}{3} n \bar{E}_{\text{пост}} = \frac{2}{3} n \frac{m v_{\text{ср.кв}}^2}{2} = \frac{1}{3} n m v_{\text{ср.кв}}^2,$$

де n – концентрація молекул в одиниці об'єму;

$\bar{E}_{\text{пост}}$ – середньоквадратична кінетична енергія поступального руху молекул;

m – маса молекули;

$v_{\text{ср.кв}}$ – середньоквадратична швидкість руху молекул.

Середня енергія поступального руху газу пов'язана з абсолютною температурою співвідношенням:

$$\bar{E}_{\text{пост}} = \frac{3}{2} kT,$$

тут: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль – число Авогадро,

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \text{ – стала Больцмана.}$$

Якщо у виразі для тиску врахувати середню енергію поступального руху молекул, як запис через абсолютну температуру, отримаємо запис **Основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії** у більш простому і корисному вигляді:

$$P = \frac{2}{3} n \bar{E}_{\text{пост}} = \frac{2}{3} n \frac{3}{2} kT,$$

$$\boxed{P = nkT}.$$

Кількість молів речовини у термодинамічній системі: $\gamma = m/\mu$

Число молекул в термодинамічній системі:

$$N = \gamma \cdot N_A = (m/\mu) \cdot N_A$$

де N_A – число Авогадро, m – маса газу, μ – молярна маса.

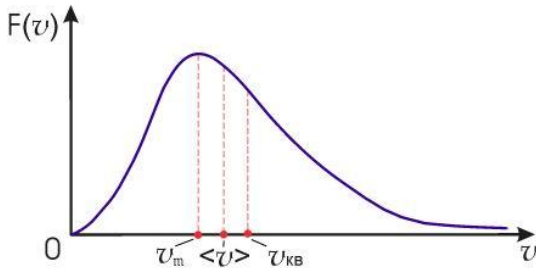
Концентрація молекул – це число молекул в одиниці об'єму:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\gamma \cdot N_A}{V} = \frac{m \cdot N_A}{\mu \cdot V}$$

Густина газу – це кількість речовини в одиниці об'єму:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\gamma \cdot \mu}{V} = \frac{N \cdot \mu}{V \cdot N_A} = \frac{\mu}{N_A} \cdot n$$

Максвеллівська функція розподілу молекул по швидкостям має вид



Використовуючи розподіл Максвелла, можна визначити наступні величини швидкостей:

Найбільш ймовірну швидкість V_m (мають більшість молекул в системі):

$$V_{н.й} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

Середньо арифметична швидкість $\langle V \rangle$:

$$V_{ср.ар.} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$

Середньо квадратична швидкість $V_{кв}$:

$$V_{ср.кв.} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

Барометрична формула має вигляд:

$$P = P_0 \cdot e^{-\frac{\mu gh}{RT}} = P_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}} = P_0 \cdot e^{-\frac{E_{п}}{kT}},$$

де m – маса однієї молекули, $E_{п}$ – потенціальна енергія молекули в гравітаційному полі Землі.

Враховуючи основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії для тиску:

$$P = nkT, \quad P_0 = n_0 kT,$$

барометричну формулу можна записати у вигляді так званого

Больцманівського розподілу молекул за потенційними енергіями молекул:

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{\mu gh}{RT}} = n_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}} = n_0 \cdot e^{-\frac{E_{п}}{kT}}.$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1 Розрахувати середньокінетичну енергію поступального руху молекул ідеального газу при температурі 27°C .

Розв'язок

$$T = 27^{\circ}\text{C} = 300 \text{ K}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

$$E - ?$$

За визначенням, середньокінетична енергія поступального руху молекул дорівнює:

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT.$$

Знайдемо числове значення:

$$E = 3/2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot 300 \text{ K} = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

Відповідь: середньокінетична енергія молекул $E = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$.

Задача 2 У скільки разів зміниться тиск газу при зменшенні його об'єму втричі? Вважати, що середньоквадратична швидкість руху молекул залишилася незмінною.

Розв'язок

$$V_1 = 3V_2$$

$$v_1 = v_2 = v$$

$$\frac{P_2}{P_1} - ?$$

Використаємо основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії:

$$P = \frac{2}{3} n E_{\text{пост}} = \frac{2}{3} n \frac{m v_{\text{ср.кв}}^2}{2} = \frac{1}{3} n m v_{\text{ср.кв}}^2.$$

Тут концентрація $n = \frac{N}{V}$ – кількість молекул в одиниці об'єму; $v_{\text{ср.кв}}$ – у нашому випадку це v_1 чи v_2 ; m – маса однієї молекули (далі будемо її визначати як m_0). Тоді, з використанням зазначених величин та умови $v_1 = v_2 = v$, отримаємо:

$$P = \frac{m_0 n v^2}{3} \Rightarrow n = \frac{N}{V} \Rightarrow P = \frac{m_0 N v^2}{3V}$$

$$P = \frac{m_0 N v^2}{3V} \Rightarrow M = m_0 N \Rightarrow P = \frac{M v^2}{3V}.$$

де M – маса всієї термодинамічної системи.

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{M v_2^2}{3V_2}}{\frac{M v_1^2}{3V_1}} = \frac{M v_2^2}{3V_2} \cdot \frac{3(3 \cdot V_2)}{M v_1^2} = 3.$$

Дану задачу можна також вирішити іншим способом, використавши умови задачі: «Середньоквадратична швидкість руху молекул залишилася незмінною».

На підставі основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії:

Середня енергія поступального руху пов'язана з абсолютною температурою співвідношенням:

$$\bar{E}_{\text{пост}} = \frac{3}{2} kT \gg.$$

Тобто, при незмінній швидкості руху молекул повинна не змінюватись і температура. Процес, який протікає при незмінній температурі, є ізотермічним процесом. При ізотермічному процесі ми можемо використати закон Бойля-Маріотта:

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2.$$

Звідки більш простіше знаходиться відношення тисків:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{3V_2}{V_2} = 3.$$

Відповідь: $\frac{P_2}{P_1} = 3$, тиск збільшиться в 3 рази.

Задача 3 Середньоквадратична швидкість молекул деякого газу дорівнює $500 \frac{м}{с}$. Його густина дорівнює $1,35 \frac{кг}{м^3}$. Який тиск цього газу?

Розв'язок

$v_{\text{ср.кв}} = v = 500 \frac{м}{с}$ $\rho = 1,35 \frac{кг}{м^3}$ $P = ?$

Як і у попередній задачі, використаємо основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії:

$$P = \frac{2}{3} n E_{\text{пост}} = \frac{2}{3} n \frac{m v_{\text{ср.кв}}^2}{2} = \frac{1}{3} n m v_{\text{ср.кв}}^2$$

Тут концентрація $n = \frac{N}{V}$ – кількість молекул в одиниці об'єму; $v_{\text{ср.кв}}$ – у нашому випадку це v ; m – маса однієї молекули (далі будемо її визначати як m_0).

Згідно визначення, густина – маса одиниці об'єму.

Тому, для густини і концентрації маємо співвідношення:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad n = \frac{N}{V}.$$

Використаємо ці співвідношення у основному рівнянні молекулярно-кінетичної теорії:

$$P = \frac{m_0 n v^2}{3} \Rightarrow n = \frac{N}{V}; \quad M = m_0 N \Rightarrow P = \frac{M v^2}{3V} \Rightarrow \rho = \frac{M}{V} \Rightarrow P = \frac{\rho v^2}{3}.$$

Таким чином, ми отримали вираз для тиску через густину і швидкість руху молекул:

$$P = \frac{\rho v^2}{3}.$$

$$\text{Розрахуємо тиск: } P = \frac{1.35 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot (500 \frac{\text{м}}{\text{с}})^2}{3} = 112500 \text{ Па}.$$

Відповідь: $P = 0,11 \text{ МПа}$.

Задача 4. Газ, маючи масу 6 кг, займає об'єм 5 м^3 . Тиск газу складає 200 кПа. Чому дорівнює середньоквадратична швидкість руху молекул цього газу?

Розв'язок

$m = 6 \text{ кг}$ $V = 5 \text{ м}^3$ $P = 200 \text{ кПа}$ $v = ?$

Використаємо основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії:

$$P = \frac{2}{3} n E_{\text{пост}} = \frac{2}{3} n \frac{m v_{\text{ср.кв}}^2}{2} = \frac{1}{3} n m v_{\text{ср.кв}}^2$$

Тут концентрація $n = \frac{N}{V}$ – кількість молекул в одиниці об'єму; $v_{\text{ср.кв}}$ – у нашому випадку це v ; m – маса однієї молекули (далі будемо її визначати як m_0).

$$P = \frac{m_0 n v^2}{3} \Rightarrow n = \frac{N}{V} \Rightarrow P = \frac{m_0 N v^2}{3V};$$

$$P = \frac{m_0 N v^2}{3V} \Rightarrow M = m_0 N \Rightarrow P = \frac{M v^2}{3V}.$$

де M – маса всієї термодинамічної системи.

Звідки:

$$v = \sqrt{\frac{3VP}{M}}.$$

Розрахуємо значення середньо квадратичної швидкості поступального руху:

$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^5}{6}} = 707,1 \frac{м}{с}.$$

Відповідь: $v = 707,1 \frac{м}{с}$.

Задача 5. Концентрація молекул одноатомного газу при тиску 20 кПа складає $3 \cdot 10^{25} м^{-3}$. Знайти середньокінетичну енергію молекул цього одноатомного газу.

Розв'язок

$P = 2 \cdot 10^4 \text{ Па}$	
$n = 3 \cdot 10^{25} м^{-3}$	
$E_k - ?$	

Використаємо основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії у вигляді:

$$P = \frac{2}{3} n E_k.$$

Звідки отримаємо значення середньоквадратичної енергії поступального руху молекули:

$$E_k = \frac{3P}{2n}.$$

Розрахуємо її значення:

$$E_k = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ Па}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{25} м^{-3}} = 1 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

Відповідь: $E_k = 1 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти число молекул газу у судині об'ємом 300 см^3 при температурі 300 K і тиску 380 мм рт.ст.
2. У колбі об'ємом 4 дм^3 міститься 1 г водню. Яка кількість молекул знаходиться в 1 см^3 ?
3. 25 г водню міститься у скляному балоні об'ємом 5 л . Знайти концентрацію молекул водню.
4. Визначити масу азоту в ємності об'ємом 3 л , якщо концентрація молекул азоту у судині дорівнює $24 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$.
5. Деякий газ знаходиться при температурі 10°C і тиску $2 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Густина дорівнює $0,34 \text{ кг/м}^3$. Знайти масу одного кіломоля цього газу.
6. У вакуумних сучасних приладах можна досягнути розрідження газу до тиску $2,07 \cdot 10^{-9} \text{ Па}$. Знайти концентрацію молекул такого розрідженого газу при 300 K .
7. Середньокінетична енергія поступального руху молекул одноатомного газу складає $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Яка температура цього газу?
8. , Середньоквадратична швидкість молекул азоту дорівнює 500 м/с . Його густина складає $1,35 \text{ кг/м}^3$. Визначити тиск азоту.
9. Розрахувати середньокінетичну енергію молекул ідеального газу при температурі -23°C .
10. Середньоквадратична швидкість молекул азоту має значення 500 м/с . Густина азоту дорівнює $0,06 \text{ кг/м}^3$. Знайти тиск азоту на стінки судини.
11. Який тиск газу у судині, якщо в 1 см^3 знаходиться 10^{16} молекул при температурі 0°C ?
12. У балоні об'ємом 2 дм^3 знаходиться $0,01 \text{ кг}$ кисню під сталим тиском $9,06 \cdot 10^4 \text{ Па}$. Знайти: 1) середньоквадратичну швидкість поступального руху молекул кисню, 2) масу однієї молекули кисню.
13. У балоні об'ємом 4 дм^3 знаходиться $0,01 \text{ кг}$ кисню під сталим тиском $9,06 \cdot 10^4 \text{ Па}$. Знайти кількість молекул у балоні.
14. У балоні об'ємом 4 дм^3 знаходиться $0,05 \text{ кг}$ кисню під сталим тиском $9,06 \cdot 10^4 \text{ Па}$. Знайти середньоквадратичну швидкість поступального руху молекул кисню.
15. Газ займає об'єм 2 л при тиску 746 мм рт.ст. Визначити сумарну енергію поступального руху молекул газу.
16. Середньокінетична енергія поступального руху молекул гелію дорівнює 8 Дж . Маса гелію, що міститься у судині, 2 г . Яка температура гелію у судині?

17. Тиск водню у судині дорівнює $5 \cdot 10^4$ Па. Середньоквадратична швидкість поступального руху молекул дорівнює 2400 м/сек. Скільки молекул знаходиться в 1 см^3 водню?
18. Колба ємністю 0,5 л заповнена газом при нормальних умовах. Скільки молекул газу знаходиться у колбі?
19. Знайти кількість молекул водню в 1 см^3 . Тиск водню дорівнює $5 \cdot 10^4$ Па. Середньоквадратична швидкість поступального руху його молекул за цих умов дорівнює 2400 м/с.
20. При якій температурі молекули гелію мають таку саму середньоквадратичну швидкість поступального руху як й молекули гідрогену при 27°C ?
21. Середньоквадратична швидкість поступального руху молекул деякого газу 230 м/с. У судині міститься 10 г газу під тиском $1 \cdot 10^5$ Па. Знайти об'єм судини.
22. У сосуді знаходиться газ при тиску 700 мм рт.ст. і температурі 7°C . Скільки молекул в 1 см^3 газу?
23. Середньоквадратична швидкість поступального руху молекул деякого газу 250 м/с. У судині міститься 10 г газу під тиском $1 \cdot 10^5$ Па. Яке число молекул міститься у судині?
24. Яка кількість молів речовини міститься в газі, якщо при температурі 240К і під тиском 200 кПа його об'єм дорівнює 40 л?
25. Середньоквадратична швидкість поступального руху молекул деякого газу дорівнює $750 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а його густина – $2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Який тиск цього газу?
26. При якій температурі азоту середньоквадратична швидкість поступального руху молекул більша їх найбільш ймовірної швидкості на 75 м/с?
27. Газ, маючи масу 6 кг, займає об'єм 10 м^3 . Тиск газу 800 кПа. Чому дорівнює середньоквадратична швидкість поступального руху молекул газу?
28. Визначити тиск газу на стінки судини, якщо його густина дорівнює $0,06 \text{ кг/м}^3$, а середньоквадратична швидкість поступального руху молекул має значення 500 м/с.
29. Одноатомний газ знаходиться при тиску 60 кПа. Концентрація молекул газу при цьому тиску складає $6 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Яка середньокінетична енергія поступального руху молекули цього газу?
30. У деякому газі середньоквадратична швидкість поступального руху молекул за нормальних умов (100,0 кПа і температура 0°C (273,15К)) дорівнює 400 м/с. Яка кількість молекул знаходиться в 1 г цього газу?

1.4. ТЕРМОДИНАМІКА

1.4.1. Термодинаміка. Кінетична теорія теплоти

Скорочена теорія

Перше начало термодинаміки:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A$$

«Тепло ΔQ , передане термодинамічній системі, розходується на зміну її внутрішньої енергії ΔU і на виконання системою роботи ΔA ».

Числом ступіней вільності молекули називається мінімальна кількість незалежних величин (координат), якими можна однозначно задати положення молекули у просторі.

$$i = n_{\text{пост.}} + n_{\text{об.}} + 2n_{\text{кол.}}$$

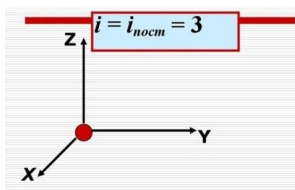
Зміна цих координат і надає можливість визначити переміщення молекули у просторі. За видом руху визначають поступальні $n_{\text{пост.}}$, обертальні $n_{\text{оберт.}}$ і коливальні $n_{\text{кол.}}$ ступіні вільності.

Коливальні рухи молекул відбуваються при дуже високих температурах, близьких до температури плазми. Тому, на практиці, як правило, рахують тільки поступальні і обертальні ступіні вільності молекул.

Для одноатомної молекули існує тільки поступальні ступіні вільності. Бо така молекула не може здійснювати коливальний рух, а обертальний рух не змінює її положення у просторі.

Тобто, для одноатомної молекули загальна кількість ступінів вільності визначається тільки поступальними ступіннями вільності. Це три координати x , y , z у декартовій системі координат.

На підставі цього, можемо записати, загальна кількість сутіней вільності:

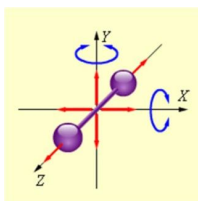
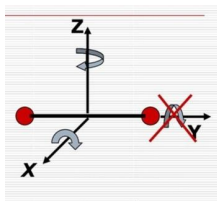


$$i = n_{\text{пост}} = 3$$

Для двоатомної молекули з жорстким зв'язком вже можливі, окрім поступального руху вздовж трьох координат, ще й обертальний рух. Але кількість незалежних координат (кутів), які описують цей рух, тільки два. Бо обертання навколо вісі, яка проходить через вісь такої молекули. Не змінює положення молекули у просторі.

Тому, для двоатомної молекули, з жорстким зв'язком загальна кількість

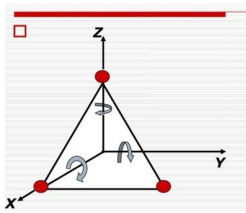
ступіней вільності буде дорівнювати п'яти. Це – 3 поступальні і 2 обертальні ступіні вільності:



$$i = n_{\text{пост}} + n_{\text{оберт}} = 3 + 2 = 5$$

Для багатоатомної молекули з жорсткими зв'язками доступні всі види поступального руху (вздовж трьох координат) і всі види обертального руху (теж навколо трьох вісей координат).

Тому, для багатоатомної молекули, з жорсткими зв'язками загальна кількість ступіней вільності буде дорівнювати шести. Це – 3 поступальні і 3 обертальні ступіні вільності:



$$i = n_{\text{пост}} + n_{\text{оберт}} = 3 + 3 = 6$$

Внутрішня енергія – у термодинаміці, визначається як сума кінетичної енергії хаотичного руху атомів чи молекул, включаючи такі рухи, як обертальний і коливальний рухи, і потенційної енергії взаємодії часток, з яких складається термодинамічна система, за винятком кінетичної і потенційної енергії самої системи як одного цілого.

Теплова енергія по ступіням вільності розподіляється рівномірно, тобто на кожен поступальний і обертальний ступінь припадає енергія $\frac{1}{2}kT$.

Як було зазначено вище, при великих температурах термодинамічної системи виникає коливальний рух атомів в молекулі – на кожен коливальний ступінь вільності припадає подвійна енергія, яка дорівнює kT , так як при такому русі є і кінетична енергія коливання і потенційна енергія взаємодії між атомами молекули ($\frac{1}{2}kT$ на кінетичну енергію коливань атомів в молекулі, $\frac{1}{2}kT$ на потенціальну енергію їх взаємодії).

Теплова енергія молекули.

Теплова енергія включає всі види молекулярного і внутрішньомолекулярного хаотичного руху, будучи енергією хаотичного руху атомів і молекул речовини, з яких складається термодинамічна система. Тобто залежить напряму

від загального числа ступінів вільності молекули, які описують її поступальний, обертальний і коливальний рухи.

Тому вираз для теплової енергії молекули буде мати вигляд:

$$\bar{E} = \frac{i}{2} kT$$

де i – число ступінів вільності молекули (яке може різнитись, в залежності від складності побудови самих молекул, які входять в систему),

k – стала Больцмана, T – абсолютна температура за шкалою Кельвіна.

Внутрішня енергія ідеального газу.

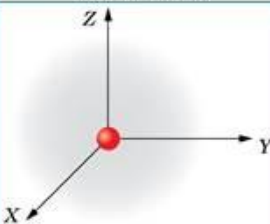
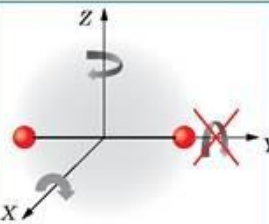
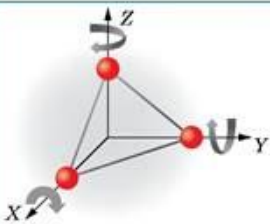
Внутрішня енергія ідеального газу складається тільки із теплової енергії молекул, які входять в цю термодинамічну систему.

Потенційна енергія взаємодій молекул ідеального газу дорівнює нулю, так як за умови ідеального газу, молекули не взаємодіють між собою.

Ми можемо розрахувати внутрішню енергію ідеального газу, помноживши число молекул у термодинамічній системі на теплову енергію однієї молекули:

$$U = N \cdot \bar{E} = \frac{m}{\mu} N_A \frac{i}{2} kT = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT$$

де: N_A – число Авогадро, i – число ступінів вільності молекули, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура, m – маса газу, μ – молярна маса, R – універсальна газова стала.

Одноатомний газ	Двохатомний газ	Багатоатомний газ (три і більше атомів)
Молекули рухаються тільки поступально	Молекули рухаються поступально й обертаються	
 Одноатомна молекула має 3 ступені свободи поступального руху	 Двохатомна молекула має 5 ступенів свободи (3 — поступального і 2 — обертального рухів)	 Багатоатомна молекула має 6 ступенів свободи (3 — поступального і 3 — обертального), крім CO₂, який має 5 ступенів свободи
Внутрішня енергія визначається енергією поступального руху:	Внутрішня енергія визначається сумою енергій поступального й обертального рухів:	Внутрішня енергія у два рази більша, ніж одноатомного газу за тієї ж температури:
$U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT$	$U = \frac{5}{2} \frac{m}{M} RT$	$U = 3 \frac{m}{M} RT$

Зміна внутрішньої енергії термодинамічної системи:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

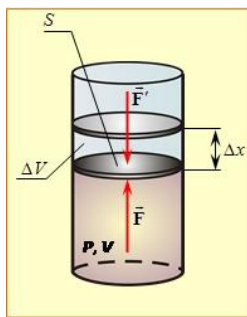
Але, враховуючи рівняння Менделєєва – Клапейрона, маємо можливість записати:

$$P \Delta V = \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Тоді вираз для зміни внутрішньої енергії можна записати у іншому вигляді:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i}{2} P \Delta V.$$

Робота газу, яка виконується при ізопроцесах:

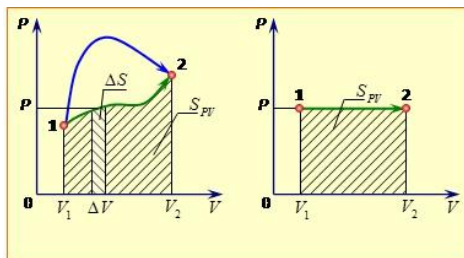


Елементарна робота: ,

$$= F \cdot dx = P \cdot S \cdot dx = P \cdot dV$$

загальна робота

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV.$$



У координатах P-V робота газу графічно дорівнює площі під кривою тиску (площа криволінійної трапеції). Вона обмежена графіком процесу, віссю об'єму V і лініями $V_1 = \text{const}$, $V_2 = \text{const}$

Ізохорний процес. Так як $V = \text{const}$, $dV = 0$.

Тому елементарна і загальна роботи при такому процесі дорівнюють нулю:

$$dA_V = 0 \text{ і } A_V = 0.$$

Ізобарний процес. $P = \text{const}$. Розрахунок загальної роботи:

$$A_P = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P \int_{V_1}^{V_2} dV = P V_2 - P V_1 = P \Delta V = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1)$$

Ізотермічний процес. $T = \text{const}$. Розрахунок загальної роботи:

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} dV = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Два кіломоля вуглекислого газу нагріваються при сталому тиску на 50К. Знайти роботу, яку виконує газ при розширенні, зміну внутрішньої енергії і кількість теплоти, що передано системі.

Розв'язок

Кількість молів CO_2
 $\gamma = 2 \text{ кмоль} = 2 \cdot 10^3 \text{ моль}$
 $\Delta T = 50\text{К}$
 $p = \text{const}$

$A = ? \Delta U = ? Q = ?$

Роботу A розширення газу при ізобарному процесі можна розрахувати таким чином:

$$A = P \cdot \Delta V = m/\mu \cdot R \cdot \Delta T = \gamma R \Delta T = 2 \cdot 10^3 \cdot 8,31 \cdot 50 = 8,31 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Знайдемо розмірність роботи A за розрахунковою формулою

$$[A] = (\text{Па} \cdot \text{м}^3) = (\text{Н}/\text{м}^2 \cdot \text{м}^3) = (\text{Н} \cdot \text{м}) = [\text{Дж}].$$

Число ступінів вільності багатоатомної молекули дорівнює 6.

За визначенням, внутрішня енергія ідеального газу:

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT = \gamma \frac{i}{2} RT.$$

Тоді зміна внутрішньої енергії багатоатомного газу буде:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \Delta T = \gamma \frac{i}{2} R \Delta T = \frac{i}{2} A = \frac{6}{2} 8,31 \cdot 10^5 = 2,493 \cdot 10^6 \text{ Дж},$$

де γ – кількість молів, i – число ступінів свободи,

R – універсальна газова стала, ΔT – зміна температури.

Знайдемо розмірність внутрішньої енергії за розрахунковою формулою:

$$[U] = (\text{моль} \cdot \text{Дж}) / (\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К} = [\text{Дж}].$$

Кількість теплоти Q , що передано ідеальному газу, згідно до першого начала термодинаміки, можна розрахувати:

$$Q = \Delta U + A = 2,493 \cdot 10^6 \text{ Дж} + 8,31 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 3,324 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Відповідь: $A = 8,31 \cdot 10^5 \text{ Дж}$; $\Delta U = 2,493 \cdot 10^6 \text{ Дж}$; $Q = 3,324 \cdot 10^6 \text{ Дж}$.

Задача 2. Двум молям одноатомного газу надано певну теплоту. При цьому газ виконав роботу 600 Дж. Кількість теплоти, що передано газу, дорівнює 1,2 кДж. Знайти зміну температури газу при розширенні?

Розв'язок

$$\begin{aligned}\gamma &= 2 \text{ моль} \\ Q &= 1,2 \text{ кДж} \\ A &= 600 \text{ Дж}\end{aligned}$$

$$\Delta T = ?$$

Використаємо перше начало термодинаміки:

$$Q = \Delta U + A.$$

Число ступінів свободи одноатомної молекули дорівнює 3.

Тоді, зміна внутрішньої енергії одноатомного газу буде дорівнювати:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{3}{2} \cdot R \Delta T.$$

Кількість речовини визначимо як $\gamma = m/\mu$. Звідки для зміни внутрішньої енергії можна записати:

$$\Delta U = \gamma \cdot \frac{3}{2} \cdot R \Delta T.$$

Тоді, рівняння першого начала термодинаміки матиме вигляд:

$$Q = (\gamma \cdot \frac{3}{2} \cdot R \Delta T) + A.$$

Звідки

$$\Delta T = (Q - A) \cdot \frac{2}{3} \cdot \nu R.$$

Перевіримо розмірність отриманої величини:

$$[\Delta T] = \text{Дж} \cdot \text{моль} \cdot \text{К} / (\text{моль} \cdot \text{Дж}) = \text{К}.$$

Знайдемо числове значення зміни температури:

$$\Delta T = (1200 - 600) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 8,31 = 24 \text{ К}.$$

Відповідь: Температура збільшилась на 24 К.

Задача 3. 1 моль газу ізобарно нагріли на 1 К. Яку роботу він здійснить?

Розв'язок

$$\begin{aligned}\gamma &= 1 \text{ моль} \\ \Delta T &= 1 \text{ К} \\ A &= ?\end{aligned}$$

Робота газу, при ізобарному нагріванні, визначається виразом:

$$A = P \Delta V = P V_2 - P V_1.$$

За рівнянням Менделєєва – Клапейрона, можна записати добуток тиску на об'єм:

$$P \cdot V = \frac{m}{\mu} RT = \gamma \cdot R \cdot T.$$

Тоді, використовуючи це рівняння, можемо записати вираз для роботи ідеального газу при ізобарному процесі у такому вигляді:

$$A = PV_2 - PV_1 = \gamma R \cdot T_2 - \gamma R \cdot T_1 = \gamma R(T_2 - T_1) = \gamma R \Delta T.$$

Оскільки, за умовою задачі, кількість молів речовини дорівнює одиниці ($\nu = 1$ моль) і зміна температури складає $\Delta T = 1\text{К}$, то чисельно отримаємо:

$$A = 1 \text{ моль} \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль К}} \cdot 1\text{К} = 8,31 \text{ Дж}.$$

Отримали, що робота 1 моля газу при його ізобарному нагріванні на 1К чисельно дорівнює універсальній газовій сталій R з розмірністю Джоуль.

Відповідь: $A = 8,31 \text{ Дж}$.

Задача 4. Після ізобарного нагрівання кисень масою 10 г, який знаходився при тискові 300 кПа і температурі 10°C, зайняв об'єм 10 л. Чому дорівнює: 1) кількість теплоти, переданої газу; 2) зміна його внутрішньої енергії; та 3) виконана роботу при розширенні?

Розв'язок

$$m=10 \text{ г}=1 \cdot 10^{-2} \text{ кг};$$

$$p_1=300 \text{ кПа}=3 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$T_1=10 \text{ }^\circ\text{C} + 273^0=283\text{К};$$

$$V_2=10 \text{ л}=1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$$

$$Q=? \Delta U=? A=?$$

Використаємо рівняння Менделєєва-Клапейрона для початкового стану системи:

$$PV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1.$$

Звідки знаходимо початковий об'єм:

$$V_1 = \frac{mRT_1}{\mu P}.$$

Робота газу при ізобарному нагріванні має вираз:

$$A = P \cdot \Delta V = P \cdot (V_2 - V_1).$$

Звідки запишемо вираз для роботи через відомі параметри термодинамічної системи:

$$A = P(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu P}).$$

За визначенням, зміна внутрішньої енергії термодинамічної системи дорівнює:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i}{2} P \Delta V.$$

Для двоатомного газу число ступінів вільності дорівнює $i=5$:

$$\Delta U = \frac{i}{2} P \Delta V = \frac{i}{2} A = \frac{5}{2} A.$$

Розрахуємо роботу ідеального газу A і зміну його внутрішньої енергії ΔU :

$$A = 3 \cdot 10^5 \text{ Па} (1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3 - \frac{1 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot 8,31 \text{ Дж} / \text{К} \cdot \text{моль} \cdot 283 \text{ К}}{3,2 \cdot 10^{-2} \text{ кг} / \text{моль} \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ Па}}) = 2265 \text{ Дж}.$$

$$\Delta U = \frac{5 \cdot 2265 \text{ Дж}}{2} = 5663 \text{ Дж}.$$

За першим началом термодинаміки:

$$Q = \Delta U + A.$$

Отримаємо числове значення теплоти, яка додана термодинамічній системі:

$$Q = 5665 \text{ Дж} + 2265 \text{ Дж} = 7928 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $A=2265$ Дж; $\Delta U=5663$ Дж; $Q=7928$ Дж.

Задача 5. Маса водню дорівнює 10 г, він мав температуру 27°C. Спочатку водень охолоджується при сталому об'ємі. Його тиск зменшується в 5 разів. Потім газ розширюється ізобарно. Температура водню у кінцевому стані дорівнює початковій температурі. Яка робота виконана газом протягом всього процесу? Вважати, що молярна маса водню дорівнює $\mu = 2$ г/моль.

Розв'язок

$$M = 10 \text{ г} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ кг};$$

$$T_1 = 27^\circ \text{C} + 273^0 = 300 \text{ К};$$

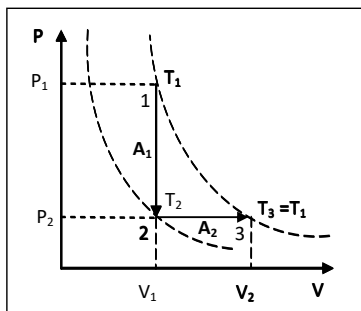
$$n = 5$$

$$P_2 = P_1/n$$

$$T_3 = T_1$$

$$\mu = 2 \text{ г/моль} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$A=?$$



На малюнку зображена зміна стану газу у координатах «P-V».

Ізотерми, які відповідають температурам T_1 і T_2 , показані пунктирними лініями. За умовами задачі, кінцева температура дорівнює початковій. Тоді точки 1 і 3 будуть знаходитись на одній ізотермі.

Перехід системи із стану 1 у стан 2, за умовами задачі, це – ізохорне охолодження $V=\text{const}$.

При ізохорному процесі газ не виконує роботи: $A_1 = 0$.

Перехід системи із стану 2 у стан 3, за умовами задачі, це – ізобарне розширення $P=\text{const}$.

При ізобарному процесі газ виконує роботу:

$$A_2 = P(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1).$$

Для знаходження температури T_1 використаємо закон Шарля, так як перехід із стану 1 у стан 2 – ізохорне охолодження :

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}.$$

Звідки, вважаючи, що тиск знизився у n разів:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_1}{n}.$$

Тоді робота, що виконана газом на ділянці 2 -3, буде дорівнювати:

$$A_2 = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R\left(\frac{T_1}{n} - T_1\right) = \frac{m}{\mu} R T_1 \frac{n-1}{n}.$$

Загальна робота, виконана газом, буде дорівнювати:

$$A = A_1 + A_2 = 0 + A_2 = \frac{m}{\mu} R T_1 \frac{n-1}{n}.$$

Розрахуємо чисельний результат:

$$A = \frac{1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} 300 \text{К} \frac{5-1}{5} = 33,24 \text{Дж}.$$

Відповідь: $A=33,24 \text{ Дж}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Скільки потрібно тепла для нагрівання двох кіломолей кисню на 100К при сталому тиску?
2. Водяної пари надано 2100 Дж тепла. Кількість водяної пари складає 1 моль. Яку роботу виконали водяні випари при ізобарному розширенні?
3. Азот, що займав об'єм 10 л і знаходився під тиском 0,1 МПа, ізобарно нагріли від 20⁰С до 100⁰С. Визначити роботу, виконану при ізобарному розширенні газу.
4. Вуглекислий газ розширюється ізобарно. Визначити роботу, виконану при розширенні газу, якщо кількість теплоти, що передали, дорівнює 42 кДж
5. Один літр гелію при нормальних умовах (тиск 1 атм = 100 кПа, температура $t = 0^{\circ}\text{C}$) ізотермічно розширюється до об'єму два літри. Знайти роботу, яку виконав газ при розширенні.
6. 200 г кисню нагрівають від 273К до 373К при сталому тиску. Яку кількість теплоти мають надати кисню для такого нагрівання?
7. Азот, який знаходиться при постійному тиску, одержав 21 кДж теплоти. Знайти виконану роботу та зміну внутрішньої енергії.
8. Для ізобарного нагрівання 80 моль газу на 500К йому надали теплоти 940 кДж. Визначити роботу, виконану газом, і збільшення внутрішньої енергії.
9. Знайти роботу, виконану при розширенні газу, і зміну внутрішньої енергії 10 л вуглекислого газу, якщо при постійному нормальному тискові (тиск 1 атм = 100 кПа) його об'єм збільшився до 12 л.
10. Гелій займає об'єм 19 л під тиском 0,2 МПа. Його ізотермічно розширюють до об'єму 28 л. Знайти роботу, виконану газом при розширенні.
11. Кисень масою 2 кг займає об'єм 1 м³. Він знаходиться під сталим тиском 0,2 МПа. Газ спочатку нагріли при сталому тиску до об'єму 3 м³. Після цього, газ знову нагріли, тільки тепер, при сталому об'ємі. При таких нагріваннях, тиск збільшився до 0,5 МПа. Чому дорівнює зміна внутрішньої енергії газу і виконана ним робота?
12. У циліндрі під поршнем знаходиться азот. Маса азоту 0,6 кг, об'єм 1 м³ і температура 560К. Газ ізотермічно розширився до об'єму 4,2 м³. Знайти зміну внутрішньої енергії газу, виконану газом роботу та отриману азотом кількість теплоти.
13. Кисень масою 0,1 кг нагріли ізобарно. Температура зросла від 200К до 400К. Чому дорівнює робота, що виконана газом, отримана киснем теплота і зміна внутрішньої енергії?

14. З'ясувати, за яких умов нагрівали водень: при сталому тиску чи при сталому об'ємі? Звісно, що для підвищення температури для кожного моля водню на 10К знадобилось 208 Дж тепла.
15. У судині знаходиться повітря масою 2 г і при температурі 273К. При ізобарному нагріванні його об'єм збільшився вдвічі. Визначити роботу газу, що виконана при розширенні, кількість теплоти, переданої газу і зміну його внутрішньої енергії.
16. 10 г кисню знаходяться під тиском 3 атм і температурі 283К. Після ізобарного нагрівання газ зайняв об'єм 10 л. Яка кількість тепла, одержана газом?
17. Маса кисню дорівнює 160 г, його температура дорівнює 273К. Кисень нагріли ізобарно. Об'єм кисню збільшився вдвічі. Знайти роботу, виконану газом, зміну внутрішньої енергії і отриману киснем кількість теплоти.
18. Вуглекислий газ нагріли при незмінному об'ємі. Цей об'єм газу дорівнює 50 л. Тиск газу при нагріванні змінився на 0,05 МПа. Чому дорівнює зміна внутрішньої енергії газу, робота, що виконана газом, і кількість теплоти, яку він отримав?
19. Два кіломоля азоту нагріваються при сталому тиску на 50К. Знайти зміну внутрішньої енергії газу.
20. Для ізохорного нагрівання 20 г газу на 10К потрібно 630 Дж теплоти. Якщо цей же газ нагрівати ізобарного, потрібно буде 1050 Дж. Яку молярну масу має цей газ?
21. Один грам водню розширюють ізотермічно. Температура газу складає 300К. Об'єм водню збільшився у 2 рази. Яку роботу, виконав газ при ізотермічному розширенні?
22. 1 м³ кисню нагрівають при незмінному тиску, що дорівнює 80 Па. Його об'єм при цьому збільшився до 3 м³. Чому дорівнює зміна внутрішньої енергії кисню, робота, що виконана киснем, і теплота, що одержав газ?
23. У судині знаходиться 1 моль одноатомного ідеального газу. Яку кількість теплоти газ віддасть при ізобарному охолодженні, якщо на стиснення газу, під час цього процесу, здійснена робота $A = 100$ Дж ?
24. Два кіломоля азоту нагріваються при сталому тиску на 50К. Знайти зміну внутрішньої енергії газу.
25. Двохатомному ідеальному газу надають 2 кДж теплоти, при цьому газ розширюється ізобарно. Знайти роботу розширення газу.

26. Водень розширюють ізотермічно. Маса водню дорівнює 1 г. Температура водню підтримується незмінною 300К. При розширенні його об'єм збільшився у 2 рази. Визначити роботу, виконану газом.
27. Один моль ідеального газу ізобарно розширюється від об'єму $V_1 = 10$ л до об'єму $V_2 = 20$ л при незмінному тиску $P = 5$ атм. Знайти зміну внутрішньої енергії газу.
28. Одноатомний ідеальний газ, що займає об'єм $V = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, знаходиться під тиском $P = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ і температурі $T = 300 \text{ К}$. Газ був нагрітий при сталому об'ємі. Потім він розширився ізобарно. Робота розширення газу при цьому виявилась рівною 200 Дж. На скільки нагрівся газ в наслідок таких процесів?
29. При ізобарному розширенні деякої маси двоатомного газу, який перебуває під тиском $P = 10^5 \text{ Па}$, внутрішня енергія його зменшилася на $U = 490 \text{ Дж}$. Знайти приріст об'єму.
30. У судині ємкістю $V = 100$ л міститься кисень під тиском $P_0 = 2$ атм. Стінки судини можуть витримати тиск до $P_2 = 10$ атм. Яку максимальну кількість теплоти Q можна передати газу?

1.4.2. Теплоємність. Адіабатний процес. Ідеальна теплова машина Карно

Скорочена теорія

«**Питомою теплоємністю** називається кількість теплоти, яка необхідна для нагрівання 1 кг речовини на 1 градус»

$$c = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right].$$

«**Молярною теплоємністю** називається кількість теплоти, яка необхідна для нагрівання 1 моля речовини на 1 градус»

$$C = \frac{\Delta Q}{\frac{m}{\mu} \cdot \Delta T} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right].$$

Співвідношення між питомою теплоємністю і молярною теплоємністю:

$$C = c \cdot \mu$$

Молярна теплоємкість при ізохорному процесі ($\Delta Q = \Delta U$):

$$C_V = \frac{\frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R \cdot \Delta T}{\frac{m}{\mu} \cdot \Delta T} = \frac{i}{2} R \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right]$$

Молярна теплоємкість при ізобарному процесі ($\Delta Q = \Delta U + \Delta A$):

$$C_P = \frac{\frac{m}{\mu} \cdot \frac{i+2}{2} R \cdot \Delta T}{\frac{m}{\mu} \cdot \Delta T} = \frac{i+2}{2} R \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right]$$

співвідношення Майєра: $C_P = C_V + R$

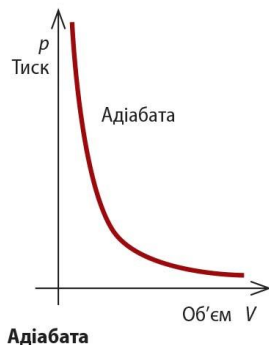
Внутрішню енергію ідеального газу можна записати через молярну теплоємність:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R T = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R T = \frac{m}{\mu} C_V T = \nu C_V T$$

де $\nu = \frac{m}{\mu}$ – кількість молів речовини; C_V – молярна теплоємність при сталому об'ємі; T – абсолютна температура газу.

відношення теплоємностей: $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{c_P}{c_V} = \frac{i+2}{i}$.

«Адіабатний процес – процес, який відбувається в термодинамічній системі без теплообміну з оточуючим середовищем, тобто це процес у теплоізольованій системі».



Рівняння адіабатного процесу (рівняння Пуассона):

$$P \cdot V^\gamma = \text{const}, \quad T \cdot P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const},$$

де γ – показник адіабати

Для ідеального газу, показник адіабати дорівнює відношенню теплоємностей:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i}$$

ККД – це відношення корисної роботи, яку виконує робоче тіло, до затраченої на це енергії:



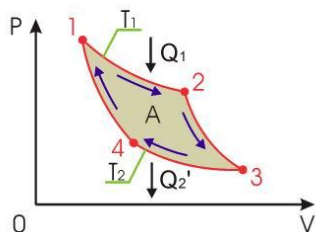
$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1.$$

Де A – корисна робота

Q_1 – витрачена енергія

Q_2 – енергія, яка передана холодильнику

Ідеальна теплова машина Карно



Ідеальна теплова машина Карно – це теплова машина, що побудована на роботі ідеального газу при ізотермічному і адіабатичному процесах.

Як видно з малюнка, цикл теплової машини складається із двох ізотерм $1 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 4$, та двох адіабат $2 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1$

ККД ідеальної машини Карно має вид:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

T_1 – температура нагрівача; T_2 – температура холодильника

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Знайти зміну внутрішньої енергії 1 кг водню, який ізобарично охолоджується ($V = \text{const}$). Початкова температура водня складає 423K, а тиск, внаслідок охолодження, зменшується від 8,08 Па до 2,02 Па. Молярна теплоємність водню: $c_v = 70 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

Розв'язок

$m = 1 \text{ кг}$
 $V = \text{const}$
 $T_1 = 423 \text{ К}$
 $P_1 = 8,08 \text{ Па}$
 $P_2 = 2,02 \text{ Па}$
 $c_v = 70 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
 $\mu = 0,002 \text{ кг}/\text{моль}$
 $\Delta U = ?$

Процес ізохорний – $V = \text{const}$, тобто робота, яка виконана газом буде дорівнювати нулю $A = 0$.
 Перше начало термодинаміки для цього випадку має вигляд:

$$Q = \Delta U.$$

По умові задачі нам надана молярна теплоємність при ізохоричному процесі:

$$c_v = \Delta Q/(\mu \cdot \Delta T), \text{ звідки } \Delta Q = c_v \cdot \mu \cdot \Delta T,$$

$$\text{чи } \Delta U = c_v \cdot \mu \cdot \Delta T, \quad \text{де } \Delta T = T_2 - T_1.$$

Згідно закону Шарля (ізохорний процес):

$$P_1/T_1 = P_2/T_2.$$

Звідки знаходимо: $T_2 = T_1 \cdot P_2 / P_1.$

Тоді остаточно отримаємо для зміни внутрішньої енергії:

$$\Delta U = c_v \cdot \mu \cdot (T_2 - T_1) = c_v \cdot \mu \cdot (T_1 \cdot P_2 / P_1 - T_1) = c_v \cdot \mu \cdot T_1 \cdot (P_2 / P_1 - 1).$$

Знайдемо розмірність ΔU за розрахунковою формулою

$$[\Delta U] = (\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{кг}/(\text{кг}/\text{моль})) = [\text{Дж}].$$

Вдосконалились, що це – розмірність енергії.

Числове значення ΔU :

$$\Delta U = 70 \cdot 1 / 0,002 \cdot 423 (8,08 / 2,02 - 1) = 44,4 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 44,4 \text{ МДж}.$$

Відповідь: $\Delta U = 44,4 \text{ МДж}$.

Задача 2. Питомі теплоємності деякого газу при постійному об'ємі і при постійному тиску, відповідно, мають значення $c_v = 650,31 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ і $c_p = 910 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$. Визначити молярну масу газу μ . Чому дорівнюють молярні теплоємності c_v і c_p цього газу?

Розв'язок

$c_v = 650,31 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
 $c_p = 910 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
 $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$

1) $\mu - ?$

2) $C_v - ?$

3) $C_p - ?$

За умовами задачі, нам треба знайти молярну масу μ і молярні теплоємності при постійному об'ємі C_v і при постійному тиску C_p , якщо відомі питомі теплоємності c_v і c_p .

Скористаємось співвідношенням між питомою і молярною:

$$C = c \mu.$$

Тоді можна записати два рівняння:

$$\begin{cases} C_v = c_v \mu & (1) \\ C_p = c_p \mu & (2) \end{cases}$$

Додамо до цієї системи ще й співвідношення Майєра:

$$C_p = C_v + R. \quad (3)$$

Ми отримали три рівняння з трьома невідомими. Система цих рівнянь має рішення. Підставимо (1) і (2) в (3), отримаємо:

$$c_p \mu = c_v \mu + R.$$

Звідки, можемо записати:

$$c_p \mu - c_v \mu = R \rightarrow \mu (c_p - c_v) = R \rightarrow \mu = \frac{R}{(c_p - c_v)}.$$

Знайдемо значення першої невідомої – молярної маси μ :

$$\mu = \frac{R}{(c_p - c_v)} = \frac{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{910 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} - 650,31 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}} = 0,032 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Тепер, підставивши значення молярної маси μ в (1) і (2), отримаємо значення молярних теплоємностей при сталих тиску і об'ємі:

$$C_v = c_v \mu = 650,31 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 0,032 \frac{\text{кг}}{\text{моль}} = 20,81 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}};$$

$$C_p = c_p \mu = 910 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 0,032 \frac{\text{кг}}{\text{моль}} = 29,12 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Відповідь: $\mu = 0,032 \text{ Дж/моль}$; $C_v = 20,81 \text{ Дж/(моль} \times \text{К)}$,
 $C_p = 29,12 \text{ Дж/(моль} \times \text{К)}$.

Задача 3. 1) Обчислити питомі теплоємності при постійному об'ємі азоту і водяної пари, вважаючи їх ідеальними газами. 2) Обчислити ці ж питомі теплоємності при постійному тиску.

Розв'язок

$$\mu_{N_2} = 2,8 \times 10^{-2} \text{ кг/моль}$$

$$\mu_{H_2O} = 1,8 \times 10^{-2} \text{ кг/моль}$$

- 1) $V = \text{const}$
- 2) $P = \text{const}$

-
- 1) c_v -? для N_2
 c_v -? для H_2O
 - 2) c_p -? для N_2
 c_p -? для H_2O

За умовами задачі, нам треба знайти питомі теплоємності двох речовин – азоту і водяної пари, при різних зовнішніх умовах.

У першому випадку – при постійному об'ємі.

У другому – при постійному тиску.

Тобто, нам потрібно розглянути два процеси:

у першому випадку – ізохорний;
у другому випадку – ізобарний.

З теорії теплоємностей, ми можемо доволі просто визначити **молярні** теплоємності за цими умовами.

Молярна теплоємність ідеального газу при ізохорному процесі:

$$C_v = \frac{i}{2} R$$

Молярна теплоємність при ізобарному процесі:

$$C_p = \frac{i+2}{2} R$$

де R – універсальна газова стала:

i – число ступіней вільності молекули.

Нам потрібні саме питомі теплоємності. Тому використаємо співвідношення між питомою теплоємністю і молярною теплоємністю:

$$C = c \cdot \mu$$

де c – питома теплоємність, а C – молярна теплоємність.

На підставі цього, можна записати для ізохорного і ізобарного процесів:

$$C_v = c_v \mu, C_p = c_p \mu.$$

Таким чином, визначаючи молярну теплоємність C_v (C_p) і молярну масу ідеального газу μ можна розрахувати питомі теплоємності для ізохорного і ізобарного процесів.

Розрахуємо питому теплоємність при ізохорному процесі для наведених речовин – азоту і водяної пари:

$$c_v = C_v / \mu = \frac{i}{2\mu} R.$$

Для азоту:

i – число ступіней вільності дорівнює 5. Бо це двохатомна лінійна молекула.

Молярна маса $\mu_{N_2} = 2,8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль, за умовами задачі.

Тоді питома теплоємність азоту при ізохорному процесі буде:

$$c_v = \frac{5}{2} \cdot 8,31 \text{ Дж/(моль К)} / 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ кг/моль} = 741,96 \text{ Дж/(кг моль)}.$$

Для водяної пари:

i – число ступіней вільності дорівнює 6. Бо це трьохатомна молекула.

Молярна маса $\mu_{H_2O} = 1,8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль, за умовами задачі.

Тоді питома теплоємність водяної пари при ізохорному процесі буде:

$$c_v = \frac{6}{2} \cdot 8,31 \text{ Дж/(моль К)} / 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ кг/моль} = 1385 \text{ Дж/(кг моль)}.$$

Аналогічно, розрахуємо питому теплоємність при ізобарному процесі для наведених речовин – азоту і водяної пари:

$$c_p = C_p / \mu = \frac{i+2}{2\mu} R.$$

Для азоту питома теплоємність при ізобарному процесі буде:

$$c_p = \frac{5+2}{2} \cdot 8,31 \text{ Дж/(моль К)} / 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ кг/моль} = 1038,75 \text{ Дж/(кг К)}.$$

Для водяної пари питома теплоємність при ізобарному процесі буде:

$$c_p = \frac{6+2}{2} \cdot 8,31 \text{ Дж/(моль К)} / 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ кг/моль} = 1866,67 \text{ Дж/(кг К)}.$$

Відповідь: Для азоту $c_v = 741,96 \text{ Дж/(кг·К)}$, $c_p = 1038,75 \text{ Дж/(кг·К)}$.

Для водяної пари $c_v = 1385 \text{ Дж/(кг·К)}$, $c_p = 1866,67 \text{ Дж/(кг·К)}$.

Задача 4. Ідеальний газ складається із суміші двох кіломолей одноатомного газу і 0,5 кмоль двоатомного. Визначити показник адіабати газу.

Розв'язок

$\nu_1 = 2 \text{ кмоль} = 2000 \text{ моль}$	За умовами задачі, нам треба знайти показник адіабати суміші ідеальних газів γ . За визначенням, показник адіабати дорівнює відношенню молярних теплоємностей при сталому тиску і сталому об'ємі $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.
$\nu_2 = 0,5 \text{ кмоль} = 500 \text{ моль}$	
$R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$	
$\gamma = ?$	

Для знаходження молярних теплоємностей звернемося до визначення внутрішньої енергії ідеального газу через молярну теплоємність:

$$U = \frac{i}{2} \nu R T = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R T = \frac{m}{\mu} C_v T = \nu C_v T.$$

Внутрішня енергія суміші двох ідеальних газів дорівнює сумі внутрішніх енергій обох компонентів:

$$U = U_1 + U_2 = \nu_1 C_v^1 T + \nu_2 C_v^2 T, \quad (1)$$

де C_v^1 , C_v^2 – молярні теплоємності компонентів суміші при ізохорному процесі.

У нашому випадку $C_v^1 = \frac{3}{2} R$ і $C_v^2 = \frac{5}{2} R$, так як суміш складається з одноатомного (число ступінців вільності $i=3$) і двоатомного (число ступінців вільності $i=5$) газів.

З іншого боку, для внутрішньої енергії суміші U можемо записати вираз через молярну теплоємність суміші C_v і загальну кількість моль речовини ν :

$$U = \nu C_v T = (\nu_1 + \nu_2) C_v T. \quad (2)$$

Із виразів (1) і (2) для внутрішньої енергії U знаходимо:

$$\nu_1 C_v^1 T + \nu_2 C_v^2 T = (\nu_1 + \nu_2) C_v T.$$

Звідки, підставляючи значення молярних теплоємностей для компонентів суміші, отримуємо:

$$\nu_1 \frac{3}{2} R T + \nu_2 \frac{5}{2} R T = (\nu_1 + \nu_2) C_v T.$$

Скорочуємо температуру T в лівій і правій частинах рівняння і знаходимо для C_v :

$$C_v = \frac{\nu_1 \frac{3}{2} R + \nu_2 \frac{5}{2} R}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{2000 \frac{3}{2} R + 500 \frac{5}{2} R}{2000 + 500} = 1,7R.$$

Молярна теплоємність за сталого тиску даної суміші дорівнює:

$$C_p = C_v + R = 2,7R.$$

Отже, показник адіабати буде мати значення:

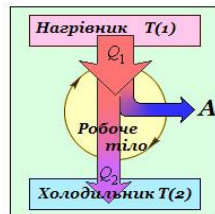
$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{2,7R}{1,7R} = 1,59.$$

Відповідь: показник адіабати для суміші газів $\gamma = 1,59$.

Задача 5. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. Вона, за один цикл, виконує роботу 150 кДж. За умовами звісно, що температура нагрівника складає 400К, а холодильника – 260К. Визначити ККД машини. Яка кількість теплоти передається за один цикл холодильнику?

Розв'язок

$A = 150 \text{ кДж} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Дж}$ $T_1 = 400\text{К}$ $T_2 = 260\text{К}$ $\eta = ?$ $Q_2 = ?$
--



За умовами задачі, теплова машина, що працює, є ідеальною тепловою машиною Карно.

За визначенням, **ККД ідеальної машини Карно** має вигляд:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

де A – корисна робота, виконана машиною, Q_1 – витрачена енергія (енергія, яка передається робочому тілу), T_1 – температура нагрівача; T_2 – температура холодильника

Звідки ми одразу ж можемо порахувати ККД, бо нам, за умовами задачі, відомі температури нагрівача T_1 і холодильника T_2 :

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{260\text{К}}{400\text{К}} = 0,35.$$

Для знаходження теплоти, яка була передана холодильнику, використаємо визначення ККД для звичайної теплової машини:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1$$

Так, як ми вже знайшли ККД, з цього виразу можливо знайти і кількість теплоти, яке передано робочому тілу:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \rightarrow Q_1 = \frac{A}{\eta} \rightarrow Q_1 = \frac{150\text{кДж}}{0,35} = 458,57\text{кДж}.$$

За законом збереження енергії, кількість теплоти Q_1 , яке передається робочому тілу, розходується на виконання корисної роботи A , а залишок енергії віддається холодильнику Q_2 :

$$Q_1 = A + Q_2.$$

Звідки для Q_2 знаходимо:

$$Q_2 = Q_1 - A = 458,57\text{кДж} - 150\text{кДж} = 278,57\text{кДж}.$$

Відповідь: ККД теплової машини $\eta=0,35$, кількість теплоти, що передається за один цикл холодильнику $Q_2 = 278,57 \text{ кДж}$.

Задача 6. При роботі ідеальної теплової машини Карно 80% теплоти, отриманої від нагрівника, передається холодильнику. Температура холодильника складає 0°C . Чому дорівнює температура нагрівника? Який ККД цієї машини?

Розв'язок

$T_2 = 0^{\circ}\text{C} = 273\text{K}$ $Q_2 = 0,8 Q_1$	За умовами задачі, працює ідеальна теплова машина Карно.
$T_1 - ?$ $\eta - ?$	За визначенням, ККД ідеальної машини Карно має вид: .

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Щоб розрахувати ККД, нам треба знати чи температуру нагрівача T_1 , чи корисну роботу A , яку виконує робоче тіло.

За законом збереження енергії, кількість теплоти Q_1 , яке передається робочому тілу, розходується на виконання корисної роботи A , а залишок енергії віддається холодильнику Q_2 . Так як за умовами задачі нам відомо, що кількість теплоти, переданої холодильнику дорівнює $Q_2 = 0,8 Q_1$, ми можемо знайти корисну роботу:

$$Q_1 = A + Q_2 \rightarrow Q_1 = A + 0,8 Q_1 \rightarrow A = Q_1 - 0,8 Q_1 = 0,2 Q_1 .$$

Підставивши цей вираз для роботи у визначення ККД, знайдемо значення ККД:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{0,2 Q_1}{Q_1} = 0,2 .$$

Тепер розрахуємо температуру нагрівача:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta} = \frac{273\text{K}}{1 - 0,2} = 341,25\text{K} .$$

Відповідь: ККД теплової машини $\eta = 0,2$,
температура нагрівача $T_1 = 341,25\text{K}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Вважаючи гази ідеальними, обчислити питомі теплоємності при постійному тиску двох газів: гелію і вуглекислого газу.
2. Знайти молярні теплоємності газу, якщо відомо, що його питомі теплоємності $c_p = 14,6 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{K)}$ та $c_v = 10,4 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{K)}$.
3. Одноатомний газ має масу 0,9 г знаходиться при нормальних умовах (тиск $1 \text{ атм} = 100 \text{ кПа}$, температура $t = 0^{\circ}\text{C}$). Він займає об'єм 5 л. Визначити питому теплоємність газу при сталому об'ємі.
4. У судині знаходиться трьохатомний газ масою 18 г. Тиск газу дорівнює 240 кПа. Температура газу 200°C . Він займає об'єм 10 л. Визначити питому теплоємність цього газу при сталому тиску.
- 5., Різниця питомих теплоємностей деякого газу при сталих тиску і об'ємі

дорівнює $c_p - c_v = 2,08 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$. Визначити молярну масу газу.

6. Різниця питомих теплоємностей при постійних тиску та об'ємі двох-атомного газу дорівнює $c_p - c_v = 300 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$. Визначити питомі теплоємності c_v і c_p газу.
7. Різниця питомих теплоємностей газу при постійних тиску та об'ємі складає $c_p - c_v = 260 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$. Відомо, що молекула газу складається з двох атомів. Знайти молярну масу і питомі теплоємності c_v і c_p газу.
8. Визначити питомі теплоємності при постійних тиску та об'ємі c_v і c_p деякого газу. Відомо, що відношення цих теплоємностей дорівнює $c_p/c_v=1,67$. Молярна маса цього газу має значення $4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.
9. Молярна маса деякого газу дорівнює 30 кг/кмоль . Відношення теплоємностей, що визначені при постійних тиску та об'ємі, має значення $c_p/c_v=1,4$. Яке значення має число ступінів вільності для цього газу? Знайти питомі теплоємності c_v і c_p цього газу.
10. Газова суміш складається з 2 кг водню і 1 кг азоту. Знайти питому теплоємність цієї газової суміші при постійному об'ємі системи.
11. Суміш складається з 2 кг гелію і 2 кг кисню. Знайти питому теплоємність при постійному тиску газової суміші.
12. Ідеальний газ має масу $1,15 \text{ кг}$. Він, при температурі 350К і тиску $0,4 \text{ МПа}$, займає об'єм 300 л . Питома теплоємність цього газу при сталому об'ємі $742 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$. Визначити показник адіабати ідеального газу.
13. У результаті циклічного колового процесу парова машина виконала роботу, яка дорівнює $1,5 \text{ Дж}$. При цьому робоче тіло віддало до холодильника $4,5 \text{ Дж}$ теплоти. Знайти ККД цієї парової машини.
15. Газ працює за циклом Карно. Визначити ККД ідеальної теплової машини, якщо температура нагрівача у $2,3$ рази перевищує температуру холодильника.
16. Газ працює за циклом Карно. Температура холодильника становить 273К . Відомо, що $2/3$ теплоти, отриманої від нагрівника, він віддає холодильнику. Яка температура нагрівника?
17. Газ працює за циклом Карно і віддає холодильнику $0,75$ тепла, одержаного від нагрівача. Температура нагрівача 400К . Яка температура холодильника?
18. Газ працює за циклом Карно. Температура нагрівача дорівнює 127°C . У скільки разів збільшиться ККД ідеальної теплової машини, якщо температура нагрівника підвищиться від 127°C до 347°C ?
19. У циклі Карно газ виконав роботу 1 Дж і отримав від нагрівача $4,2 \text{ Дж}$ тепла. Температура нагрівача складає 373К . Яка температура холодильника?

20. Ідеальний газ працює за циклом Карно. Нагрівник передав газу 10 кДж теплоти. Температура нагрівника в 4 рази вища за температуру холодильника. Яку корисну роботу виконав газ?
21. Пар з температурою 227°C надходить від котла у парову машину. Температура в конденсаторі 27°C . Вважаючи цю парову машину ідеальною тепловою машиною, обчислити корисну роботу, що виконується паровою машиною за один цикл. Вважати, що за один цикл, внаслідок виконання роботи, втрачається 6,4 Дж теплоти.
22. При роботі ідеальної теплової машини, за рахунок кожних 100 Дж енергії, одержаних від нагрівника, здійснюється робота 30 Дж. Визначити температуру нагрівника, якщо відомо, що температура холодильника складає 280К.
23. Газ працює за циклом Карно. Температура холодильника дорівнює 290К. У скільки разів збільшиться ККД ідеальної теплової машини, якщо температура нагрівача збільшиться від 400К до 600К?
24. Температура нагрівника ідеальної теплової машини становить 400К. Температура холодильника дорівнює 300К. За один цикл ідеальна теплова машина одержує від нагрівника 2,5 кДж теплоти. Чому дорівнює кількість теплоти, що передається холодильнику за один цикл?
25. Газ здійснює цикл Карно. Температура нагрівника в 3 рази вища від температури холодильника. Нагрівник за один цикл передав газу 42 кДж теплоти. Визначити роботу, яку здійснює газ?
26. ККД двигуна внутрішнього згорання 28%. Температура згорання палива 907°C . Температурі вихлопних газів 427°C . На скільки відсотків ККД ідеальної машини більше від ККД двигуна?
27. Працюючи за циклом Карно, газ за один цикл отримав від нагрівача тепло в 1 Дж. Скільки тепла він віддає холодильнику, якщо ККД ідеальної теплової машини дорівнює 25%?
28. У котлі парової машини температура 150°C , у холодильникові -10°C . Вважаючи парову машину ідеальною тепловою машиною, визначити яку максимальну роботу може виконати ця машина, якщо у топці, спалили 200 кг вугілля з питомою теплою згорання 31 МДж/кг? ККД топки дорівнює 80 %,
29. Газ, що здійснює цикл Карно. Звісно, що за рахунок кожних 1000 Дж теплоти, отриманих від нагрівника, він виконує роботу 200 Дж. Визначити, у скільки разів абсолютна температура нагрівника вища від абсолютної температури холодильника?
30. В ідеальній тепловій машині температура нагрівача 400К. За рахунок кожного кілоджоуля енергії, одержаного від нагрівача, здійснюється робота 300 Дж. Визначити температуру холодильника.

1.5. ЕЛЕКТРИКА

1.5.1. Постійне електричне поле. Напруженість і потенціал. Ємність конденсатора

Скорочена теорія

Закон Кулона для взаємодії точкових зарядів

$$F_1 = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \cdot R^2},$$

де q_1 і q_2 – електричні заряди; ϵ – відносна діелектрична проникність середовища; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала.

Напруженість електричного поля

$$E = \frac{F}{q},$$

де F – сила, що діє на одиничний точковий заряд q .

Лінійна густина заряду – це заряд одиниці довжини

$$\tau = \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl} \quad \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}} \right];$$

поверхнева густина заряду – це заряд одиниці площі

$$\sigma = \frac{q}{s} = \frac{dq}{ds} \quad \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right];$$

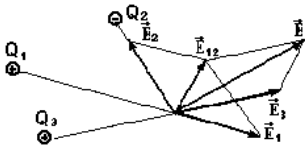
об'ємна густина заряду – це заряд одиниці об'єму

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{dq}{dV} \quad \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \right].$$

Напруженість електричного поля точкового заряду

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Принцип суперпозиції полів:



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i,$$

Напруженість поля кількох дискретних зарядів знаходять за правилом геометричного складання полів окремих зарядів.

Напруженість поля безмежної однорідно зарядженої площини

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0},$$

де σ – поверхнева густина зарядів на площині.

Напруженість поля однорідно зарядженої кулі

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

де q – заряд на кулі; r – відстань від центру кулі ($r > R$, де R – радіус кулі).

Робота при перенесенні заряду з точки 1 у точку 2 електричного поля

$$A = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2),$$

де φ_1 – потенціал початкової точки; φ_2 – потенціал наступної точки.

Потенціал поля точкового заряду

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r},$$

де r – відстань від заряду.

Зв'язок напруженості поля в точці з **потенціалом**

$$E = - \frac{d\varphi}{dr},$$

де похідна від потенціалу береться вздовж силової лінії.

У випадку однорідного поля:

$$E = \frac{U}{d},$$

де U – різниця потенціалів; d – відстань між точками.

Для системи провідників (конденсаторів) взаємна електроємність має вигляд:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

де $\varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів між тілами, q – заряд одного із провідників

Різниця потенціалів системи провідників і заряд на ньому пов'язані співвідношенням

$$q = C U,$$

де C – електрична ємність провідника, U – напруга (різниця потенціалів).

Ємність плоского конденсатора має вигляд:

$$C = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d},$$

де S – площа обкладки конденсатора; d – відстань між обкладками.

Енергія зарядженого провідника

$$W = q \cdot \frac{\varphi}{2} = C \cdot \frac{\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = C \cdot \frac{U^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Об'ємна густина енергії електричного поля

$$w = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{E^2}{2}$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. У скільки разів сила електричного відштовхування між двома протонами більша за силу гравітаційного притягіння між ними?

Розв'язок

$$\begin{aligned} m &= 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \\ e &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \\ \gamma &= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н м}^2 / \text{кг}^2 = \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2) \\ \varepsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф / м} \\ F_e / F_g &= ? \end{aligned}$$

Сила відштовхування між двома протонами у вакуумі може бути знайдена за законом Кулона:

$$F_e = \frac{e \cdot e}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r^2}, \quad (1)$$

де e – заряд протона і r – відстань між протонами.

Сила притягання між протонами визначається за законом всесвітнього тяжіння:

$$F_g = \gamma \frac{m \cdot m}{r^2}, \quad (2)$$

де m – маса протона; γ – гравітаційна стала.

Поділивши вираз (1) на формулу (2), одержуємо розрахункову формулу

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e \cdot e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \gamma \cdot m \cdot m}.$$

Розмірність одержаного результату –

$$\left[\frac{F_e}{F_g} \right] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}}{\text{Ф} \cdot \text{кг}^2 \cdot \text{м}^3} = [1].$$

Числове значення результату:

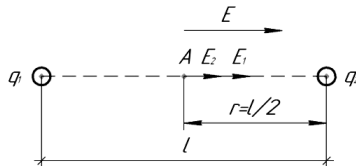
$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1,6^2 \cdot 10^{-38}}{4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,67^2 \cdot 10^{-54}} = 1,25 \cdot 10^{36}.$$

Відповідь: Відношення сили гравітаційного притягіння до сили електричного відштовхування між двома протонами складає $= 1,25 \cdot 10^{36}$ разів.

Задача 2. Два точкових заряди $8 \cdot 10^{-9}$ Кл і $-6 \cdot 10^{-9}$ Кл розташовані на відстані 20 см один від одного. Знайти напруженість електричного поля в точці, яка лежить посередині між точковими зарядами.

Розв'язок

$$\begin{aligned} q_1 &= 8 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \\ q_2 &= -6 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \\ d &= 0,2 \text{ м} \\ \varepsilon &= 1 \\ \varepsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \\ E &= ? \end{aligned}$$



Оскільки заряди мають протилежні знаки, то напруженості їх полів у точці, яка лежить між зарядами, спрямовані у бік негативного заряду.

Результуюча напруженість поля за модулем буде дорівнювати сумі модулів напруженостей цих полів. Модулі напруженості E_1 і E_2 визначаються

за формулами:

$$E_1 = \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_1^2} = \frac{|q_1|}{\pi\epsilon_0 \cdot d^2}, \quad E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_2^2} = \frac{|q_2|}{\pi\epsilon_0 \cdot d^2},$$

де $r_1 = r_2 = d/2$ – відстань від заряду до визначеної точки.

Сумарна напруженість поля в цій точці:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{|q_1| + |q_2|}{\pi\epsilon_0 \cdot d^2}.$$

Розмірність – $[E] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\Phi \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$

Числові значення – $E = \frac{1,4 \cdot 10^{-9}}{3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,01} = 5,04 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$

Відповідь: напруженість електричного поля $E = 5,04 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$

Задача 3. Два заряди 40 нКл і –10 нКл розташовані на відстані 10 см один від одного. Яке значення має бути у третього заряду, щоб система перебувала у рівновазі? В якому місці треба його розташувати?

Розв'язок

Дано:

$$q_1 = 40 \times 10^{-9} \text{ Кл}$$

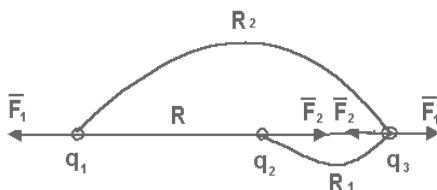
$$q_2 = -10 \times 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$R = 10 \times 10^{-2} \text{ м}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

$$\epsilon = 1$$

$$R_1 = ? \quad R_2 = ? \quad q_3 = ?$$



Якщо заряди q_1 і q_2 мають різні знаки, то заряд q_3 треба розташувати на прямій за тим зарядом, який менший за модулем.

Згідно до закону Кулона:

$$F_1 = \frac{|q_1||q_3|}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_2^2}, \quad F_2 = \frac{|q_2||q_3|}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_1^2}.$$

Умови рівноваги, згідно до першого закону Ньютона (сили, що діють на третій заряд, компенсують одне одну):

$$F_1 = F_2.$$

Тоді:

$$\frac{|q_1||q_3|}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_2^2} = \frac{|q_2||q_3|}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_1^2}; \quad \text{де } R_2 = R + R_1,$$

чи

$$\frac{|q_1|}{R_2^2} = \frac{|q_2|}{R_1^2}; \quad \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{|q_1|}{|q_2|}; \quad \frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}}.$$

Підставимо замість $R_2 = R + R_1$

$$\frac{R + R_1}{R_1} = \sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}} \quad \frac{R}{R_1} + 1 = \sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}}$$

остаточно отримаємо:

$$R_1 = \frac{R}{\sqrt{\left| \frac{q_1}{q_2} \right|} - 1}$$

Розрахуємо відстань:

$$R = \frac{10 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{\frac{40 \cdot 10^{-9}}{10 \cdot 10^{-9}} - 1}} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

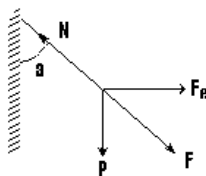
Відповідь: $R_1=10$ см, $R_2=20$ см. На відстані 10 см від меншого за модулем заряду і на відстані 20 см від більшого.

Задача 4. У вакуумі знаходиться безмежна вертикальна площина. Вона заряджена рівномірно з поверхневою густиною зарядів $5 \cdot 10^{-4}$ Кл/м². До нитки, що причеплена до цієї площини, приєднують заряджену кульку масою 1 г. Площина і кулька заряджені однойменно. У результаті взаємодії, заряджена кулька відхиляється і нитка утворює з площиною кут 30° . Який заряд у кульки?

Розв'язок

$$\begin{aligned} m &= 1 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \\ \sigma &= 5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/м}^2 \\ \alpha &= 30^\circ \\ \varepsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \\ g &= 9,81 \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

q – ?



На кульку діють дві сили: вага $P = mg$ і сила електричного відштовхування F_e . Результуюча сила F зрівноважується силою натягу нитки N .

Як видно з рисунка

$$F_e = m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Цю ж силу запишемо через напруженість електричного поля і заряд кульки q :

$$F_e = q \cdot E. \quad (2)$$

Напруженість електричного поля зарядженої площини:

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}, \quad (3)$$

де σ – поверхнева густина зарядів.

Підставляючи вираз (3) у формулу (2), а потім у рівняння (1), одержимо:

$$m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma \cdot q}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon}; \quad \text{звідки} \quad q = \frac{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sigma}.$$

Розмірність q за останньою розрахунковою формулою:

$$[q] = \frac{\Phi \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}}{\text{Кл} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2} = \frac{\Phi \cdot \text{Дж}}{\text{Кл}} = \Phi \cdot \text{В} = \text{Кл}.$$

Числове значення –

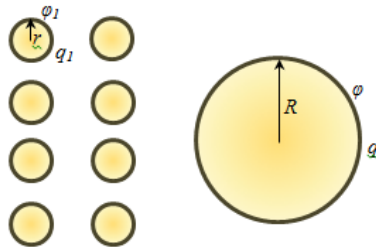
$$q = \frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 0,557}{5 \cdot 10^{-4}} = 1,093 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}.$$

Відповідь: Заряд кульки $q = 1,093 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Задача 5. Вісім однакових заряджених водяних крапель, які мають радіус 1 мм і заряд $1 \cdot 10^{-10}$ Кл кожна, об'єднуються в одну велику заряджену водяну краплю. Який потенціал великої краплі?

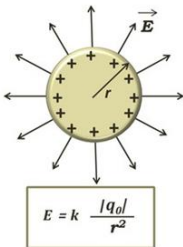
Розв'язок

$$\begin{aligned} r &= 1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ q &= 0,1 \text{ нКл} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Кл} \\ n &= 8 \\ \varepsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф / м} \\ \varphi &= ? \end{aligned}$$

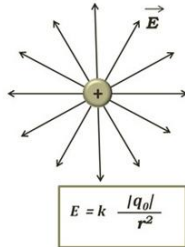


Поле

зарядженої кулі



точкового заряду



Всередині кулі: $R < r$ напруженість поля дорівнює нулю

Як видно з малюнка, розподіл силових ліній точкового заряду ідентичний розподілу силових ліній зарядженої сфери. З цього робимо висновок, що поля точкового заряду і зарядженої сфери ідентичні. Тоді потенціал на поверхні краплі буде таким, як потенціал точкового заряду на відстані r від центру краплі:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Тоді, потенціал на поверхні великої краплі буде мати вигляд:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \quad (1)$$

А потенціал на поверхні малої краплі можна записати у вигляді:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}. \quad (2)$$

Коли краплі об'єднуються, заряд великої краплі буде дорівнювати сумі зарядів малих крапель:

$$q = n q_1.$$

Тоді потенціал великої краплі буде дорівнювати:

$$\varphi = \frac{n q_1}{4 \pi \epsilon_0 R} \quad (3)$$

Поділивши (3) на (2), отримаємо

$$\frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{q}{q_1} \cdot \frac{r}{R} = n \cdot \frac{r}{R}.$$

Коли зливаються n крапель, загальний об'єм великої краплі буде дорівнювати сумі об'ємів малих крапель: $V_1 = n V$,

чи

$$\frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = n \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3.$$

Тобто: $R^3 = n r^3$.

Візьмемо кубічний корінь від лівої і правої частин і отримаємо остаточно:

$$R = r \sqrt[3]{n}.$$

Тепер можна розрахувати потенціал великої краплі:

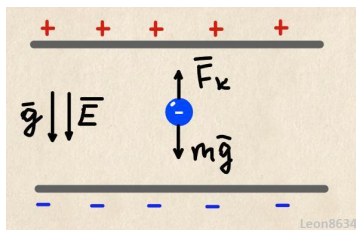
$$\varphi = \varphi_1 \cdot n \cdot \frac{r}{R} = \varphi_1 \cdot \frac{n}{\sqrt[3]{n}} = \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r} n^{\frac{2}{3}} = \frac{1 \times 10^{-10} \text{ Кл}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \cdot 10^{-3} \text{ м}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 3598,55 \text{ В}.$$

Відповідь: потенціал великої краплі $\varphi = 3598,55 \text{ В}$.

Задача 6. Між двома різнойменно зарядженими пластинами, відстань між якими дорівнює 0,5 см, розташовують заряджену крапельку. Маса крапельки $1 \cdot 10^{-10} \text{ г}$. До пластин прикладена різниця потенціалів 154 В. Заряд крапельки такий, що вона зважена в однорідному електричному, яке створюється зарядженими пластинами. При освітленні ультрафіолетовими променями крапелька втрачає частину заряду і виходить з рівноваги. Який заряд втратила крапелька, якщо різницю потенціалів між пластинами збільшили на 8 В, щоб повернути у рівновагу крапельці?

Розв'язок

$$\begin{aligned} m &= 1 \cdot 10^{-13} \text{ кг} \\ d &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ U_1 &= 154 \text{ В} \\ \Delta U &= 8 \text{ В} \\ g &= 9,81 \text{ м/с}^2 \\ \Delta q &= ? \end{aligned}$$



За умовами задачі, до опромінення, крапелька була у рівновазі. Тобто її

вага P врівноважувалась електричною силою F . Можна записати:

$$P = F.$$

Запишемо вагу крапельки через її масу m і прискорення вільного падіння, а електричну силу F – через напруженість електричного поля і заряд крапельки:

$$m \cdot g = q_1 \cdot E_1. \quad (1)$$

Модуль напруженості електричного поля можна записати через різницю потенціалів:

$$E_1 = U_1 / d.$$

Тоді, з рівняння (1) одержимо вираз для первинного заряду крапельки:

$$q_1 = (m \cdot g \cdot d) / U_1. \quad (2)$$

Після опромінення крапельки ультрафіолетом, заряд краплі і різниця потенціалів змінились. Так само можна розрахувати новий заряд q_2 через змінену різницю потенціалів U_2 :

$$q_2 = (m \cdot g \cdot d) / U_2. \quad (3)$$

Втрачений крапелькою заряд можна визначити з рівнянь (2) і (3):

$$\Delta q = q_1 - q_2 = m \cdot g \cdot d \cdot (1 / U_1 - 1 / U_2). \quad (4)$$

За умовою задачі різниця потенціалів після опромінення була збільшена:

$$U_2 = U_1 + \Delta U.$$

Тоді рівняння (4) можна записати так:

$$\Delta q = \frac{m \cdot g \cdot d \cdot (U_2 - U_1)}{U_1 \cdot U_2} = \frac{m \cdot g \cdot d \cdot \Delta U}{U_1 \cdot (U_1 + \Delta U)}.$$

Розмірність – $[\Delta q] = \frac{В \cdot м \cdot кг \cdot м}{В \cdot В \cdot с \cdot с} = \frac{Дж}{В} = Кл.$

Числове значення – $\Delta q = \frac{10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cdot 9,81 \cdot 8}{154 \cdot 162} = 1,57 \cdot 10^{-18} Кл.$

Відповідь: Втрачений крапелькою заряд $\Delta q = 1,57 \cdot 10^{-18} Кл.$

Задача 7. У середині плоского конденсатора знаходиться скляна пластинка, цілком заповнюючи простір між обкладинами конденсатора. Площа кожної з обкладин 200 см^2 , відстань між ними в 1 мм . Конденсатор заряджено до напруги 300 В . Відносна діелектрична проникність скла складає $\epsilon_1 = 7$, а повітря – $\epsilon_2 = 1$. Розрахувати, чому дорівнює зміна енергії конденсатора після вилучення скляної пластинки за умов:

- а) на електродах підтримується стала напруга за допомогою джерела струму;
- б) до вилучення скляної пластинки конденсатор відімкнено від джерела напруги?

Розв'язок

$$S = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$$

$$d = 10^{-3} \text{ м}$$

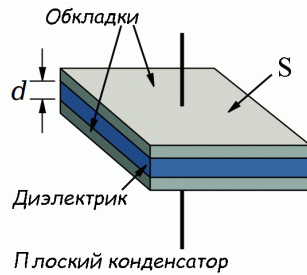
$$U = 300 \text{ В}$$

$$\epsilon_1 = 7$$

$$\epsilon_2 = 1$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф / м}$$

$$\Delta W - ?$$



Розглянемо випадок а), коли на обкладках підтримується стала напруга за допомогою джерела струму.

Енергія зарядженого конденсатора зі скляною пластинкою в середині:

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2}.$$

Ємність плоского конденсатора:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \cdot S}{d}.$$

або після підстановки C_1 в W_1 отримаємо:

$$W_1 = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 S U^2}{2d}.$$

Якщо на обкладках підтримувати сталу напругу, то, після вилучення скла, зміниться діелектрична проникливість середовища ϵ_2 між обкладками. Тоді зміниться і енергія конденсатора. Вона буде дорівнювати:

$$W_2 = \frac{\epsilon_2 \epsilon_0 S U^2}{2d}.$$

Зміна енергії у випадку "а":

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) \epsilon_0 S U^2}{2d}.$$

$$\text{Розмірність} - [\Delta W] = \frac{\text{Ф} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \text{Ф} \cdot \text{В}^2 = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{Дж}.$$

Числове значення –

$$\Delta W = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 300^2 \cdot (1-7)}{2 \cdot 10^{-3}} = -4,78 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

Розглянемо випадок б), коли до вилучення скляної пластинки конденсатор відімкнено від джерела напруги

Якщо конденсатор відімкнуто від джерела струму до вилучення скляної пластини, то зрозуміло, що після вилучення діелектрика зміниться електричне поле між обкладками і різниця потенціалів не буде зберігатись. Ємність конденсатора також зміниться:

$$\text{до вилучення} - C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdot S}{d}, \text{ після вилучення} - C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 \cdot S}{d}.$$

Але, в цьому випадку, буде зберігатися заряд на обкладках конденсатора (оскільки йому нікуди подітися, він сталий).

Тоді, енергію конденсатора до і після вилучення пластини, доцільно записати, через заряд і ємність конденсатора, двома співвідношеннями:

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1}; \quad W_2 = \frac{q^2}{2C_2}.$$

Тоді, зміна енергії буде дорівнювати:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right),$$

Оскільки ємність, за визначенням, це:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad \text{або:} \quad q = C_1 U,$$

то остаточно отримаємо вираз:

$$\Delta W = \frac{C_1^2 U^2}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = \frac{C_1^2 U^2}{2} \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 C_2} \right) = \frac{C_1 U^2}{2} \left(\frac{C_1 - C_2}{C_2} \right) = \frac{U^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \varepsilon_1 \varepsilon_0 S}{2d \varepsilon_2}.$$

Числове значення –

$$\Delta W = \frac{9 \cdot 10^4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1} = 3,35 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Розрахунки показують, що у випадку "а" енергія конденсатора зменшилась, а у випадку "б" – збільшилась.

Відповідь:

У випадку "а" енергія конденсатора зменшилась на $\Delta W = -4,78 \cdot 10^{-5}$ Дж.

У випадку "б" енергія конденсатора збільшилась на $\Delta W = 3,35 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Два заряди, значеннями $1 \cdot 10^{-7}$ Кл і $5 \cdot 10^{-8}$ Кл, розташовані на відстані 0,1 м. Третій заряд $1 \cdot 10^{-6}$ Кл, який розташований над цими зарядами так, що відстань до першого заряду дорівнює 12 см, а до другого – 10 см. Визначити силу, що діє на третій заряд зі сторони першого і другого зарядів.
2. Нитки, до яких приєднані дві кульки масою по 0,1 г кожна, з'єднані разом верхніми кінцівками. Довжина кожної нитки складає 0,1 м. Які заряди однакового знаку і значення необхідно надати кулькам, щоб кульки відхилилися одна від одної на кут 30° ?
3. Нитки, до яких приєднані дві кульки масою по 0,1 г кожна, з'єднані разом верхніми кінцівками. Довжина кожної нитки складає 0,1 м. Кулькам надані заряди однакового знаку і значенням 10 нКл. На який кут кульки відхилилися одна від одної?
4. У вершинах квадрату зі стороною 0,1 м закріплені чотири однакові заряджені кульки. Заряд кожної кульки складає 10 нКл. Яка сила діє на один з цих зарядів з боку останніх трьох зарядів?
5. Два точкових заряди $8 \cdot 10^{-8}$ Кл і $5 \cdot 10^{-8}$ Кл розташовані на відстані 0,1 м. Яка напруженість поля в точці, що лежить посередині відрізка, що з'єднує заряди?
6. Два точкових заряди $7 \cdot 10^{-8}$ Кл і $-1,5 \cdot 10^{-8}$ Кл розташовані на відстані 5 см. Яка напруженість поля в точці, яка розташована над цими зарядами так, що відстань до першого позитивного заряду дорівнює 3 см, а до другого негативного – 4 см?
7. В олію, густина якої 800 кг/м^3 , занурюють мідну кулю з зарядом $1,1 \cdot 10^{-8}$ Кл. В олії створюють однорідне електричне поле напруженістю $3,6 \cdot 10^3$ В/м. Електричне поле спрямоване вертикально вгору. При таких умовах куля знаходиться у рівновазі. При якому діаметрі кулі можлива така рівновага?
8. У вакуумі знаходиться безмежна вертикальна площина. Вона заряджена рівномірно. До нитки, що причеплена до цієї площини, приєднують заряджену кульку вагою $4 \cdot 10^{-5}$ Н і зарядом $6,67 \cdot 10^{-10}$ Кл. Площина і кулька заряджені однойменно. У результаті взаємодії, заряджена кулька відхиляється. Натяг нитки, на якій висить кулька, дорівнює $4,9 \cdot 10^{-4}$ Н. Яка поверхнева густина зарядів на площині?
9. На відстані 0,6 м розташовані два точкових одноіменних позитивних заряди $2 \cdot 10^{-10}$ Кл. Який негативний заряд треба помістити посередині між цими зарядами, щоб система зарядів знаходилась у рівновазі?

10. У вакуумі знаходиться безмежна вертикальна площина. Вона заряджена рівномірно з поверхневою густиною зарядів $3 \cdot 10^{-9}$ Кл/см². До нитки, що прицеплена до цієї площини, приєднують заряджену кульку масою 1 г і зарядом 10 нКл. Площина і кулька заряджені однойменно. У результаті взаємодії, заряджена кулька відхиляється. На який кут відхилиться заряджена кулька від площини?
11. Два точкових заряди $1 \cdot 10^{-9}$ Кл і $-1 \cdot 10^{-8}$ Кл знаходяться на відстані 0,55 м. В якій точці потенціал електричного поля дорівнює нулю? Визначити напруженість поля в цій точці.
12. У вакуумі знаходиться одновалентний іон. Чому дорівнює напруженість поля на відстані 0,2 нм від цього іона? Заряд іона вважати точковим.
13. Яка сила відштовхування, що діє на одиницю площі, двох однойменно заряджених безмежних площин? Площини мають однакову поверхневу густину зарядів значенням $3 \cdot 10^{-8}$ Кл/см².
14. Два точкових заряди $1 \cdot 10^{-7}$ Кл і $-2,5 \cdot 10^{-8}$ Кл знаходяться на відстані 8 см. В якій точці на прямій, яка проходить через заряди, напруженість поля буде дорівнювати нулю?
15. На яку відстань можуть зблизитись два електрони, що рухаються назустріч один одному? Відносна швидкість зближення електронів складає $1 \cdot 10^6$ м/с?
16. Електрон влітає в плоский конденсатор з нульовою швидкістю. При проходженні у плоскому конденсаторі відстані від однієї пластини до другої, він набуває швидкість 106 м/с. Відстань між пластинами дорівнює 5 мм. Чому дорівнює різниця потенціалів між пластинами конденсатора і напруженість електростатичного поля в середині конденсатора?
17. Який потенціал великої краплі, що утворена при з'єднанні восьми заряджених водяних крапель радіусом 1мм і з зарядом $1 \cdot 10^{-10}$ Кл кожна?
18. П'ятдесят однакових заряджених крапель ртуті зливаються в одну велику краплю. Кожна з крапель була заряджена до потенціалу 20 В. Який потенціал утвореної краплі?
19. Напруженість поля зблизу поверхні Землі складає 100 В/м. Якщо приймати Землю за кулю радіусом $6 \cdot 10^6$ м, визначити який заряд має Земля?
20. Нерухомий закріплений заряд 10 нКл і такий самий вільний заряд 10 нКл знаходяться на відстані 10 см. Яку роботу виконають сили поля, якщо вільний заряд переміститься на відстань 1 м від першого?

1.5.2. Постійний електричний струм. Закон Ома. Закони Кірхгофа

Скорочена теорія

«Сила струму чисельно дорівнює заряду, що протікає через поперечний переріз провідника».

Математично, це можна записати співвідношенням

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Якщо струм має постійне значення:

$$I = \frac{q}{t}.$$

Густина електричного струму дорівнює

$$J = \frac{I}{S},$$

де S – площа поперечного перерізу провідника.

Сила струму, що тече на ділянці провідника, визначається за законом Ома:

$$I = \frac{U}{R},$$

де U – напруга на цій ділянці; R – опір ділянки.

Опір провідника

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S},$$

де ρ – питомий опір; l – довжина; S – площа поперечного перерізу провідника.

Залежність питомого опору провідника від температури визначається співвідношенням

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

де ρ_0 – питомий опір при 0°C ; α – температурний коефіцієнт опору.

Закон Ома в інтегральній формі:

$$U = I \times R.$$

Кількість теплоти, що виділяється у провіднику при проходженні через нього струму за деякий час визначається законом Джоуля–Ленца.

Закон Джоуля–Ленца в інтегральній формі має вид:

$$Q = I^2 R t = I U t = \frac{U^2}{R} t.$$

Потужність електричного струму, що виділяється у провіднику при проходженні струму:

$$P = I^2 R = I U = \frac{U^2}{R}$$

Для розгалужених електричних схем мають місце **два закони Кірхгофа**.

Перший закон Кірхгофа: Алгебраїчна сума сил струмів, що сходяться у вузлі схеми (з урахуванням напрямку струмів), дорівнює нулю:

$$\Sigma I_i = I_1 + I_2 + I_3 + \dots = 0.$$

Другий закон Кірхгофа: У довільному замкненому контурі, алгебраїчна сума падінь напруги на окремих ділянках контуру, дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил, які присутні у цьому контурі:

$$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + \dots = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1., ЕРС акумулятора дорівнює 2,15 В. Він подає у зовнішній контур струм силою 5 А. Значення внутрішнього опору акумулятора дорівнює 0,18 Ом. Який ККД акумулятора?

Розв'язок

E = 2,15 В	З визначення, ККД джерела струму дорівнює відношенню корисної енергії, що витрачає джерело струму у зовнішньому колі, до всієї витраченої джерелом енергії: На підставі закону Джоуля – Ленца, для ККД можемо записати:
I = 5 А	
r = 0,18 Ом	
$\eta - ?$	
	$\eta = \frac{I^2 \cdot R \cdot t}{I^2 \cdot (R + r) \cdot t}.$

Запишемо закон Ома для повного контуру, і з нього визначимо зовнішній опір контуру:

$$I = \frac{E}{R + r} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{E}{I} - r.$$

Підставляючи значення R у рівняння (1), одержуємо

$$\eta = \frac{E/I - r}{E/I} = \frac{E - I \cdot r}{E}.$$

Числове значення ККД дорівнює

$$\eta = \frac{2,15 \text{ В} - 5 \text{ А} \cdot 0,18 \text{ Ом}}{2,15 \text{ В}} = 1 - \frac{5 \text{ А} \cdot 0,18 \text{ Ом}}{2,15 \text{ В}} = 1 - \frac{0,9 \text{ В}}{2,15 \text{ В}} = 0,58.$$

Відповідь: Числове значення ККД дорівнює $\eta = 0,58$.

Задача 2. Залізний дріт довжиною 1,5 м має переріз радіусом 0,3 мм. На кінцях дроту підтримується напруга 1,0 В. Яка потужність споживається у провідникові? Яка кількість тепла виділяється у дроті при проходженні струму протягом однієї години? Яка густина струму у провіднику? Яке число електронів проходить через поперечний переріз провідника за 1 с?

Розв'язок

$l = 1,5 \text{ м}$
 $U = 1,0 \text{ В}$
 $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
 $\rho = 8,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$
 $r = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}$
 $t_1 = 1 \text{ год} = 3600 \text{ с}$
 $t_2 = 1 \text{ с}$
 $P, Q, j, N - ?$

1. Згідно визначення, потужність, яка виділяється у провіднику, має вираз:

$$P = I \cdot U. \quad (1)$$

Силу струму знайдемо за законом Ома для ділянки кола:

$$I = U / R. \quad (2)$$

Опір провідника за його геометричними розмірами визначається так:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} = \frac{\rho \cdot l}{\pi \cdot r^2}, \quad (3)$$

де ρ – питомий опір матеріалу провідника; l – довжина провідника; S – площа поперечного перерізу провідника.

Підставляючи формулу (3) у формулу (2), маємо:

$$I = \frac{U \cdot \pi \cdot r^2}{\rho \cdot l}. \quad (4)$$

Числове значення сили струму

$$I = \frac{1,0 \cdot \pi \cdot (3 \cdot 10^{-4})^2 \cdot \text{В} \cdot \text{м}^2}{8,7 \cdot 10^{-8} \cdot 1,5 \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}^2} = 1,44 \text{ А}.$$

Згідно з формулою (1), потужність дорівнює:

$$P = I \cdot U = 1,44 \text{ А} \cdot 1,0 \text{ В} = 1,44 \text{ Вт}.$$

2. Кількість теплоти, що виділяється у провіднику за 1 годину, визначимо за формулою:

$$Q = I \cdot U \cdot t = 1,44 \text{ А} \cdot 1,0 \text{ В} \cdot 3600 \text{ с} = 5,18 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

2. Згідно визначення, густина постійного струму – це відношення сили струму до площі поперечного перерізу провідника.

Тоді, для густини струму, можна записати:

$$j = I / S = I / (\pi \cdot r^2) = 1,44 \text{ A} / (\pi \cdot 9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2) = 5,09 \cdot 10^6 \text{ A} / \text{м}^2 = 5,1 \text{ A/мм}^2.$$

4. Якщо визначимо заряд, який протікає через поперечний переріз провідника за одиницю часу (1с), можна знайти число електронів N, що проходять через поперечний переріз провідника за 1 с:

$$N = \frac{q}{e} = \frac{I \cdot t_2}{e},$$

де q – заряд, що пройшов через поперечний переріз провідника за час t_2 ; e – заряд електрона.

$$\text{Числове значення} - N = \frac{1,44 \cdot \text{A} \cdot 1 \cdot \text{с}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \text{Кл}} = 9 \cdot 10^{18}.$$

Відповідь: потужність яка споживається у провідникові $P = 1,44 \text{ Вт}$; кількість тепла, що виділяється у проводі при проходженні струму протягом 1 години $Q = 5,18 \cdot 10^3 \text{ Дж}$; густина струму у провіднику $j = 5,1 \text{ A/мм}^2$; число електронів, що проходить через поперечний переріз провідника за 1 с, дорівнює $N = 9 \cdot 10^{18}$.

Задача 3. Від електростанції треба передати потужність 50 кВт на відстань 5 км. Різниця потенціалів на клемх джерела енергії електростанції підтримується значенням $1 \cdot 10^5 \text{ В}$, При передачі, допускаються втрати напруги у дротах не більше 1%. Який найменший переріз буде мати мідний дріт, щоб виконались умови передачі енергії?

Розв'язок

$U = 1 \cdot 10^5 \text{ В}$	Падіння напруги у дротах	
$P = 50 \text{ кВт} = 5 \cdot 10^4 \text{ Вт}$		

$$U = I \cdot R, \quad (1)$$

$$n = 0,01$$

пропорціональне опору дротів:

$\ell = 5 \text{ км} = 5 \cdot 10^3 \text{ м}$		$R = \frac{\rho \cdot 2 \cdot \ell}{S}, \quad (2)$
$\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$		

$$S = ?$$

де ρ – питомий опір дроту; $2 \cdot \ell$ – довжина дротів

(враховуємо, що передача ведеться по двом дротам!); S – переріз дроту.

З виразу для потужності, яка виділяється у дроті при проходженні струму, струм I можна знайти за потужністю і напругою на клемх джерела струму:

$$I = \frac{P}{U}. \quad (3)$$

Враховуємо, що падіння напруги у дротах має становити не більше ніж частку в один відсоток (n) від прикладеної напруги

$$U_1 = n \cdot U. \quad (4)$$

Прирівняємо вирази (1) і (4) і підставимо значення I і R з формул (2) і (3):

$$\frac{P}{U} \frac{\rho \cdot 2 \cdot \ell}{S} = n \cdot U \quad \text{або} \quad S = \frac{2 \cdot \rho \cdot P \cdot \ell}{n \cdot U^2}.$$

$$\text{Розмірність} - [S] = \frac{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{Вт} \cdot \text{м}}{\text{В}^2} = \text{м}^2$$

Числове значення –

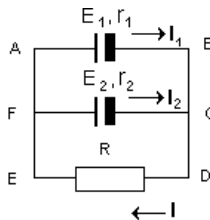
$$S = \frac{2 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^3}{0,01 \cdot 10^{10}} = 8,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2.$$

Відповідь: найменший переріз мідного дроту $S = 8,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2$.

Задача 4. Дві акумуляторні батареї з'єднані паралельно. ЕРС батарей 12 В і 10 В. Батареї мають однаковий внутрішній опір – по 1 Ом. До системи батарей приєднали електричну лампу. Який опір має бути у лампи, аби вона споживала максимальне значення потужності? Визначити цю максимальну потужність.

Розв'язок

$E_1 = 12 \text{ В}$
$E_2 = 10 \text{ В}$
$r_1 = r_2 = 1 \text{ Ом}$
$R, P - ?$



За умовами задачі, ми маємо розгалужену електричну схему.

Для розгалужених кіл, ми можемо застосувати закони Кірхгофа. Позначимо на схемі напрямки струмів, які протікають по різних ділянках схеми і виберемо напрямки обходу контурів.

За схемою маємо два вузли – F і C, в яких сходяться (розходяться) струми.

Використавши перший закон Кірхгофа, можна записати тільки одне рівняння, бо вузли C і F ідентичні. Сума струмів, наприклад, у вузлі C, дорівнює:

$$I_1 + I_2 - I = 0. \quad (1)$$

Застосуємо другий закон Кірхгофа для двох контурів ABDE і FCDE.

Для контуру ABDE виберемо обхід за годинниковою стрілкою. Тоді, з урахуванням напрямів струмів, можна записати:

$$I_1 \cdot r_1 + I \cdot R = E_1. \quad (2)$$

Аналогічно, для контуру FCDE;

$$I_2 \cdot r_2 + I \cdot R = E_2. \quad (3)$$

Система рівнянь (1) – (3) мають чотири невідомі: I_1 , I_2 , I і R . Визначим I_1 та I_2 з виразів (2) та (3). І підставимо їх значення у формулу (1). Звідки знаходимо значення струму в лампі, виражене через її опір лампи:

$$I = \frac{E_1 + E_2}{r + 2R}. \quad (4)$$

Потужність, що споживається електролапою, можна записати у такому вигляді:

$$P = I^2 \cdot R = (E_1 + E_2)^2 \frac{R}{(r + 2R)^2}. \quad (5)$$

Для визначення опору $R = R_0$, за яким лампа споживає максимальну потужність, треба знайти похідну від потужності по опору R . Згідно з правилами математики, функція має максимум, чи мінімум (екстремум), коли похідна буде дорівнювати нулю. Продиференціюємо рівняння (5) за R і прирівняємо похідну до нуля:

$$(E_1 + E_2)^2 \frac{r - 2R_0}{(r + 2R_0)^3} = 0,$$

звідки одержуємо $R_0 = r/2$. Оскільки величина P позитивна, то це значення R відповідає максимуму, у чому легко впевнитися, застосувавши метод зміни знаку першої похідної при переході через значення R_0 . З урахуванням того, що $R_0 = r/2$, за формулою (5) обчислюємо максимальну потужність лампи:

$$P_{\max} = (E_1 + E_2)^2 \frac{R_0}{(r + 2R_0)^2} = \frac{22^2 \cdot B^2 \cdot 0,5 \cdot \text{Ом}}{4 \cdot \text{Ом}^2} = 60,5 \text{ Вт}.$$

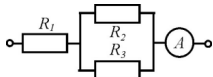
Відповідь: максимальну потужність $P_{\max} = 60,5 \text{ Вт}$

Задачі для самостійного розв'язання

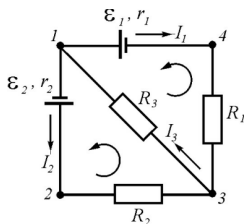
1. Сила струму у провіднику змінюється з часом за законом $I = 4 + 2 \cdot t$. Яка кількість заряду проходить через поперечний переріз цього провідника за час між двома моментами часу – від $t_1 = 2 \text{ с}$ до $t_2 = 6 \text{ с}$?
2. Від колгоспної електростанції до електрифікованого току на відстань 5 км треба провести повітряну лінію електропередачі. Розрахувати вагу і поперечний переріз мідного проводу, який потрібно використати, якщо опір лінії має бути не більшим 1,7 Ом?
3. Колгоспна електростанція живить струмом електродвигун водяного насосу, який розміщений на відстані 500 м і споживаючий струм 10 А.

- Скільки кілограмів сталевго проводу потрібно використати, щоб втрати напруги були не більше чим 30 В?
4. Визначити заряд, який пройшов через поперечний переріз провідника із опором 3 Ом при рівномірному зростанні напруги на кінцях проводу від 2 В до 4 В протягом 20 с.
 5. На клеммах батареї акумулятора напруга дорівнює 12 В. Амперметр показує струм 5,1 А. Зовнішнє коло складається з трьох паралельно з'єднаних ламп з однаковими опорами. Визначити опір кожної лампи.
 6. Радіотрансляційна мережа має 100 репродукторів опором 4000 Ом кожний. Напруга в мережі 30 В. Визначити загальний опір всіх репродукторів, увімкнених паралельно, струм у кожному з них і загальний струм живлення репродукторів.
 7. Для освітлення будівельного майданчика встановлюють ліхтар із номінальною напругою 120 В і опором 30 Ом. Щоб його можна було увімкнути в мережу 220 В послідовно з ліхтарем додають додатковий опір. Який додатковий опір треба з'єднати з ліхтарем, його не спалити?
 8. Вольтметр має опір 6000 Ом і розрахований на вимірювання напруги 150 В. Який додатковий опір треба від'єднати послідовно до вольтметра, щоб ним можна було вимірювати напругу 250 В?
 9. Мають призначений для вимірів напруги до 30 В вольтметр опором 2 кОм, шкала якого розбита на 150 поділок. Який опір треба взяти і як його увімкнути, щоб вольтметром можна було вимірювати напругу до 75 В? Як зміниться при цьому ціна поділки вольтметра?
 10. Амперметр, придатний для вимірів сили струму до 0,1 А. Він має опір 0,2 Ом. Його треба використати послідовно для вимірів сили струму 1 А, 5 А, 10 А. Визначити опори шунтів до амперметру у кожному випадку окремо.
 11. Мають призначений для вимірювання струмів до 10 А амперметр опором 0,18 Ом, шкала якого розділена на 100 поділок. Який опір треба взяти і як його увімкнути, щоб цим амперметром можна було вимірювати силу струму до 100 А. Як зміниться при цьому ціна поділки приладу?
 12. Реостат виготовлений з мідного дроту поперечним перерізом $S = 1\text{ мм}^2$. Питомий опір міді дорівнює $\rho = 1,68 \cdot 10^{-8}$ ом м. Якої довжини треба намотати на реостат мідний дріт, щоб отримати опір реостата $R = 10$ Ом?
 13. Опір між сухими долонями людини дорівнює $R_1 = 1 \cdot 10^5$ Ом. Якщо долоні вологі, опір дорівнює $R_1 = 500$ Ом. Який струм пройде через тіло

- людини у першому і другому випадках, якщо долоні людини будуть контактувати з напругою 220В?
14. Ділянка електричного кола складається з трьох послідовно з'єднаних провідників однакової довжини, але з різним поперечним перерізом. Поперечний переріз першого провідника дорівнює $S_1 = 1 \text{ мм}^2$, другого – $S_2 = 2 \text{ мм}^2$, а третього – $S_3 = 3 \text{ мм}^2$. Різниця потенціалів на кінцях цієї ділянки дорівнює 20В. Яке падіння напруги на кінцях кожного з провідників?
15. Яка густина струму у мідному провіднику довжиною 10 м, якщо він знаходиться під напругою 10 В. Питомий опір міді дорівнює $\rho = 1,68 \cdot 10^{-8} \text{ ом м}$.
16. Електрична піч зроблена з ніхромового дроту діаметром 1мм, який намотаний на фарфоровий циліндр радіусом 5 см. Скільки витків дроту треба намотати на циліндр, щоб отримати опір пічки, що дорівнюватиме 50 Ом. Питомий опір ніхрому дорівнює $\rho = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ ом м}$.
17. Який опір мідного дроту діаметром 2мм, якщо відомо, що його маса дорівнює 1кг. Вважати густину міді рівною 9 г/см^3 .
18. В електромережу підключили два опори $R_1 = 20 \text{ Ом}$ $R_2 = 80 \text{ Ом}$, які з'єднані між собою послідовно. Потім ці ж опори з'єднали паралельно і теж підключили в електромережу. У скільки разів буде відрізняться сила струму, яка тече по ділянці кола, у цих двох випадках? В якому випадку сила струму буде більша?



19. Опори $R_1 = 20 \text{ Ом}$ $R_2 = 40 \text{ Ом}$ і $R_3 = 40 \text{ Ом}$ з'єднані між собою, як показано на малюнку. Через провідники пропускають електричний струм. Амперметр показує значення 2 А. Чому дорівнює сила струму, яка протікає через кожний опір? Яке падіння напруги на кожному з опорів R_1 , R_2 , і R_3 ?



20. Джерела струму з'єднані з зовнішніми опорами, як показано на схемі. Перше джерело має електрорушійну силу (ЕРС) $\epsilon_1 = 2 \text{ В}$, а друге джерело – $\epsilon_2 = 2,5 \text{ В}$. Внутрішні опори джерел струму мають значення $r_1 = 1 \text{ Ом}$ і $r_2 = 1,5 \text{ Ом}$, відповідно. Значення зовнішніх опорів дорівнює $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$ і $R_3 = 40 \text{ Ом}$. Чому дорівнюють сили струмів I_1 , I_2 , I_3 на кожній ділянці електричного кола?

2.1. МАГНЕТИЗМ

Скорочена теорія

Вираз для напруженості магнітного поля, яка створена безмежно довгим прямолінійним струмом:

$$H = \frac{I}{2\pi r},$$

де I – сила постійного струму, що тече по провіднику; r – відстань від точки простору, де вимірюють магнітне поле, до провідника.

Вираз для напруженості магнітного поля в центрі колового струму

$$H = \frac{I}{2r},$$

де R – радіус колового струму.

Вираз для напруженості магнітного поля в середині тороїду:

$$H = n \cdot I,$$

де n – число витків одиниці довжини тороїду.

Вираз для напруженості магнітного поля в середині безмежно довгого соленоїду:

$$H = n \cdot I,$$

Напруженість і індукція магнітного поля пов'язані між собою співвідношенням:

$$B = \mu \cdot \mu_0 \cdot H,$$

де $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала; μ – відносна магнітна проникність середовища.

Об'ємна густина енергії магнітного поля має вигляд:

$$w = \frac{B \cdot H}{2}.$$

Потік вектора магнітної індукції (магнітний потік) через поверхню площею S має вигляд:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

де α – кут між напрямком магнітної індукції і нормаллю до поверхні.

Потік вектора магнітної індукції через поперечний переріз соленоїду:

$$\Phi = \mu \cdot \mu_0 \cdot I \cdot N \cdot S / \ell,$$

де ℓ – довжина соленоїду, N – число витків у соленоїді.

Згідно закону Ампера, у магнітному полі, з індукцією B , діє сила на елемент dl провідника зі струмом I :

$$dF = B \cdot I \cdot dl \cdot \sin \alpha,$$

де α – кут між напрямками індукції магнітного поля B і елемента провідника dl , який має напрям сили струму I .

Магнітний момент контуру зі струмом

$$p = I \cdot S,$$

де S – площа, яка охоплена контуром, по якому тече струм I .

Обертаючий момент, що діє на контур зі струмом зі сторони магнітного поля

$$M = p \cdot B \cdot \sin \alpha,$$

де α – кут між нормаллю до площини контуру зі струмом і напрямком індукції магнітного поля.

Два провідника зі струмами I_1 і I_2 , які розташовані на відстані r один від одного, взаємодіють з силою, яка дорівнює:

$$F = \mu \cdot \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \ell / 2 \cdot \pi \cdot r,$$

де ℓ – довжина ділянки провідників.

При переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі виконується робота:

$$dA = I \cdot d\Phi,$$

де $d\Phi$ – потік вектора магнітної індукції, який перетинає провідник зі струмом при переміщенні.

Сила Лоренца, діюча на частку з зарядом q , що рухається зі швидкістю v у магнітному полі з індукцією B :

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha,$$

де α – кут між векторами v і B .

Електрорушійна сила (ЕРС) індукції, яка виникає у контурі, який переміщується у магнітному полі, визначається за рівнянням

$$E_i = -d\Phi / dt.$$

ЕРС самоіндукції, яка виникає у контурі, якщо індуктивність контура L стала за часом, дорівнює:

$$E_c = -L \cdot dI / dt,$$

де L – індуктивність контуру, в якому змінюється струм.

Індуктивність соленоїду можна визначити, як:

$$L = \mu \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot \ell \cdot S,$$

де n – число витків соленоїда на одиницю довжини, S – площа перерізу соленоїду, ℓ – його довжина.

Енергія магнітного поля контуру зі струмом

$$W = L \cdot I^2 / 2.$$

Період електромагнітних коливань в контурі. Контур містить індуктивність L , ємність C і опір R

$$T = 2 \cdot \pi / (1/L \cdot C - R^2/4 \cdot L^2)^{1/2}.$$

Вираз для періоду власних коливань у контурі Томсона

$$T = 2\pi (L \cdot C)^{1/2}.$$

Імпеданс – повний опір кола змінному струму:

$$Z^2 = R^2 + (\omega \cdot L - 1/\omega \cdot C)^2,$$

де R , L , C – опір, індуктивність і ємність, послідовно ввімкнені в коло змінного струму з циклічною частотою ω .

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Протон рухається по дузі кола радіусом 60 см у магнітному полі. Значення індукції зовнішнього магнітного поля дорівнює 1 Тл. Яка кінетична енергія протона?

Розв'язок:

$$r = 60 \text{ см} = 0,6 \text{ м}$$

$$B = 1 \text{ Тл}$$

$$q = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$m = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$W = ?$$

Кінетичну енергію протона знайдемо за формулою:

$$W = \frac{mv^2}{2}, \quad (1)$$

де m – маса протона, v – його швидкість.

Так як протон рухається по колу, то на нього діє доцентрова сила, в якості якої виступає сила Лоренца:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \sin(\alpha), \quad (2)$$

де q – заряд протона, B – індукція магнітного поля, α – кут між напрямками швидкості протона і магнітного поля.

З (2) знаходимо швидкість протона, підставивши яку в (1), отримаємо розрахункову формулу для визначення кінетичної енергії протона:

$$W = \frac{r^2 q^2 B^2 \sin^2(\alpha)}{2m}$$

Перевіримо, чи дає розрахункова формула правильну одиницю вимірювання шуканої величини:

$$[W] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Кл}^2 \cdot \text{Тл}^2}{\text{кг}} = \frac{\text{Дж}^2}{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}} = \text{Дж}$$

Розрахуємо кінетичну енергію протона:

$$W = \frac{0,6^2 \cdot 1,602^2 \cdot 10^{-38} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 1,672 \cdot 10^{-27}} = 27,68 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

Відповідь: кінетична енергія протона $W = 27,68 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

Задача 2 Коливальний контур має у своєму складі конденсатор ємністю 500 пФ і котушку індуктивності 0,001 Гн. Яка довжина хвилі при резонансі контура?

Розв'язок:

$C=500 \text{ пФ} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ Ф}$	Період власних коливань контура можна визначити за формулою:
$L=0,001 \text{ Гн}$	
$c=3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$	
$\lambda=?$	
	$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (1)$
	де L – індуктивність котушки, C – ємність конденсатора.

Довжина хвилі λ при резонансі, визначається за формулою

$$\lambda = cT, \quad (2)$$

де c – швидкість поширення електромагнітних хвиль. Підставивши (1) в (2), маємо:

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$$

Перевіримо, чи дає розрахункова формула правильну одиницю вимірювання розшукуваної величини:

$$[\lambda] = \frac{\text{м}}{\text{с}} \sqrt{\text{Гн} \cdot \text{Ф}} = \frac{\text{м}}{\text{с}} \sqrt{\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{В}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}} \sqrt{\frac{\text{с} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}{\text{А}}} = \text{м}$$

Підставляємо чисельні значення:

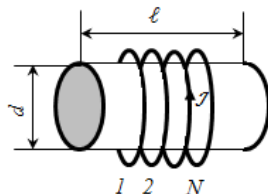
$$\lambda = 3 \cdot 10^8 \cdot 6,28 \cdot \sqrt{0,001 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 4,21 \cdot 10^4 \text{ м}$$

Відповідь: Довжина хвилі при резонансі контура $\lambda = 4,21 \cdot 10^4 \text{ м}$.

Задача 3 Обмотка котушки складається з 500 витків мідного дроту. Площа поперечного перерізу проволочки 1 мм^2 . Котушка має довжину 50 см і діаметр 5 см. Яка частота змінного струму, якщо повний опір Z котушки вдвічі більше її активного опору?

Розв'язок:

$$\begin{aligned} N &= 500 \\ s &= 1 \text{ мм}^2 \\ \rho &= 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \\ l &= 0,5 \text{ м} \\ d &= 5 \text{ см} \\ \frac{Z}{R} &= 2 \\ v &=? \end{aligned}$$



Повний опір котушки індуктивності

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (1)$$

де L – індуктивність котушки, ω – циклічна частота коливань.

Індуктивність задається співвідношенням

$$L = \frac{\mu \mu_0 N^2 S}{l} \quad (2)$$

де $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площа поперечного перерізу котушки.

Розділимо (1) на R :

$$\frac{Z}{R} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}$$

Звідси знайдемо циклічну частоту коливань:

$$\omega = \frac{R}{L} \cdot \sqrt{\left(\frac{Z}{R}\right)^2 - 1}$$

Циклічна частота коливань пов'язана з частотою коливань співвідношенням:

$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L} \cdot \sqrt{\left(\frac{Z}{R}\right)^2 - 1} \quad (3)$$

У співвідношенні (3) необхідно знайти відношення $\frac{R}{L}$, після чого можна приступити до розрахунку частоти коливань v .

З умов відомо, провідник має довжину $N \cdot \pi \cdot d$. Тоді опір буде дорівнювати:

$$R = \rho \frac{N \pi d}{s}$$

Тому, для відношення $\frac{R}{L}$, можна записати:

$$\frac{R}{L} = \frac{\rho N \pi d l}{s \mu \mu_0 N^2 S} = \frac{4 l \rho}{\mu \mu_0 S N d}$$

Остаточно отримуємо:

$$v = \frac{2I\rho}{\pi\mu_0 S Nd} \cdot \sqrt{\left(\frac{Z}{R}\right)^2 - 1} \quad (4)$$

Знаходимо чисельне значення частоти змінного струму для $\mu = 1$:

$$v = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot 0,05} \cdot \sqrt{3} = 298 \text{ Гц}$$

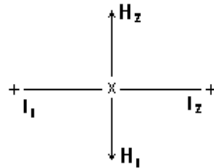
Відповідь: частота змінного струму 298 Гц.

Задача 4 Два довгих прямолінійних провідника розташовані на відстані 5 см один від одного. По провідникам течуть однакові струми по 10 А. Яка напруженість магнітного поля в точці, яка лежить посередині між проводами у двох випадках: 1) коли струми течуть в одному напрямку; 2) коли струми течуть у протилежних напрямках?

Розв'язок

$$I_1 = I_2 = 10 \text{ А}$$

$$R = R / 2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$



$H - ?$

Напруженість магнітного поля в точці між провідниками дорівнює векторній сумі полів, створюваних струмами I_1 і I_2 . Напрямок напруженості магнітного поля від кожного зі струмів, у точці між проводами, знаходимо за правилом буравчика, абсолютну величину – за формулою

$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}, \quad (1)$$

де r – відстань від прямолінійного довгого провідника.

У даній задачі, абсолютні значення напруженостей від обох провідників однакові:

$$H_1 = H_2 = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{10 \cdot \text{А}}{2 \cdot \pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 63,6 \text{ А/м.}$$

У випадку однаково спрямованих струмів, за правилом правого гвинта, у точці між проводами вектори H_1 і H_2 протилежні. Результируюча напруженість дорівнює за модулем різниці модулів H_1 і H_2 :

$$H = H_1 - H_2 = 0.$$

У випадку, коли струми будуть текти у протилежних напрямках, за тим самим правилом правого гвинта, модуль результируючої напруженості дорівнює сумі модулів:

$$H = H_1 + H_2 = 127,3 \text{ А/м.}$$

В цьому випадку, вектор H_2 змінить напрям на протилежний. Тоді результируючий вектор H , згідно наведеного малюнка, буде спрямований до низу.

Відповідь: напруженість магнітного поля 1) $H=0$, 2) $H=127,3 \text{ А/м}$

Задачі для самостійного розв'язання

1. У однорідному магнітному полі 100 мТл знаходиться прямолінійна ділянка провідника довжиною 0,2 м зі струмом 10 А. Знайти силу, що діє на провідник, якщо кут між напрямками поля струму дорівнює 30° .
2. У магнітне поле з індукцією 1 Тл помістили квадратну рамку зі струмом. По рамці тече струм 5 А. Площа рамки 25 см^2 , кут між напрямком напруженості магнітного поля і нормаллю до площі рамки складає 30° . Який обертовий момент сил, що діють на рамку?
3. Відстань між паралельними шинами електростанції 0,2 м. Довжина шин 2 м. Знайти силу взаємодії шин при струмі 10 кА.
4. Електрон влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно силовим лініям. Значення індукції магнітного поля – 5 Тл. Яка сила діє на електрон, якщо його швидкість дорівнює $2 \cdot 10^7 \text{ м/с}$?
5. Протони у прискорювачі повинні обертатися по колу радіусом 100 м зі швидкістю $3 \cdot 10^7 \text{ м/с}$. Яка має бути індукція магнітного поля, при якій рух протонів буде стійкий?
6. У магнітне поле, індукція якого дорівнює 0,3 Тл влітає заряджена частинка зі швидкістю $1 \cdot 10^6 \text{ м/с}$. Радіус кола, по якому починає рухатись частинка, дорівнює 4 см. Відомо, що енергія частинки дорівнює 12 кеВ. Який заряд частинки?
7. Відстань між двома паралельними прямолінійними провідниками дорівнює 10 см. По провідниках течуть в одному напрямі струми 3 А і 5 А. Яка індукція магнітного поля в точці, що знаходиться посередині між провідниками?
8. Відстань між двома паралельними прямолінійними провідниками дорівнює 10 см. По провідниках течуть в одному напрямі струми 3 А і 5 А. Яка індукція магнітного поля в точках, що лежать на відстані 4 см за другим провідником на продовженні лінії, що з'єднує провідники?
9. Відстань між двома паралельними прямолінійними провідниками має значення 10 см. По провідниках течуть струми 3 А і 5 А в одному напрямі. Яке значення індукції магнітного поля в точці, що лежить на відстані 5 см перед першим провідником на продовженні лінії, що з'єднує провідники?
10. Відстань між двома паралельними прямолінійними провідниками дорівнює 20 см. По провідниках течуть у протилежних напрямках струми 5 А і 8 А. Яка індукція магнітного поля в точках, що знаходяться посередині між провідниками.
11. Відстань між двома паралельними прямолінійними провідниками дорівнює 12 см. По провідниках течуть в одному напрямі струми 20 А і 50 А. Визначити напруженість магнітного поля у точці, яка віддалена від

першого провідника на 8 см і від другого – на 20 см.

12. Напруга 30 В прикладена до кінців дрітного кільця опором 3 Ом. Індукція магнітного поля у центрі кільця дорівнює $1,26 \cdot 10^{-5}$ Тл. Визначити який радіус кільця?
13. З двох метрів дроту зроблено кільце. По дроту пропускають струм. У центрі цього кільця індукція магнітного поля дорівнює $3,94 \cdot 10^{-7}$ Тл. Яка силу струму тече по кільцеві?
14. Соленоїд зроблений таким чином, що на ізольований циліндр впритул намотано дріт. Густина намотки складає 10 витків на кожний сантиметр довжини. Через соленоїд пропустили електричний струм силою 2 А. Яка напруженість магнітного поля в середині на вісі соленоїда?
15. Провідник поміщено між полюсами електромагніту, який створює однорідне магнітне поле з індукцією 0,1 Тл. По провіднику тече струм силою 70 А. Довжина провідника 70 см. Яка сила діє на провідник, якщо він розміщений між полюсами перпендикулярно силовим лініям?
16. Прямолінійний провідник, довжиною 20 см, поміщено в однорідне магнітне поле. Індукція магнітного поля складає $1,26 \cdot 10^{-3}$ Тл. По провіднику пропускають струм 50 А. Кут між напрямком струму і вектором індукції складає 30° . Яка сила зі сторони поля діє на провідник?
17. На прямолінійний провідник, який знаходиться однорідному магнітному полі перпендикулярно силовим лініям, діє сила зі сторони магнітного поля $2,6 \cdot 10^{-3}$ Н. Провідник має довжину 10 см. Струм, який тече по провіднику, дорівнює 0,5 А. Яке значення індукції магнітного поля?
18. Електромагнітом створене однорідне магнітне поле з напруженістю 100 А/м. В нього помістили коловий дріт, по якому тече струм 50 А. Радіус кола складає 10 см. Площина витка становить кут 60° з лініями напруженості магнітного поля. Знайти обертальний момент, що діє на виток зі струмом у магнітному полі.
19. По двох прямолінійних провідниках, розташованих паралельно один до одного, течуть однакові струми. Провідники відштовхуються із силою 0,02 Н на кожний метр довжини провідника. Відстань між провідниками дорівнює 10 см. Яка силу струму тече по кожному з провідників? Який їх напрям?
20. Електрон, розганяють електричним полем з різницею потенціалів 300 В. Після розгону, електрон починає рухатись паралельно прямолінійному провіднику на відстані 4 мм від нього. по провіднику пропустити струм 5 А. Яка сила діятиме на електрон зі сторони провідника? Яка природа цієї сили?

2.2. ОПТИКА

Скорочена теорія

При переході променя з одного середовища в друге, справедливий закон заломлення світла:

$$n = \sin \alpha / \sin \gamma = v_1 / v_2, \quad (1)$$

де n – показник заломлення світла (другого середовища відносно першого); α – кут падіння; γ – кут заломлення; v_1 і v_2 – швидкості поширення світла у першому і другому середовищах, відповідно.

Умови для максимуму і мінімуму інтерференції, відносно різниці ходу, відповідно становить:

$$\text{max} - \Delta = k \cdot \lambda; \quad \text{min} - \Delta = (2k + 1) \cdot \lambda / 2; \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Для щілин Юнга відстань Δx між інтерференційними смугами на екрані дорівнює:

$$\Delta x = \lambda \cdot l / d, \quad (3)$$

де λ – довжина світлової хвилі; l – відстань від щілин до екрана; d – відстань між щілинами.

При відбитті від нижньої та верхньої границі тонкої плівки різниця ходу Δ між променями становить:

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}, \quad (4)$$

де d – товщина плівки; n – показник заломлення плівки; α – кут падіння; λ – довжина хвилі світла.

Радіуси темних та світлих кілець Ньютона можна визначити через довжину світлової хвилі λ та радіус лінзи R :

$$r_k = \sqrt{kR\lambda} \quad (k = 1, 2, \dots); \quad r_k = \sqrt{(2k - 1)R \frac{\lambda}{2}} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Закон Малюса: Інтенсивність поляризованого світла I , яке пройшло через аналізатор, зменшується відносно початкової інтенсивності I_0 за законом:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (6)$$

де φ – кут між головними площинами поляризатора і аналізатора.

Закон Брюстера: Кут падіння α_B , що відповідає повній поляризації променя світла, відбитого від діелектрика, пов'язаний з показником заломлення діелектрика n співвідношенням

$$\operatorname{tg} \alpha_B = n. \quad (7)$$

Кут повороту φ площини поляризації світлового променя, що пройшов оптично активну речовину, пропорційний шляху l , пройденому променем у речовині

$$\varphi = \alpha \cdot l, \quad (8)$$

де α – коефіцієнт питомого обертання.

Для розчинів оптично активних речовин у формулу (8) треба додати значення концентрації розчину – c :

$$\varphi = \alpha \cdot c \cdot l. \quad (9)$$

Дифракційна ґратка. При нормальному падінні світла на дифракційну ґратку, кут φ_k , під яким спостерігається на екрані максимум k -го порядку залежить від довжини хвилі λ наступним співвідношенням:

$$b \cdot \sin \varphi_k = k \cdot \lambda; \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (10)$$

де b – стала дифракційної ґратки.

Найменша відстань між точками Δx , при якій вони не співпадають при розгляді під мікроскопом, задається співвідношенням

$$\Delta x = 0,61\lambda \frac{1}{n \sin(u/2)}, \quad (11)$$

де λ – довжина хвилі світла; n – показник заломлення середовища між предметом і об'єктивом; u – апертурний кут.

Формула Вульфа-Брегга: Описує дифракцію рентгенівського випромінювання на кристалічних речовинах:

$$2d \cdot \sin \theta = k \cdot \lambda; \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (12)$$

де d – стала кристалічної ґратки; θ – кут ковзання; k – порядок максимуму; λ – довжина хвилі рентгенівського випромінювання.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Інтерференційну картину спостерігають при накладанні на екрані променів від двох когерентних джерел. Довжина хвилі випромінювання дорівнює $\lambda = 0,8$ мкм. Коли на шляху одного з променів, перпендикулярно йому, розташовують мильну плівку з показником заломлення $n=1,33$, інтерференційна картина на екрані змінюється на протилежну. Яка найменша товщина плівки, при якій це можливо?

Розв'язок

$\lambda = 0,8$ мкм	Зміна інтерференційної картини на протилежну свідчить про те, що на тих точках екрану, де спостерігалися максимуми інтенсивності світла, почнемо бачити мінімуми інтенсивності, і навпаки.
$n = 1,33$	
$d_{\min} - ?$	

Таке відбувається при зміні оптичної різниці ходу променів на непарне число напівдовжин хвилі.

Для мінімальної товщини плівки різниця ходу буде дорівнювати $\frac{\lambda}{2}$.

Тоді, для мінімальної товщини плівки $d_{\min}$, можна записати:

$$d_{\min} \cdot (n - 1) = \frac{\lambda}{2},$$

$$\text{звідки} \quad d_{\min} = \frac{\lambda}{2 \cdot (n - 1)} = \frac{0,8 \cdot \text{мкм}}{0,66} = 1,21 \text{ мкм}.$$

Відповідь: найменша товщина плівки $d_{\min} = 1,21$ мкм.

Задача 2. Кут між відбитим та падаючим променями на плоске дзеркало становить 70° . Під яким кутом падає на дзеркало промінь?

Розв'язок

$\alpha + \beta = 70^\circ$
$\alpha = ?$

Згідно закону відбивання світла, кут падіння дорівнює куту відбивання:
 $\alpha = \beta$, тобто

$$\alpha = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ.$$

Відповідь: промінь падає на дзеркало під кутом $\alpha = 35^\circ$.

Задача 3. Знайдіть показник заломлення рубіну, якщо граничний кут повного внутрішнього відбивання для рубіну становить 34° .

Розв'язок

$\alpha_{\text{гр}} = 34^\circ$
$n = ?$

Згідно явищу повного внутрішнього відбивання, граничний кут повного відбивання $\alpha_{\text{гр}}$ зв'язаний з абсолютним показником заломлення середовища n співвідношенням:

$$\sin \alpha_{\text{гр}} = \frac{1}{n}.$$

Звідси

$$n = \frac{1}{\sin \alpha_{\text{гр}}}.$$

Підставимо числові значення величин:

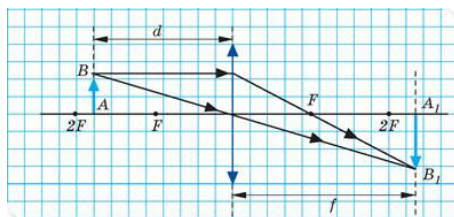
$$n = \frac{1}{\sin 34^\circ} = \frac{1}{0,559} = 1,79.$$

Відповідь: показник заломлення рубіну $n = 1,79$.

Задача 4. Предмет розташований на відстані 25 см від двопуклої лінзи. Дійсне зображення предмета також розміщено на відстані 25 см від лінзи. Яка фокусна відстань двопуклої лінзи?

Розв'язок

$d = 25 \text{ см};$
$f = 25 \text{ см};$
$F = ?$



Для розв'язання задачі потрібно використати формулу лінзи:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

Звідси фокусна відстань становить:

$$F = \frac{f \cdot d}{f + d} \rightarrow F = \frac{25 \text{ см} \cdot 25 \text{ см}}{25 \text{ см} + 25 \text{ см}} = 12,5 \text{ см}.$$

Відповідь: фокусна відстань двоопуклої лінзи $F = 12,5 \text{ см}$.

Задача 5. Яка довжина хвилі світлового випромінювання, якщо максимум другого порядку у дифракційній картині, одержаний за допомогою дифракційної ґратки з періодом $0,01 \text{ мм}$, спостерігається під кутом $6^\circ 22'$?

Розв'язок

$$\varphi_2 = 6^\circ 22';$$

$$b = 0,01 \text{ мм};$$

$$\lambda = ?$$

Задача розв'язується за формулою головних максимумів дифракційної ґратки:

$$b \sin \varphi_k = k \lambda,$$

де k , за умовою задачі, дорівнює двом. Тоді

$$\lambda = \frac{1}{2} b \sin \varphi_2 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \cdot \sin(6^\circ 22') = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \cdot 0,111 = 0,555 \cdot 10^{-6} (\text{м}) = 555 (\text{нм}).$$

Відповідь: довжина хвилі світлового випромінювання $\lambda = 555 \text{ нм}$.

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Промінь світла падає на межу розділу двох середовищ під кутом 40° . Кут заломлення променя $19^\circ 30'$. Визначте показник заломлення.
2. Світло випромінюється із води у повітря. Чому дорівнює кут падіння, якщо після заломлення він ковзає по поверхні води?
3. Визначте кут конуса променів, що поширюються від точкового джерела світла, розташованого під водою. Показник заломлення світла для води 1,33.
4. Людина дивиться на гладку поверхню води у судині майже по вертикалі. У скільки разів здається, що відстань від поверхні води до дна менша за реальну висоту рівня води?
5. Який кут падіння променя світла на поверхню кристалу з показником заломлення 2,42, якщо кут між відбитим та заломленим променями встановлюється 90° ?
6. Людина знаходиться на відстані 4 м від плоского дзеркала. На якій відстані вона побачить своє зображення, якщо дзеркало відсунути на $1,5 \text{ м}$?

7. Абсолютні показники заломлення скла та алмазу дорівнюють відповідно 1,5 та 2,42. Чому буде становити відношення товщин цих речовин, щоб час поширення світла в них відносився як 2:1?
8. Посередині між двома плоскими дзеркалами знаходиться точка. Скільки зображень точки формується у дзеркалах, якщо площини дзеркал орієнтовані одна відносно іншої під кутом 45° ?
9. Предмет знаходиться на відстані 60 см від опуклої лінзи з фокусною відстанню 10 см. На якій відстані від предмету буде його зображення?
10. Задано: 1) положення головної оптичної осі O_1O_2 лінзи; 2) хід променя АВ, падаючого на лінзу; 3) хід променя CD, заломленого лінзою. Знайдіть побудовою положення головних фокусів лінзи.
11. Фокусна відстань збірної лінзи складає 10 см. Знайти, на якій відстані від лінзи треба розташувати предмет, щоб його уявне зображення знаходилось на відстані 25 см від лінзи?
12. Відстань між електричною лампочкою та екраном 1 м. В якому положенні збірної лінзи з фокусною відстанню 21 см зображення нитки розжарення лампочки буде найбільш чітким ?
13. Який найбільший порядок спектру для світла, довжина хвилі якого $5,55 \cdot 10^{-7}$ м, може дати дифракційна ґратка з періодом 0,01 мм?
14. Період дифракційної ґратки становить 0,02 мм. Дифракційну ґратку опромінюють зеленим світлом з довжиною хвилі $\lambda = 0,55$ мкм. Визначити кут відхилення променів у спектрі першого порядку на екрані за дифракційною ґраткою.
15. Різниця ходу двох інтерферуючих променів від когерентних джерел світла становить $1,65 \cdot 10^{-7}$ м. Довжина хвилі джерел світла складає $6,6 \cdot 10^{-7}$ м. Визначити умови інтерференції цих хвиль. Чи будуть хвилі підсилювати чи ослаблювати одна одну?
16. Різниця ходу від двох інтерферуючих когерентних джерел монохроматичного світла становить $12,6 \cdot 10^{-7}$ м. Довжина хвилі світла – $6,3 \cdot 10^{-7}$ м. Визначити, підсилюють ці хвилі одна одну чи ослаблюють?
17. На мильну плівку нормально падає пучок білого світла. Показник заломлення плівки – 1,3. У відбитому світлі плівка здається зеленою (довжина хвилі $\lambda = 0,55$ мкм). Яка повинна бути найменша товщина плівки, щоб відбувалось таке явище?
18. На мильну плівку з показником заломлення $n = 1,33$ падає біле світло. Кут падіння складає 45° . При якій найменшій товщині плівки відбите від неї світло буде зеленим (довжина хвилі $\lambda = 550$ нм)?
19. Проводять дослід Юнга. Відстань між отворами дорівнює 1 мм, а відстань від отворів до екрана – 3 м. Отвори освітлювались червоним світлом з довжиною хвилі $6 \cdot 10^{-5}$ см. Знайти положення трьох перших світлих смуг на екрані.
20. Проводять дослідження з кільцями Ньютона. Діаметр другого світлого кільця Ньютона у відбитому світлі довжиною хвилі ($\lambda = 0,6$ мкм)

дорівнює 1,2 мм. Знайти оптичну силу плоско-опуклої лінзи, взятої для досліджу.

21. На екран падають два когерентних променя світла. Джерела світла знаходяться на відстані 1 мм один від одного. Відстань від джерел до екрана становить 3,5 м. Довжина хвилі використаного світла – 400 нм. Визначити, де знаходяться перший та другий інтерференційний максимум, відносно центрального максимуму.
22. Пучок паралельних променів падає на мильну плівку під кутом 45° . Довжина хвилі променів $6 \cdot 10^{-7}$ м, Показник заломлення мильної плівки становить 1,33. При якій найменшій товщині плівки відбите від неї світло максимально ослаблене?
23. Кожний інтерференційний максимум, створений на екрані двома когерентними джерелами білого світла, є багатокольоровим, з червоним ($\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м) зовнішнім і фіолетовим ($\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ м) внутрішнім краями. Яка ширина першого максимуму, якщо відстань між джерелами світла 4 мм, а від них до екрана – 4 м?
24. Різниця ходу двох когерентних променів до точки простору становить $2,5 \cdot 10^{-6}$ м. Визначити довжину хвилі світла, яке дасть інтерференційний максимум в цій точці.
25. Яка стала дифракційної ґратки, якщо при спостереженні у монохроматичному світлі ($\lambda = 0,6$ мкм) максимум п'ятого порядку відхилений на кут 18° ?
26. Знайти найбільший порядок максимуму спектра натрію для жовтої лінії ($\lambda = 589$ нм), якщо стала дифракційної ґратки дорівнює 2 мкм.
27. Від розрядної трубки, що заповнена гелієм, на дифракційну ґратку нормально падає пучок світла. На яку довжину хвилі лінії у спектрі третього порядку накладається червона лінія гелію ($\lambda = 6,7 \cdot 10^{-5}$ см) спектра другого порядку?
28. Скільки штрихів на 1 мм довжини має дифракційна ґратка, якщо зелена лінія ртуті (546,1 нм) у спектрі першого порядку виникає під кутом $19^\circ 8'$?
29. На дифракційну ґратку нормально падає пучок світла. Чому повинна дорівнювати стала дифракційної ґратки, щоб у напрямі $\varphi = 41^\circ$ співпали максимуми двох ліній – 656,2 нм і 410,2 нм?
30. На дифракційну ґратку нормально падає монохроматичне світло довжиною хвилі 600 нм. Ґратка має 200 штрихів на міліметр. Визначити число дифракційних максимумів, що виникнуть у даному випадку.

2.3. КВАНТОВА ФІЗИКА. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Скорочена теорія

При русі тіла зі швидкістю, близькою до швидкості світла, довжина тіла l в рухомій системі відліку зменшується порівняно з довжиною l_0 в нерухомій системі відліку згідно закону:

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

де v – швидкість рухомої системи відліку; c – швидкість світла у вакуумі.

При русі тіла зі швидкістю, близькою до швидкості світла також змінюється і рух часу. В рухомій системі відліку інтервал часу τ відносно спостерігача, зростає порівняно з часовим інтервалом τ_0 в системі, нерухомій для спостерігача. Зв'язок між цими інтервалами часу можемо записати співвідношенням:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

де v – швидкість рухомої системи відліку; c – швидкість світла у вакуумі.

Маса m і енергія E тіл, що рухається із швидкістю v , близькою до швидкості світла c , збільшуються. Це збільшення задається такими рівняннями:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

де m_0 – маса спокою; c – швидкість світла у вакуумі.

Закон Кірхгофа: Енергетична світимість тіла R , в умовах теплової рівноваги, і його поглинальна здатність A пов'язані між собою співвідношенням:

$$R/A = R^*,$$

де R^* – енергетична світимість абсолютно чорного тіла.

Енергетична світимість абсолютно чорного тіла R^* пов'язана з його абсолютною температурою T співвідношенням:

$$R^* = \sigma \cdot T^4,$$

де σ – стала Стефана-Больцмана; T – абсолютна температура.

Закон Віна: Довжина хвилі, що відповідає максимуму спектральної енергетичної світимості абсолютно чорного тіла $\lambda_{\max}$, пов'язана з його абсолютною температурою співвідношенням:

$$\lambda_{\max} = \frac{c}{T},$$

де c – стала Віна; T – абсолютна температура.

Формула Ейнштейна для фотоэффекта: Енергія фотона ($\varepsilon = h \cdot \nu$), що викликає фотоэффект, пов'язана з кінетичною енергією фотоелектронів ($m \cdot v^2/2$), які вилітають з поверхні метала, і роботою виходу електрона співвідношенням:

$$h \cdot \nu = A + \frac{m \cdot v^2}{2},$$

де A – робота виходу електрона з металу; h – стала Планка; ν – частота світлового випромінювання.

Частоти ν (або довжини хвиль λ), що відповідають лініям водневого спектра, мають вид:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = R \cdot c \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

де c – швидкість світла у вакуумі; R – стала Рідберга; n і m – номери орбіт електронів атому водню.

Принцип де-Бройля: Для мікрочасток з масою m , які рухаються зі швидкістю v , будуть відповідати хвилі з довжиною λ . Довжина хвилі пов'язана з масою частинки співвідношенням:

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

де h – стала Планка.

Дефект маси ядра Δm визначається за формулою

$$\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_{\text{я}},$$

де Z – порядковий номер ізотопу; A – масове число; m_p – маса протона; m_n – маса нейтрона; $m_{\text{я}}$ – маса ядра.

Енергія зв'язку ядра визначається співвідношенням

$$E = \Delta m \cdot c^2,$$

де Δm – дефект маси ядра; c – швидкість світла у вакуумі.

Залежність електропровідності σ напівпровідників від температури має вигляд:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}},$$

де σ_0 – деяка стала, ΔE – ширина забороненої зони, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Знайдіть червону межу фотоефекту для калію. Робота виходу електронів калію 2,2 еВ.

Розв'язок

$$A = 2,2 \text{ еВ};$$

$$\lambda_{\text{max}} - ?$$

Задача розв'язується, виходячи з формули Ейнштейна для фотоефекту:

$$h\nu = A + \frac{mV^2}{2},$$

де h – стала Планка ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с), ν – частота поглинутого речовиною випромінювання, m – маса електрона ($m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг), V – швидкість вибитого фотоелектрона.

Червона межа фотоефекту означає мінімальну частоту (максимальну довжину хвилі) випромінювання, при якій починається явище фотоефекту. При цьому швидкість фотоелектрона, який вилітає з поверхні, дорівнює нулю. Звідси

$$h\nu_{\text{min}} = A.$$

Тоді, враховуючи зв'язок між частотою ν та довжиною хвилі $\lambda - \nu = \frac{c}{\lambda}$, де c – швидкість світла у вакуумі ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с), одержимо

$$\nu_{\text{min}} = \frac{A}{h} \rightarrow \lambda_{\text{max}} = \frac{h \cdot c}{A}.$$

Оскільки одиниця енергії в атомній фізиці – електрон-вольт становить $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж, то розрахунок червоної межі дасть наступне число:

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 565 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 565 \text{ нм}.$$

Перевіримо розмірність отриманої величини:

$$[\lambda_{\text{max}}] = \frac{(\text{Дж} \cdot \text{с}) \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{Дж}} = \text{м}.$$

Відповідь: червона межа фотоефекту дорівнює $\lambda_{\text{max}} = 565$ нм.

Задача 2. Гелій-неоновий газовий лазер, працюючи у неперервному режимі, розвиває потужність 40 мВт. Лазер випромінює монохроматичне поляризоване світло з довжиною хвилі 660 нм. Скільки фотонів випромінює лазер за 1 с?

Розв'язок

$N = 40 \text{ мВт};$ $t = 1 \text{ с};$ $\lambda = 660 \text{ нм}$ $n = ?$
--

Задача розв'язується виходячи з закону збереження енергії: енергія, що випромінюється за одиницю часу (потужність) еквівалентна сумарній енергії фотонів.

Таким чином,

$$N = n \cdot h\nu,$$

де h – стала Планка ($h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$),

ν – частота квантів випромінювання;

n – кількість фотонів, що випромінює лазер за 1 с.

Тоді, враховуючи зв'язок між частотою ν та довжиною хвилі λ , отримаємо:

$$\nu = \frac{c}{\lambda},$$

де c – швидкість світла у вакуумі ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$),

одержимо остаточно скільки фотонів випромінює лазер за 1 с

$$N = n \cdot h \frac{c}{\lambda} \rightarrow n = \frac{N \cdot \lambda}{hc} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 660 \cdot 10^{-9}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 133 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{\text{с}}\right).$$

Перевіримо розмірність отриманої величини:

$$[n] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{м}}{(\text{Дж} \cdot \text{с}) \frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{Вт}}{\text{Вт} \cdot \text{с}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Відповідь: кількість фотонів, що випромінює лазер за 1 с $n = 1,33 \cdot 10^{17} / \text{с}$.

Задача 3. Електрон рухається зі швидкістю, яка складає 0,9 від швидкості світла у вакуумі. Яку кінетичну енергію і імпульс має електрон?

Розв'язок

$v = 0,9 \cdot c$ $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ $p, W_k - ?$
--

Імпульс частки, яка рухається з релятивістською швидкістю визначається співвідношенням:

$$p = m \cdot v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1)$$

де m_0 – маса спокою частки.

Знайдемо числове значення імпульсу електрона:

$$p = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 0,9 \cdot \sqrt{1 - 0,81} = 5,5 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Кінетична енергія буде дорівнювати різниці між енергією рухомої частки і енергією спокою частки:

$$W_K = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 \cdot c^2. \quad (2)$$

Знайдемо числове значення кінетичної енергії:

$$W_K = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2 \cdot 0,9 \cdot (1 / \sqrt{1 - 0,81} - 1) = 1,06 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Відповідь: $p = 5,5 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$; $W_K = 1,06 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$.

Задача 4. Максимум енергії у спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла припадає на довжину хвилі 0,58 мкм. Яка енергетична світимість тіла?

Розв'язок

$$\lambda = 0,58 \text{ мкм}$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$$

$$c' = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$$

$$R_e - ?$$

Згідно з законом Стефана-Больцмана енергетична світимість абсолютно чорного тіла визначається як:

$$R_e = \sigma \cdot T^4, \quad (1)$$

де σ – стала Стефана-Больцмана,

T – абсолютна температура тіла.

Для знаходження температури абсолютно чорного тіла скористаємось законом зміщення Віна:

$$\lambda_{\max} = \frac{c}{T}, \quad (2)$$

де c – стала закону Віна.

Підставивши температуру T із виразу (2) в формулу (1), одержимо:

$$R_e = \sigma \cdot (c/\lambda_{\max})^4.$$

Розмірність:

$$[R_e] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{К}^4}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Числове значення –

$$R_e = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (2,90 \cdot 10^{-3} / 0,58 \cdot 10^{-7})^4 = 3,54 \cdot 10^7 \cdot (\text{Вт}/\text{м}^2).$$

Відповідь: $R_e = 3,54 \cdot 10^7 \cdot (\text{Вт}/\text{м}^2)$.

Задача 5. Натрій опромінюють променями з довжиною хвилі 400 нм. Червона межа фотоефекту для натрію дорівнює довжині хвилі 600 нм. Визначити кінетичну енергію і швидкість фотоелектронів, які вилітають з металу при опроміненні.

Розв'язок

$\lambda = 400 \text{ нм}$	Використаємо формулу Ейнштейна для фото- ефекту. Тоді, кінетичну енергію фотоелектронів при опро- мінненні натрію можна знайти з рівняння:
$\lambda_{\text{ч}} = 600 \text{ нм}$	
$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$	
$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м / с}$	
$W_k, v - ?$	$h \cdot \nu = A + \frac{m \cdot v^2}{2}, \quad (1)$ де h – стала Планка; ν – частота світла; A – робота ви- ходу електронів; m – маса електрона; v – його швид- кість.

Енергію фотону можна записати через довжину хвилі таким чином:

$$E = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

При падінні на метал світла з граничною частотою (червона границя) кінетична енергія електронів, що вириваються, буде дорівнювати нулю. Для цього випадку, формула Ейнштейна буде мати вигляд:

$$\frac{h \cdot c}{\lambda_{\text{ч}}} = A. \quad (2)$$

Підставляючи вираз (2) в формулу (1), одержуємо

$$\frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{\text{ч}}} + \frac{m \cdot v^2}{2}. \quad (3)$$

Звідки знайдемо кінетичну енергію фотоелектронів і їх швидкість:

$$W_k = h \cdot c \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\text{ч}}} \right); \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot W_k}{m}}.$$

$$\text{Розмірність} - W_k = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{с}} = \text{Дж}.$$

Числові значення:

$$W_k = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot 10^{-7}} - \frac{1}{6 \cdot 10^{-7}} \right) = 1,67 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,05 \text{ еВ},$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 6,05 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

$$\text{Відповідь: } W_k = 1,05 \text{ еВ}, v = 6,05 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Задача 6 . Електрон атому водню переходить з третього енергетичного рівня на перший. Знайти енергію фотона, що випромінювався атомом водню при такому переході. Чому дорівнює довжина електромагнітної хвилі, яка відпо-
відає цьому фотону?

Розв'язок

$n = 3$	Згідно теорії, якщо електрон переходить у стан з меншим квантовим числом, випромінюється фотон з енергією:
$m = 1$	
$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}$	
$R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ 1/м}$	
$E, \lambda - ?$	де h – стала Планка, c – швидкість світла у вакуумі; λ – довжина хвилі

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda}, \quad (1)$$

Довжина хвилі фотону пов'язана з квантовими числами n і m співвідношенням:

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (2)$$

де R – стала Рідберга; n – квантове число початкового стану; m – квантове число кінцевого стану.

$$\text{Згідно з формулою (2): } \frac{1}{\lambda} = 1,1 \cdot 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{9} \right) = 9,77 \cdot 10^6 \text{ 1/м,}$$

$$\text{або } \lambda = 1,02 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 102 \text{ нм.}$$

За формулою (1)

$$E = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,02 \cdot 10^{-7}} = 1,95 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 12,2 \text{ еВ.}$$

Відповідь: $E = 12,2 \text{ еВ.}$

Задача 7. Знайти енергію зв'язку і дефект маси для ядра атома бору – B^{10} .

Розв'язок

$m_n = 1,00783 \text{ а.о.м}$	Дефект маси ядра є різниця між масою ядра і масою нуклонів, які складають це ядро:
$m_p = 1,00867 \text{ а.о.м}$	
$m_a = 10,01294 \text{ а.о.м.}$	
$\Delta m, \Delta W - ?$	

$$\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_{\text{я}}. \quad (1)$$

У формулі (1) Z і A – зарядове і масове числа атома.

Для атома бору вони мають значення:

$$Z = 5, \quad A = 10.$$

Знайдемо масу ядра, як різницю маси атома і суми мас електронів:

$$m_{\text{я}} = m_a - Z \cdot m_e, \quad (2)$$

де m_e – маса електрону.

З урахуванням останнього виразу формулу (1) перепишемо у вигляді:

$$\Delta m = Z \cdot m_n + (A - Z) \cdot m_p - m_a, \quad (3)$$

де m_n – маса нейтрального атома водню.

Знайдемо числове значення дефекту маси:

$$\Delta m = 5 \cdot 1,00783 + 5 \cdot 1,00867 - 10,01294 = 0,06956 \text{ а.о.м.}$$

Енергія зв'язку ядра – це енергія, яка виділяється у вигляді випромінювання при утворенні ядра.

Енергія зв'язку визначається рівнянням

$$\Delta W = m \cdot c^2, \quad (4)$$

де c – швидкість світла у вакуумі.

Якщо виражати ΔW у електрон-вольтах, то $\Delta W = 931 \cdot \Delta m$, де коефіцієнт 931 MeV/а.о.м показує, яка енергія в MeV відповідає масі в 1 а.о.м.

Для ядра атому бору одержуємо числове значення –

$$W = 931 \cdot 0,06856 = 64,8 \text{ MeV.}$$

Відповідь: $\Delta m = 0,06956 \text{ а.о.м; } W = 64,8 \text{ MeV.}$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Яка повинна бути швидкість руху тіла, щоб його поздовжні розміри зменшилися вдвічі?
2. При якій швидкості маса рухомого електрона вдвічі перевищує його масу у спокої?
3. Знайти на скільки збільшиться маса α -частинки при її прискоренні. Початкова швидкість дорівнює нулю. Кінцева швидкість становить 0,9 швидкості світла?
4. На скільки збільшиться життя (за годинником нерухомого спостерігача) нестабільної частинки, якщо її прискорити до швидкості, що дорівнює 99% швидкості світла?
5. Визначте енергію, що відповідає масі нерухомого електрона (його власну енергію спокою).
6. Яку частину швидкості світла має складати швидкість частинки, щоб її кінетична енергія дорівнювала енергії спокою цієї частинки?
7. Визначте температуру поверхні Сонця, якщо його вважати абсолютно чорним тілом, у якого максимальна енергія випромінювання припадає на довжину хвилі 0,5 мкм.

8. Визначте енергетичну світимість Сонця, приймаючи його за абсолютно чорне тіло з температурою поверхні 6000 К.
9. У скільки разів збільшилася енергетична світимість радіатора автомобіля, якщо його температура піднялася з 27 °С до 87 °С? Радіатор приймається за абсолютно чорне тіло.
10. Визначте довжину хвилі, на яку припадає максимум земного випромінювання, якщо Земля розглядається як абсолютно чорне тіло, а середня температура її поверхні становить +15°С.
11. Яка енергія випромінюється Сонцем протягом 1 хвилини? Випромінюванню Сонця, як абсолютно чорного тіла, відповідає температура її поверхні 5800 К.
12. На яку довжину хвилі припадає максимум випромінювання абсолютно чорного тіла з температурою, що дорівнює температурі людського тіла (37°С)?
13. У тваринницькому приміщенні, де тримають молодняк, провели дезінфекцію повітря за допомогою ультрафіолетового опромінення ртутно-кварцової лампи. Інтенсивність опромінення становила 6 Вт/м², а довжина хвилі 254 нм. Розрахуйте кількість фотонів, що проникають через одиницю площі поверхні, перпендикулярної напрямку фотонів, за 1 секунду.
14. Кванти світла з енергією 4,9 еВ викликають виходження фотоелектронів з металу. Робота виходу електронів для цього металу дорівнює 4,5 еВ. Знайдіть максимальну швидкість фотоелектронів.
15. Визначте роботу виходу електронів з металу, при його освітленні променями з довжиною хвилі 400 нм. Вільні електрони утворюються зі швидкістю $6,5 \cdot 10^5$ м/с.
16. Червона границя фотоефекту для вольфраму дорівнює 275 нм. Знайдіть роботу виходу електронів.
17. На поверхню площею 100 см² що хвилини падає 63 Дж світлової енергії. Розрахуйте величину світлового тиску для двох випадків: 1) поверхня повністю відбиває всі промені, що на неї падають; 2) поверхня повністю поглинає всі промені, що падають на неї.
18. Людське око більш чутливе до світла зеленого кольору з довжиною хвилі 550 нм. Око реагує на світло, яке складається не менше ніж з 80 фотонів, що падають на сітківку за 1 секунду. Яка потужність світла відповідає цьому порогу?
19. Фотоефект у металі відбувається при частоті світла $5,8 \cdot 10^{14}$ Гц. Обчисліть роботу виходу електронів з цього металу в електрон-вольтах.

20. Для деякого металу червона границя фотоефекту становить 275 нм. Яка максимальна швидкість електронів, які вилітають з поверхні металу, під впливом світла з довжиною хвилі 180 нм.
21. Електрон пройшов різницю потенціалів у 100 В. Знайти довжину хвилі де Бройля для цього електрону.
22. Визначити довжину хвилі де Бройля для електрона, який рухається зі швидкістю 10^6 м/с.
23. Обчисліть довжину хвилі де Бройля для протона, який летить зі швидкістю 500 м/с.
24. Визначити швидкість руху електрона, для якого довжина хвилі де Бройля становить $1,5 \cdot 10^{-10}$ м.
25. Знайти довжину хвилі фотона, який випромінюється при переході електрона з другого борівського рівня на перший у позитивно іонізованому атомі гелію.
26. Визначити найменшу і найбільшу довжини хвиль спектра атома водню в оптичному діапазоні випромінювання.
27. Електрон атома водню переходить з четвертого енергетичного рівня на другий. Знайдіть довжину хвилі випромінювання.
28. Обчислити масу та імпульс фотону, який відповідає переходу електрона з третьої орбіти на другу в атомі водню.
29. Розрахуйте дефект маси та енергію зв'язку ядра дейтерію.
30. Обчисліть дефект маси та енергію зв'язку ядра ізотопу кисню ${}^8\text{O}^{16}$.

3. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

3.1. ВСТУП ДО ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМУ

Лабораторний практикум з фізики має на меті закріплення знань, що здобувачі одержують на лекціях та практичних заняттях, а також ознайомлення здобувачів в лабораторних умовах з рядом фізичних явищ, вивчення методик вимірювання фізичних величин та їх обробка.

Ці методичні рекомендації структуровані так, щоб здобувачам було зручно орієнтуватися в темах та послідовно опановувати матеріал.

Кожна лабораторна робота містить коротку теорію або теоретичні відомості про явища, що вивчаються, опис методу вимірювання основних фізичних характеристик, порядок виконання лабораторної роботи, а також додаткові запитання, на які студент має підготувати усну відповідь.

Методичні рекомендації спрямовані на розвиток таких фахових навичок:

- розуміння основних принципів механіки та вміння використовувати знання основних фізичних законів в практичній сфері;
- володіння сучасними методиками розрахунків та побудов графіків процесів;
- здатність до самостійного вирішення завдань з використанням фізичних законів та явищ для розрахунку реальних інженерних об'єктів.

ОСНОВНІ ПРАВИЛА РОБОТИ В ЛАБОРАТОРІЯХ

1. Користуватися приладами та обладнанням дозволяється тільки у відповідності до інструкції та вказівок викладача.

2. Перед виконанням лабораторної роботи шляхом зовнішнього огляду потрібно переконатися у тому, що прилади, вимірювальні установки, обладнання – справні.

3. Забороняється працювати здобувачу в лабораторії при відсутності викладача.

4. Забороняється вмикання до електричної мережі чи під'єднання до будь-якого іншого джерела струму електричного кола. Електричні кола перевіряє викладач.

5. Забороняється залишати без догляду прилади, ввімкнені в електромережу.

МЕТОДИКА ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ

1. Виконання лабораторних робіт відбувається згідно графіку, що його на вступному занятті видає кожному студенту викладач.

2. Студенти готуються виконувати лабораторні роботи до початку занять. Підготовка складається з ознайомлення з інструкцією до лабораторної роботи, короткому конспектуванні інструкції в окремому зошиті. Конспект має містити номер роботи та її назву, основні закони та робочі формули (без

доведень), малюнок схеми установки, таблиці для занесення результатів вимірювань і наступних розрахунків.

3. Викладач контролює готовність студента до виконання лабораторної роботи. До контролю входять перевірка конспекту роботи, перевірка знання мети роботи, основних явищ і законів, формул, порядку виконання роботи і розрахунку шуканих величин.

4. Захист лабораторної роботи проводиться після закінчення оформлення звіту. В таблицю мають бути занесені результати вимірювань та розрахунків, їх розмірність. Після таблиці має бути наведений приклад розрахунку із зазначенням розмірностей всіх величин, що входять у розрахункову формулу. Закінчують звіт кінцевим результатом, в якому наводять шукану величину(и) і похибку, відповідно округлені і з розмірністю.

5. Захист лабораторної роботи проводиться на даному або наступному занятті. Студенти, що мають заборгованість з двох робіт, не допускаються до виконання наступної роботи до ліквідації боргу.

ПРИКЛАД ЗВІТУ ПРО ЛАБОРАТОРНУ РОБОТУ

Коротка теорія та метод вимірювання.

Звіт лабораторної роботи розглянемо на прикладі завдання по визначенню швидкості кулі і роботу деформації за допомогою класичного балістичного маятника. В основу роботи покладено один з відомих методів випробування стрілецької зброї за допомогою балістичного маятника. З рушниці здійснено постріл у балістичний маятник. Для одержання непружного удару кулі і маятника в маятник запресовано пластилін. Розрахункова основа методу – використання законів збереження енергії і імпульсу.

Закон збереження енергії:

$$m_1 v^2 / 2 = (m_1 + m_2) u^2 / 2 + A \quad (1)$$

Закон збереження імпульсу:

$$m_2 v = (m_1 + m_2) u \quad (2)$$

В формулах m_1 і m_2 , v і u – відповідно маси кулі та маятника, швидкість кулі та швидкість сумісного руху кулі та маятника після удару; A – робота деформації.

Після удару маятник відхиляється за рахунок енергії, що переходить у потенціальну:

$$W_n = (m_1 + m_2) u^2 / 2 = (m_1 + m_2) Rg (1 - \cos \alpha) \quad (3)$$

де R – довжина балістичного маятника; g – прискорення вільного падіння; α – найбільший кут відхилення маятника. З рівності (3) знаходимо:

$$u = \sqrt{2W_n / (m_1 + m_2)} \quad (4)$$

Після чого з (2) розраховуємо швидкість кулі:

$$V = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u \quad (5)$$

а потім і робота деформації:

$$A = W_{k1} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

Результати вимірювань та розрахунків зведемо в таблицю:

№	m_1 (г)	m_2 (кг)	R (м)	α (град)	W_n мДж	u (м/с)	v (м/с)	Δv (м/с)	W_{k1} (Дж)	A (Дж)	ΔA (Дж)
1.	2,86	0,175	0,845	4°30''	4,6	0,227	14,1	0,63	0,284	0,279	0,024
2.	2,86	0,175	0,845	4°15''	4,1	0,217	13,6	0,13	0,265	0,261	0,005
3.	2,86	0,175	0,845	4°	3,6	0,201	12,7	-0,77	0,231	0,227	-0,029
Середні значення:							13,47	0,51	0,260	0,256	0,019

Приклад розрахунку:

$$W_n = (m_1 + m_2) R g (1 - \cos \alpha) = 0,178 \times 0,845 \times 9,81 (1 - 0,9969) = 0,00046 \text{ (Дж)}$$

$$[W_n] = \text{кг м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж}.$$

$$u = \sqrt{2W_n / (m_1 + m_2)} = \sqrt{2 \frac{0,0046}{0,178}} = 0,227 \text{ (м/с)};$$

$$[u] = \sqrt{\text{Дж} / \text{кг}} = \text{м/с}.$$

$$V = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u = \frac{0,178 \times 0,227}{0,00286} = 14,1 \text{ (м/с)};$$

$$W_{k1} = m_1 v^2 / 2 = 0,5 \times 0,00286 \times 14,1^2 = 0,284 \text{ (Дж)}.$$

$$A = W_{k1} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0,284 \cdot \frac{0,175}{(0,00286 + 0,175)} = 0,279 \text{ (Дж)}$$

Як правило, у більшості лабораторних робіт, розраховуються ще такі важливі показники – абсолютна і відносна похибки вимірів:

$$\Delta v_1 = v_1 - v_{\text{ср}} = 14,1 - 13,47 = 0,631 \text{ (м/с)};$$

$$\Delta v_{\text{ср}} = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| + |\Delta v_3| = 0,63 + 0,13 + |-0,77| = 0,51 \text{ (м/с)};$$

$$\delta = \Delta v_{\text{ср}} / v_{\text{ср}} \cdot 100\% = 0,51 / 13,47 \cdot 100\% = 3,79\%$$

$$\delta = \Delta A_{\text{ср}} / A_{\text{ср}} \cdot 100\% = 0,019 / 0,256 \cdot 100\% = 7,31\%$$

Загальний результат:

$$v = (13,47 \pm 0,51) \text{ м/с}; \delta = 3,79\%; A = (0,256 \pm 0,019) \text{ Дж}; \delta = 7,31\%.$$

ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

У деяких роботах результат досліджень наводиться у вигляді графіка. Щоб графік був зроблений, дотримуються певних правил. Розглянемо їх на конкретному прикладі. Хай, як це вимагається в роботі з вакуумним фотоелементом, одержано кілька значень фотоструму при відповідних значеннях світлового потоку. По цих значеннях складена таблиця:

Світловий потік, лм	1,1	2,4	3,3	4,9	5,9	9,8
Фотострум, мкА	33,7	107,8	118,2	170,2	186	237

В таблиці зліва обов'язково писати найменування вимірюваної фізичної величини а також вказувати, у яких одиницях ця величина вимірювалась. Відліки по приладах, на основі котрих складена таблиця, можуть бути не цілими, не слід „підганяти“ ці відліки до цілих чисел. За числами, що занесені у таблицю, будується графік. Звичайно на осі абсцис відкладають значення незалежної, тобто тієї величини, що змінюється власне експериментатором у досліді. У розглянутому прикладі нею є світловий потік, який встановлюється зміною відстані джерела світла від фотоелемента. Сила ж фотоструму є залежною величиною. Вона відліковується за мікроамперметром. Залежна зміна відкладається по осі ординат.

На рис. 1 подано приклад помилкової, нераціональної побудови графіка. Тут є кілька помилок.

Оскільки ці помилки є характерними при побудові графіків здобувачами, ми їх розглянемо детальніше.

1. Невірно вибрано масштаб. За цієї причини крива займає тільки частину площини рисунка, тоді як інша частина залишається зайвою. Масштаб треба вибрати так, щоб найбільші значення величин, занесених в таблицю, виявилися біля кінців осей координат.

2. На осях координат нераціонально позначено масштаб. Для його позначення взято числа з таблиці.

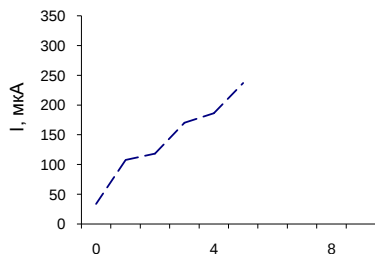


Рис. 1

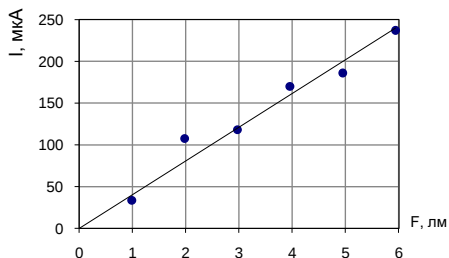


Рис. 2.

Проте масштаб на осях має бути збалансованим між собою.

3. На графіку не позначено, які величини і в яких одиницях відкладено на осях. Позначення величин треба ставити коло кінців осей, а поблизу – одиниці виміру цих величин.

4. На графіку фактично не позначено експериментальні точки. Положення їх уявляється на перетині пунктирних ліній. Але кожен експериментальну точку треба не тільки позначати, а й обвести кружком, радіус якого дорівнює середній абсолютній похибці у даній серії вимірювань, якщо вони оцінюються в роботі. Допоміжні пунктирні лінії на графіку зображати не треба.

5. На графіку 1 крива проведена так, що вона проходить через всі експериментальні точки. Внаслідок цього крива набуває дещо незвичної форми, тому у неї важко втілити певний фізичний зміст. Треба мати на увазі, що дослід завжди виконується з похибками, тому деякі експериментальні точки на криву не попадуть. Сама ж крива має бути проведена плавно, без необґрунтованих зигзагів, але так, щоб задовольнити одержаним експериментальним точкам. Графік пропонується будувати на міліметровому папері.

На рис. 2 побудований графік з дотриманням усіх вищезазначених вимог. Цей графік побудовано за тими ж даними, що і графік на рис. 1, але виправлені всі помилки, які присутні у попередньому графіку.

Для з'ясування усіх згаданих тут зауважень прочитайте ще раз цей параграф, порівнюючи рисунки 1 та 2.

КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО МІЖНАРОДНУ СИСТЕМУ ОДИНИЦЬ ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН (SI)

Основу стандарту, що діє у нашій країні, складає Міжнародна система одиниць SI.

SI – найбільш досконала сьогодні система одиниць. Вона є єдиною і універсальною системою, яка охоплює всі області вимірювань, встановлює простий і чіткий зв'язок між механічними, тепловими, електромагнітними і іншими величинами.

Основні одиниці SI

МЕТР (м) – довжина, що дорівнює $1650763,73$ довжин хвиль у вакуумі випромінювання, що відповідає переходу між рівнями $2p^{10}$ та $5d^5$ атому криптону-86.

КІЛОГРАМ (кг) – маса, що дорівнює масі міжнародного прототипу кілограму.

СЕКУНДА (с) – час, що дорівнює 9192631770 періодам випромінювання, яке відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атому цезію-133.

КЕЛЬВІН (К) – $1/273,16$ частина термодинамічної температури потрійної точки води.

МОЛЬ (моль) – кількість речовини системи, яка містить стільки ж структурних елементів, скільки їх міститься у нукліді вуглецю-12 масою 0,012 кг. При застосуванні моля структурні елементи мають бути специфіковані у групи часток. Кількість структурних елементів, що міститься в одному молі, носить назву числа Авогадро, і воно дорівнює $(6,02252 \pm 0,00028) \cdot 10^{23}$ 1/моль.

АМПЕР (А) – сила незмінного струму, який при проходженні по кожному з двох прямолінійних провідників безмежної довжини і незначного кругового перерізу, розміщених на відстані 1 м один від одного у вакуумі, породжував би між цими провідниками силу взаємодії, яка дорівнює $2 \cdot 10^{-7}$ Н на кожний метр довжини.

КАНДЕЛА (кд) – сила світла, випромінюваного з поверхні площею $1/600000$ м² полого випромінювача по перпендикулярному напрямку, при температурі затвердіння платини при тиску 101325 Па.

Додаткові одиниці SI

Радіан (рад) – кут між двома радіусами круга, які вирізають на колі дугу, довжина якої дорівнює радіусові.

Стерадіан (ср) – тілесний кут з вершиною в центрі сфери, який вирізає на її поверхні площу, що дорівнює квадрату радіусу сфери.

Похідні одиниці SI

Найменування величини	Визначальне рівняння	Одиниця виміру	Скорочене позначення
1	2	3	4

Механічні та теплові величини

Площа	$S = L^2$	<i>квадратний метр</i>	м ²
Об'єм	$V = L^3$	<i>кубічний метр</i>	м ³
Швидкість	$v = \Delta x / \Delta t$	<i>метр за секунду</i>	м/с
Кутова швидкість	$w = \Delta \varphi / \Delta t$	<i>радіан за секунду</i>	рад/с
Прискорення	$a = \Delta v / \Delta t$	<i>метр за секунду в квадраті</i>	м/с ²

1	2	3	4
Кутове прискорення	$\varepsilon = \Delta w / \Delta t$	<i>радіан за секунду в квадратах</i>	рад/с ²
Період	T	<i>секунда</i>	с
Частота	$\nu = 1/T$	<i>герц</i>	Гц
Сила	$F = \Delta(m \cdot V) / \Delta t$	<i>ньютон</i>	Н
Густина	$\rho = m/V$	<i>кілограм на кубічний метр</i>	кг/м ³
Імпульс тіла (кількість руху)	$K = mv$	<i>кілограм-метр за секунду</i>	кг м/с
Момент сили	$M = F \cdot r$	<i>ньютон-метр</i>	Н·м
Момент інерції	$I = m \cdot r^2$	<i>кілограм – кв. метр</i>	кг·м ²
Момент імпульсу	$L = I \cdot \varepsilon$	<i>кілограм - кв. метр за секунду</i>	кг·м ² /с
Робота, енергія	$A = F \cdot x \cdot \cos(\alpha)$	<i>джоуль</i>	Дж
Потужність	$N = \Delta A / \Delta t$	<i>ват</i>	Вт
Тиск	$P = F/S$	<i>Паскаль</i>	Па
Кількість теплоти	$Q = A$	<i>джоуль</i>	Дж
Питома теплоємність	$c = Q/(m \cdot \Delta T)$	<i>джоуль на кілограм-кельвін</i>	Дж/(кг·К)
Коефіцієнт поверхневого натягу	$\delta = F/l$	<i>ньютон на метр</i>	Н/м
Коефіцієнт теплопровідності	$k = Q \cdot \Delta l / (\Delta T \cdot S \cdot t)$	<i>ват на метр кельвін</i>	Вт/(м·К)
Коефіцієнт в'язкості	$\eta = F \cdot \Delta l / (\Delta v \cdot S)$	<i>паскаль-секунда</i>	Н·с/м ²
Теплотворна здатність палива	$q = Q/m$	<i>джоуль на кілограм</i>	Дж/кг
Ентропія	$S = \Delta Q/T$	<i>джоуль на кельвін</i>	Дж/К

Електромагнітні і світлові величини

Кількість електрики	$q = I \cdot \Delta t$	<i>кулон</i>	Кл
Потенціал, напруга, ЕРС	$U = A/q$	<i>вольт</i>	В
Напруженість електричного поля	$E = \Delta U / \Delta l$	<i>вольт на метр</i>	В/м
Поверхнева густина заряду	$\delta = \Delta q / \Delta S$	<i>кулон на кв. метр</i>	Кл/м ²
Індукція електричного поля	$D = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E$	<i>кулон на кв. метр</i>	Кл/м ²
Потік індукції електричного поля	$N = D \cdot S = q$	<i>кулон</i>	Кл
Електроємність	$C = q/U$	<i>фарад</i>	Ф
Електричний опір	$R = U/I$	<i>ом</i>	Ом
Електропровідність	$\beta = 1/R$	<i>сименс</i>	См
Питомий електричний опір	$\rho = R \cdot S/l$	<i>ом-метр</i>	Ом·м
Питома електропровідність	$\chi = 1/\rho$	<i>сименс на метр</i>	См/м
Густина струму	$j = I/S$	<i>ампер на кв. метр</i>	А/м ²

1	2	3	4
Напруженість магнітного поля	$H = I/(2r)$	<i>ампер на метр</i>	А/м
Магнітний потік	$\Delta\Phi = - (e.p.c.) \cdot \Delta t$	<i>вебер</i>	Вб
Магнітна індукція	$B = \Delta\Phi/\Delta S$	<i>тесла</i>	Тл
Індуктивність	$L = \Phi/I$	<i>генрі</i>	Гн
Магнітна стала	$\mu_0 = B/(\mu \cdot H)$	<i>генрі на метр</i>	Гн/м
Магнітний момент	$p = I \cdot S$	<i>ампер-кв. метр</i>	А·м ²
Світловий потік	$F = 4 \cdot \pi \cdot I$	<i>люмен</i>	лм
Світлова енергія	$L = F \cdot t$	<i>люмен-секунда</i>	лм·с
Освітленість	$E = F/S$	<i>люкс</i>	лк
Світимість	$R = F/S$	<i>люкс</i>	лк
Яскравість	$B = I/S$	<i>кандела на . метр</i>	кд/м ²
Оптична сила	$D = 1/F$	<i>діоптрія</i>	дптр

Префікси для утворення кратних і часткових одиниць

Префікси кратної одиниці	Співвідношення до основної одиниці	Префікси часткової одиниці	Співвідношення до основної одиниці
дека- (да)	10^1	деци- (д)	10^{-1}
гекто- (г)	10^2	санти- (с)	10^{-2}
кіло- (к)	10^3	мілі- (м)	10^{-3}
мега- (М)	10^6	мікро- (мк)	10^{-6}
гіга- (Г)	10^9	нано- (н)	10^{-9}
тера- (Т)	10^{12}	піко- (п)	10^{-12}
пета- (П)	10^{15}	фемто- (ф)	10^{-15}
екса- (Е)	10^{18}	атто- (а)	10^{-18}

Визначення деяких одиниць системи SI

НЬЮТОН – сила, яка надає тілу масою 1 кг прискорення 1 м/с^2 у напрямку дії сили.

ДЖОУЛЬ – робота, що здійснюється силою 1 Н на шляху 1 м.

ВАТ – потужність, при якій за 1 с виконується робота 1 Дж.

ПАСКАЛЬ – тиск, що спричинюється силою 1 Н, рівномірно розподіленою по нормальній до неї поверхні площею 1 м^2 .

КУЛОН – кількість електрики, яка проходить через поперечний перетин провідника за 1 с при струмі 1 А.

ВОЛЬТ – різниця потенціалів двох точок електричного поля, при переміщенні між якими заряду в 1 Кл здійснюється робота в 1 Дж.

ФАРАДА – ємність провідника, потенціал якого підвищується на 1 В при наданні йому заряду 1 Кл.

ОМ – опір провідника, по якому тече струм в 1 А при напрузі на кінцях провідника в 1 В.

ВЕБЕР – магнітний потік, створюваний однорідним полем з індукцією 1 Тл на нормально розміщеній до поля поверхні площею 1 м^2 ; або: вебер – магнітний потік, при рівномірному зникненні якого за 1 с у зчіпленому з ним контурі виникає ЕРС індукції 1В.

ТЕСЛА – індукція такого однорідного магнітного поля, в якому магнітний потік через площину в 1 м^2 , перпендикулярну напрямку поля, дорівнює 1Вб.

ГЕНРІ – індуктивність провідника, в якому при струмі 1А з контуром провідника зчіплюється магнітний потік 1 Вб.

ЛЮМЕН – світловий потік, який посиляє точкове джерело світла силою 1 кд в тілесний кут 1 стер.

ЛЮКС – освітленість, створювана світловим потоком 1 лм при рівномірному його розподілі на площі 1 м^2 .

3.2.Лабораторна робота № 1

«Методика обробки результатів вимірювань. Елементи теорії похибок»

Скорочена теорія

Вимірювання

Вимірюванням фізичної величини називають таку дію, в результаті якої визначають, у скільки разів вимірювана величина більша/менша за величину, обрану за еталон.

В основу системи SI, як визначалося раніше, були покладені сім основних одиниць (еталонів): кілограм, метр, секунда, градус за шкалою Кельвіна, моль, ампер, кандела – та дві додаткові одиниці вимірювання: радіан і стерadian.

Види вимірювань

Процес вимірювання може здійснюватись різними способами, залежно від роду величини, яку вимірюють, та методів і прийомів вимірювань.

Всі фізичні вимірювання поділяються на дві категорії: **прямі виміри** та **непрямі виміри**.

Прямыми вимірами називають такі виміри, коли величина безпосередньо порівнюється з одиницею виміру при застосуванні певного сертифікованого приладу з проградуйованою шкалою у одиницях виміру.

До таких вимірювань належать, наприклад, вимірювання довжини фізичних об'єктів – масштабною лінійкою, штангенциркулем, мікрометром, оптиметром, інтерферометрами, лазерним дальноміром; вимірювання маси тіл – на важільних вагах (терезах) за допомогою різноваг, автоматичних або електронних вагах; вимірювання проміжків часу – за допомогою годинника, секундоміра, частотоміра, осцилографа; вимірювання температури – термометром, термопарою, пірометром, термометром опору; вимірювання сили струму – за допомогою амперметра, гальванометра, електронними приладами і т.д. При цьому, значення вимірюваної величини відлічується по шкалі або підраховується число та значення використаних мір, різноваг і т.д.

Непрямі виміри – це виміри, коли необхідна величина підраховується математично, використовуючи результати прямих вимірювань інших величин, що пов'язані з цією величиною функціональною залежністю.

Наприклад, якщо немає змоги безпосередньо, використовуючи прилади, визначити значення прискорення сили тяжіння g , але його легко знайти із виразу для вільного падіння тіл, взявши значення висоти падіння і часу падіння тіла:

$$g = 2h / t^2$$

Або, використовуючи формулу для періоду коливаний математичного маятника, взявши значення довжини підвісу і часу, який відповідає періоду коливаний:

$$g = 4\pi^2 L / T^2$$

Також, прикладами непрямих вимірювань є результати вимірювань швидкості руху – за величиною шляху та проміжку часу; вимірювання густини – за вимірами маси тіла та його об'єму та інші подібні вимірювання.

Точність вимірів та її роль

У повсякденній роботі немає жодної області галузі господарства, де б не проводились вимірювання різних фізичних величин прямими та непрямыми методами.

Вимірювання дозволяють чисельно оцінити фізичні явища і внести необхідні корегування у технологічний процес для поліпшення якості та оптимізації останніх. Бо без вимірювань неможливо здійснювати контроль за технологією і якістю кінцевого продукту.

Але нажаль, ніяке вимірювання не може бути абсолютно точним. Його результат неодмінно містить певну похибку, яка пов'язана з приладами, чи зовнішніми умовами, чи з самою людиною, яка здійснює виміри.

Коли виконуються виміри якоїсь фізичної величини декілька разів, існує певне «розкид», «розсіяння» результатів коло середнього арифметичного значення. Далі ми покажемо, що воно найбільш наближене до істинного значення величини. У цьому випадку, при здійсненні вимірювань, виникає так звана випадкова похибка.

Випадкова похибка пов'язана з характером проведення експерименту.

Вимірюючи приладом якусь величину, ми не спроможні зробити похибку меншу тієї, що визначається конструкцією і калібруванням самого приладу.

Така похибка називається **похибкою вимірювального пристрою**.

Окрім цього існує ще й похибка, яка виникає при виконанні розрахунків. Бо при виконанні розрахунку проміжного чи остаточного результату вимірювань ми вимушені закруглювати результати розрахунків.

Така похибка носить назву **похибка закруглення**.

Треба зауважити, що при вимірах немає сенсу домагатися більшої точності вимірювань, ніж це потрібно для визначення фізичної величини у певному «довірному інтервалі». Тобто отримання значення якоїсь фізичної величини з попередньо заданою точністю.

В цьому випадку, для вимірювань, можна використовувати прилади, які мають точність вимірювання достатню для знаходження значення шуканої фізичної величини. І розрахунки теж можна виконувати, закруглюючи отримані результати вимірювань до заданої точності знаходження остаточної фізичної величини.

Але розвиток науки і технологій вимагає удосконалення техніки вимірювань шляхом підвищення їх точності. Це сприяє не тільки досягненням в науці, але й має важливе практичне значення при поточній роботі з вимірами у всіх галузях виробництва.

Ми з Вами виділили три види похибок, які можуть виникати при вимірах різних фізичних величин:

- 1) похибка закруглення, яка пов'язана з точністю виконання розрахунків;
- 2) похибка вимірювального пристрою, пов'язана з точністю приладів, які використовуються при вимірах;

- 3) випадкова похибка, яка пов'язана з умовами проведення вимірювань у процесі експерименту для знаходження середнього значення, в результаті проведення декількох вимірів.

Всі ці похибки є складовими загальної похибки, яка виникає у процесі вимірювань. Їх треба вміти ідентифікувати і, звичайно, треба вміти розраховувати, щоб мати уяву про точність проведених вами вимірів.

Розгляд, виникаючих при проведенні вимірів, похибок почнемо з найбільш простих похибок – похибок заокруглення. Нижче з'ясуємо методику і правила проведення заокруглень чисельних результатів у процесі вимірювання фізичних величин.

Похибка заокруглення

Під час опрацювання результатів експерименту часто доводиться заокруглювати числові значення розрахунків та вимірювань. Кожна операція заокруглення дає свій певний внесок у сумарну похибку кінцевого результату. Тому похибку заокруглення теж слід враховувати при виконанні роботи.

Наприклад, коли відліки показів приладу заокруглюють до цілих значень або часток поділок (лінійка, мікрометр, електровимірювальний прилад тощо), а також при користуванні ноніусом чи цифровими приладами, виникає так звана випадкова похибка заокруглення, яка має рівномірний розподіл.

За відсутності похибок вимірювального пристрою, максимальна похибка не перевищує $h/2$, де h – інтервал заокруглення. Інтервалом заокруглення h може бути ціна поділки приладу, якщо відлік беруть з точністю до цих поділок. Або інтервал заокруглення буде відповідати половині ціни поділки, якщо відлік заокруглюють до половини ціни поділки.

Абсолютною похибкою заокруглення називають величину, яку обчислюють за формулою:

$$\Delta x_{\text{пр.}} = h/2$$

Зауважимо, що відповідно до правила «трьох сигм» під час обчислення сумарної похибки можна нехтувати будь-якою з її складових, якщо її значення утричі менше за інші.

Коли під час вимірювання проводять лише одне спостереження (наприклад, вимірювання температури, зважування та ін.), випадкова похибка вимірювання не виникає, і сумарну похибку оцінюють лише за допомогою похибок приладу та заокруглення:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{пр.}})^2 + (\Delta x_z)^2}$$

Одноразовим спостереженням обмежуються й тоді, коли три-чотири попередні повторні спостереження дають один і той же результат. Це можливо, коли випадкова похибка є меншою за поріг чутливості приладу.

Нормалізована форма запису числа. Правила заокруглення в наближених обчисленнях

У результаті вимірювань отримують наближені числа. Природною формою запису числа називають загальноновживаний запис дійсних чисел – наприклад: 25; 25,003; 0,0025.

Нормалізованою формою запису числа називають запис числа у вигляді добутку правильного десяткового дробу (з відмінною від нуля першою цифрою перед комою) степеневі функції за основою десять. Дробову частину нормалізованого числа, взяту з відповідним знаком, називають мантисою, показник степеня зі знаком «-» чи «+» – порядком числа. Наприклад:

$$\underbrace{2,025}_{\text{мантиса}} \cdot 10^{-5}, \quad -3,25 \cdot 10^{25}.$$

порядок

При заокругленні вважають, що *i*-та цифра наближеного числа буде правильною, якщо абсолютна похибка числа, яке заокруглюють, не перевищує половини *i*-го розряду. Всі цифри, що стоять лівіше *i*-тої, вважаються також правильними. Цифра, що стоїть праворуч *i*-тої цифри, називають сумнівною цифрою. Значущими цифрами називають всі правильні цифри, починаючи з першої ліворуч, відмінної від нуля та першу сумнівну цифру. Тобто значущі цифри у наближеному числі – це всі правильні цифри та перша сумнівна окрім нулів ліворуч. Решту цифр наближеного числа називають незначущими. Наприклад, у числах **250; 2,50; 0,0250** значущими є всі три цифри, які стоять за першою ненульовою, якщо рахувати цифри з ліва направо. Числа **2,5** та **2,200** різні, у першому – дві значущі цифри, у другому – чотири. Друге знайдено з більшою точністю. У числі $2,5 \cdot 10^{-3}$ дві цифри значущі, три – незначущі. Незначущі цифри у кінцевому результаті відкидають.

Таким чином, можна дати визначення:

«Значущими цифрами числа називають всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва».

Наприклад, числа **0,003064** і **0,00306400** мають відповідно **4** і **6** значущих цифр, незалежно від того, що стоїть праворуч число чи нулі. У цьому прикладі підкреслені цифри – значущі.

Правила заокруглення чисел.

Щоб округлити число до *n* значущих цифр, треба відкинути всі цифри,

що стоять праворуч від n-ої значущої цифри, або якщо це потрібно в подальшому для збереження кількості розрядів, замінюють їх нулями.

Як правило, на практиці, частіше всього має місце заокруглення до кількох значущих цифр після коми (цілих - 0 цифр після коми, або до десятих - 1 цифра після коми, або до сотих - 2 цифри після коми, або до тисячних - 3 цифри після коми, і т.д.).

При цьому треба користуватися наведеними нижче **правилами заокруглення**.

«Правила заокруглення чисел:

1. Якщо перша з цифр, які відкидають, менше за 5, то остання з цифр, що залишилась, не змінюється. Наприклад, при округленні числа **81,2347** до сотих долей, отримаємо **81,23**.

2. Якщо перша з цифр, які відкидають, дорівнює 5 і серед наступних за нею цифр є відмінні від нуля, то останню з цифр, що залишилися, збільшують на одиницю. Наприклад, при округленні числа **46,2501** до десятих долей, отримаємо **46,3**.

3. Якщо перша з цифр, які відкидають, дорівнює 5 і за нею слідує нулі, то остання з цифр, що залишилися:

– зберігається незмінною, якщо вона парна;

– збільшується на одиницю, якщо вона непарна (правило парної цифри). Наприклад, при округленні числа **13,6500** до десятих долей, отримаємо **13,6**, а при округленні числа **13,7500** до десятих долей отримаємо **13,8**.

4. Якщо перша з цифр, які відкидають, більше за 5, то останню з цифр, що залишилися, збільшують на одиницю. Наприклад, при округленні числа **67,382** до десятих долей, отримаємо **67,4**.»

В математичних операціях з наближеними числами слід дотримуватись таких правил:

1. Перед виконання математичних операцій всі наближені числа округлюють до розряду найменш точного числа, залишаючи одну «запасну» (сумнівну) цифру. Приклад. Нехай ми маємо ряд наближених чисел:

2,1; 2,52; 25,254. Найменш точне число **2,1**. Тому всі решта числа округлюємо до сотих. Отже, число **2,52** не потрібно округлювати, число **25,254** $\approx$ **25,25**.

2. Під час додавання або віднімання кінцевий результат округлюють до розряду найменш точного числа:

$$2,2+2,52+25,254 \approx 2,2+2,52+25,25 = 29,77 \approx 29,8.$$

3. Під час множення та ділення у кінцевому результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх має множник з найменшою кількістю:

$$2,387 \cdot 2,5 \cdot 3,58 \approx 2,39 \cdot 2,5 \cdot 3,58 = 21,3905 \approx 21.$$

4. Під час піднесення до степеня, добування кореня, знаходженні логарифма наближеного числа у кінцевому результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх має це наближене число:

$$2,345^3 \approx 12,895213 \approx 12,90; \sqrt{6,53} = 2,5539 \approx 2,55; \ln(2,5) = 0,9163 \approx 0,92.$$

Зазначимо, що обчислюючи середнє значення вимірюваної величини, сумнівну цифру також враховують. Під час **обчислень похибок** проміжні результати завжди заокруглюють у бік збільшення. Наприклад:

$$(\Delta d)^2 = (0,12)^2 = 0,0144 \approx 0,015.$$

Остаточний результат записують числом, яке містить лише правильні цифри. За вимогами стандартів сумарну похибку записують числом з кількістю значущих цифр не більше двох.

Продовжимо розглядання видів похибок на прикладі випадкових похибок і похибок приладів. Розглянемо взагалі **Що ж є джерелом похибок?**

Джерела та типи похибок

Якщо вимірювати якусь фізичну величину декілька разів, ми будемо одержувати у кожному окремому вимірюванні різні її значення. Ці значення будуть групуватися біля певного (осередненого) значення. Якщо змінити метод вимірювання тієї ж самої величини, ми виявимо, що друга серія буде давати значення, що згруповуються біля якогось іншого (осередненого) значення.

Звернемось до попереднього прикладу. Вимірюється прискорення сили тяжіння двома методами: методом падаючої кульки, а також за допомогою вимірів коливань математичного маятника. У першому випадку одержуємо серію 1, а в другому – серію 2 (рис.1).

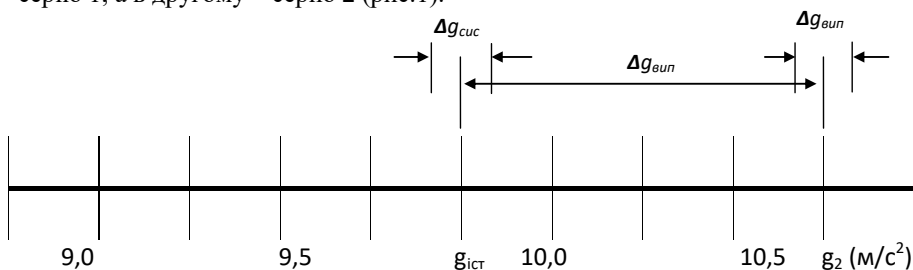


Рис. 1 Результати вимірів

Чому ми одержали різні значення у межах однієї серії? Чому результати вимірювань однієї і тієї ж величини групуються в окремі серії у залежності від застосування методу вимірювання?

Відповідь на ці питання ми одержимо, коли познайомимось з теорією похибок та методами обробки експериментальних результатів.

Розглянемо ситуацію, коли ми одержали величезну сукупність вимірювань однієї і тієї ж величини, проводячи багато разів один і той же експеримент.

Існує розділ математики, який вивчає системи, що складаються з великої кількості елементів. Цей розділ називається математичною статистикою. З математичної статистики і теорії ймовірностей випливає, що середнє арифметичне всіх вимірювань найкраще наближається до істинного значення, ніж більшість значень, отриманих при вимірюванні. Оскільки, в реальній ситуації, найчастіше ми не знаємо істинного значення, то за істину величину приймається значення середнього арифметичного $\langle g \rangle$:

$$\langle g \rangle = (g_1 + g_2 + \dots + g_n)/n,$$

де n – число вимірювань, g_i – значення окремих вимірювань.

Розсіяння результатів коло середнього арифметичного, визначаються випадковими причинами. Передбачити кожний черговий результат вимірювань неможливо. Але можливо передбачити, на підставі теорії ймовірностей, параметри розсіяння результатів коло середнього значення вимірюваної величини. Похибки, які викликають, завдяки спонтанному розсіянню значень навколо середнього значення носять назву **випадкової похибки**.

Крім випадкових похибок, існують ще так звані **систематичні похибки**. Вони породжуються цілим рядом причин пов'язаних, наприклад, зіпсованістю або недосконалістю приладів, невірним методом вимірювань, властивостями об'єкту вимірювань. Такі систематичні похибки можуть не впливати на розсіяння вимірювань коло середнього значення, але знайдене середнє значення, на підставі вимірюваних даних, буде далеко відстояти від істинного. У цьому випадку, величина систематичної похибки визначається так:

$$\Delta g = \langle g \rangle - g_{\text{іст}}$$

Це положення наочно представлено на рис. 1.

Треба відзначити, що для розрахунку системної похибки треба знати істинне значення фізичної величини. Його знаходять чи теоретичними розрахунками, чи беруть дані еталонних експериментів.

У процесі вимірювань можуть виникнути так звані **грубі помилки (промахи)**. Вони виникають у випадку як використання неперевіреного або зіпсованого приладу, недбалого відліку показу, невірного включення приладу, так і недбалості самого експериментатора, який робить нерозбірливі записи його показань.

Від систематичних похибок та промахів повинен позбутись сам експериментатор, застосовуючи найдосконаліші методи вимірювань та проявляючи особливу ретельність та увагу під час вимірювань.

Таким чином, ми з вами визначили **три типи похибок вимірювань**:

1. Грубі (промахи).

2. Систематичні.

3. Випадкові.

Перші, грубі похибки просто не враховуються при виконанні експерименту. Замість них проводяться повторні вимірювання у дещо змінених умовах. Замінюється зіпсований, чи неточний прилад. Експеримент проводиться більш ретельно і т.д.

Систематичні похибки усуваються застосуванням більш досконалих приладів, методів вимірювань. Використовуються теоретичні формули, що найбільш правильно описують зв'язок між спостережуваними та шуканими величинами.

А випадкові похибки підпорядковуються теорії похибок. Але слід пам'ятати, що використання результатів останньої можливе тільки у випадку достатнього розсіювання результатів вимірювань.

На практиці, вимірювальні прилади, що використовуються в лабораторіях, часто дають такі систематичні похибки, які значно перевершують випадкові.

Для визначення значень похибок і точності проведення вимірювань в теорії похибок вводяться два поняття – «абсолютна» і «відносна» похибки.

Абсолютні і відносні похибки

Абсолютною похибкою виміру Δg_i називають різницю між вимірним значенням g_i і «істинним» значенням фізичної величини:

$$\Delta g_i = g_i - g_{\text{іст}}$$

«Істинним» значенням фізичної величини може виступати **табличне значення**, яке отримане при вимірюванні якоїсь еталонної величини. Наприклад, значення коефіцієнтів в'язкості рідин, які потім заносяться у довідкові таблиці різних довідників. Якщо табличне значення набути неможливо, за «істинне» значення вважають **теоретичне значення** фізичної величини, яке можливо розрахувати за допомогою інших табличних, чи еталонних значень декількох фізичних величин, на підставі фізичних законів, пов'язаних з цими табличними значеннями. Наприклад, період коливань математичного маятника можна розрахувати теоретично, якщо відома довжина підвісу маятника L і прискорення вільного падіння g :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Якщо не можливо отримати **табличне значення** чи **теоретично розраховане значення** фізичної величини, залишається лише єдиний спосіб

отримати значення, найбільш наближене до «істинного». Це провести декілька експериментальних вимірів і отримати **середнє значенням** декількох результатів вимірювань.

У цьому випадку, **абсолютною похибкою** виміру Δg_i будемо **називати різницю між виміряним значенням g_i і середнім значенням** декількох результатів вимірювань $\langle g \rangle = (g_1 + g_2 + \dots + g_n)/n$:

$$\Delta g_i = g_i - \langle g \rangle \quad (1)$$

У більшості лабораторних робіт ми це і будемо використовувати. Будемо знаходити середнє значення i , за допомогою його, будемо розраховувати абсолютну похибку вимірів.

Але абсолютна похибка не може характеризувати якість вимірювань. Наприклад, абсолютна похибка вимірювання довжини 1мм, з якою ми робимо виміри за допомогою рулетки, нічого не говорить нам про його точність. Якщо вимірювалась відстань 10 м, то точність результату слід визнати високою, проте при вимірюванні діаметра маленької кульки в 10 мм така точність явно незадовільна. Бо при вимірюванні малої величини доля похибки при визначенні самої величини буде мати суттєве значення.

Для характеристики якості окремого виміру вводять у розгляд **відносну похибку**:

Відносна похибка – відношення абсолютної похибки окремого виміру до вимірюваної величини:

$$\delta = \frac{\Delta a}{a} 100\% \quad (2)$$

Найчастіше, відносну похибку вимірюють у %, щоб довести скільки процентів складає абсолютна похибка від вимірювальної величини. Так, для виміру довжини $a=10\text{м}$ з абсолютною похибкою $\Delta a = 1\text{мм}$, відносна похибка δ у % буде складати лише:

$$\delta = \Delta a/a \cdot 100\% = 0,001\text{м}/10\text{м} \cdot 100\% = 0,01\%.$$

А для кульки діаметром $d=10\text{мм}$ з абсолютною похибкою $\Delta d = 1\text{мм}$, відносна похибка δ у % буде значно вища і складати:

$$\delta = \Delta d/d \cdot 100\% = 0,001\text{м}/0,01\text{м} \cdot 100\% = 10\%.$$

Треба розуміти, що абсолютні похибки можуть мати різні знаки. Тобто, бути як позитивними, так і негативними, тому що частина вимірювань завжди матиме значення, більше за середнє, а інша – менше.

У даному лабораторному практикуму ми будемо використовувати **спрощений метод врахування похибок**.

При спрощеному методі врахування похибок часто діють так. Знаходять спочатку середнє значення модуля абсолютної похибки декількох експериментів:

$$\langle \Delta g \rangle = (|\Delta g_1| + |\Delta g_2| + \dots + |\Delta g_n|)/n$$

Потім знаходять відношення середнього значення модуля абсолютної похибки $\langle \Delta g \rangle$ до середнього значення вимірюваної величини $\langle g \rangle$, і помножують на 100%.

Цим відношенням ε (далі будемо її називати **відносною похибкою вимірювань**) і характеризують **точність вимірювань**:

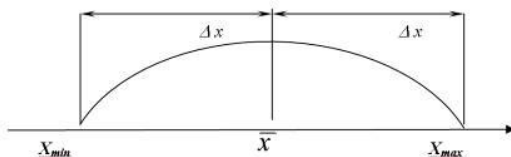
$$\varepsilon = \langle \Delta g \rangle / \langle g \rangle \cdot 100\%.$$

Довірчий інтервал.

Знаходять таку величину (довірчий інтервал) $\Delta x_{\text{дов}}$, що в середину інтервалу:

$$[\langle x \rangle - \Delta x_{\text{дов}}, \langle x \rangle + \Delta x_{\text{дов}}]$$

завжди буде попадати задана частка результатів вимірювань.



Звичайно ж, значення $\Delta x_{\text{дов}}$ не дорівнює середньому значенню модуля абсолютної похибки $\langle \Delta g \rangle$. Якщо ставиться завдання, наприклад, щоб у певний інтервал потрапило 90 % результатів вимірів, то таке значення $\Delta x_{\text{дов}}$ буде істотно більше середнього значення модуля абсолютної похибки $\langle \Delta g \rangle$. Інтервал, в який потрапляє певна означена кількість результатів вимірів, називають **довірчим інтервалом**. Частку результатів вимірювання, що потрапляють у цей інтервал, **надійністю вимірювань**.

При безмежному числі вимірювань надійність наближаються до так званої довірчої ймовірності. Постає питання: чи можна зменшити довірчий інтервал, зберігаючи незмінною надійність? Відповідь на це та багато інших питань дає статистична теорія випадкових похибок, з якої розглянемо тільки деякі моменти.

Похибки приладів

Кожен вимірювальний прилад характеризується похибками, що він може допустити за рахунок конструкційних особливостей. Величина, що вимірюється еталонним приладом, приймається за дійсне (істинне) значення.

Абсолютною похибкою приладу називається величина, що дорівнює різниці між показанням приладу x' і істинним значенням вимірюваної величини x .

$$\Delta x_i = x' - x.$$

Точність вимірювань характеризується **відносною похибкою** ε_1

$$\varepsilon_1 = \Delta x / x'.$$

Ще одною важливою характеристикою точності електровимірювальних приладів є так звана **приведена похибка** ε_2 . В подальшому, для визначення похибки приладів, ми будемо користуватися саме цією величиною.

Приведена похибка це відношення абсолютної похибки до граничного значення вимірюваної величини x'' – найбільшого значення, яке можливо виміряти по шкалі приладу

$$\varepsilon_2 = \Delta x / x''.$$

Для приладу з нулем по середині шкали приведена похибка визначається як відношення абсолютної похибки Δx до суми верхньої і нижньої межі вимірювання. Приведена похибка приладів вводиться тому, що відносна похибка приладів не залишається сталою.

Приведена похибка приладів пов'язана з точністю електровимірювальних приладів. Згідно з ГОСТ за ступенями точності вимірювань електровимірювальні прилади поділяються на декілька класів: 0,1; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2; 4.

Показник класу точності η визначає приведену похибку вимірювань у відсотках.

Отже, **абсолютна похибка приладу** визначається так:

$$\Delta x = x'' \eta$$

де x'' – найбільшого значення, яке можливо виміряти по шкалі приладу,
 η – показник класу точності приладу.

Наприклад, міліамперметр **класу 0,5** зі шкалою у **150 mA** дає у будь-якому місці шкали абсолютну похибку

$$\Delta I = 150,0 * 0,005 = 0,725 \text{ mA}$$

Прилади класів **0,1, 0,2, 0,5** застосовують для точних вимірювань і називають **лабораторними**.

У технологічних процесах застосовують прилади класів **1, 1,5, 2,5 і 4**. Їх називають **технічними**.

Клас приладу звичайно вказується на його шкалі.

Приклади позначення класів точності наведені на рис. 2.

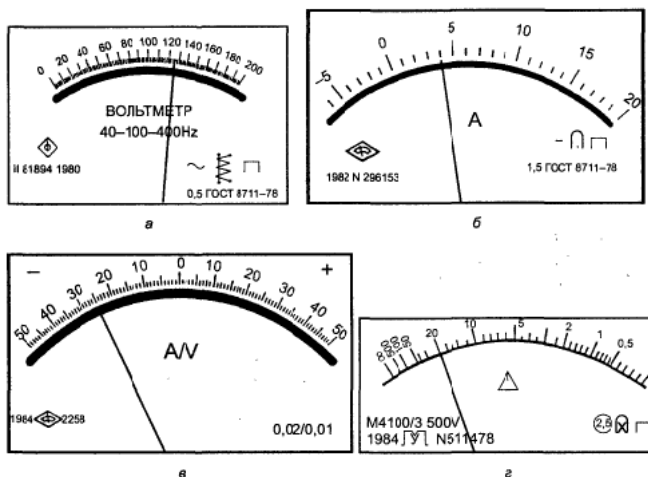


Рис. 2. Лицьові панелі приладів: а – вольтметра класу точності 0,5; б – амперметра класу точності 1,5; в – амперметра класу точності 0,02 / 0,01; г – мегомметра класу точності 2,5 з нерівномірною шкалою

Таблиця 1.

Фізичний прилад	Ціна поділки шкали	Абсолютна похибка
Лінійка учнівська	1 мм	± 1 мм
— демонстраційна	1 см	$\pm 0,5$ см
Стрічка вимірювальна, рулетка	0,5 см	$\pm 0,5$ см
Штангенциркуль	0,1 мм	$\pm 0,05$ мм
Мікрометр	0,01 мм	$\pm 0,005$ мм
Циліндр вимірювальний	1 мл	± 1 мл
Секундомір	0,2 с	± 1 с за 30 хв
Терези навчальні	—	$\pm 0,01$ г
Динамометр навчальний	0,1 Н	$\pm 0,05$ Н
Барометр-анероїд	1 мм рт. ст.	± 3 мм рт. ст.
Термометр лабораторний	1 °C	± 1 °C
Амперметр шкільний	0,1 А	$\pm 0,05$ А
Вольтметр шкільний	0,2 В	$\pm 0,1$ В

В таблиці 1 наведені абсолютні інструментальні похибки ($\Delta_{\text{прилад}}$) деяких засобів вимірювань, які використовуються в лабораторному практикумі.

Існує поняття – **чутливість приладу**.

Чутливістю засобу вимірювання називається властивість засобу вимірювання, що визначається відношенням зміни вихідного сигналу цього засобу до зміни вимірюваної величини, що його викликає.

Точність і чутливість приладу не взаємопов'язані між собою. Бувають прилади високої чутливості, але малої точності, і навпаки – точність вимірювання висока, а чутливість низька.

На точність вимірювання вказує клас точності.

Обчислення абсолютних і відносних похибок при непрямих вимірюваннях.

У багатьох випадках значення x фізичної величини X знаходять **непрямим вимірюванням**, тобто шляхом розрахунків за результатами **прямих вимірювань** інших фізичних величин $a, b, c, \dots$. Це означає, що непряме вимірювання x є функцією величин, виміряних прямо: $x = f(a, b, c, \dots)$.

Наприклад, потужність постійного струму обчислюють як добуток $P = IU$, де величини I та U вимірюють амперметром та вольтметром.

Оцінити точність величин для прямих вимірювань ми вміємо. Нехай результат вимірювання цих величин записано стандартним чином:

$$a = \tilde{a} \pm \Delta a, \quad b = \tilde{b} \pm \Delta b, \quad c = \tilde{c} \pm \Delta c$$

$$\text{відносні похибки: } \delta a = \frac{\Delta a}{\tilde{a}} \cdot 100\%, \quad \delta b = \frac{\Delta b}{\tilde{b}} \cdot 100\%, \quad \delta c = \frac{\Delta c}{\tilde{c}} \cdot 100\%$$

Невідому величину x (результат непрямого вимірювання) шукатимемо у стандартному вигляді:

$$x = \tilde{x} \pm \Delta x$$

Розглянемо основні математичні операції, що можуть зустрічатися в функції багатьох змінних.

Нехай шукана величина дорівнює сумі та різниці трьох величин,

$$x = a + b - c = \underbrace{\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}}_{\tilde{x}} \pm \underbrace{(\Delta a + \Delta b + \Delta c)}_{\Delta x}.$$

Знак « $\rightarrow$ » перед Δc змінено на « $+$ », оскільки нас завжди цікавить сумарна максимальна похибка.

Абсолютні похибки при складанні, чи відніманні завжди додаються.

$$\text{Отже,} \quad \Delta x = \Delta a + \Delta b + \Delta c$$

Це загальне правило: *похибка суми чи різниці дорівнює сумі абсолютних похибок доданків.*

Знайдемо **відносну похибку суми**:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \cdot 100\% = \frac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c}} \cdot 100\%$$

Виведемо формулу **обчислення похибки добутку**:

$$x = ab = (\tilde{a} \pm \Delta a)(\tilde{b} \pm \Delta b) = \underbrace{\tilde{a}\tilde{b}}_{\tilde{x}} \pm \underbrace{(\tilde{a}\Delta b + \tilde{b}\Delta a) \pm \Delta a\Delta b}_{\Delta x}.$$

Тут окремо виділено доданок $\Delta a \Delta b$. Оскільки ця величина як мінімум на порядок менша за $a \Delta b$ чи $b \Delta a$ і на два порядки за дійсне значення a і b . Тому доданком нехтують.

І абсолютна похибка добутку дорівнює:

$$\Delta x = a \Delta b + b \Delta a.$$

Знайдемо **відносну похибку добутку**, що визначаються прямим вимірюванням:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \cdot 100\% = \frac{a \Delta b + b \Delta a}{\tilde{a} \cdot \tilde{b}} \cdot 100\% = \left(\frac{\Delta b}{\tilde{b}} + \frac{\Delta a}{\tilde{a}} \right) \cdot 100\% = \delta a + \delta b$$

З останньої рівності випливає правило:

Відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок множників.

Це правило справедливе за довільної кількості множників.

Аналогічно можна вивести формулу **обчислення похибки відношення.**

абсолютна похибка відношення дорівнює:

$$\Delta x = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \cdot 100\% = \frac{a \Delta b + b \Delta a}{\tilde{b}^2}$$

Знайдемо **відносну похибку відношення**, що визначаються прямим вимірюванням:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \cdot 100\% = \frac{(a \Delta b + b \Delta a) \cdot \tilde{b}}{\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}} \cdot 100\% = \left(\frac{\Delta b}{\tilde{b}} + \frac{\Delta a}{\tilde{a}} \right) \cdot 100\% = \delta a + \delta b$$

З останньої рівності випливає правило:

Відносна похибка відношення теж, як і у добутку, дорівнює сумі відносних похибок множників.

При виведенні формул слід спочатку шукати абсолютну похибку, якщо більше є операцій додавання чи віднімання, і відносну, якщо більше є операцій множення чи ділення.

Використаємо це правило для **обчислення абсолютної і відносної похибок числа у ступені n.**

Тобто, нам потрібно знайти похибку для функції $x = a^n$, де n належить до множини натуральних чисел. Оскільки $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, (є тільки операції додавання) спочатку зручніше шукати **відносну похибку**:

$$\delta x = \delta a^n = \delta \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \right) = \underbrace{\delta a + \delta a + \dots + \delta a}_n = n \delta a.$$

З відносної похибки знайдемо **абсолютну похибку**:

$$\delta x = n\delta a \Rightarrow \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\% = n \frac{\Delta a}{\bar{a}} \Rightarrow \Delta x = n\bar{a}^{n-1} \Delta a.$$

За допомогою описаних методів отримують формули для обчислення похибок.

В таблиці 2 наведені формули для оцінки похибок деяких комбінацій вимірюваних величин, що найчастіше зустрічаються при обчисленнях.

Зверніть увагу, що абсолютна похибка розраховується за тими ж правилами, що і похідна від функції. Це пов'язано з тим, що математично, абсолютна похибка відображає зміну вимірюваної величини (тобто функції) у залежності від істинного значення. В похідній, у чисельнику, також стоїть зміна функції від аргументу. Тому, абсолютна похибка проявляє тіж самі властивості, як і похідна від функції.

Таблиця 2.

Формули для обчислення похибок

№ з.п.	Функціональна залежність	Похибка	
		Середня абсолютна	Середня відносна
1	$x = a + b - c$	$\pm(\Delta a + \Delta b + \Delta c)$	$\frac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}} \cdot 100\%$
2	$x = ab$	$\pm(\bar{a} \Delta b + \bar{b} \Delta a)$	$\delta a + \delta b$
3	$x = \frac{a}{b}$	$\pm\left(\frac{\bar{a} \Delta b + \bar{b} \Delta a}{\bar{b}^2}\right)$	$\delta a + \delta b$
4	$x = a^n$	$\pm(n\bar{a}^{n-1} \Delta a)$	$n\delta a$
5	$x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$	$\pm\left(\frac{1}{n} \bar{a}^{(1/n)-1} \Delta a\right)$	$\frac{1}{n} \delta a$
6	$x = \sin \alpha$	$\pm \cos \bar{\alpha} \Delta \alpha$	$\operatorname{ctg} \bar{\alpha} \Delta \alpha \cdot 100\%$
7	$x = \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \frac{\Delta \alpha}{\cos^2 \bar{\alpha}}$	$\frac{2\Delta \alpha}{\sin 2\bar{\alpha}} \cdot 100\%$
8	$x = \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \frac{\Delta \alpha}{\sin^2 \bar{\alpha}}$	$\frac{2\Delta \alpha}{\sin 2\bar{\alpha}} \cdot 100\%$
9	$x = \cos \alpha$	$\pm \sin \bar{\alpha} \Delta \alpha$	$\operatorname{tg} \bar{\alpha} \Delta \alpha \cdot 100\%$

Деякі важливі моменти у наведеній таблиці .

1. Як відзначалося вище, випадкові похибки вимірювань рівноймовірно можуть бути як позитивними так і негативними. Але це – відхилення від істинної величини. Тому як при складанні, так і при відніманні виміряних величин абсолютні похибки складаються.

2. Якщо математично проводиться віднімання двох величин, відносна похибка буде містити в знаменнику різницю цих двох величин. У випадку, коли ці величини близькі за значенням, то відносна похибка різниці двох величин, у результаті цієї дії, може значно перевищувати відносну похибку кожної величини окремо. Щоб уникнути втрати точності слід уникати таких вимірювань і обчислень, при яких доводиться віднімати близькі по значенню величини.

3. При множенні і відношенні двох величин складаються відносні похибки. У цьому випадку, розрахункова формула є одночленом, а суми і різниці якщо і присутні, то у вигляді окремих множників. Тоді простіше спочатку обчислити не абсолютну (як прийнято по класичній схемі розрахунку), а відносну похибку величини. І навпаки, якщо розрахункова формула має вид багаточлена, доцільно починати з розрахунку абсолютної похибки.

4. При піднесенні до степеня n , відносна похибка збільшується в $|n|$ разів.

Завдання для перевірки за варіантами:

1)Записати числа у нормалізованій формі:

Варіант 1	Нормалізована форма	Варіант 2	Нормалізована форма	Варіант 3	Нормалізована форма
0,00000272		0,00000835		0,00000287	
0,094567		0,0975		0,0947	
258000000		324500000		789320000	

2)Скільки значущих цифр у числі:

Варіант 1	Кількість цифр	Варіант 2	Кількість цифр	Варіант 3	Кількість цифр
0,0000027256		0,000008359		0,00000424737	
0,0945670		0,097500		0,09500	
258000000		324500000		953625000	

3)Закруглити числа а) до тисячних, б) до сотих, в) до десятих:

	Варіант 1	Закруглення	Варіант 2	Закруглення	Варіант 3	Закруглення
а	0,27246		0,8349		0,2875	
б	9,45672		9,7538		9,4747	
в	25,867		3,245		78,93201	

4)Знайти значення виразу з застосуванням правил закруглення:

Варіант 1	значення	Варіант 2	значення	Варіант 3	значення
$7,29+2,5+15,751 \approx$		$2,258+1,2+25,2 \approx$		$0,22+28,52+25,2 \approx$	
$7,389-2,5-3,33 \approx$		$2,347-0,25-4,55 \approx$		$25,84-0,024-25,2 \approx$	
$7,29+2,5-1,5358 \approx$		$2,258+1,2-3,58 \approx$		$28,52+0,22-25,25 \approx$	

5)Знайти абсолютну і відносну (%) похибку ($x = \tilde{x} \pm \Delta x$, $\delta x = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \cdot 100\%$)

суми і віднімань у виразі з трьох чисел $x = a + b - c$, якщо:

	Варіант 1	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$	Варіант 2	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$	Варіант 3	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$
а	$2,7 \pm 0,25$			$17 \pm 0,5$			$0,77 \pm 0,15$		
б	$7,3 \pm 0,45$			$13 \pm 0,35$			$9,33 \pm 0,05$		
с	$9,7 \pm 0,5$			$31 \pm 0,15$			$10,05 \pm 0,25$		

6) Знайти абсолютну і відносну (%) похибку ($x = \tilde{x} \pm \Delta x$, $\delta x = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \cdot 100\%$)

добутку двох чисел $x = a \cdot b$, якщо:

	Варіант 1	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$	Варіант 2	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$	Варіант 3	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$
a	2,0 $\pm$ 0,25			2,0 $\pm$ 0,15			5,0 $\pm$ 0,25		
b	5,0 $\pm$ 0,75			4,0 $\pm$ 0,35			3,0 $\pm$ 0,45		

7) Знайти абсолютну і відносну (%) похибку ($x = \tilde{x} \pm \Delta x$, $\delta x = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \cdot 100\%$)

відношення двох чисел $x = a/b$, якщо:

	Варіант 1	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$	Варіант 2	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$	Варіант 3	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$
a	2,0 $\pm$ 0,25			2,0 $\pm$ 0,15			5,0 $\pm$ 0,25		
b	5,0 $\pm$ 0,75			4,0 $\pm$ 0,35			3,0 $\pm$ 0,45		

8) Знайти абсолютну і відносну (%) похибку ($x = \tilde{x} \pm \Delta x$, $\delta x = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \cdot 100\%$)

ступені чисел $x = a^3$, якщо:

	Варіант 1	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$	Варіант 2	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$	Варіант 3	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$
a	2,0 $\pm$ 0,25			5,0 $\pm$ 0,15			3,0 $\pm$ 0,25		

9) Знайти абсолютну і відносну похибку коріню чисел $x = \sqrt[3]{a}$, якщо:

	Варіант 1	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$	Варіант 2	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$	Варіант 3	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$
a	216,0 $\pm$ 0,5			27,0 $\pm$ 0,15			64,0 $\pm$ 0,25		

10) Знайти абсолютну похибку приладу (міліамперметр), якщо максимальне значення **I** по шкалі і клас приладу **η** дорівнюють:

	Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4
I	1500 mA	300 mA	100 mA	250 mA
η	2,5	1,5	0,2	0,1

11) Знайти абсолютну і відносну (%) похибку ($x = \tilde{x} \pm \Delta x$, $\delta x = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \cdot 100\%$)

добутку і відношення у виразі з трьох чисел $x = a \cdot b / c$, якщо:

	Варіант 1	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$	Варіант 2	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$	Варіант 3	$\pm \Delta x$	$\delta x, 100\%$
a	2,0 $\pm$ 0,25			2,0 $\pm$ 0,5			5,00 $\pm$ 0,15		
b	5,0 $\pm$ 0,45			4,0 $\pm$ 0,35			3,00 $\pm$ 0,05		
c	4,0 $\pm$ 0,5			5,0 $\pm$ 0,15			3,00 $\pm$ 0,25		

Питання для самоперевірки:

1. Що таке **прямі і непрямі** вимірювання?
2. Види похибок: **грубі, систематичні, випадкові**. Дати визначення
3. Яка форма запису чисел вважається «**нормалізованою**»?
4. Поняття **закруглення** числа.
5. Дайте визначення, які цифри у запису числа вважають **значущими**?
6. Чотири **правила закруглення** чисел.
7. Що таке **абсолютна похибка** числа Δa ?
8. Що таке **відносна похибка** числа δ ?
9. Як пов'язані між собою абсолютна похибка Δa і відносна похибка δ ?
10. Як можна знайти кількість значущих цифр у запису числа, якщо нам відома його абсолютна похибка виміру?
11. Абсолютна і відносна похибки **суми чисел**.
12. Абсолютна і відносна похибки **при відніманні чисел**.
13. Чому абсолютні похибки при відніманні чисел складаються за модулем?
14. Абсолютна і відносна похибки **добутку чисел**.
15. Абсолютна і відносна похибки **відношення чисел**.
16. Абсолютна і відносна похибки **чисел у ступені**.
17. Абсолютна і відносна похибки **коріню n-ї ступені від числа**
18. Що таке «**приведена похибка ε_2** » приладу?
19. Що таке «**показник класу точності η** » приладу?
20. Як класи точності називають «**лабораторними**»?

3.3.Лабораторна робота № 2

«Дослідження сил тертя за допомогою плоского трибометра»

Прилади та приладдя: плоский трибометр зі змінними пластинами і набори тіл з різних металів, рівноваги, гумовий молоточок.

Мета роботи: засвоїти один із методів визначення коефіцієнта тертя ковзання, використовуючи закон Амонтона-Кулона.

Скорочена теорія та методика вимірювань

При розгляданні багатьох явищ природи, розрізняють два основні види тертя: **внутрішнє і зовнішнє**.

Внутрішнє тертя виникає в твердих, аморфних тілах та рідинах і газах під дією механічного навантаження. В твердих і аморфних тілах він має складний механізм, пов'язаний з деформацією тіл. Взагалі, в твердих тілах внутрішнє тертя призводить до нагрівання деформованого тіла.

В рідинах та газах **внутрішнє тертя** (за термінологією, визначається як **в'язкість** рідин чи газів) – це **опір відносному переміщенню сусідніх шарів речовини, які рухаються з різними швидкостями**. Воно є результатом сил молекулярного зчеплення на межі двох шарів і переходу молекул з одного шару в інший внаслідок хаотичного руху.

Наука, що вивчає закономірності деформації твердих тіл та течії рідин під дією механічного навантаження називається **реологією**. Розділ реології, що вивчає в'язкість рідин називається **віскозиметрією**. З методами визначення в'язкості рідин ми будемо мати справу при виконанні окремої лабораторної роботи.

Зовнішнє тертя – це явище, яке визначається як **протидія відносному переміщенню прилягаючих тіл**.

Сила протидії спрямована вздовж стичних поверхонь і завжди спрямована проти напрямку руху.

В цій лабораторній роботі ми будемо вивчати явище зовнішнього тертя. З цим явищем людство мало справу з початку використання механічних пристроїв. Найпростішим експериментальним законом (хоча й не дуже точним) вважається закон Амонтона-Кулона.

Згідно **закону Амонтона-Кулона: сила зовнішнього тертя F пропорційна силі нормальної реакції N між стичними тілами і не залежить від величини стичної поверхні тіл і швидкості їх відносного руху:**

$$F = k N \quad (1)$$

Коефіцієнт пропорційності **k** у цьому законі має назву **коефіцієнта тертя**. Коефіцієнт тертя **k**, у загальному випадку, залежить від великої кількості параметрів. Таких, як матеріали тіл, що труться, якості обробки поверхонь, наявності на поверхнях забруднень або мастила та ін.

Закон (1) наближений і застосовується тільки для орієнтовних розрахунків. В дійсності, явище тертя значно складніше: мають бути враховані

сили міжмолекулярного зчеплення, величина стичних поверхонь. Врешті закон (1) не враховує залежність сил тертя від швидкості відносного руху тіл, що труться. Тобто не відрізняє те, що називається статичним і кінематичним тертям.

Статичне тертя – це **тертя між тілами, що знаходяться у стані спокою**: При малих значеннях діючої на тіло сили воно залишається у спокої по відношенню до поверхні іншого тіла завдяки наявності сили тертя спокою.

Згідно з **третім законом Ньютона, в механіці, сила взаємодії** (а в нашому випадку це – сила тертя) **дорівнює за величиною і протилежна за напрямком прикладеній до тіла силі**. При деякому максимальному значенні прикладеної сили тіло зривається з місця і починає рухатись. Така властивість сил статичного тертя називається застоєм. Причина статичного тертя – наявність сил молекулярного зчеплення і зачеплення нерівностей поверхонь тіл.

Після того, як тіло почало рухатись, статичне тертя змінюється **кінематичним**. При цьому величина сили кінематичного тертя виявляється меншою за максимальну силу тертя спокою. Кінематичне тертя зумовлене рядом причин, на яких ми зупинятися не будемо.

На сьогодні “точного” закону тертя не існує, тому на практиці коефіцієнт тертя визначають для різних пар третьових матеріалів при різних якості обробки поверхонь, різних тисках і швидкостях руху, а результати подають у вигляді довідкових таблиць.

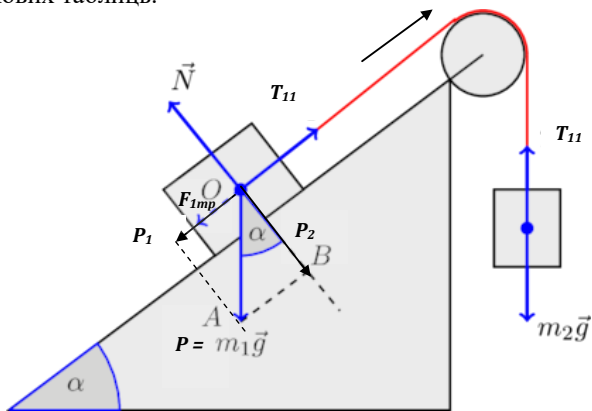


Рис. 1. Схема плоского трибометра

В даній роботі для вимірювання сил тертя застосовується плоский трибометр з набором пластин і тіл із різних матеріалів (рис. 1). Трибометр – це площина, кут нахилу якої до горизонту можна змінювати. Трибометр має градусну шкалу, затискач для фіксування кута нахилу, нерухомий блок для нитки і шальку для встановлення важелів. Зовнішньою рушійною силою у такому трибометрі є результуюча декількох сил. Вона паралельна похилій площині і визначається силою натягу нитки, яка діє вздовж похилої площини і зумовлена вагою важелів, складової сили тяжіння тіла, теж паралельної похилій

площині, а також силою тертя, яка спрямована проти напрямку руху, тобто теж паралельно похилій площині. Величину рушійної сили можна регулювати підбором маси важелів і зміною кута нахилу площини трибометра. При зміні важелів буде змінюватись натяг нитки, а при зміні кута нахилу – змінюються складова сили тяжіння і сила тертя. Перехід від застою до рівномірного руху долається легкими ударами молоточка по пластині при зміні кута нахилу.

Розглянемо рух тіла на похилій площині під дією вказаних сил. Для цього розкладено силу тяжіння P , що діє на тіло, на дві складові – паралельну похилій площині (складова P_1) і перпендикулярну їй (складова P_2). Складова P_2 викликає з боку похилої площини рівновелику собі силу нормальної реакції N . В залежності від того, куди спрямована рівнодіюча всіх сил, прикладених до тіла, у тому напрямку буде рухатись тіло.

Хай сила натягу нитки T_{11} не менша від суми сили тертя $F_{1\text{тр}}$ і складової P_1 (рис. 2а). Тоді тіло рухається з прискоренням вгору. Якщо складова P_1 більша за суму сили натягу T_{12} нитки та сили тертя $F_{2\text{тр}}$, то тіло буде рухатись з прискоренням до низу (рис. 2б).

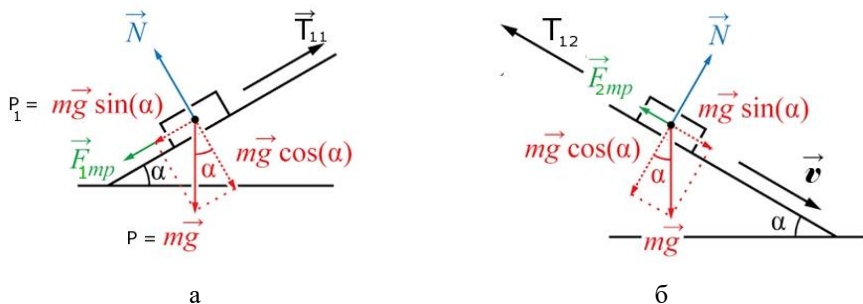


Рис. 2. Напрям дії сил на похилій площині при русі тіла а) доверху, б) донизу

При рівномірному ковзанні тіла вгору сила натягу T_{11} позитивна і спрямована вздовж напрямку руху, а їй протидіють складова сили тяжіння P_1 і сила тертя $F_{1\text{тр}}$. Згідно з першим законом Ньютона, при рівномірному русі має виконуватись умова рівноваги сил. На підставі цього можемо записати співвідношення:

$$T_{11} = P_1 + F_{1\text{тр}}. \quad (2)$$

У співвідношенні (2) сила тертя, за законом Амонтона-Кулона, дорівнює $F_{1\text{тр}} = kN = kP \cos \alpha$. Складова сили тяжіння, що паралельна похилій площині, як видно з рис.1а, дорівнює $P_1 = P \sin \alpha$. Підставляючи значення $F_{1\text{тр}}$ і P_1 в (2), можна визначити коефіцієнт тертя:

$$T_{11} = P \sin \alpha_1 + k_1 P \cos \alpha_1 \rightarrow k_1 P \cos \alpha_1 = T_{11} - P \sin \alpha_1 \rightarrow$$

$$k_1 = \frac{T_{11}}{P \cos(\alpha_1)} - \operatorname{tg}(\alpha_1). \quad (3)$$

При рівномірному русі тіла до низу по похилій площині, як і у попередньому випадку, повинна виконуватись рівновага сил. Але, так як сила тертя, завжди спрямована проти напрямку руху, у цьому випадку вона змінює напрям на протилежний (рис. 1б). Маємо співвідношення:

$$P_1 = T_{12} + F_{2\text{тр}}. \quad (4)$$

Після підстановки в (4) значень P_1 і $F_{2\text{тр}}$ для коефіцієнта тертя одержуємо

$$P \sin \alpha_2 = T_{12} + k_2 P \cos \alpha_2 \rightarrow k_2 P \cos \alpha_2 = P \sin \alpha_2 - T_{12} \rightarrow$$

$$k_2 = \operatorname{tg}(\alpha_2) - \frac{T_{12}}{P \cos(\alpha_2)}. \quad (5)$$

З метою зменшення похибок, зумовлених різними значеннями сил нормального тиску та різного значення величини молекулярного зчеплення, за коефіцієнт тертя приймають середнє значення визначених коефіцієнтів тертя k_1 (вираз (3)) і k_2 (вираз (5)):

$$k_{\text{сеп}} = (k_1 + k_2)/2. \quad (6)$$

У випадку найпростіших (грубих вимірювань) коефіцієнт тертя можна визначити без врахування додаткової сили натягу T_1 . При цьому підбирають такий кут α_3 , при якому тіло рівномірно ковзає по похилій площині. У цьому разі, складова сили тяжіння P_1 позитивна і спрямована вздовж напрямку руху, а їй протидіє тільки сила тертя $F_{3\text{тр}}$. З рівноваги цих сил отримуємо дуже просте співвідношення:

$$k_3 P \cos \alpha_3 = P \sin \alpha_3 \rightarrow$$

$$k_3 = \operatorname{tg}(\alpha_3). \quad (7)$$

Порядок виконання роботи:

1. За пропозицією викладача відібрати пластину та два тіла: **1 – сталь 3**; **2 – антикорозійна сталь**; **3 – латунь**; **4 – дюраль**.

2. Ретельно очистити крейдою поліровані поверхні до рівномірного блиску та зібрати ганчіркою залишки порошку з поверхні тіл.

3. Вставити пластинку на трибометр, фіксуючи її кінцевими стопорами через отвори.

4. Виміряти з точністю до 5 г масу m_1 . Визначити вагу тіла – $P = m_1 g$, яке рухається по похилій площині (вважати значення прискорення вільного падіння як $g = 9,8 \text{ м/с}^2$). Значення маси m_1 і ваги P занести у таблицю. Ці значення маси і ваги тіла будуть використовуватись для розрахунків коефіцієнта тертя для всіх трьох експериментів.

5. Відпустити затискач, підійняти площину у верхнє положення і затиснути. Покласти тіло на площину біля нижнього стопору, причепити до нього за гачок нитку з шалькою і покласти на шальку гирю сумарною масою з шалькою m_2 більше ніж половина маси тіла $m_1/2$. Розрахувати силу натягу нитки – $T_{11} = m_2 g$, де m_2 визначається як сума ваги гирі і шальки. Значення маси

m_2 і силу натягу нитки T_{11} занести у таблицю для розрахунку k_1 .

6. Відпустити затискач та повільно зменшувати кут нахилу площини (постукуючи молоточком по пластині) доти, доки тіло не **почне ковзати догори** від нижнього до верхнього стопора. Зафіксувати кут нахилу α_1 , коли почався рух і записати його до таблиці для розрахунку k_1 . Опустити площину, зняти гирю з шальки.

7. Обчислити за формулою (3) коефіцієнт тертя k_1 . Записати значення до таблиці.

8. Підібрати і покласти на шальку гирю сумарною масою з шалькою m_2 тіла не більше ніж четверта частина маси тіла $m_1/4$. Розрахувати силу натягу нитки – $T_{12}=m_2g$, де m_2 визначається теж як сума ваги гири і шальки. Значення маси m_2 і силу натягу нитки T_{12} занести у таблицю для розрахунку k_2 .

9. Відпустити затискач та повільно підіймати площину постукуючи молоточком по пластині, доти, доки тіло не **почне ковзати вниз** по пластині трибометра від верхнього до нижнього стопора. . Зафіксувати кут нахилу α_2 , коли почався рух і записати його до таблиці для розрахунку k_2 . Опустити площину і відчепити нитку з шалькою.

10. За формулою (5) знайти k_2 . Записати значення до таблиці.

11. За формулою (6) обчислити $k_{\text{сеп}}$. Це значення теж занести до таблиці.

12. Покласти тіло на пластину, не чіпляючи нитки з шалькою до нього. Відпустити затискач та повільно підіймати площину постукуючи молоточком по пластині, доти, доки тіло не **почне ковзати вниз** по пластині трибометра від верхнього до нижнього стопора. . Зафіксувати кут нахилу α_3 , коли почався рух і записати його до таблиці. для розрахунку k_3 .

13. За формулою (7) знайти k_3 Записати значення до таблиці.

14. Порівняти k_3 зі значенням $k_{\text{сеп}}$, визначивши абсолютну похибку вимірювань: $\Delta k = k_3 - k_{\text{сеп}}$. Записати значення до таблиці.

15. Результати всіх розрахунків записати нижче таблиці.

16. Обчислити відносну похибку вимірів $\delta = \Delta k / k_{\text{сеп}} \cdot 100\%$ (дивись матеріали роботи «Теорія похибок»).

17. Кінцевий результат записати нижче таблиці і розрахунків у вигляді

$$k = k_{\text{сеп}} \pm \Delta k, \text{ точність вимірів: } \delta = \dots\%$$

Розрахунок k1				Розрахунок k2			k _{сеп}	Розрахунок k3		Δk
m ₁	m ₂	α ₁	k ₁	m ₂	α ₂	k ₂		α ₃	k ₃	
P	T ₁₁			T ₁₂						

итання для самоперевірки:

1. Що таке внутрішнє тертя у рідині чи газі?
2. Дати визначення зовнішнього тертя двох твердих тіл.
3. Записати закон Амонтона–Кулона для сили зовнішнього тертя.
4. Дати визначення сили статичного тертя.
5. Дати визначення сили кінематичного тертя.
6. Записати силу реакції опору тіла на похилій площині з кутом α . Чому вона дорівнює?
7. На які складові розкладається сила тяжіння тіла на похилій площині з кутом α ?
8. Куди спрямована сила тертя?
9. Дати визначення першого закону Ньютона.
10. Що таке інерціальні системи відліку?
11. Записати умови рівномірного руху.
12. Дати визначення другого закону Ньютона.
13. Коли тіло буде рухатися з прискоренням по похилій площині? Коли воно буде рухатися рівномірно?
14. Що таке сили взаємодії?
15. Дати визначення третього закону Ньютона.
16. Чому у першому експерименті тіло рухається догори, а у другому і третьому – донизу?
17. Що таке абсолютна похибка?
18. Що таке відносна похибка?
19. Як пов'язані між собою абсолютна і відносна похибки?
20. Які вимірювальні прилади використовуються в цій роботі? Яка абсолютна похибка вимірювання у цих пристроїв?

3.4.Лабораторна робота № 3

«Дослідження основного закону динаміки обертального руху»

Прилади та приладдя: хрестоподібний маятник з набором муфт, вертикальний масштаб, набір тягарів 0,10, 0,15, 0,20 кг, штангенциркуль, секундомір.

Мета роботи: перевірити здійснення основного закону динаміки обертального руху.

Скорочена теорія та методика вимірювань

Для опису обертального руху твердого тіла використовують параметри руху, за допомогою яких можна описати рух як кожної матеріальної точки рухомого тіла, так і рух всього тіла в цілому.

Такими параметрами є:

- кутове переміщення (кут оберту) – $\varphi(t)$,
- кутова швидкість – $\omega(t)$,
- кутове прискорення – $\beta(t)$.

Кутове переміщення (кут оберту) $\varphi(t)$ – це кут, на який повертається тіло за певний час.

Кут оберту пов'язаний зі шляхом, який проходить матеріальна точка при обертанні, співвідношенням:

$$\Delta S = R\Delta\varphi$$

Кутова швидкість – це зміна кута оберту за часом. Вона вимірюється в радіанах за секунду [рад/с]. Математично, якщо вважати кут оберту функцією від часу $\varphi(t)$, кутова швидкість відповідає першій похідній від кута оберту:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Кутова швидкість пов'язана з лінійною швидкістю співвідношенням, аналогічним співвідношенню кута оберту і шляху:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Кутова швидкість є псевдовектором, напрям якого залежить від напрямку обертання і визначається за правилом правого гвинта.

Кутове прискорення – це фізична величина, яка характеризує зміну кутової швидкості за часом. Як і для кутової швидкості, математично, можна визначити кутове прискорення, як першу похідну від кутової швидкості, чи другу похідну від кута оберту:

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Кутове прискорення також є псевдовектором, напрям якого співпадає з вектором кутової швидкості під час прискореного руху і протилежний під час сповільненого руху. Одиниця вимірювання кутового прискорення:

$$[\beta] = \text{рад/с}^2.$$

Є ще дві важливі характеристики обертального руху – це період обертання T і частота обертів ν .

T – період обертання – це час одного повного обертів по колу;

ν – частота обертання – це число обертів за одиницю часу (в системі СІ – за 1с).

При рівномірному обертальному русі **кутова швидкість** пов'язана з ними простим співвідношенням, якщо за відлік часу брати один оберт:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$$

Під час обертального руху твердого тіла **нормальне (доцентрове) прискорення** кожної точки цього тіла можна **зв'язати з кутовою швидкістю** на підставі визначення нормального (центростремкового) прискорення і зв'язку швидкості і кутової швидкості, який був наведений вище:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R,$$

Якщо ж обертальний рух твердого тіла прискорений, то **тангенціальне прискорення** його точок теж **можна зв'язати з кутовим прискоренням**, використовуючи визначення тангенційного прискорення та зв'язку швидкості і кутової швидкості:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\omega \cdot R)}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = R \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \beta$$

Для вирішення задач, пов'язаних з обертальним рухом твердого тіла користуються основним законом динаміки обертального руху. Він є аналогом другого закону Ньютона, тільки для застосування для опису обертального руху.

Основний закон динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі стверджує, що кутове прискорення тіла, яке надається зовнішніми силами тілу, що обертається, пропорційне головному моменту зовнішніх сил, що діють на тіло, і обернено пропорційне моменту інерції тіла.

Математичний вигляд цього закону можна записати таким чином:

$$\beta = \frac{M}{I}. \quad (1)$$

де β – кутове прискорення тіла, M – головний момент зовнішніх сил, I – момент інерції тіла відносно осі обертання.

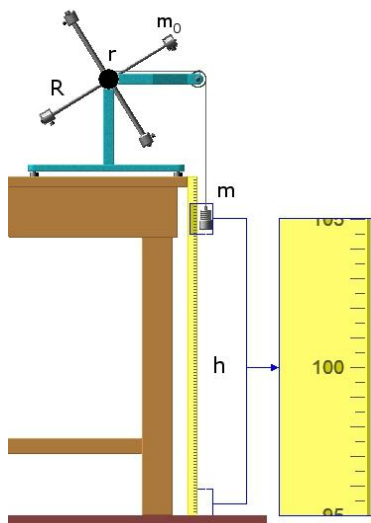


Рис.1 Маятник Обербека

Справедливість закону (1) можна перевірити, вимірюючи кутові прискорення β_i для різних значень моменту сил M_i та сталого моменту інерції тіла I . Тоді відношення моментів сил M_i до кутових прискорень β_i має залишатись сталим:

$$\frac{M_i}{\beta_i} = I = \text{const}. \quad (2)$$

Момент інерції тіла є мірою інертності тіла при обертанні. Він визначається як сума добутків маси кожної частки рухомого тіла на квадрат її відстані від осі обертання:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (3)$$

В даній роботі вимірюється момент інерції хрестоподібного маятника Обербека, з закріпленими на шківів насадками (рис.1).

Хрестоподібний маятник складається з хрестовини з 4 стержнів та шківів, закріплених на втулці. Втулка яка переходить у шків має

радіус. Втулка і стержні закріплені так, що вся система обертається навколо горизонтальної осі. На стержнях установлені муфти m_0 , які можна переміщувати на різні відстані від осі обертання. На шків намотується шнур з вантажем m . Завдяки руху вантажу m шнур розмотується зі шківів і надає обертаючий момент маятнику.

В устаткуванні застосована система механічного гальма яка дозволяє керувати початком руху m , та його зупинкою. Шлях h , пройдений вантажем m , вимірюють за допомогою лінійки (чи рулетки).

Момент інерції маятника можна змінювати. Для цього переміщують насадки масами m_0 , закріплюючи їх на однакових відстанях R від осі обертання. Ці маси, якщо нехтувати їх розмірами, можна вважати матеріальними точками. Згідно теорії, момент інерції масивної матеріальної точки I_m , яка обертається на відстані R від осі обертання, можна розрахувати доволі просто:

$$I_m = mR^2.$$

Тоді загальний момент інерції хрестоподібного маятника з насадками I буде складатися з моменту інерції самого маятника I_0 , і чотирьох моментів інерції насадок. Для загального моменту інерції I хрестоподібного маятника можна

записати співвідношення:

$$I = I_0 + 4m_0R^2. \quad (4)$$

Таким чином, якщо знайти момент інерції самого маятника I_0 , виміряти маси муфт m_0 та відстань їх від вісі обертання R , то можна **теоретично розрахувати загальний момент інерції хрестоподібного маятника** з насадками I , використовуючи вираз (4).

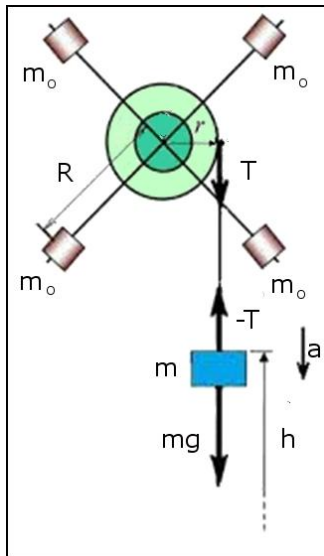


Рис.2. Схема вимірів

Розрахувати ж момент інерції самого маятника I_0 , який має складний розподіл маси навколо вісі обертання, можливо тільки з основного рівняння динаміки обертального руху: $I_0 = \frac{M}{\beta}$.

Тобто, треба знайти момент сили M , яка надає маятнику обертальний рух, і визначити кутове прискорення β , з яким буде обертатись маятник під дією цього моменту сил. Поділивши момент сили M на кутове прискорення β , отримаємо необхідне значення моменту інерції маятника I_0 .

Визначення кутового прискорення β і моменту сили M в умовах даної роботи може бути виконано у такий спосіб (рис.2).

На шків радіусом r намотується нерозтяжна нитка, до якої прикріплено тягар масою m . Під дією сили тяжіння тягар опускається рівноприскорено з тангенціальним прискоренням a . Як наводилось вище, тангенціальне прискорення a пов'язане з кутовим прискоренням β співвідно-

шенням:

$$\beta = \frac{a}{r}. \quad (5)$$

Величину дотичного прискорення a , визначимо із умови спостереження прямолінійного прискореного руху донизу тягаря масою m .

Рух тіла m рівноприскорений. Тобто він здійснюється з постійним прискоренням a .

Систему рівнянь для рівноприскореного прямолінійного руху тіла m можна записати у загальному вигляді так:

$$\begin{cases} a_\tau = \text{const} = a \\ v(t) = v_0 + at \\ s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{cases} \quad (6)$$

Так як на початку руху тягар **m** знаходився у стані спокою, початкова швидкість руху **v₀** буде дорівнювати нулю. Тоді, вважаючи, що **v₀ = 0**, а шлях, який проходить тіло за час **t** буде дорівнювати висоті, з якої рухався тягар **m**, **s(t) = h**, третє рівняння системи (6) можна записати у вигляді:

$$h = \frac{at^2}{2},$$

Звідки отримуємо вираз для тангенційного прискорення:

$$a = \frac{2h}{t^2} \quad (7)$$

Підставляючи (7) у рівняння (5), можна записати вираз для кутового прискорення:

$$\beta = \frac{a}{r} = \frac{2h}{rt^2} \quad (8)$$

Таким чином, вимірюючи радіус шківa **r**, час падіння тягаря **t** і його шлях **h**, ми можемо розрахувати кутове прискорення **β**, з яким обертається маятник Обербека (вираз (8)).

Для знаходження моменту інерції маятника з основного **закону динаміки обертального руху** (3) залишається лише знайти головний момент сили, який заставляє маятник обертатися навколо вісі.

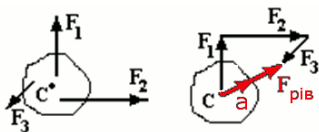
За визначенням моменту сили **M**, це добуток сили **F** на плече дії цієї сили **r**:

$$M = Fr$$

У нашому випадку, сила, яка примушує обертатися маятник, це сила натягу нитки **T**, а плече – це радіус шківa **r**, який ми можемо виміряти штангенциркулем.

Для знаходження натягу нитки **T** використаємо другий закон Ньютона.

2-й закон Ньютона стверджує:



Прискорення **ā**, з яким рухається центр маси тіла, прямо пропорційне векторній сумі сил, що діють на нього (рівнодіючій **F_{рівн}**), і обернено пропорційне масі тіла. Прискорення спрямоване в напрямку рівнодіючої і прикладене до центра маси тіла.

На тягар **m**, який підвішений на нитці, діють дві сили: доверху – сила натягу нитки **T**, а вниз – сила тяжіння Землі **mg** (рис.2).

Так як тягар рухається до низу, рівнодіюча цих сил спрямована вниз. Вона і надає тягареві **m** прискорення **a**. На підставі другого закону Ньютона, можемо записати:

$$a = \frac{(mg - T)}{m},$$

Звідки отримаємо вираз для сили натягу нитки:

$$T = m(g - a). \quad (9)$$

Натяг нитки T , який має плече r , діє моментом сили M на маятник Обербека і приводить його в обертальний рівноприскорений рух з кутовим прискоренням β . Отже, головний обертаючий момент – це момент сили натягу нитки.

З урахуванням (7) і (9) він виявляється рівним:

$$M = Fr = Tr = m(g - a)r = m\left(g - \frac{2h}{l^2}\right)r \quad (10)$$

Таким чином, ми визначили дві фізичні величини, які дозволяють знайти **момент інерції I хрестоподібного маятника Обербека**. А саме – головний обертаючий момент і кутове прискорення. Тоді, на підставі основного рівняння динаміки обертального руху (1), остаточно можна записати:

$$I = \frac{M}{\beta}. \quad (11)$$

Де M знаходимо з рівняння (10), а β – з рівняння (8).

В роботі, для більш точнішого знаходження моменту інерції маятника Обербека, проводять дослід при трьох різних значеннях вантажу m і визначають момент інерції I_0 хрестоподібного маятника (таблиця 1).

Точно таку ж серію експериментів проводять з тим самим маятником Обербека, але з додатковими муфтами на кінцях стрижнів маятника.

У цьому випадку знаходять момент інерції маятника Обербека I разом з додатковими муфтами (таблиця 2).

Остаточно проводять теоретичний розрахунок моменту інерції маятника Обербека $I_{\text{теор}}$ разом з насадками і його порівняння зі знайденим експериментальним значенням I . Для цього використовують середнє експериментальне значення моменту інерції маятника Обербека без насадок $I_{0\text{сер}}$ і розраховують значення моментів інерції насадок, вважаючи їх масивними матеріальними точками, що обертаються навколо вісі маятника.

Як наводиться в теорії (4), загальний момент інерції хрестоподібного маятника з насадками I буде складатися з моменту інерції самого маятника I_0 , і чотирьох моментів інерції насадок, як матеріальних масивних точок:

$$I_{\text{теор}} = I_{0\text{сер}} + 4m_0R^2. \quad (12)$$

Це значення і порівнюється зі знайденим експериментальним значенням. Результат порівняння теоретичного $I_{\text{теор}}$ і експериментального I значень моменту інерції маятника Обербека з насадками, абсолютну похибку вимірів ΔI і відносну похибку δ (точність вимірів) заносять у таблицю (таблиця 3).

Порядок виконання роботи:

Виконання роботи складається з трьох частин. Для кожної частини заповнюємо свою таблицю розрахунків:

частина 1.

Експериментальне знаходження моменту інерції маятника Обербека I_0 .

1. Вимірюємо радіус шківів r , висоту опускання h . Значення заносимо у графі « r » і « h » таблиці 1.
2. Підвішуємо на нитку тіло масою $m=0,10\text{кг}$, сумістивши його з верхньою поділкою лінійки. Відпускаємо тягар і даємо йому можливість вільно опускатись до нижньої поділки лінійки. При цьому, за допомогою секундоміра вимірюємо час опускання t . Заносимо у графу « t » таблиці 1.
3. Обчислюємо кутове прискорення β , момент сили M і остаточно, розраховуємо момент інерції хрестоподібного маятника I_0 :
 - кутове прискорення β з рівняння (8),
 - момент сили M з рівняння (10)
 - момент інерції хрестоподібного маятника I_0 з рівняння (11).
4. Дослід виконуємо тричі. Повторюємо дії пп. 2–3, змінивши масу тягаря на $m=0,15\text{кг}$, а потім на $m=0,20\text{кг}$.
5. Всі результати розрахунків подам в таблицю 1.
6. Розраховуємо середнє значення $I_{0\text{ср}}$

Таблиця 1. Визначення моменту інерції хрестоподібного маятника.

виміри №	$m, (\text{кг})$	$t, (\text{с})$	$h, (\text{м})$	$r, (\text{м})$	$\beta, (\text{рад}/\text{с}^2)$	$M, (\text{Н м})$	$I_0, (\text{кг м}^2)$
1.							
2.							
3.							
Середнє значення $I_{0\text{ср}}$							

частина 2.

Експериментальне знаходження моменту інерції маятника з насадками I .

1. Міцно закріплюємо 4 муфти, кожна масою $m_0 = 250\text{г}$, на стрижнях маятника на однакових відстанях $R = 30\text{см}$ від осі обертання (відстань до середини муфти).
2. Як і в першій частині завдання, підвішуємо на нитку тіло масою $m=0,10\text{кг}$, сумістивши його з верхньою поділкою лінійки. Відпускаємо тягар і даємо йому можливість вільно опускатись до нижньої поділки лінійки. При цьому, за допомогою секундоміра вимірюємо час опускання t . Заносимо у графу « t » таблиці 2.
3. Обчислюємо кутове прискорення β , момент сили M і остаточно, розраховуємо момент інерції хрестоподібного маятника I :
 - кутове прискорення β з рівняння (8),

- момент сили **M** з рівняння (10)
 - момент інерції хрестоподібного маятника **I** з рівняння (11).
4. Дослід теж виконайте тричі. Повторюємо дії пп. 2–3, змінивши масу тягара на **m=0,15кг**, а потім на **m=0,20кг**.
 5. Результати вимірювань і розрахунків подати в таблицю 2.
 6. Розраховуємо середнє значення моменту інерції маятника з насадками **I_{сер}**

Таблиця 2.Визначення моменту інерції навантаженого маятника.

виміри №	m,(кг)	t,(с)	h,(м)	r,(м)	β,(рад/с ²)	M,(Н м)	I,(кг м ²)
1.							
2.							
3.							
Середнє значення I_{сер}							

частина 3.

Теоретичний розрахунок моменту інерції маятника Обербека **I_{теор}** разом з насадками.

1. З даних першого дослідy, з таблиці 1, беремо середнє значення моменту інерції маятника Обербека без насадок **I_{0сер}**. Переносимо їх у графу «**I_{0сер}**» в таблиці 3.
2. З даних другого дослідy, з таблиці 2, беремо середнє значення моменту інерції маятника Обербека з муфтами **I_{сер}**. Переносимо їх у графу «**I_{експ.сер}**» в таблиці 3
3. Ще раз заміряємо масу муфти **m₀** і відстань від вісі обертання до розташування центрів муфт **R**. Заносимо ці значення у графи «**m₀**» і «**R**» таблиці 3.
4. Використовуючи формулу (12), розраховуємо теоретичне значення моменту інерції маятника Обербека з муфтами **I_{теор}**. Заносимо результати розрахунків у графу «**I_{теор}**» в таблиці 3. Вважаємо його значенням «істинним».
5. Знаходимо значення абсолютної похибки **ΔI = I – I_{теор}** (дивись матеріали роботи «Теорія похибок»).
6. Обчислюємо відносну похибку вимірів **δ = ΔI / I_{теор} · 100%** (дивись матеріали роботи «Теорія похибок»).
7. Результати розрахунків заносимо у таблицю 3.
8. Нижче таблиці, записуємо результати вимірів лабораторної роботи, з урахуванням похибок, у вигляді: **I = I_{теор} ± ΔI**, точність вимірів: **δ = ...%**

Таблиця 3. Визначення теоретичного значення моменту інерції навантаженого маятника.

I_{0сер}	m₀, кг	R, м	I_{теор}	I_{експ.сер}	ΔI	δ, %

Питання для самоперевірки:

1. Що таке кутова швидкість ω ?
2. Що таке кутове прискорення β ?
3. Як пов'язані між собою шлях S і кут оберту ϕ ?
4. Як пов'язана кутова швидкість ω з лінійною швидкістю v ?
5. Як пов'язана кутове прискорення β з тангенціальним прискоренням a_t ?
6. Як пов'язані між собою нормальне прискорення a_n і кутова швидкість ω ?
7. Що таке період обертання T ?
8. Що таке частота обертання ν ?
9. Як період обертання T пов'язаний з частотою обертання ν ?
10. Як кутова швидкість ω пов'язана з періодом обертання T і частотою обертання ν ?
11. Сформулюйте 2-й закон Ньютона.
12. Який рух називається прямолінійним рівноприскореним рухом?
13. Запишіть систему рівнянь для прямолінійного рівноприскореного руху.
14. Дайте визначення моменту сили M .
15. Дайте визначення моменту інерції I .
16. Чому дорівнює момент інерції масивної матеріальної точки I_m , яка обертається на відстані R від вісі обертання?
17. Якщо тіло складається з декількох частин, які мають свої моменти інерції, чому дорівнює момент інерції всього тіла?
18. Що таке хрестоподібний маятник Обербека?
19. Сформулюйте основний закон динаміки обертального руху.
20. Яким чином можна теоретично розрахувати момент інерції маятника Обербека разом з насадками?

3.5.Лабораторна робота № 4

«Вивчення гармонічних коливань на прикладі математичного маятника»

Прилади та приладдя: Установка з математичним маятником і градусною шкалою, рулетка (лінійка), прилад для вимірювання часу.

Мета роботи: вивчення основних законів гармонічного коливання.

Скорочена теорія та методика вимірювань

Навколо нас відбувається багато процесів, які зумовлені певною періодичністю. Тобто, процеси повторюються у часі, набуваючи ті ж самі значення характеристик, за допомогою яких здійснюється опис процесу. Серед періодичних коливань найважливішими є гармонічні коливання. Гармонічні коливання – це коливання, які відбуваються за гармонічним законом і описуються гармонічними функціями (функцією синуса чи косинуса). Важливість саме таких процесів зумовлена двома обставинами. По-перше, реальні коливання і хвилі, з якими доводиться мати справу, часто є близькими до гармонічних. По-друге, будь-який складний коливальний процес, як доводить математика, можна розглядати як суперпозицію (сукупність) гармонічних коливань (розкладання періодичних функцій (сигналів) на суму простих гармонік (гармонічний аналіз періодичних функцій (сигналів))).

І так:

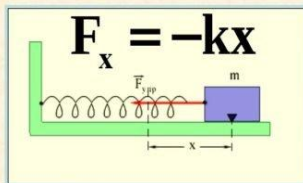
Гармонічними коливаннями називаються періодичні зміни фізичної величини (або будь-якої іншої) залежно від часу, які відбуваються згідно із гармонічними законами (закону синуса або косинуса).

Гармонічні коливання тіла, виникають близько до положення рівноваги, і зумовлені дією **пружної** (чи квазіпружної) **сили**.

Пружна (чи квазіпружна) **сила** – це **сила, яка пропорційна зміщенню тіла від положення рівноваги і завжди направлена до положення рівноваги**.

Англійський фізик Роберт Гук у 1660 році експериментально встановив закон, який пов'язує модуль пружної сили і зміщення від положення рівноваги.

Формула закону Гука



k - коефіцієнт пружної сили,
x - відхилення від положення рівноваги

Формулювання цього закону має наступний вигляд:

Закон Гука: При малих пружних деформаціях сила пружності пропорційна величині деформації

$$F = -kx, \quad (1)$$

де k – коефіцієнт пружної (квазіпружної) сили, x – відхилення від положення рівноваги (чи деформація).

Знак мінус вказує на протилежність векторів $\vec{x}$ і $\vec{F}$.

Як бачимо з закону Гука, при пружних деформаціях, на тіло діє некомпенсована зміна сила. Під дією цієї сили тіло буде здійснювати гармонійні коливання і рухатись з прискоренням.

Для опису гармонійних коливань використаємо другий закон Ньютона.

II закон Ньютона: Прискорення $\vec{a}$, з яким рухається центр маси тіла, прямо пропорційне векторній сумі сил, що діють на нього (рівнодіючій $\vec{F}_{\text{рівн}}$), і обернено пропорційне масі тіла. Прискорення спрямоване у бік рівнодіючої і прикладене до центра маси тіла:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{рівн}}}{m}.$$

Для запису рівняння, яке буде описувати гармонійні коливання, треба згадати визначення таких фізичних величин, як прискорення і швидкість.

Прискорення – це фізична величина, яка характеризує зміну швидкості за часом. Математичний зміст прискорення – це перша похідна від швидкості за часом: $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

Швидкість – це фізична величина, яка характеризує зміну переміщення за часом. Математичний зміст швидкості – це перша похідна від переміщення за часом: $\vec{v} = d\vec{x}/dt$.

Якщо при пружних деформаціях, пружна сила F є єдина прикладена до тіла, то вона спричинить його прискорення a . Тоді, згідно з **II законом Ньютона**, можна записати рівняння:

$$F = m a = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

де F – пружна сила, m – маса тіла; a – прискорення тіла; яке дорівнює d^2x/dt^2 – повторній (другій) похідній від зміщення за часом.

Із співвідношень (1) і (2) одержуємо рівняння, яке називають **диференціальним рівнянням гармонічного коливання**:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x, \text{ чи } \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (3)$$

Рішення диференціального рівняння має вигляд гармонійної функції і носить назву **рівняння гармонічних коливань**:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

де: A – амплітуда коливань, ω – кругова або циклічна частота коливань, φ – початкова фаза коливання.

A – амплітуда – це максимальне відхилення тіла від положення рівноваги

Кругова або циклічна частота коливань ω , як видно з (3), дорівнює відношенню:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \quad (5)$$

Початкова фаза коливання φ – значення аргументу гармонійної функції, що відповідає положенню тіла в момент часу $t = 0$.

Аргумент функції ($\omega t + \varphi$) – має назву «**фаза коливання**».

Найбільш простою наближеною моделлю гармонічного коливання може служити рух математичного маятника (рис.1), початково відхиленого від положення рівноваги на деякий невеликий кут ($\alpha \approx 5^\circ$).

Математичний маятник – теоретична модель маятника, в якій матеріальна точка масою m підвішена на невагомій нерозтяжній нитці або легкому стрижні L , при цьому здійснюючи рух у вертикальній площині під впливом сил тяжіння з прискоренням вільного падіння g .

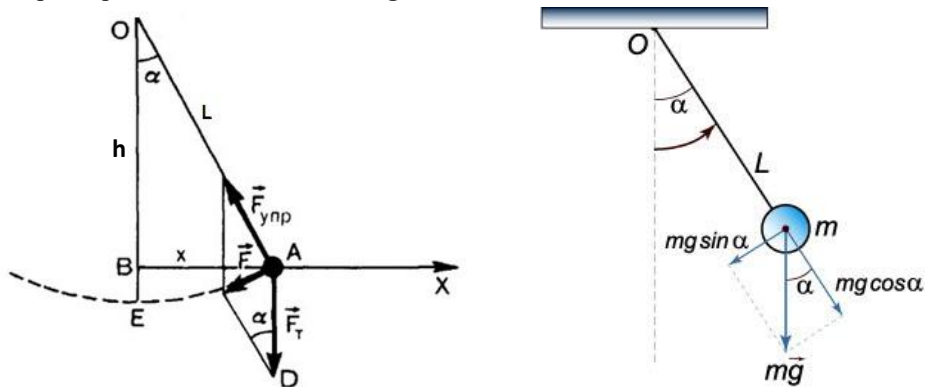


Рис. 1 Схема розрахунку для математичного маятника

Модель нехтує розмірами тіла, деформацією підвісу та тертям в точці підвісу. Зазвичай розглядають коливання маятника в одній площині.

У загальному випадку, якщо відхилити маятник від положення рівноваги та штовхнути його вбік, рух маятника буде складатися з коливань в вертикальних та руху в горизонтальних площинах. При малому відхиленні математичний маятник здійснює гармонічні коливання. Якщо відхилення велике, то коливання маятника періодичні, але не гармонійні.

Діючи на матеріальну точку m сила тяжіння – $P = mg$ розкладається на дві взаємно перпендикулярні складові. Складові $F_1 = mg \cos(\alpha)$, що дорівнює силі натягу нитки, а друга складова $F = mg \sin(\alpha)$ викликає дотичне прискорення

точки, що рухається по колу. Як видно з (рис.1), за подібністю відповідних трикутника сил ($\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, $\mathbf{F} = m\mathbf{g}\sin(\alpha)$, $\mathbf{F}_1 = m\mathbf{g}\cos(\alpha)$) і трикутника довжин ($\mathbf{L}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{h}$) визначимо відношення гіпотенузи до протилежного катета:

$$\frac{F}{P} = \frac{-x}{L} \quad \text{чи} \quad F = -\frac{P}{L}x \rightarrow F = -kx, \quad (6)$$

де $\mathbf{P}$ – сила тяжіння. $\mathbf{L}$ – довжина нитки, $\mathbf{x}$ – відхилення від положення рівноваги, $F = -kx$ – квазіпружна сила (де роль $\mathbf{k}$ виконує $\mathbf{P/L}$). Як і в законі Гука знак «-» вказує на протилежність векторів $\vec{x}$ і $\vec{F}$

При малих кутах α можна знехтувати відхиленням траєкторії від прямої і вважати, що дотичне прискорення дорівнює d^2x/dt^2 . Тоді виявляється справедливим рівняння (1) і, витікаючи з нього, рівняння (3) і (4). При цьому роль коефіцієнта пружної сили, як видно з рівняння (6), виконує відношення сили тяжіння P до довжини підвісу L :

$$k = \frac{P}{L} \rightarrow k = \frac{mg}{L} \quad (7)$$

Цей коефіцієнт називається **коефіцієнтом квазіпружної сили**, тому що сила F в (6), звичайно ж, не є пружною силою деформації, хоч і схожа з нею.

Підставляючи $k = P/L$ (коефіцієнт квазіпружної сили) із (7) в рівняння для циклічної частоти (5), одержуємо вираз для циклічної частоти ω математичного маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{mL}} = \sqrt{\frac{g}{L}},$$

Отже отримали вираз для **циклічної частоти математичного маятника ω** :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (8)$$

Розглянемо рівняння гармонічних коливань: $x = A \sin(\omega t + \varphi)$, де початкова фаза коливань дорівнює $\varphi = \pi/2$. Це відповідає максимальному відхиленню математичного маятника від положення рівноваги у початковий момент $t=0$. Графік функції приведений на рис. 2:

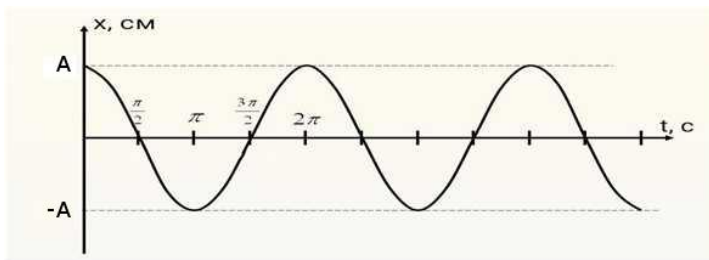


Рис. 2 Рівняння гармонічних коливань

Зміщення від положення рівноваги x періодичне у часі, і це відображується функцією синус, яка має період 2π . Зміні фази коливання ($\omega t + \phi$) на 2π відповідає найменший проміжок часу, через який повторюється процес коливання. Цей проміжок часу має назву періоду коливань.

Період коливання – найменшим проміжком часу, через який значення фізичних величин та характер їх змін повністю повторюються.

Якщо позначити період коливання T , то виявляється зв'язок між періодом і циклічною частотою:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ звідки: } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (9)$$

зв'язок між періодом і циклічною частотою у випадку математичного маятника виглядає як

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (10)$$

Отже, як це впливає з (10), **при гармонічних коливаннях період коливань математичного маятника не залежить від амплітуди коливань та маси, а визначається довжиною маятника L та прискорення вільного падіння тіла g .**

За відомими значеннями L і g , з використанням формул (8) та (10), можна теоретично розрахувати циклічну частоту $\omega_{\text{теор}}$ і період коливань T .

З другого боку, період коливань нескладно визначити експериментально. Для цього вимірюють час t декількох десятків коливань n . Розділивши цей час на кількість коливань $T = t/n$, отримаємо експериментальне значення періоду коливань математичного маятника. А по ньому, використовуючи зв'язок періоду і циклічної частоти за формулою (9), розрахувати експериментальне значення циклічної частоти коливань ω .

В роботі використовується модель математичного маятника у вигляді металевої кульки, підвищеної на довгій нитці (рис. 1). Вивчається не тільки гармонічні, але й ангармонічні коливання, коли кут відхилення перевершує допустимі для гармонічних коливань значення в 3-4 рази.

Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з установкою виміряти довжину маятника L (від центра кульки). За формулою (8) обчислити теоретичне значення циклічної частоти $\omega_{\text{теор}}$, а за (10) – період коливань $T_{\text{теор}}$. (прискорення вільного падіння рахувати як $g=9,81 \text{ м/с}^2$). Результат розрахунків занести в таблицю і записати у першому рядку $T_{\text{теор}}$ і $\omega_{\text{теор}}$.

2. Відхилити маятник на $\alpha = 4^\circ - 6^\circ$ і, відпустити його, виміряти секундоміром час Δt здійснення 50 коливань.

Обчислити період коливань $T = \Delta t / 50$. За знайденим T , використовуючи співвідношення (9), обчислити ω . Результат розрахунків занести в таблицю і записати у другому рядку таблиці T і ω .

3. Визначити амплітуду коливань A з трикутника (рис.1):

$$A = x_{\max} = L \sin \alpha_{\max}$$

Результат розрахунків занести в таблицю і записати у другому рядку A . За знайденими величинами, нижче таблиці, написати рівняння гармонічних коливань (4), підставляючи розраховані величини амплітуди A і циклічної частоти ω , початкову фазу коливань вважати $\varphi = \pi / 2$.

3. Повторити дії п.2 і п.3 для $\alpha_2 = 12^\circ - 15^\circ$ та для $\alpha_3 = 18^\circ - 20^\circ$. Результат розрахунків занести в таблицю і записати у третьому і четвертому рядках T і A , відносно.

4. Оцінити для кожного α , відхилення одержаних з дослідів значень циклічної частоти ω від його теоретичного значення $\omega_{\text{теор}}$. (тобто знайти абсолютну похибку вимірювань для кожного експерименту: $\Delta\omega = \omega - \omega_{\text{теор}}$).

5. Знайти середнє значення абсолютної похибки $\Delta\omega_{\text{сер}}$. Занести до таблиці.

6. Обчислити відносну похибку вимірів $\delta = \Delta\omega_{\text{сер}} / \omega_{\text{теор}} \cdot 100\%$

Всі дані обчислень занести нижче таблиці:

	L,м	α	$\Delta t, c$	T,с	ω , рад/с	$\Delta\omega$, рад/с	A,м
Теоретичне значення $T_{\text{теор}}, \omega_{\text{теор}}$							
Вимірювання 1							
Вимірювання 2							
Вимірювання 3							
Середнє значення $\Delta\omega_{\text{сер}}$							

Питання для самоперевірки:

1. Дати визначення гармонічним коливанням.
2. Дати визначення для пружної (чи квазіпружної) сили.
3. Сформулюйте закон Гука.
4. Що таке швидкість $\vec{v}$?
5. Що таке прискорення $\vec{a}$?
6. Сформулюйте другий закон Ньютона.
7. Запишіть другий закон Ньютона у математичному вигляді.
8. Запишіть диференціальне рівняння гармонічних коливань.
9. Запишіть рівняння гармонічних коливань (рішення диференційного рівняння).
10. Дати визначення амплітуди коливань A .
11. Дати визначення періоду коливань T .
12. Як пов'язана циклічна частота ω з періодом коливань T .
13. Запишіть зв'язок циклічної частоти ω з коефіцієнтом пружності k .
14. Що таке математичний маятник?
15. Що виконує в математичному маятнику роль коефіцієнта пружності k ?
16. Від яких фізичних величин залежить період коливань T математичного маятника.
17. Визначити за формулою циклічну частоту ω математичного маятника.
18. Визначити за формулою період коливань T математичного маятника.
19. Що називається абсолютною похибкою Δa ?
20. Що називається відносною похибкою δ ?

3.6. Лабораторна робота № 5

«Дослідження відношення маси тяжіння до маси інерції»

Прилади та приладдя: відцентрова машина з двома тягарями та градусною шкалою, тахометром і лабораторним трансформатором.

Мета роботи: поглибити поняття маси як міри інертності та міри тяжіння тіл.

Скорочена теорія та методика вимірювань

З давніх часів вчені задавались питанням природи сил, які діють на всі тіла і заставляють їх рухатись у всесвіті. Одним з ключових питань була сила тяжіння, яка діє на всі масивні тіла на поверхні Землі. Зараз ми її називаємо силою гравітації.

Першим прорив у розумінні цих сил зробив видатний англійський вчений Ісаак Ньютон. Але Н'ютон, у своїх спостереженнях і висновках, прямував двома шляхами. З одного боку, він розглядав гравітацію через прояв взаємного притягування матеріальних тіл – взаємодія так званих «гравітаційних мас». З іншого боку, він приділяв увагу проявам інерції матеріальних тіл – властивість тіл зберігати спокій, або рівномірний прямолінійний рух. Мірою цих властивостей він вважав так звану «інерційну масу». В своїх роботах він просто постулював, без будь-яких доказів, що ці дві маси дорівнюють одна одній.

На підставі своїх досліджень Ісаак Н'ютон створив теорію класичної механіки, яку виклав у своєму трактаті «Математичні начала натуральної філософії» у 1686 році.

В основу класичної механіки покладені три закони, які сформулював Ісаак Ньютон.

1-й закон Ньютона (закон інерції) сформулював таким чином:

Всяке тіло продовжує зберігати стан спокою або рівномірний і прямолінійний рух, допоки цей стан не змінять зовнішні сили, застосовані до нього. Властивість тіл зберігати набутий стан (спокою, чи руху) називається інертністю.

Мірою інертності він вважав масу тіла m , яка в СІ вимірюється в кг.

2-й закон Ньютона формулюється в такому вигляді:

Прискорення ($\vec{a}$), з яким рухається центр маси тіла, прямо пропорційне векторній сумі сил, що діють на нього (рівнодіючій $\vec{F}_{\text{рів}}$), і обернено пропорційне масі тіла, спрямоване у напрямку рівнодіючої і прикладене до центру маси тіла:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{m} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n}{m} = \frac{\vec{F}_{\text{рів}}}{m}.$$

Для простоти сприйняття, найчастіше його записують у вигляді:

$$\vec{F}_{\text{рів}} = m \vec{a} \quad (1)$$

де $\vec{F}_{\text{рів}}$ – рівнодіюча сила, яка діючи на тіло, надає йому прискорення $\mathbf{a}$.

3-й закон Ньютона формулюється в такому вигляді:

Два тіла взаємодіють з силами F_1 і F_2 , однаковими за величиною і протилежними за напрямком. Вони не зрівноважують одна іншу, так як прикладені до різних тіл:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Окрім цього, Ісаак Ньютон, аналізуючи наукові праці Тихо Браге та Йоганна Кеплера, сформулював один з найважливіших законів, який описує фундаментальний вид взаємодії масивних тіл у всесвіті – гравітаційну взаємодію.

Цей закон носить назву «**Закон всесвітнього тяжіння**». Він формулюється наступним чином:

Сила, з якою притягуються два тіла прямо пропорційна добуткові мас m_1 і m_2 цих тіл, і обернено пропорційна квадрату відстані r між їх центрами мас і направлена по лінії, яка з'єднує центри мас тіл

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Для простоти теж запишемо його у скалярному вигляді:

$$F_T = \frac{\gamma m_T M_T}{R^2} \quad (2)$$

де F_T – сила гравітаційної взаємодії двох тіл, γ – гравітаційна стала, R відстань між тілами; m_T , M_T – маси тіл, які взаємодіють між собою (притягуються одне до одного).

Як видно з **другого закону Ньютона** (1), чим більша маса m тіла тим меншого прискорення набуває тіло при незмінній зовнішній силі F , яка діє на це тіло. Тобто у даному випадку маса m , як визначалося вище, характеризує інерційні властивості тіла (властивість протидіяти зміні його швидкості). Маса m є мірою інерції тіла (її називають **інерційною масою**).

Згідно ж з **законом всесвітнього тяжіння** (2), маса тіла m_T характеризує іншу властивість тіла – властивість притягуватись одного масивного тіла до іншого масивного тіла M_T (наприклад, притягіння тіл до Землі, чи притягіння Землі до Сонця, и т.д.). Масу m_T називають **гравітаційною масою**.

Таким чином, маси m_T (гравітаційна) і m (інерціальна) виражають різні властивості тіла – міру інертності і міру гравітаційної взаємодії, і ніщо не суперечить тому, що, взагалі, вони можуть бути нерівними і непропорційними між собою.

Тому, на початку дев'ятнадцятого сторіччя, й виникла потреба у порівнянні цих мас. Ми з Вами повторимо один з класичних експериментів порівняння гравітаційної та інерційної мас тіла.

Для цього розглянемо проявлення інерціальних сил (1) та сил гравітаційної взаємодії (2) у двох принципово різних системах відліку:

- інерціальній системі відліку, яка рухається рівномірно і прямолінійно,
- та неінерціальній системі, що рухається з прискоренням відносно першої.

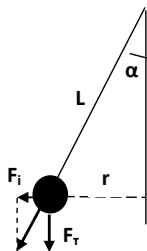
Хай інерціальна система відліку пов'язана з поверхнею Землі, а неінерціальна – наприклад, з вагоном, що рухається по закругленню радіуса r з центрострімким прискоренням.

При русі вагона зі швидкістю v , підвішене на мотузці до його стелі, тіло відхилиться від вертикалі на деякий кут α (рис.1).

В інерціальній системі координат це відхилення зумовлено дією доцентрової сили $F_{\text{ц}} = ma_{\text{ц}} = mv^2/r$, яка діє через підвіс і надає тілу прискорення, примушуючи його рухатися по колу. В неінерціальній системі, яка пов'язана з вагоном, спостерігач, не знаючи нічого про рух вагона по колу, робить висновок про те, що причиною відхилення є виникнення деякої горизонтальної сили, яка заставляє відхилитися підвіс. З попереднього, у нашому випадку, ця сила є силою інерції, яка протилежна доцентровій силі і чисельно їй дорівнює:

$$F_i = mv^2/r. \quad (3)$$

де v – швидкість руху вагона, r – радіус закруглення, по якому рухається вагон, а m – це інерціальна маса (міра інертності тіла).



Отже в неінерціальних системах сили інерції проявляють себе як діючі на тіло сили, які разом з силою тяжіння визначають його рух.

Сила тяжіння, згідно закону всесвітнього тяжіння, може бути визначена як

$$F_T = \frac{\gamma m_T M_T}{R^2} = m_T g, \quad (4)$$

де g – прискорення вільного падіння тіла.

Рис.1 Математичний маятник

Для спостерігача у вагоні є єдина можливість розрізнити сили (3) і (4), якщо буде виявлено відношення мас m / m_T

Завданням даної лабораторної роботи є перевірка рівності $m/m_T=1$ на класичній відцентровій машині з двома тілами однакової маси (рис. 2). В ній також використовується рух тіла по колу у полі сили тяжіння.

При обертанні ротора на тіло m діє відцентрова сила інерції –

$$F_i = mv^2 / r ,$$

де v – швидкість руху вагона, r – радіус кола, по якому обертаються тіла відцентрової машини, а m – це інерціальна маса (міра інертності тіла)



Рис. 2 Зображення експериментальної установки

Лінійна швидкість руху v і кутова ω пов'язані між собою співвідношенням:

$$v = \omega r$$

Тоді силу інерції F_i можна записати у вигляді:

$$F_i = mv^2 / r = m \omega^2 r, \quad (5)$$

Кутову швидкість ω ми виразимо через частоту обертання ν – число обертів ротора, за одиницю часу:

$$\omega = 2\pi \nu$$

В цій лабораторній роботі, частоту обертання будемо виміряти за допомогою тахометра в несистемних одиницях n – (об./хв) оборотах за хвилину, пам'ятаючи, що при розрахунках треба користуватись системою СІ. Тобто, нам буде потрібно перевести несистемні одиниці виміру частоти об./хв. в одиниці системи СІ – Гц=1/с (герц). Для цього треба розділити показник тахометра n на 60. Тому будемо використовувати таке співвідношення між циклічною частотою ω і значеннями тахометра n :

$$\omega = 2\pi \nu = 2\pi n / 60 = \pi n / 30 \quad (6)$$

Для остаточного визначення сили інерції F_i з'ясуємо, чому буде дорівнювати радіус обертання r тіл у відцентровій машині.

З рис. 1 видно, що радіус обертання r – це протилежний, проти кута α , катет прямокутного трикутника. Тому:

$$r = L \sin(\alpha) \quad (7)$$

де L – довжина штанги, на якій закріплена маса в відцентровій машині, α – кут, на який відхиляються маси при обертанні.

Підставляючи (6) і (7) в (5), одержимо остаточно для сили інерції F_i :

$$F_i = m \pi^2 n^2 L \sin(\alpha) / 900 \quad (8)$$

Сила тяжіння, як було показано в (4), дорівнює простому співвідношенню:

$$F_T = m_T g \quad (9)$$

де m_T – гравітаційна маса, g – прискорення вільного падіння ($g=9,81\text{м/с}^2$).

З рис. 1 також видно, що відношення сили інерції F_i до сили тяжіння F_T дорівнює $\text{tg}(\alpha)$, бо F_i і F_T протилежний і прилежний катети прямокутного трикутника, який складають ці сили. Тому маємо право записати:

$$\text{tg}(\alpha) = F_i / F_T \quad (10)$$

Застосуємо в рівнянні (10) значення сил інерції F_i (рівняння 8)) і сили тяжіння F_T (рівняння (9)):

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{F_i}{F_T} = \frac{m \pi^2 n^2 L \sin(\alpha)}{m_T g 900} \quad (11)$$

З цього рівняння, остаточно, ми можемо визначити відношення інерціальної і гравітаційної мас:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\alpha) &= \frac{m \pi^2 n^2 L \sin(\alpha)}{m_T g 900} \rightarrow \frac{m}{m_T} = \frac{900 g \text{tg}(\alpha)}{\pi^2 n^2 L \sin(\alpha)} \rightarrow \\ k &= \frac{m}{m_T} = \frac{900 g}{\pi^2 n^2 L \cos(\alpha)} \end{aligned} \quad (12)$$

Вимірюючи довжину штанги L , на якій закріплена маса в відцентровій машині до центру тіл, кількість обертів n і кут відхилення α , за (12) можна обчислити відношення k інерціальної і гравітаційної мас.

Досліди, що виконувалися багатьма дослідниками із все зростаючою точністю, показують, що відношення цих мас (інерціальної і гравітаційної) можуть відрізнитись від одиниці в одинадцятому знакові після дробової коми. Це серйозна підстава вважати, що m і m_T є проявленням однієї і тієї ж величини.

Ця обставина була використана А. Ейнштейном як одне із обґрунтувань розробки загальної теорії відносності.

Порядок виконання роботи:

1. Познайомитися з установкою, градусною шкалою, зі шкалою тахометра.

2. Виміряти довжину штанги L від точки кріплення до центру тіл.

3. Опустити тягарі і стрілки у нижнє положення, ввімкнути автотрансформатор в мережу і поступово підвищуючи напругу, надати роторові обертання, при якому стрілки підіймуться на 30° .

4. Дочекавшись рівномірного обертання ротора, помітити показання тахометра і вимкнути мережу. Після повної зупинки ротора записати кути відхилення усіх чотирьох стрілок з точністю до $30'$ і занести їх до таблиці.

5. Виконати вимірювання за пп. 3-4 ще два рази, кожний раз трохи збільшуючи число обертів, при якому стрілки підіймуться на 40° і 50° .

6. Для кожного вимірювання визначити середній, по 4 –х відліках, кут α і за (12) обчислити k .

7. Знайти середнє значення $k_{\text{ср}}$ для відношення інерціальної і гравітаційної мас.

8. Вважаючи $k_{\text{ср}}$ істинним значенням, знайти значення абсолютної похибки $\Delta k = k - k_{\text{ср}}$ для кожного виміру. (дивись матеріали роботи «Теорія похибок»).

9. Обчислити відносну похибку вимірів:

$$\delta = \Delta k / k_{\text{ср}} \cdot 100\% \text{ (дивись матеріали роботи «Теорія похибок»)}.$$

10. Результати вимірювань і розрахунків записати в таблицю.

11. Кінцевий результат записати нижче таблиці у вигляді:

$$k = k_{\text{ср}} \pm \Delta k = \dots, \text{ точність вимірів: } \delta = \dots\%$$

№	L	α_1	α_2	α_3	α_4	$\alpha_{\text{ср}}$	n	k	Δk
1									
2									
3									
Середні значення									

Питання для самоперевірки:

1. Сформулюйте 1-й закон Ньютона.
2. Сформулюйте 2-й закон Ньютона.
3. Сформулюйте 3-й закон Ньютона.
4. Що є мірою інертності тіла при поступальному русі?
5. Що таке прискорення тіла?
6. Сформулюйте закон всесвітнього тяжіння.
7. Який математичний вираз має закон всесвітнього тяжіння?
8. Що таке доцентрове прискорення? За що відповідає доцентрове прискорення?
9. Як між собою пов'язані лінійна і кутова швидкості?
10. Як пов'язані між собою доцентрове прискорення і кутова швидкість?
11. Що таке гравітаційна маса?
12. Що таке період обертання і частота обертання?
13. Як пов'язані між собою кутова швидкість і частота обертання?
14. Що називається інерціальною системою відліку?
15. Що таке неінерціальна система відліку?
16. Чи є інерціальною система, зв'язана з поверхнею Землі?
17. Необхідна умова для повороту велосипеда, вагона, машин, що рухаються. Що потрібно, аби всі вони не перекинулися на повороті?
18. Що таке момент інерції? Яку роль він відіграє в динаміці обертального руху? В яких одиницях він вимірюється?
19. Звідки випливає, що момент інерції тіла є величина адитивна?
20. Момент якої сили приводить до обертального руху колеса?

3.7.Лабораторна робота № 6

Дослідження в'язкості рідини методом Стокса

Прилади і приладдя: скляний циліндр на підставці з досліджуваною рідиною, електронний оптичний мікроскоп, комп'ютер, мікрометр, дрібні кульки, пінцет, секундомір.

Мета роботи: засвоїти один із методів дослідження руху тіл у в'язкому середовищі.

Скорочена теорія та методика вимірювань

При русі реальної рідини вздовж циліндричних поверхонь, різні шари

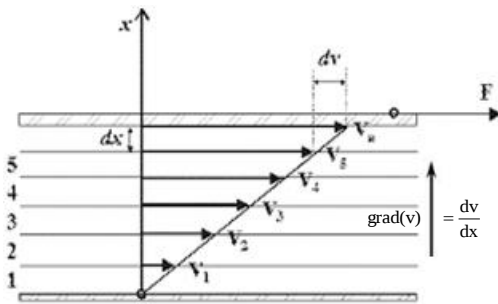


Рис.1. Визначення градієнта швидкості при русі рідини

рідини мають неоднакову швидкість: центральні шари рідини рухаються з більшою швидкістю, ніж периферичні. Це пояснюється тим, що швидкість шару, що «притискається» до стінки труби, внаслідок змочування, дорівнює нулю, а при віддаленні від неї швидкість шарів рідини зростає (рис.1).

Такий розподіл швидкостей, наприклад, є характерним і для руху крові по кровоносних судинах.

Інакше кажучи, у таких потоках рідини існує рух одного шару рідини відносно іншого. У цьому випадку кажуть, що у напрямі перпендикулярному до потоку існує **градієнт швидкості**.

Тобто зміна швидкості по мірі збільшення відстані від поверхні твердого тіла. Між двома шарами рідини з різними швидкостями виникає сила, подібна силі тертя при русі тіла. Її називають силою внутрішнього тертя (чи в'язкості). Вона є результатом сил молекулярного зчеплення на межі двох шарів і переходу молекул з одного шару в інший внаслідок хаотичного руху.

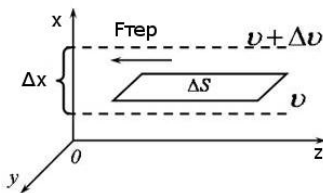


Рис.2. Визначення сили внутрішнього тертя

Сила в'язкості, або сила внутрішнього тертя, що виникає в рідинах і в газах при відносному русі шарів направлена паралельно напрямку руху цих шарів (рис.2). Будь-яка рідина спричинює опір відносному переміщенню її шарів. Цю властивість, зумовлену зчепленням молекул рідини між собою, називають в'язкістю, або **внутрішнім тертям**.

Визначенням сили внутрішнього тертя займався ще Ісаак Ньютон. Він відкрив закон

в'язкої течії.

Ось як він формулював цей закон: "Сила внутрішнього тертя, що виявляється під час взаємного переміщення шарів рідини, прямо пропорційна градієнту відносної швидкості цього переміщення і площині поверхні шарів".

Математично силу внутрішнього тертя можна записати, за **формулою Ньютона**, таким чином:

$$F_{\text{тер}} = \eta \frac{dv}{dx} S, \quad (1)$$

де η – коефіцієнт в'язкості;

S – площа шарів, що труться;

$\frac{dv}{dx}$ – градієнт швидкості, тобто зміна швидкості v на одиницю довжини y

напрямку найбільш швидкої зміни (вздовж нормалі до шарів що труться).

З рівняння (1) можна впевнитися, що коефіцієнт в'язкості повинен вимірюватися в (кг/(м с)).

Наука, що вивчає закономірності деформації твердих тіл та течії рідин під дією механічного навантаження називається **реологією**. Розділ реології, що вивчає в'язкість рідин називається **віскозиметрією**. Прилади для вимірювання в'язкості називаються **віскозиметрами**.

Існує ціла низка віскозиметрів, принципи роботи яких ґрунтуються на методах вимірювання швидкості таких процесів:

- метод вільного падіння у рідині кульки певного об'єму або маси (**метод Стокса**);

- метод затухання у рідині ультразвукових коливань (**метод Кулона**);

- метод кутового обертання робочих поверхонь, що занурені у судину з рідиною (**ротаційний метод вимірювання в'язкості**);

- метод витікання рідини через капілярну трубку (**метод вимірювання Освальда**).

В даній роботі, для визначення коефіцієнта в'язкості, застосовується метод падаючої кульки, запропонований англійським дослідником Джорджем

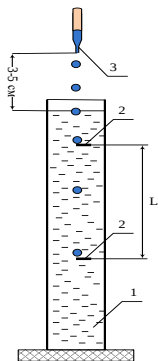


Рис.3 Схема дослідної установки

Габрієлем Стоксом (рис.3). Він ґрунтується на вимірюванні швидкості руху важкої кульки у рідині під дією сили тяжіння.

Стокс знайшов співвідношення, яке описує силу тертя (супротив рідини), що його зазнає сферичне тіло при русі у в'язкому середовищі:

$$F_c = 6\pi\eta Rv, \quad (2)$$

де: R – радіус кульки, v – швидкість її руху.

Якщо важка кулька падає у в'язкій рідині, то поза силою тертя (2) на неї діють ще дві сили – сила тяжіння $\mathbf{P}$ і виштовхувальна архімедова сила $\mathbf{F}_A$.

Сформулюємо закон Архімеда для визначення виштовхувальної сили.

Закон Архімеда:

Виштовхувальна архімедова сила $\mathbf{F}_A$ дорівнює вазі рідини, витісненої кулькою.

Математичний вигляд закону Архімеда:

$$F_A = m_{\text{рід}} \cdot g = V_{\text{тіла}} \cdot \rho_{\text{рід}} \cdot g$$

де $V_{\text{тіла}}$ – об'єм тіла, зануреного у рідину,

$\rho_{\text{рід}}$ – густина рідини.

Якщо радіус кульки $\mathbf{R}$, густина матеріалу кульки і рідини, відповідно ρ_1 і ρ_2 , то вага кульки і сила Архімеда можуть бути подані як:

$$P = mg = V \rho_1 g = 4/3 \pi R^3 \rho_1 g; \quad (3)$$

$$F_A = V \rho_2 g = 4/3 \pi R^3 \rho_2 g \quad (4)$$

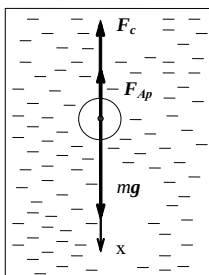


Рис.4 Розклад сил при зануренні тіла у рідину

На початку руху кулька рухається рівноприскорено під дією сили $F_{\text{рез}} = P - F_A$, але **внаслідок зростання швидкості** кульки, згідно формулі Стокса, **зростає і сила тертя F_c , спрямована проти напрямку руху** (рис.4). Це відбувається до того моменту, поки результуюча сила не стає рівною нулю:

$$F_{\text{рез}} = P - F_A - F_c = 0, \quad (5)$$

де F_c – сила внутрішнього тертя (2).

У наслідок цього, згідно першого закону Ньютона, **встановлюється стала швидкість руху** кульки, яку можна виміряти.

Підставляючи в (5) значення ваги (3), архімедової сили (4) і сили тертя за формулою Стокса (2),

одержуємо:

$$4/3 \pi R^3 \rho_1 g - 4/3 \pi R^3 \rho_2 g - 6\pi\eta Rv = 0, \text{ чи}$$

$$6\pi\eta Rv = 4/3 \pi R^3 (\rho_1 - \rho_2) g \quad (6)$$

Поділяючи праву і ліву частину рівняння (6) на $6\pi\eta Rv$, отримаємо **розрахункову формулу** для визначення коефіцієнта в'язкості рідини:

$$\eta = \frac{2}{9} (\rho_1 - \rho_2) \frac{gR^2}{v} \quad (7)$$

Співвідношення (7) дає можливість визначити коефіцієнт в'язкості рідини коли відомі густини кульки і рідини, радіус кульки і її стала швидкість руху у рідині.

В цій роботі ми будемо визначати коефіцієнт в'язкості гліцерину. Як загадували раніше, будемо застосовувати метод падаючої кульки (метод Стокса).

В якості кульок використовуємо звичайні дробинки. Матеріал, з якого виготовлені кульки – свинець.



Рис.5 Електронний оптичний мікроскоп

При розрахунках, будемо використовувати табличні значення густин :

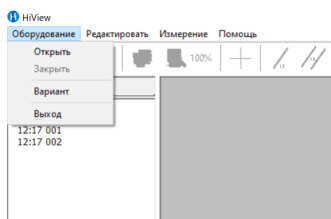
(ρ_1) свинцю – $11,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, та (ρ_2) гліцерину – $1,18 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$

Для точного визначення радіусу свинцевих кульок (дробинок) в цій роботі застосоване обладнання: електронний оптичний мікроскоп Media-Tech USB 500X MT4096 (рис. 5)

Виміри швидкості руху свинцевих кульок будемо здійснювати на установці Стокса (рис.3), вимірюючи шлях і час руху кульок у рідині.

Порядок виконання роботи:

1. Ознайомтесь з інструкцією та методикою вимірювань.
2. Налаштуйте вимірювальне обладнання електродного оптичного мікроскопу.



3. Для цього. Відкрийте на комп'ютері програму «HiView».

4. Через меню «Обладнання – Відкрити» приєднати електронний оптичний мікроскоп до комп'ютера. При цьому на екрані з'явиться зображення поверхні під мікроскопом.

5. За допомогою юстировочних гвинтів налаштувати різкість і контрастність зображення.

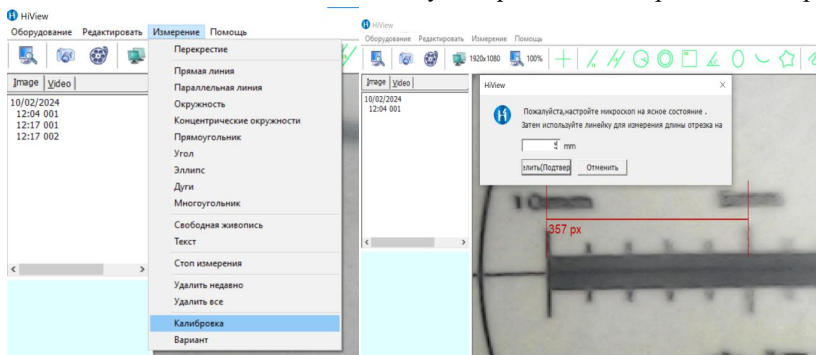
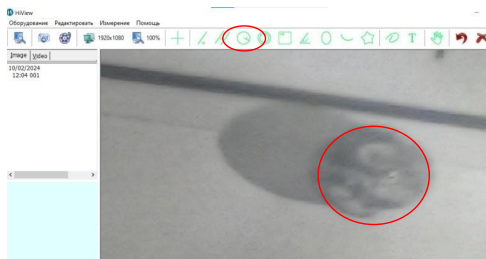


Рис.6 Калібрівка мікроскопа

6. Для встановлення відповідності розмірів зображення на екрані монітора і дійсних розмірів об'єкта робимо юстировку зображення. Для цього, під об'єктивом мікроскопа розміщуємо юстировочну плівку з зображенням юстировочної шкали.
7. Заходимо в меню «Виміри – Калібровка» і надаємо відповідності розміру юстировочної шкали параметрам виміру програми (рис.6). Після цього можна вимірювати розміри кульок.



8. Проводимо виміри радіуса кульки:

9. Розміщуємо під об'єктивом мікроскопа свинцеву кульку. За допомогою інструментарія меню «Коло» вимірюємо радіус кульки. Заносимо дані у таблицю вимірювань у графу «R».

10. Кидаємо кульку у рідину і за допомогою секундоміра вимірюємо час t руху кульки у рідині. Заносимо дані у таблицю вимірювань у графу « t ».
11. Вимірюємо відстань L між верхньою поверхнею рідини і нижньою гранню циліндра. Заносимо дані у розрахункову таблицю у графу « L ».
12. Розраховуємо швидкість опускання кульки за формулою рівномірного руху $v = L / t$. Заносимо дані у розрахункову таблицю у графу « V ».
13. За розрахунковою формулою (7) знаходимо значення коефіцієнта в'язкості η . Заносимо дані у розрахункову таблицю у графу « η ».
14. Повторюємо експеримент ще два рази працюючи з іншими кульками (повторюємо дії пунктів 8-13). Дані вимірів і розрахунків заносимо у розрахункову таблицю.
15. Розраховуємо середнє значення коефіцієнта в'язкості $\eta_{\text{сеп}}$. Заносимо у таблицю. Середнє значення, у подальшому, згідно з теорією похибок будемо вважати істинним значенням.
16. Знаходимо абсолютну похибку для кожного з виконаних експериментів $\Delta\eta = \eta_{\text{сеп}} - \eta$. Заповнюємо графу « $\Delta\eta$ » розрахункової таблиці.
17. Розраховуємо середню абсолютну похибку $\Delta\eta_{\text{сеп}}$ (Увага! При знаходженні середньої абсолютної похибки, абсолютні похибки всіх експериментів беруться за модулем).
18. Розраховуємо відносну похибку вимірювань $\delta = \Delta\eta_{\text{сеп}} / \eta_{\text{сеп}} \cdot 100\%$
19. Результати розрахунків письмово надаємо нижче таблиці розрахунків.

Таблиця для розрахунків

№	R, мм	t, с	L, см	V, м ³	η , кг/(м с)	$\Delta\eta$, кг/(м с)
1						
2						
3						
Середні значення						

При розрахунках використайте **систему СІ** та значення **густин:** (ρ_1) свинцю – $11,4 \cdot 10^3$ кг/м³, та (ρ_2) гліцерину – $1,18 \cdot 10^3$ кг/м³.

Питання для самоперевірки:

1. Що таке внутрішнє тертя у рідині чи газі?
2. Чим обумовлено явище внутрішнього тертя?
3. Дати визначення сили в'язкості, або сили внутрішнього тертя. Куди вона спрямована?
4. Запишіть вираз для сили внутрішнього тертя, згідно з формулою Ньютона.
5. Що таке градієнт швидкості?
6. У чому полягає метод Стокса?
7. Запишіть співвідношення, яке описує силу тертя, що його зазнає сферичне тіло при русі у в'язкому середовищі.
8. Запишіть вираз для об'єму сферичного тіла.
9. Які сили діють на сферичне тіло при русі у в'язкому середовищі. Перелікуйте їх.
10. Сформулюйте закон Архімеда.
11. Запишіть вираз для сили Архімеда.
12. Що таке густина?
13. За яких умов виникає рівномірний рух кульки у рідині?
14. Сформулюйте перший закон Ньютона.
15. Сформулюйте другий закон Ньютона.
16. Що називається абсолютною похибкою. Запишіть вираз для абсолютної похибки у даному експерименті.
17. Як розраховується середнє значення абсолютної похибки?
18. Що таке відносна похибка?
19. Який вираз має відносна похибка вимірювань у цій лабораторній роботі.
20. У яких одиницях вимірюється коефіцієнт в'язкості?

3.8. Лабораторна робота № 7

«Визначення показника адіабати повітря»

Прилади та приладдя: установка Клемана – Дезорма.

Мета роботи: засвоїти один з методів визначення показника адіабати.

Скорочена теорія та методика вимірювань

За матеріалами молекулярно-кінетичної теорії визначаються п'ять законів, які описують стан та його зміну в ідеальному газі. А саме:

Закони трьох ізопроцесів:

Ізотермічний процес (закон Бойля-Маріотта) $m = \text{const}$, $T = \text{const}$: при незмінній масі і температурі добуток тиску на об'єм залишається незмінним

$$P \cdot V = \text{const} \quad (1)$$

Ізобарний процес (закон Гей-Люсака) $m = \text{const}$, $P = \text{const}$: при незмінній масі і тискові об'єм газу прямо пропорційний температурі

$$V_t = V_o(1 + \alpha \cdot t^o) \quad \text{чи} \quad \frac{V}{T} = \text{const} \quad (2)$$

Ізохорний процес (закон Шарля) $m = \text{const}$, $V = \text{const}$: при незмінній масі і об'ємові тиск газу прямо пропорційний температурі

$$P_t = P_o(1 + \beta \cdot t^o), \quad \text{чи} \quad \frac{P}{T} = \text{const} \quad (3)$$

Ці три процеси об'єднує **рівнянням стану ідеального газу** (відоме як **рівняння Менделєєва-Клапейрона**)

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \quad (4)$$

Закон для суміші ідеальних газів:

Закон Дальтона:

Загальний тиск суміші хімічно не взаємодіючих газів дорівнює сумі парціальних тисків.

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum_i^n P_i \quad (5)$$

Парціальний тиск – це тиск кожного з компонентів суміші газів, який встановлюється, коли у судині знаходиться тільки цей газ, а інші відсутні.

Окреме місце займає **адіабатичний процес**.

Адіабатичним називається процес, що протікає без теплообміну з навоколишніми тілами.

Адіабатичний процес описується **рівнянням Пуассона:**

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma = \text{const}, \quad (6)$$

де P – тиск, створюваний газом на стінки посудини об'ємом V . При цьому індекс “1” відноситься до одного стану газу, а індекс “2” – до іншого.

В газах **адіабатичний процес можна здійснити при швидкому розширенні або стисканні газу**. Проміжок часу стискання має бути такий, щоб не встиг відбутися теплообмін між газом і стінками посудини.

Графік процесу називається адіабатою, а величину γ – **показником**

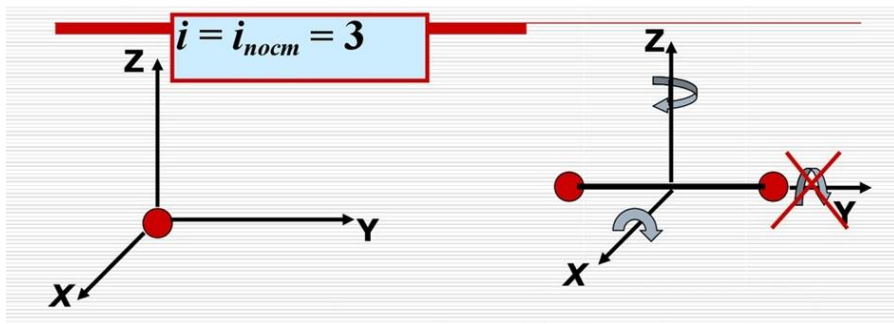
адіабати. Показник адіабати дорівнює відношенню теплоємності газу при сталому тиску до теплоємності його при сталому об'ємі. У молекулярно-кінетичній теорії теплоємностей газу доводиться, що показник адіабати γ **визначається числом ступенів вільності «i»** молекул газу з яких складається термодинамічна система, якщо останню вважати ідеальним газом –

$$\gamma = \frac{i+2}{i} \quad (7)$$

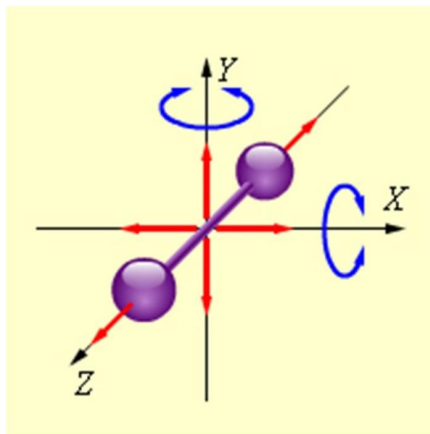
Числом ступенів вільності «i» називається мінімальна кількість незалежних величин, якими можна однозначно задати положення системи у просторі.

Для одноатомних молекул число ступенів вільності $i=3$, у лінійних молекул $i=5$, у нелінійних розгалужених молекул $i=6$.

Для одноатомної молекули – тільки поступальні ступені свободи: $i = n_{\text{пост}} = 3$



Для двоатомної молекули з жорстким зв'язком – 3 поступальні і 2 обертальні ступені: $i = n_{\text{пост}} + n_{\text{оберт}} = 3+2 = 5$



Для багатоатомної молекули з жорсткими зв'язками – 3 поступальні і 3 обертальні ступіні: $i = n_{\text{пост}} + n_{\text{оберт}} = 3+3 = 6$

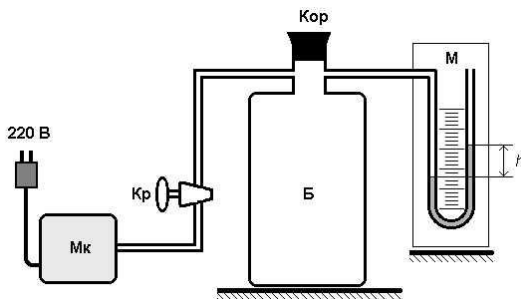


Рис. 1. Принципова схема установки



Рис. 2 Зображення установки

В даній роботі застосовується **метод Клемана –Дезорма**, в якому на основі здійснення адіабатичного процесу у газі визначається величина показника адіабати. Схема та фото установки Клемана – Дезорма наведені на рис.1, рис. 2.

В балоні місткістю до 20 л знаходиться повітря при кімнатній температурі T_0 та атмосферному тиску P_0 . За допомогою насоса тиск в балоні підвищують та надають газу час охолотитись до кімнатної температури.

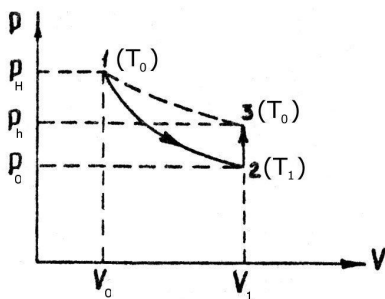


Рис.3 Діаграма стану термодинамічної системи

Маємо початковий стан газу (рис.3 стан 1), що характеризується тиском $(P_0 + P_H)$, об'ємом V_0 та температурою T_0 . Додатковий тиск P_H характеризується різницею стовпів води у манометрі висотою H , і дорівнює $P_H = \rho g H$. Відкриваємо кран, надаємо газу можливість розширитися до тиску, який дорівнює атмосферному P_0 , та швидко закриваємо кран (рис.3 стан 2). Час розширення газу малий порівняно з часом теплообміну його з навколишнім середовищем.

Процес можна вважати адіабатним.

При адіабатному розширенні температура газу знижується до T_1 . Стан газу 2 характеризується параметрами P_0 , V_1 і T_1 . Зв'язок параметрів газу в цих двох станах описується рівнянням Пуассона – співвідношенням (6):

$$(P_0 + P_H)V_0^{\gamma} = P_0 V_1^{\gamma} \quad (8)$$

Ми, на жаль, не знаємо ні об'єму V_1 , до якого розширився газ при адіабатному процесі. Також не відома і температура T_1 . Застосувавши додатково до цих двох станів рівняння Менделєєва-Клапейрона (4), можна записати такі дві рівності, які нам знадобяться впрі подальших розрахунках:

$$T_0^{\gamma} (P_0 + P_H)^{1-\gamma} = T_1^{\gamma} P_0^{1-\gamma}, \text{ і } T_0 V_0^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \quad (9)$$

Це теж рівняння Пуассона, але записані через інші параметри термодинамічної системи.

Після проведення адіабатичного розширення і закриття крану у судині виявилась інша маса газу. Вона характеризується такими параметрами: атмосферним тиском P_0 , об'ємом V_0 і температурою T_1 .

Якщо при закритому крані надати можливості газу нагрітися до кімнатної температури T_0 , то при незмінному об'ємі V_0 тиск газу підійметься до $P_0 + P_H$. (стан 3). Так як об'єм газу при такому нагріванні не змінюється, то цей другий процес нагрівання можна вважати ізохорним.

Додатковий тиск P_H характеризується іншою різницею стовпів води у манометрі висотою h , ніж при первинному підвищенні тиску за допомогою насоса, і дорівнює $P_H = \rho gh$.

При **ізохорному процесі**, згідно закону Шарля (рівняння (3)), маємо зв'язок двох станів:

$$\frac{P_0}{T_1} = \frac{(P_0 + P_H)}{T_0} \quad (10)$$

Із співвідношення (9) одержуємо рівність:

$$\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{(P_0 + P_H)}{P_0}\right)^{\gamma-1}$$

$$\text{чи} \quad \left(1 - \frac{(T_0 - T_1)}{T_1}\right)^{\gamma} = \left(1 + \frac{P_H}{P_0}\right)^{\gamma-1}$$

Додаткові до одиниці величини у дужках лівої і правої частинах останнього рівняння малі відносно одиниці ($(T_0 - T_1)/T_1 \ll 1$ і $P_H/P_0 \ll 1$), тому величини у ступенях у лівій і правій частинах можна розкласти у ряд за малим значенням аргументу функції $((1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x + \dots)$, отримаємо:

$$1 + \gamma \frac{(T_0 - T_1)}{T_1} = 1 + (\gamma - 1) \frac{P_H}{P_0}$$

$$\text{чи } \gamma \frac{(T_0 - T_1)}{T_1} = (\gamma - 1) \frac{P_H}{P_0}, \text{ остаточно } \gamma \left(\frac{T_0}{T_1} - 1\right) = (\gamma - 1) \frac{P_H}{P_0}$$

З рівняння (10) отримаємо відношення температур (T_0/T_1) :

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{(P_0 + P_H)}{P_0},$$

Зробимо заміну у останньому рівнянні відношення температур (T_0/T_1), через значення відношень тисків при ізохорному процесі:

$$\gamma \left(\frac{(P_0 + P_h)}{P_0} - 1 \right) = (\gamma - 1) \frac{P_H}{P_0} \text{ чи } \gamma \frac{P_h}{P_0} = (\gamma - 1) \frac{P_H}{P_0}$$

і остаточно отримаємо для показника адіабаты γ рівняння:

$$\gamma = \frac{P_H}{P_0 - P_h},$$

або, вважаючи, що додатковий тиск можна записати через висоту водяного стовпчика манометра ($P_H = \rho g H$ і $P_h = \rho g h$) остаточно отримуємо:

$$\gamma = \frac{H}{H - h} \quad (11)$$

Порядок виконання роботи:

1. Закрити випускний кран балона, обережно накачати насосом повітря, щоб різниця рівнів води у манометрі **H** досягла 15-25 см. При накачуванні виконується робота по стискуванню газу, тому температура його підіймається.

2. Зачекати 2-3 хв., доки температура в балоні зрівняється з кімнатною і перестануть змінюватися показання манометра. Відлічити показання різниці рівнів у манометрі **H** в міліметрах водяного стовпа. Занести до таблиці вимірювань.

3. Здійснити адіабатичний процес. Для цього швидко відкрити випускний кран і негайно закрити його, щойно зрівняються рівні води у манометрі. При цьому тиск в балоні дорівнюватиме атмосферному, а температура, в наслідок адіабатичного розширювання, буде нижчою за кімнатну.

4. Знову зачекати 2-3 хвилини до вирівнювання температури повітря в балоні з кімнатною. Буде видно по манометру, що тиск буде повільно зростати в балоні. Записати різницю рівнів у манометрі **h** в міліметрах водяного стовпа. Занести до таблиці вимірювань.

5. За **формулою (11)** обчислити показник адіабаты γ_i . Занести розрахунки у рядок таблиці під номером **1**.

6. Здійснити дії пунктів 1-5 ще 3 рази, змінюючи кожний раз тиск у вказаних межах. Дані занести у рядки таблиці під номерами **2, 3, 4**.

7. Беручи до уваги, що повітря складається в основному з **двоатомних молекул азоту та кисню**, для яких **число ступенів вільності $i=5$** , обчислити за

формулою (7) теоретичне значення показника адіабаты ($\gamma_{\text{теор}} = \frac{i+2}{i}$).

8. Результати розрахунків занести до таблиці у рядок під назвою $\gamma_{\text{теор}}$.

9. Обчислити абсолютну похибку вимірювань $\Delta\gamma$ ($\Delta\gamma = \gamma_i - \gamma_{\text{теор}}$) для всіх чотирьох експериментів.

10. Розрахуйте середню абсолютну похибку $\Delta\gamma_{\text{сер}}$ (Увага! При знаходженні середньої абсолютної похибки, абсолютні похибки всіх експериментів беруться за модулем).

11. Обчислити відносну похибку вимірювань $\delta = \Delta\gamma_{\text{сер}} / \gamma_{\text{теор}} \cdot 100\%$

Результати роботи подати у вигляді: $\gamma = \gamma_{\text{сер.}} \pm \Delta\gamma_{\text{сер.}}$, $\delta = \Delta\gamma_{\text{сер}} / \gamma_{\text{теор}} \cdot 100\%$

№	H, мм	H, мм	γ_i	$\Delta\gamma$
$\gamma_{\text{теор}}$				
1				
2				
3				
4				
Середнє значення				

Питання для самоперевірки:

1. Що таке ідеальний газ?
2. Що таке **ізопроееси** для ідеального газу?
3. Що таке **ізотермічний процес**?
4. Запишіть вираз для експериментального закону **Бойля-Маріотта**.
5. Що таке **ізобарний процес**?
6. Запишіть вираз для експериментального закону **Гей-Люссака**.
7. Що таке **ізохоричний процес**?
8. Запишіть вираз для експериментального закону **Шарля**.
9. Запишіть **рівняння стану ідеального газу** (рівняння Менделєєва-Клапейрона).
10. Сформулюйте **закон Дальтона**
11. Що таке **парціальний тиск**?
12. Який процес називається **адіабатичним**?
13. Як здійснити адіабатичний процес?
14. Записати **рівняння Пуассона**.
15. Як змінюється температура системи при адіабатичному розширенні?
16. Як змінюється температура системи при адіабатичному стисканні?
17. Що таке **числом ступенів вільності “i”**?
18. Чому дорівнює **число ступенів вільності “i”** для одноатомної молекули?
19. Яке число ступенів вільності “i” для лінійної двоатомної молекули, для нелінійної молекули?
20. Яке теоретичне значення **показника адіабати γ** для двоатомної молекули?

3.9. Лабораторна робота № 8

«Дослідження вологості повітря»

Прилади та приладдя: психрометр Асмана, барометр-анероїд, таблиця тиску насиченої водяної пари (пружності водяної пари), психрометрична таблиця, номограма.

Мета роботи: засвоїти метод вимірювання вологості повітря.

Скорочена теорія та методика вимірювань

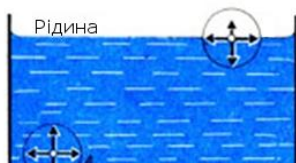
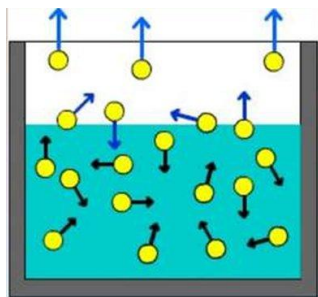


Рис.1 Процес випаровування з поверхні рідини

здійснюється при певній температурі, яку називають температурою кипіння).

Як відомо з молекулярно-кінетичної теорії, **температура характеризує кінетичну енергію поступального руху молекул** у термодинамічній системі:

$$\bar{E}_{\text{пост}} = \frac{3}{2} kT,$$

де **k** – стала Больцмана, **T** – температура.

При випаровуванні рідину залишають найбільш швидкі молекули. Середня кінетична енергія молекул, що залишилися, зменшується, а рідина, у наслідок цього, охолоджується.

На рис. 1 показано як відбувається процес випаровування з поверхні рідини. На нижньому малюнку зображені сили, які діють на молекулу зі сторони інших молекул. В середині рідини ці сили майже компенсують одну одну, бо нашу молекулу оточують інші молекули зі всіх боків. Інший стан, коли молекула знаходиться на поверхні рідини. Там сили з боку молекул, які знаходяться у рідині, значно більші за сили з боку молекул у повітрі. Це

Земна поверхня на 71% покрита водою. Випаровування води з поверхні водних басейнів і з поверхні суші Землі призводить до того, що повітря завжди містить деяку, локально змінну кількість водяної пари. Загальна маса водяної пари в атмосфері Землі оцінюється величиною $1,4 \cdot 10^{13}$ т, що складає близько 2,8% від загальної маси атмосфери. Таким чином, повітря завжди вологе. У багатьох випадках, знання параметрів вологості повітря відіграє важливу роль.

Розглянемо процеси, що відбуваються при перетворенні рідини у газоподібний стан і навпаки, при переході випарів у рідкий стан.

Випаровування – процес переходу рідини у газоподібний стан, відбувається при будь-якій температурі рідини (на відміну від кипіння, яке

пов'язано з різницею відстаней між молекулами у рідині і у повітрі. Щоб відірватися від поверхні рідини молекула потрібна мати достатню кінетичну енергію. Щоб здолати сили поверхневого притягання інших молекул у рідині.

Рідина, залишена у відкритій судині, повністю випарується, тому що у будь-який час у ній є молекули, досить швидкі (з достатньою кінетичною енергією), щоб перебороти міжмолекулярні сили притягання на поверхні рідини і покинути її. Температура рідини, що випаровується, повинна знижуватися, тому що молекули, що її покидають, забирають кінетичну енергію.

Швидкість випаровування також зростає зі зростанням температури.

З ростом температури T зростає кінетична енергія руху молекул у рідині і більше молекул у одиницю часу залишають поверхню рідини.

Зростанню швидкості випаровування сприяє і потік повітря. Він забирає молекули пари з-понад поверхні рідини, заважаючи встановленню динамічної рівноваги між кількістю молекул, які залишили поверхню рідини і кількістю молекул, які в наслідок хаотичного руху потрапляють на поверхню рідини з повітря. Для швидкого випаровування рідини, і пов'язаного з ним висушування, використовують потоки теплого повітря.

Випаровування супроводжується оберненим процесом – конденсацією пари.

Конденсація – процес переходу газу або насиченої пари у рідину чи тверде тіло внаслідок охолодження або стиснення їх. Швидкість процесу залежить від зовнішніх умов – тиску, температури, інколи – наявності інших речовин.

Насичена пара – пара, що перебуває у термодинамічній рівновазі з рідиною або твердим тілом (наприклад, льодом). Тиск, температура і хімічний потенціал у насиченої пари однаковий із тими фазами, з якими вона співіснує.

Якщо пара над поверхнею рідини насичена, то між процесами встановлюється динамічна рівновага, при якій кількість молекул, що покидає рідину в одиницю часу дорівнює кількості молекул, що повертаються до неї. Якщо пара над рідиною ненасичена, то випаровування продовжуватиметься доти, доки пара не стане насиченою, або до повного висихання рідини.

Концентрація молекул (кількість молекул у одиниці об'єму $n = N/V$) у насиченій пари залежить від температури. З ростом температури T зростає концентрація молекул n .

Точка роси – це температура, до якої потрібно охолодити повітря, щоб пари води, що містяться в ньому, досягли насичення і перейшли у рідкий стан – конденсат (випала роса).

Для пояснення, як веде себе тиск P від температури T у насиченій і ненасиченій парі використаємо основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії:

$$P = nkT$$

n – концентрація

k – стала Больцмана

T – температура

Згідно цього рівняння, тиск **P** залежить лінійно від температури **T**, якщо з ростом температури концентрація молекул у газі **n** не змінюється. Всі гази, для яких виконується ця залежність, можна вважати ідеальними.

Нагадаємо, що таке «ідеальний газ».

Ідеальним газом називається термодинамічна система в якій:

- 1) **нехтують власним об'ємом молекул**. Розміри молекул значно малі, порівняно з відстанями між молекулами. І об'єм, який вони займають у термодинамічній системі, незначний порівняно з об'ємом всієї системи;
- 2) **нехтують силами взаємодії між молекулами**. Завдяки тим самим великим відстаням між молекулами, сили взаємодії між молекулами теж будуть незначними.

Ненасичена пара саме так себе і веде, бо відстані між молекулами у ненасиченій парі достатньо великі. Тобто ненасичену пару можна вважати ідеальним газом.

У насиченій парі відстані між молекулами невеликі. Їх можна порівняти з відстанями у рідині. Тому при розрахунках треба враховувати взаємодію молекул між собою і об'єм, який вони займають. Така термодинамічна система називається **реальним газом**. У насиченій парі концентрація молекул **n** також залежить від температури, на відміну від ненасиченої пари. Тому, можна вважати, що залежність тиску **P** від температури **T** носить нелінійний характер.

Графік залежності тиску від температури для насиченої і ненасиченої пари зображений на рис. 2.

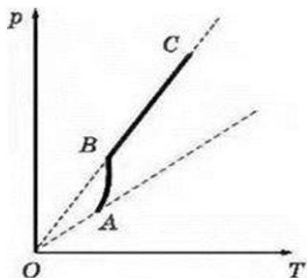


Рис.2 Залежність тиску від температури для випарів

На графіку:

Ділянка AB – насичена пара;

залежність **P** від **T** нелінійна. Оскільки від **T** залежить і концентрація **n(T)** молекул насиченої пари ($P=n(T)kT$).

Ділянка BC – ненасичена пара (веде себе як ідеальний газ);

На ній тиск **P**, згідно з основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії ($P=nkT$), лінійно залежить від температури **T**.

Як визначалося вище, велика маса води на Землі призводить до того, що її атмосфера у значній мірі насичена водяною парою. Для багатьох цілей важливо знати кількість водяної пари, що міститься в атмосферному повітрі.

Одною з характеристик атмосфери є **вологість повітря**.

Розрізняють **абсолютну та відносну вологість**.

Абсолютна вологість характеризує масу водяної пари, що міститься в **1 м³** повітря.

Оскільки водяну пару у повітрі можна розглянути як своєрідну компоненту суміші газів (наряду з азотом, киснем, вуглекислотою, воднем та інерт-

ними газами), то до неї можна застосувати закон Дальтона.

Закон Дальтона:

Загальний тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків компонентів, з яких складається суміш газів.

Парціальний тиск – це тиск, що створювався б одним компонентом при тій же температурі, що й суміш, якби він (даний компонент) займав весь об'єм, наданий суміші.

Це вказує шлях для зведення характеристики абсолютної вологості як парціального тиску водяної пари у суміші газів, з яких складається повітря.

При даній температурі є певна максимальна кількість пари, яка може міститися в одиниці об'єму, або інакше кажучи: при кожній температурі є гранично високий тиск водяної пари. **Пара при гранично високому при даній температурі парціальному тиску називається насиченою.** Перевернення тиску насиченої пари у наявності центрів конденсації веде до конденсації залишків пари і пониження тиску до тиску насиченої пари. Тиск насиченої водяної пари при нормальному атмосферному тиску протабульований. Тобто існує таблиця залежності тиску насиченої пари від температури при нормальному атмосферному тиску ($P_H=101325\text{Па}$, чи $P_H=760\text{ мм.рт.ст.}$).

У цій роботі така таблиця наведена. Це – **Таблиця 2 «Тиск і густина насиченої водяної пари при різних температурах».**

Абсолютна вологість, нажаль, не повністю характеризує стан атмосфери. Пояснимо це. Одна і та ж кількість пари в одиниці об'єму, а це і є абсолютна вологість повітря, при різних температурах по різному впливає на різні фізичні та інші процеси: пара, що ненасичена при високій температурі, стає насиченою при зниженні температури. Явище туману вранці, коли знижується температура повітря, це яскраво підтверджує

У зв'язку з цим вводять ще одну характеристику – відносну вологість повітря.

Відносна вологість повітря – це відношення тиску пари води, що міститься у повітрі при даних умовах, до тиску насиченої пари (максимальному тиску) при тій же температурі (виражається – у відсотках).

$$B = (P / P_H) 100 \% \quad (1)$$

Для визначення відносної вологості повітря використовують декілька приладів і методик вимірювання.

У цій лабораторній роботі ми ознайомимось з одним із таких приладів, який має назву «Психрометр Асмана». Методика виміру відносної вологості повітря заснована на різниці показників температур вологого і сухого термометрів.

Психрометр Асмана (рис.3) складається з двох термометрів, ртутний резервуар одного з яких обгорнуто батистом, змоченим у воді. Це вологий термометр. Він виміряє температуру рідини (води), яка міститься вологому

батисті, що обгорнутий навколо термометра. Інший термометр вимірює температуру повітря навколишнього середовища.

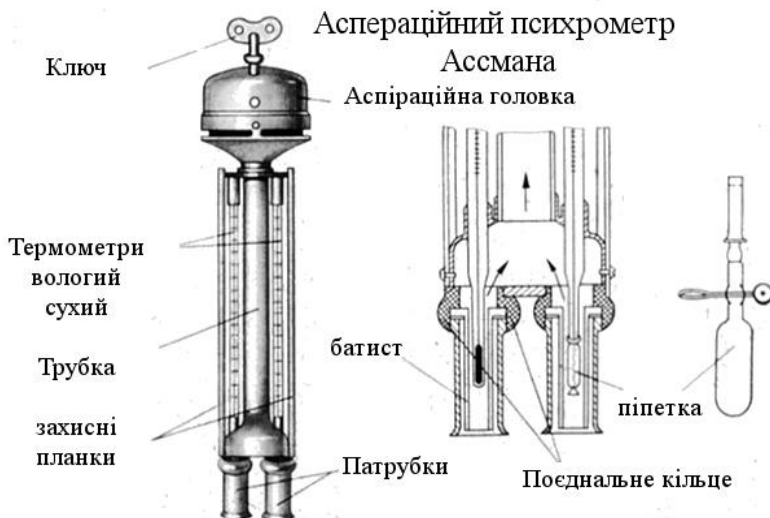


Рис.3 Психрометр Асмана

Під час вимірювань термометри інтенсивно обдуваються повітрям за допомогою вентилятора. Внаслідок випаровування води, більшого відводу тепла від **вологого термометра** його **температура T_v** встановлюється нижчою, ніж **температура сухого термометра T_c** .

Різниця температур $T_c - T_v$, що встановилася, свідчить про те, що кількість тепла Q , яке надходить з повітряного потоку, дорівнює кількості тепла Q_1 , що витрачається на випаровування води. Згідно з **законом Фур'є**, кількість тепла, що надходить з повітряного потоку, можна подати як

$$Q = \lambda (T_c - T_v) S \Delta t, \quad (2)$$

де λ – коефіцієнт теплопередачі від повітря до вологого термометра; S – площа поверхні термометра, що бере участь у теплообміні; Δt – деякий проміжок часу. **Кількість тепла, що йде на випаровування**, можна подати виразом

$$Q_1 = k I S (P_n' - P) \Delta t / H, \quad (3)$$

де k – характеризує теплопередачу від балона термометра до вологого батисту; I – характеристика повітряного потоку; H – атмосферний тиск (при нормальних умовах $H=101325\text{Па}$); P – тиск повітряної пари; P_n' – тиск насиченої пари при температурі вологого термометра. Прирівнюючи Q і Q_1 і вводячи позначення $A = \lambda/(kH)$, одержуємо співвідношення для визначення тиску пари, що знаходиться у повітрі, тобто абсолютної вологості:

$$P = P_H' - A H (T_c - T_v). \quad (4)$$

Сталу A визначають дослідним шляхом. Для психометра Асмана у даній роботі вона складає $A = 0,0005 \text{ K}^{-1}$.

Порядок виконання роботи:

1. Обережно зняти психометр з зачіпки, ознайомитись з його конструкцією, впевнитись, що один з термометрів має батистову обгортку.

2. Наповнити водою ємність і вмочити кінець термометра обгорнутого батистом у воду.

3. Завести пружину вентилятора, обережно почепити психометр на своє місце та спостерігати показання T_c і вологого T_v термометрів.

4. При усталеній температурі вологого термометра записати показання обох термометрів з точністю до $0,1^\circ\text{C}$.

5. За таблицею пружності (**Таблиця 2**) насиченої пари визначити тиск насиченої пари P_H' при температурі T_v .

6. Обчислити абсолютну вологість за формулою (4), підставляючи атмосферний тиск H за показанням барометра та приймаючи $A=0,0005 \text{ K}^{-1}$.

7. Обчислити відносну вологість B за формулою (1), для чого з таблиці тиску насиченої пари (**Таблиця 2**) знайти тиск P_H , що відповідає температурі сухого термометра T_c .

8. Користуючись номограмою або психометричною таблицею (**Таблиця 1, номограма – рис.4**), знайти відносну вологість B' за показаннями T_c та T_v .

Результати вимірювань та розрахунків подати в таблиці:

T_c	T_v	A, K^{-1}	$H, \text{Па}$	$P_H', \text{Па}$	$P, \text{Па}$	$P_H, \text{Па}$	$B, \%$	$B', \%$

Таблиця 1. Психометрична таблиця відносної вологості повітря

Покази сухого термометра $t_c, ^\circ\text{C}$	Різниця показів сухого і вологого термометрів, $(t_c - t_v), ^\circ\text{C}$										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	81	63	45	28	11					
1	100	83	65	48	32	16					
2	100	84	68	51	35	20					
3	100	84	69	54	39	24	10				
4	100	85	70	56	42	28	14				
5	100	86	72	58	45	32	19	6			
6	100	86	73	60	47	35	23	10			

Покази сухого термометра t_c , °C	Різниця показів сухого і вологого термометрів, $(t_c - t_v)$, °C										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	100	87	74	61	49	37	26	14			
8	100	87	75	63	51	40	28	18	7		
9	100	88	76	64	53	42	31	21	11		
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	5	
11	100	88	77	66	56	46	36	26	17	8	
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11	
13	100	89	79	69	59	49	40	31	23	14	6
14	100	89	79	70	60	51	42	34	25	17	9
15	100	90	80	71	61	52	44	36	27	20	12
16	100	90	81	71	62	54	45	37	30	22	15
17	100	90	81	72	64	55	47	39	32	24	17
18	100	91	82	73	65	56	49	41	34	27	20
19	100	91	82	74	65	58	50	43	35	29	22
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30	24
21	100	91	83	75	67	60	52	46	39	32	26
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34	28
23	100	92	84	76	69	61	55	48	42	36	30
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37	31
25	100	92	84	77	70	63	57	50	44	38	33
26	100	92	85	78	71	64	58	51	46	40	34
27	100	92	85	78	71	65	59	52	47	41	36
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42	37
29	100	93	86	79	72	66	60	54	49	43	38
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44	39

Відносна вологість

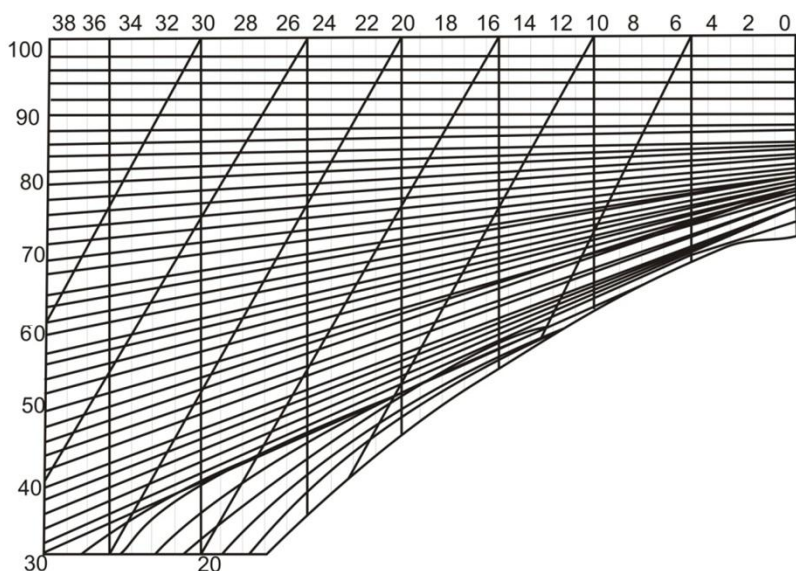


Рис. 4 Номограма для визначення відносної вологості повітря аспіраційним психрометром Ассмана (температура сухого термометра – по вертикалі (t_c °C); температура зволоженого термометру – по похилих ($t_{зв}$ °C))

Таблиця 2. Тиск і густина насиченої водяної пари при різних температурах (тиск P в Па; m – маса пари в г/м³)

$t, ^\circ\text{C}$	P	M	$t, ^\circ\text{C}$	P	m	$t, ^\circ\text{C}$	P	m
0	611	4,84	18	2064	15,4	36	5941	41,8
1	657	5,22	19	2197	16,3	37	6276	44,0
2	705	5,60	20	2365	17,3	38	6625	46,3
3	759	5,98	21	2487	18,3	39	6991	48,7
4	813	6,40	22	2644	19,4	40	7375	51,2
5	872	6,48	23	2893	20,6	45	9583	65,4
6	935	7,3	24	2984	21,8	50	12332	83,0
7	1001	7,8	25	3168	23,0	55	15732	104,3
8	1073	8,3	26	3361	24,4	60	19918	130
9	1148	8,8	27	3565	25,8	65	24998	161

$t, ^\circ\text{C}$	P	M	$t, ^\circ\text{C}$	P	m	$t, ^\circ\text{C}$	P	m
10	1228	9,4	28	3780	27,2	70	31157	198
11	1312	10,0	29	4005	28,7	75	38543	242
12	1403	10,7	30	4242	30,8	80	47343	293
13	1497	11,4	31	4493	32,1	85	57808	354
14	1599	12,1	32	4754	33,9	90	70100	424
15	1705	12,8	33	5030	35,7	95	84513	506
16	1817	13,6	34	5320	37,6	100	101325	598
17	1937	14,5	35	5624	39,6			

Питання для самоперевірки:

1. Що таке **випаровування**?
2. Що таке **конденсація**?
3. Чому при випаровуванні зменшується температура рідини?
4. Що таке **точка роси**?
5. Що таке **насичена пара**?
6. Що таке концентрація молекул **n** у термодинамічній системі?
7. Яка залежність тиску **P** від температури **T** у нагрітій водяній парі?
8. Що таке **абсолютна вологість**? У яких одиницях вона вимірюється?
9. Що таке **відносна вологість**? У яких одиницях вона вимірюється?
10. Сформулюйте **закон Дальтона**.
11. Що таке **парціальний тиск**?
12. Що таке **ідеальний газ**?
13. Як залежить тиск **P** від температури **T** у нагрітій парі?
14. Що визначає температура **T** у термодинамічній системі, згідно з молекулярно-кінетичною теорією?
15. Запишіть основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії.
16. Коли водяну пару можна вважати ідеальним газом?
17. З чого складається **Психрометр Асмана**?
18. Сформулюйте **закон Фур'є**.
19. Чому роса випадає вночі та вранці?
20. Що треба зробити, щоб підвищити або знизити відносну вологість у приміщенні?

3.10. Лабораторна робота № 9

«Визначення горизонтальної складової напруженості магнітного поля

Землі»

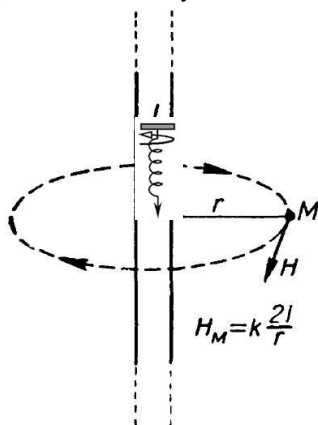
Прилади та приладдя: тангенс-гальванометр, міліамперметр на 25 мА, джерело постійного струму, двополюсний перемикач, масштабна лінійка, реостат на 200 Ом.

Мета роботи: засвоїти один з методів вимірювання напруженості магнітного поля.

Скорочена теорія та методика вимірювань

У 1820 році датський фізик Ганс Ерстед (1777-1851) виявив, що поблизу провідників із струмом магнітна стрілка зазнає орієнтуючої дії, тобто **струм утворює штучне магнітне поле** навколо себе (рис.1). Так як струм – це направлений рух зарядів, то всякий **рухомий заряд утворює магнітне поле**.

Орієнтація магнітної стрілки у магнітному полі певним чином свідчить про те, що магнітному полю властивий напрямок, а його **силові характеристики**



магнітного поля такі, як **індукція $\vec{B}$** , **напруженість $\vec{H}$** – величини векторні.

За напрямок магнітного поля прийнятий напрямок, який вказує північний полюс магнітної стрілки. Графічно магнітне поле зображується **лініями індукції**. Це лінії, дотичні до яких у кожній точці співпадають з вектором індукції. Досліди показали, що лінії індукції завжди замкнені. Для прямолінійного провідника зі струмом напрямок силових ліній можна визначити за **правилом правого гвинта**: коли поступальний рух правого гвинта співпадає зі струмом, напрямок його обертання вказує напрямок ліній індукції.

Рис.1 Напруженість магнітного поля прямолінійного струму

Окрім **індукції магнітного поля $\vec{B}$** , для розгляду магнітних явищ, вводиться ще одна

силова характеристика магнітного поля – **напруженість магнітного поля $\vec{H}$** .

Зв'язок цих характеристик між собою має такий вираз:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \mu_0} \quad (1)$$

де μ – відносна магнітна проникність середовища. Вона **характеризує магнітні властивості середовища**. Тобто це коефіцієнт, який показує у скільки разів індукція поля у середовищі більша, ніж у вакуумі. Це безрозмірна величина.

$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – **магнітна стала**. Введена в системі СІ для узгодження одиниць вимірювання. (Як і в електростатиці було введено аналогічну

величину – електричну сталу $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$).

Залежно від значення відносної магнітної проникності всі речовини можна розділити на три групи:

- 1) діамантики $\mu < 1$ (діамантик послаблює зовнішнє магнітне поле);
- 2) парамантики $\mu > 1$ (парамантик трохи посилює зовнішнє магнітне поле);
- 3) феромантики $\mu \gg 1$ (феромантик значно посилює зовнішнє магнітне поле).

Магнітна стрілка компаса є аналогом контуру з током, який поміщений у зовнішнє магнітне поле теж орієнтується згідно з напрямом силових ліній поля, згідно з законом Ампера.

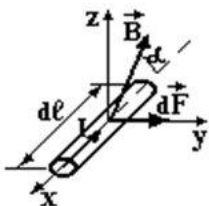


Рис.2 Сила Ампера

Закон Ампера:

Сила, яка діє на провідник із струмом у магнітному полі прямо пропорційна величині струму, довжині провідника і синусу кута між струмом і напрямком магнітного поля і направлена перпендикулярно до провідника і магнітного поля (рис. 2).

Математично закон Ампера має вигляд:

$$dF = B \cdot I \cdot d\ell \cdot \sin \alpha. \quad (2)$$

На елементи контуру із струмом у магнітному полі діють сили Ампера, які приводять до **повороту контуру відносно вісі оберт**. Тобто контур із струмом орієнтується, як і магнітна стрілка, по лініям магнітного поля.

Магнітна стрілка розташовується вздовж силових ліній магнітного поля, а контур із струмом – перпендикулярно їм (рис. 3).

Таким чином, ми можемо використовувати контур із струмом як індикатор присутності у просторі магнітного поля. Вимірюючи момент сил, який діє на контур із струмом, ми можемо фіксувати зменшення, чи збільшення напруженості магнітного поля.

Земля являє собою величезний **магніт, полюси** якого розміщені біля географічних полюсів. Але орієнтація цих полюсів зворотна. Біля північного географічного полюса знаходиться південний магнітний полюс S, а біля південного географічного – північний магнітний полюс N. Самі ж полюси, магнітний і географічний, не співпадають між собою за положенням (дивись рис.4).

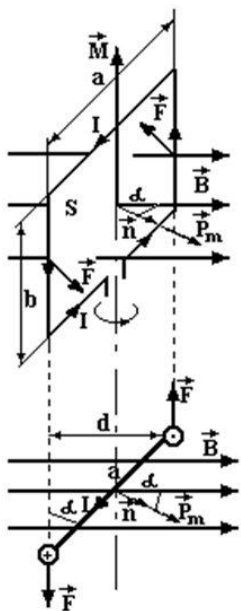


Рис.3 Рамка зі струмом у магнітному полі

Силові лінії магнітного поля Землі поблизу екватора спрямовані горизонтально, а біля магнітних полюсів їх напрямок майже вертикальний. В інших точках земної поверхні вони йдуть під деяким кутом до горизонту.

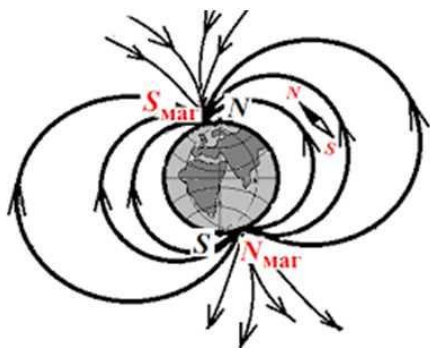


Рис.4 Магнітне поле Землі

Графічно магнітне поле зображується **силовими лініями**, це лінії, дотичні до яких у кожній точці співпадають з вектором напруженості магнітного поля. Тобто вектор напруженості магнітного поля у довільній точці спрямований по дотичній до силової лінії.

Величину проекції напруженості земного магнітного поля $\vec{H}$ на горизонтальну площину називають **горизонтальною складовою напруженості магнітного поля Землі $\vec{H}_g$** . Напрямок цієї складової приймається за спрямованість **магнітного меридіану**. А вертикальна площина, що проходить через нього, називається площиною магнітного меридіану.

Ще зовсім недавно вважали, що точне значення величин, що характеризують магнітне поле Землі, необхідне тільки у практиці водіння кораблів. Проте дослідження останніх років довели, що магнітне поле Землі впливає і на живі організми. Тому вміння визначити магнітне поле Землі стає необхідним і при розв'язанні практичних задач ще й біологічних наук.

В даній роботі проводиться вимірювання тільки горизонтальної складової напруженості поля Землі із застосуванням приладу, який має назву **тангенс-гальванометра** (рис.5).

Тангенс-гальванометр являє собою плоску вертикальну котушку індуктивності радіусом r з відомим числом витків $N=90$. В центрі котушки в горизонтальній площині розміщено компас.

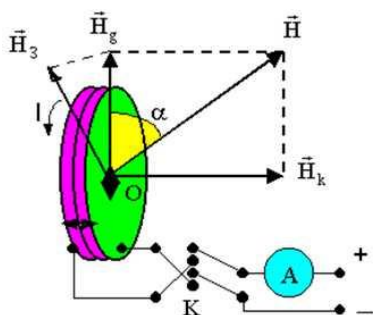


Рис. 5 Принципова схема та зображення тангенс-гальванометра

Магнітна стрілка компасу, у відсутність струму в котушці встановлюється по магнітному меридіану. На неї діє тільки сила магнітного поля Землі (сила Ампера). Поворотом котушки навколо вертикальної осі можна добитись суміщення площин котушки і магнітного меридіану.

Якщо у цьому положенні котушки пропускати через неї постійний струм, то, окрім магнітного поля землі, цим струмом буде утворюватись штучне магнітне поле. І це штучне магнітне поле, згідно з правилом правого гвинта, буде перпендикулярним до магнітного поля Землі. Вектори магнітного поля Землі і штучного магнітного поля котушки зі струмом векторно складуться, створюючи сумарне магнітне поле. (рис. 5).

Магнітна стрілка тепер буде орієнтуватись по результуючому магнітному полю і повернеться на деякий кут α . Пояснимо це.

На магнітну стрілку діють два взаємно перпендикулярних поля – магнітне поле Землі і штучне магнітне поле котушки зі струмом. А отже, утворюються і дві сили Ампера. Одна з них обумовлена горизонтальною складовою напруженості поля Землі H_g , інша – магнітним полем котушки зі струмом H_k , як це показано на рис.5. Під дією цих полів магнітна стрілка і встановиться за напрямком їх рівнодіючої.

Із того ж рис.5 видно, що штучне магнітне поле H_k є протилежним катетом прямокутного трикутника, складеного з напруженостей полів, а напруженість магнітного поля Землі H_g – це прилежний катет. Тоді відношення двох катетів прямокутного трикутника, як звісно з тригонометрії, буде дорівнювати тангенсу кута α . На підставі цього, ми можемо записати для відношення напруженостей магнітних полів:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= H_k / H_g \\ \text{або } H_g &= H_k / \operatorname{tg}(\alpha) . \end{aligned} \quad (3)$$

Величину напруженості магнітного поля, яке утворене в центрі колового витка (рис. 6), радіусом R , по якому тече струм I , можна обчислити за простою формулою:

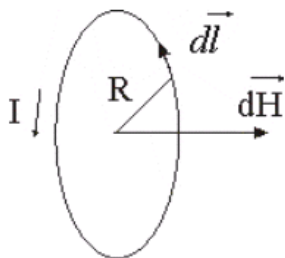


Рис.6 Магнітне поле колового струму

$$H = I / (2R), \quad (4)$$

де I – сила струму у виткові (вимірюється в амперах); R – радіус витка (вимірюється в метрах).

Це співвідношення випливає із **закону Біо-Савара-Лапласа.**

Закон Біо-Савара-Лапласа визначає напруженість магнітного поля dH , яке створене елементом провідника довжиною dl із струмом I в точці, віддаленій від цього елементу на відстань R

Математичний вираз **закону Біо-Савара-Лапласа** можна записати у такому вигляді:

$$dH = \frac{I}{4\pi R^2} \sin(\alpha) dl.$$

Застосовуючи вираз закону Біо-Савара-Лапласа при інтегруванні по замкненому колу витка, ми і отримуємо значення напруженості штучного магнітного поля витка зі струмом, яке записано в (4).

Але магнітне поле одного витка зі струмом доволі мале. Щоб отримати значне штучне магнітне поле, як бачимо з виразу (4), треба збільшувати струм у колі, чи зменшувати радіус витка. І перше і друге накладає значні чисто технічні обмеження для впровадження.

Є інший простий спосіб отримати посилене штучне магнітне поле. Замість одного витка використати систему, яка складається з великої кількості концентричних витків зі струмом. Таку систему називають **катушкою індуктивності**.

Катушка має **N** витків, кожен з яких створює власне магнітне поле, і тому напруженість її поля буде в **N** разів більша ніж від одного витка. Розрахувати напруженість штучного магнітного поля катушки індуктивності доволі просто. Треба значення напруженості магнітного поля одного витка помножити на кількість витків у катушці :

$$H_k = H_k N = \frac{IN}{2R} \quad (5)$$

Тепер ми можемо підставити значення штучного магнітного поля катушки **H_k** із (5) в вираз (3). Ми одержимо робочу формулу для розрахунку горизонтальної складової магнітного поля Землі

$$H_g = \frac{IN}{2R \operatorname{tg}(\alpha)} \quad (6)$$

Напруженість магнітного поля в системі СІ **вимірюється** в амперах поділених на метр (А/м).

На рис.7 представлена електрична схема вимірювання, яку ми будемо використовувати в цій роботі:

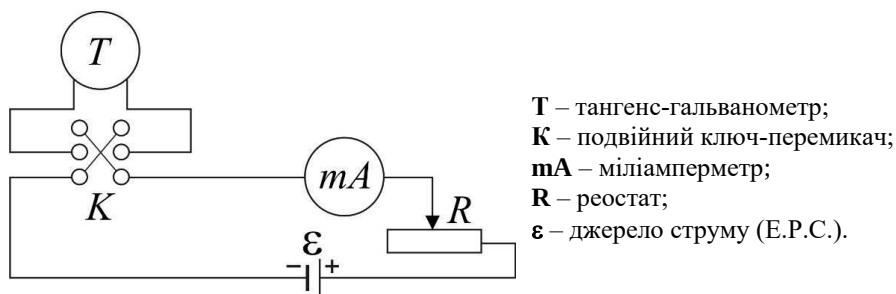


Рис. 7 Принципова схема досліду

Порядок виконання роботи:

1. Зберіть електричне коло за схемою (рис.7). При цьому тангенс-гальванометр встановлюйте якомога далі від інших приладів та феромагнітних

матеріалів, щоб уникнути їх впливу на магнітну стрілку. Не вмикайте струм!

2. Покажіть зібрану схему викладачу для перевірки правильності зборки електричної схеми. Після підтвердження викладачем починайте виміри.

3. Повертаючи тангенс-гальванометр, встановіть площину котушки у площині магнітного меридіану. Для цього, повертаючи шкалу компасу, сумістіть її нульову поділку з північним кінцем полюсу стрілки.

4. Встановіть повзунок потенціометра в положення, що відповідає мінімальній напрузі, яка знімається з нього. Переміщуючи повзунок потенціометра у бік збільшення напруги, підберіть такий струм у котушці, щоб відхилення магнітної стрілки було не менше $10-20^\circ$. Коли стрілка компасу прийде у рівновагу, зробіть відлік по шкалі кута відхилення стрілки α_1 і запишіть силу струму I .

5. Зберігаючи силу струму I , змініть перемикачем K його напрямок на протилежний і виміряйте величину відхилення стрілки у протилежний бік (α_2). За кутами α_1 і α_2 знайдіть середнє значення кута відхилення α . Занесіть дані виміру до таблиці у першу строку.

6 Змініть положення повзунка на потенціометрі у бік збільшення напруги і виміряйте відхилення стрілки при двох збільшених значеннях струму у котушці. Не забувайте, що Вам кожен раз треба проводити виміри кутів відхилення стрілки при прямому і зворотному напрямі струмів через котушку індуктивності. Потім визначити середній кут відхилення. Занесіть дані вимірів для двох значень струму до таблиці у другу і третю строки.

7. Виміряйте міліметровою лінійкою середній радіус витків котушки R (у нашому випадку він повинен бути близьким до $R=7,5\text{см}$).

8. Підставляючи послідовно середні значення кутів α і струмів I для трьох вимірів у **формулу (6)**, знайдіть **три значення H** . Занесіть дані розрахунків у таблицю. Розрахунки рукописно надати нижче таблиці.

9. Розрахуйте середнє значення напруженості магнітного поля Землі.

10. Перевірте, щоб всі результати вимірювань і розрахунків були подані в таблицю.

11. Розрахуйте абсолютну похибку ΔH для кожного вимірювання.

12. Розрахуйте середню абсолютну похибку $\Delta H_{\text{сер}}$ (Увага! При знаходженні середньої абсолютної похибки, абсолютні похибки всіх експериментів беруться за модулем).

13. Обчисліть відносну похибку вимірювань $\delta = \Delta H_{\text{сер}} / H_{\text{сер}} \cdot 100\%$

14. Результати роботи подати у вигляді:

$$H_g = H_{\text{сер}} \pm \Delta H_{\text{сер}}, \delta = \Delta H_{\text{сер}} / H_{\text{сер}} \cdot 100\%$$

R,м	N,витки	I, mA	α_1, град	α_2, град	tg α	H_b, A/м	ΔH_b, A/м
	Середні значення						

При розрахунках використовуйте **систему СІ !**

Питання для самоперевірки:

1. Що утворює магнітне поле?
2. Які силові характеристики магнітного поля Ви знаєте?
3. Зв'язок **індукції** магнітного поля **B** і **напруженості** магнітного поля **H** між собою.
4. Що таке відносна магнітна проникність середовища **μ** ?
5. На які групи поділяються речовини залежно від значення відносної магнітної проникності **μ** ?
6. Сформулюйте **закон Ампера**. Запишіть його математичний вигляд.
7. Як впливає магнітне поле на контур з током?
8. Які **властивості магнітного поля Землі**? Дайте загальну характеристику магнітного поля Землі. Де розміщені магнітні полюси Землі.
9. Як спрямований вектор напруженості магнітного поля Землі по відношенню до силової лінії? На які складові розкладають вектор напруженості?
10. Що таке горизонтальна складова напруженості магнітного поля Землі **H**?
11. Що таке **силові лінії**?
12. Що собою являє **тангенс-гальванометр**?
13. Сформулюйте **закон Біо-Савара-Лапласа**.
14. Запишіть вираз для Величини напруженості магнітного поля **H_T** , створюваного в центрі колового витка зі струмом.
15. Чому магнітна стрілка тангенс-гальванометра має малі розміри?
16. Чому вимірювання найліпше проводити при кутах відхилення, близьких до **45°**?
17. Що називається абсолютною похибкою. Запишіть вираз для абсолютної похибки у даному експерименті.
18. Як розраховується середнє значення абсолютної похибки?
19. Що таке відносна похибка?
20. Які вимірювальні прилади використовуються в цій роботі? Яка абсолютна похибка вимірювання у цих пристроїв?

3.11. Лабораторна робота № 10

«Дослідження лазерного випромінювання за допомогою дифракційної ґратки»

Прилади і приладдя: оптичний квантовий генератор (лазер), дифракційна ґратка, шкала з фоторезистором, що переміщується, мікроамперметром з сухим елементом.

Мета роботи: засвоїти принцип дії лазерів і визначення довжини хвилі лазера за допомогою дифракційної ґратки.

Скорочена теорія та методика вимірювань

В основі роботи квантових генераторів лежить явище індукованого випромінювання, суть якого полягає ось у чому. Нехай електрон в атомі знаходиться у двох станах 1 і 2 (рис. 1а), що характеризується енергіями W_1 і W_2 .

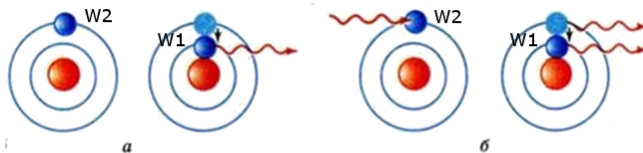


Рис. 1. Механізм спонтанного (а) та вимушеного (б) випромінювання

Щоб перевести електрон з рівня 1 на більш високий енергетичний рівень 2, йому треба надати енергії $\epsilon = h \nu$, де h – стала Планка, що дорівнює $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; ν – частота випромінювання, що поглинається. Енергія фотона, що поглинається, має бути не менша за різницю $W_2 - W_1$.

Із стану 2 в стан 1 електрон може повернутися двома способами. Перший – самодовільний – спонтанний перехід з випромінюванням фотона з енергією ϵ , що дорівнює поглинутій енергії.

Оскільки різні атоми випромінюють незалежно один від одного, то спонтанне випромінювання є некогерентним.

Другий спосіб повернення електрона в стан W_1 – індукований перехід під дією випромінювання з енергією фотонів ϵ , рівною різниці енергій $W_2 - W_1$ (рис. 1б). Супроводжуюче індуковані переходи випромінювання має ту ж частоту, спрямованість поширення, поляризацію і фазу, що і вимушуюче випромінювання. Однаковість фаз вимушуючого і індукованого випромінювань зумовлює когерентність індукованого випромінювання.

Звичайно під дією випромінювання з енергією ϵ відбуваються одночасно як переходи електронів у збуджений стан, так і індуковані переходи в стан нормальний. В системах, що знаходяться у стані термодинамічної рівноваги, найбільше число електронів знаходиться у стані 1, тому під дією зовнішнього

випромінювання переважно йдуть процеси поглинання випромінювання з переходом у стан 2.

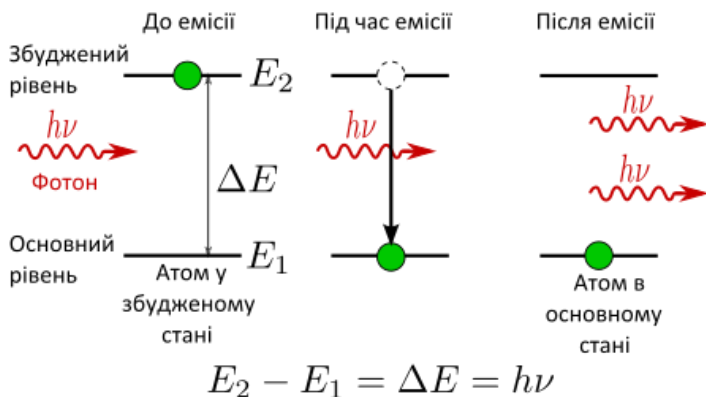


Рис. 2. Схема індукованого випромінювання

Якщо ж створити таку систему, в якій число електронів у збудженому стані більше, ніж в основному стані (на нижньому рівні), то випромінювання з енергією ϵ викличе переважно індуковане випромінювання. Схема цього процесу подана на рис.2.

Системи, у яких число електронів у збудженому стані більше, ніж в основному, називають системами з інверсною заселеністю рівнів. Такі системи використовуються на практиці для створення квантових генераторів. Квантовий генератор, що випромінює у діапазоні довжин хвиль видимого світла, носить назву лазера. Цей термін утворений початковими буквами слів англійської фрази «Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation», що означає «підсилення світла за допомогою індукованого випромінювання». У нинішній час випускаються різні марки лазерів, інверсна заселеність в яких робиться оптичною накачкою, у результаті пропускання електроструму або за допомогою газового розряду.

В даній роботі вивчається гелій-неоновий лазер, в якому інверсна заселеність створюється газовим розрядом. Робоча речовина у даному типіві лазерів – гелій-неонова суміш газів під тиском близько 1 мм. рт. ст. – міститься у кварцовій трубці, на кінцях якої розміщені два дзеркала: одне – з високою відбиваючою здатністю, друге – напівпрозоре. Газовий розряд у трубці підтримується височастотним генератором. Напівпрозоре дзеркало поглинає до кількох відсотків падаючого на нього світла, а решта випромінювання відбиває у випромінююче середовище. У результаті, кожний фотон, перш ніж вийти через напівпрозоре дзеркало, багаторазово пронизує активну речовину лазера, викликаючи індуковане випромінювання багатьох збуджених атомів. Цим досягається велика густина випромінювання. Багаторазово можуть

відбитися від дзеркала тільки ті промені, що падають на дзеркало під малими кутами, тому випромінювання зосереджено у межах вузького тілесного кута. Цим визначається можливість одержання в лазерах променів великої яскравості і малої розбіжності.

Характерні особливості лазерного випромінювання:

1. Спрямованість випромінювання. Світловий потік зосереджений у межах малого тілесного кута з отвором не більше ніж $30''$ (у прожекторів цей кут у сотні разів більший).

2. Когерентність. Інші джерела когерентного світла невідомі.

3. Поляризованість. Повністю поляризовані низько інтенсивні промені від інших джерел можна одержати тільки за допомогою додаткових приладів.

4. Монохроматичність. Інші джерела дають випромінювання у широкому інтервалі довжин хвиль.

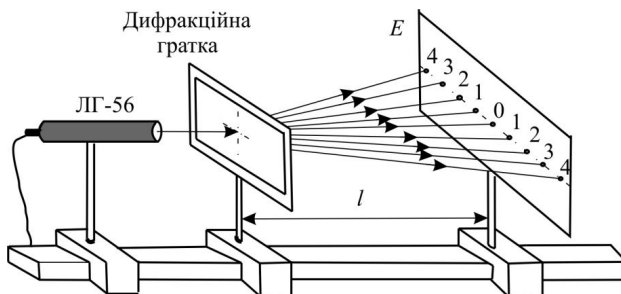


Рис. 3. Принципова схема досліду

Визначення довжини хвилі випромінювання лазера в даній лабораторній роботі проводиться за допомогою установки, схема якої подана на рис.3.

Світло від лазера падає на дифракційну ґратку ДР, при цьому на екрані Е спостерігається так звана дифракційна картина.

Будові такої картини, яку ми спостерігаємо на екрані, сприяють два фізичні явища: **Інтерференція світла і Дифракція світла.**

Інтерференція – одне з яскравих проявів хвильової природи світла (рис.4). Це цікаве й красиве явище *спостерігається при накладенні двох або декількох світлових пучків. Інтенсивність світла в області перекривання пучків має вигляд світлих і темних смуг, що чергуються, причому в максимумах інтенсивність більше, а в мінімумах менше суми інтенсивностей пучків.*

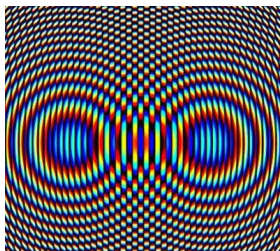


Рис.4 Явище інтерференції

При використанні білого світла інтерференційні смуги виявляються пофарбованими у різні кольори спектра. З інтерференційними явищами ми зустрічаємося досить часто: кольори масляних плям на асфальті, фарбування замерзаючих шибок,

вигадливі кольорові малюнки на крилах деяких метеликів і жуків – усе це прояв інтерференції світла.

Перший експеримент по спостереженню інтерференції світла в лабораторних умовах належить І. Ньютону. Він спостерігав інтерференційну картину, що виникає при відбитті світла у тонкому повітряному прошарку між плоскою скляною пластиною й плоскою опуклою лінзою великого радіуса кривизни.

Першим інтерференційним дослідом, що одержав пояснення на основі хвильової теорії світла, з'явився дослід Юнга (1802 р.). У досліді Юнга світло від джерела, у якості якого служила вузька щілина S , падав на екран із двома близько розташованими щілинами S_1 і S_2 .

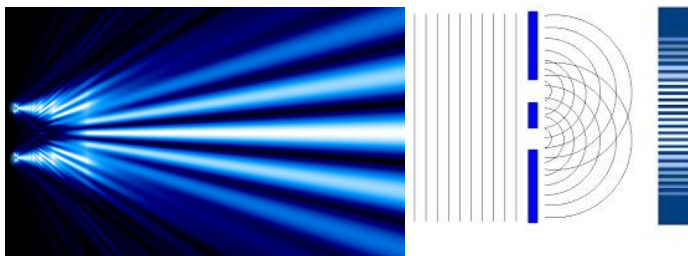


Рис.5 Дослід Юнга

Проходячи через кожну із щілин, світловий пучок розходився внаслідок дифракції, тому на білому екрані E світлові пучки, що пройшли через щілини S_1 і S_2 , перекривалися. В області перекриття світлових пучків спостерігалася інтерференційна картина у вигляді світлих і темних смуг, що чергуються (рис.5).

Яскраві та темні смуги на екрані відповідали умовам, яким підкоряються різниці ходу променів від щілин до екрану..

Визначимо ці умови:

$$\Delta = 2k \left(\frac{\lambda}{2} \right) = k\lambda$$

Умова максимумів: результуюче коливання максимально підсилюється тоді, коли різниця ходу додавання хвиль дорівнює парному числу півхвиль, або цілому числу довжин хвиль:

$$\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Умова мінімумів: результуюче коливання ослаблюється, якщо різниця ходу доданих хвиль дорівнює непарному числу півхвиль:

Нагадаємо, що довжина хвилі – це найменша відстань, взята вздовж променя, між двома точками, які коливаються в одній фазі.

Ці умови можна пояснити, розглянувши рис. 6: якщо хвилі від двох джерел приходять в однаковій фазі – спостерігається посилення світла. Якщо вони накладаються у протифазі – інтенсивність світла послаблюється.

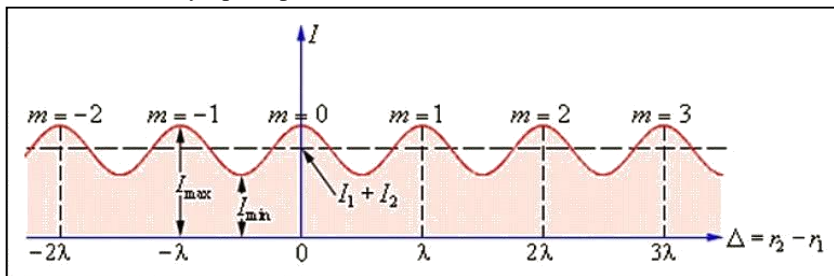


Рис. 6. Зміна інтенсивності світла на екрані в досліді Юнга

Юнг був першим, хто зрозумів, що не можна спостерігати інтерференцію при додаванні хвиль від двох незалежних джерел. Тому в його досліді щілини S_1 і S_2 , які, відповідно до принципу Гюйгенса, можна розглядати як джерела вторинних хвиль, висвітлювалися світлом одного джерела S . При симетричному розташуванні щілин вторинні хвилі, що випускаються джерелами S_1 і S_2 , перебувають у фазі, але ці хвилі проходять до крапки спостереження P різні відстані r_1 і r_2 . Отже, фази коливань, створюваних хвилями від джерел S_1 і S_2 у крапці P , загалом кажучи, різні. Таким чином, задача про інтерференцію хвиль зводиться до задачі про додавання коливань однієї й тієї ж частоти, але з різними фазами. Твердження про те, що хвилі від джерел S_1 і S_2 поширюються незалежно друг від друга, а у точці спостереження вони просто складаються, є дослідним фактом і зветься принципом суперпозиції. Інтерференція може виникнути тільки при додаванні **когерентних коливань, тобто коливань, у яких різниця фаз залишається постійною у часі** (рис.6). У цьому випадку спостерігається стійка інтерференційна картина.

Дифракцією світла називається відхилення світлових хвиль від прямолінійного поширення, не викликане відбиванням або заломленням променів світла (рис.7). Дифракція світла присутня завжди там і тоді, коли відбувається обмеження світлового фронту хвилі. Проте спостерігати її найлегше при проходженні світла через малі отвори або біля малих непрозорих перепон.

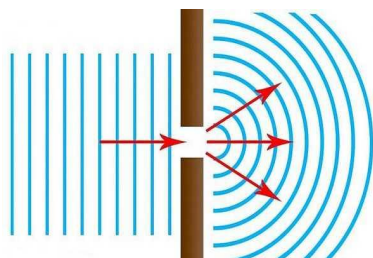


Рис. 7. Дифракція світла

Для одержання дифракційних спектрів виготовляють так звані **дифракційні решітки** (гратки), що являють собою сукупність паралельних, близько розмішених одна до одної щілин або відбиваючих смужок. Існує кілька способів виготовлення дифракційних ґраток. В одному з них скляну пластинку покривають тонким непрозорим шаром м'якого металу (Al , Ag) і надтонким кістяним різцем за допомогою ділильної машини продрапують у шарі вузькі шпарини

(до 50 –1200 на 1 мм довжини). В іншому способі подряпини наносять на поверхню прозорої тонкої плівки, а проміжки між подряпинами служать щілинами. Існують відбивальні ґратки у вигляді металевих дзеркал з нанесеними на них штрихами.

Розрахунок дифракційної картини робиться згідно з принципом Гюйгенса, доповненого Френелем і принципом Юнга інтерференції світлових променів – так званим принципом Гюйгенса-Френеля (рис.7).

Принцип Гюйгенса-Френеля, кожна точку хвильового фронту можна розглядати як точкове джерело вторинних сферичних когерентних хвиль, які можуть інтерферувати між собою.

Визначаючи результат інтерференції хвиль від усіх точок фронту, вдається пояснити всі закономірності дифракції світла.

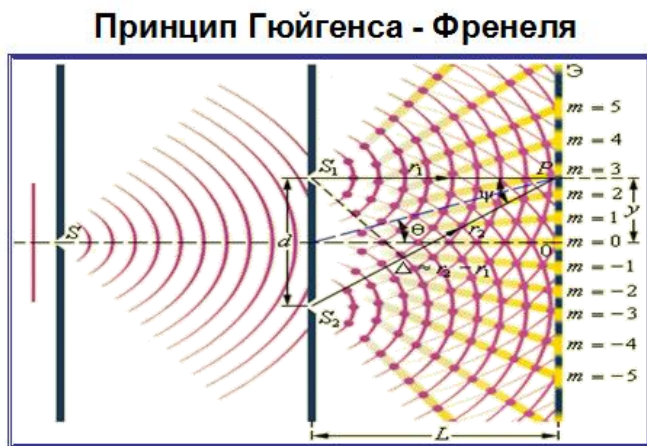


Рис. 8. Принцип Гюйгенса-Френеля

При падінні паралельного пучка променів (рис.8) на дифракційну ґратку плоский фронт світлової хвилі проходить через всі щілини в одній фазі. У деяку точку екрана під кутом φ йдуть два промені 1 і 2 і інтерферують.

Між сусідніми щілинами у напрямку під кутом φ виникає різниця ходу променів

$$\Delta = d \sin \varphi, \quad (1)$$

де d – називається сталою ґратки і визначається числом щілин на 1 м довжини(дивись рис.30)

$$d = 1/n. \quad (2)$$

Промені від сусідніх щілин (отже, і від усіх щілин) дають максимум інтерференції при різниці ходу у ціле число довжин хвиль –

$$\Delta = k \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \quad (3)$$

Умову мінімуму інтерференції одержуємо при різниці ходу у напівціле число довжин хвиль -

$$\Delta = (k + 1/2) \lambda. \quad (4)$$

При падінні на ґратку монохроматичного (однокольорового) світла на екрані виникають однокольорові смуги.

Умова спостереження максимумів освітленості на екрані визначається рівнянням:

$$b \sin \varphi = k \lambda, \quad (5)$$

де λ – довжина хвилі випромінювання лазера; $k = 0, 1, 2, \dots$ – порядок дифракційного максимуму; b – стала дифракційної ґратки, яка дорівнює відстані між сусідніми щілинами; φ – дифракційний кут, що знаходиться між первинним пучком і напрямком на максимум k -го порядку. Згідно з рис.9, кут φ може бути визначений за співвідношенням:

$$\sin \varphi = \frac{\ell}{\sqrt{L^2 + \ell^2}}. \quad (6)$$

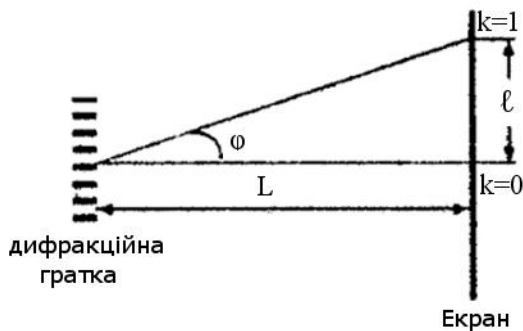


Рис. 9. Розрахунок дифракційного кута

Відстань L від дифракційної ґратки до екрана змінюється переміщенням екрана вздовж підставки і визначається масштабною лінійкою (рис.9). Відстань l визначається по шкалі на екрані. Оскільки дифракційні максимуми на екрані розмиті, то візуальне визначення положення максимуму до деякої міри ускладнене.

На рис. 10 наведено зображення, яке ми будемо спостерігати на екрані.

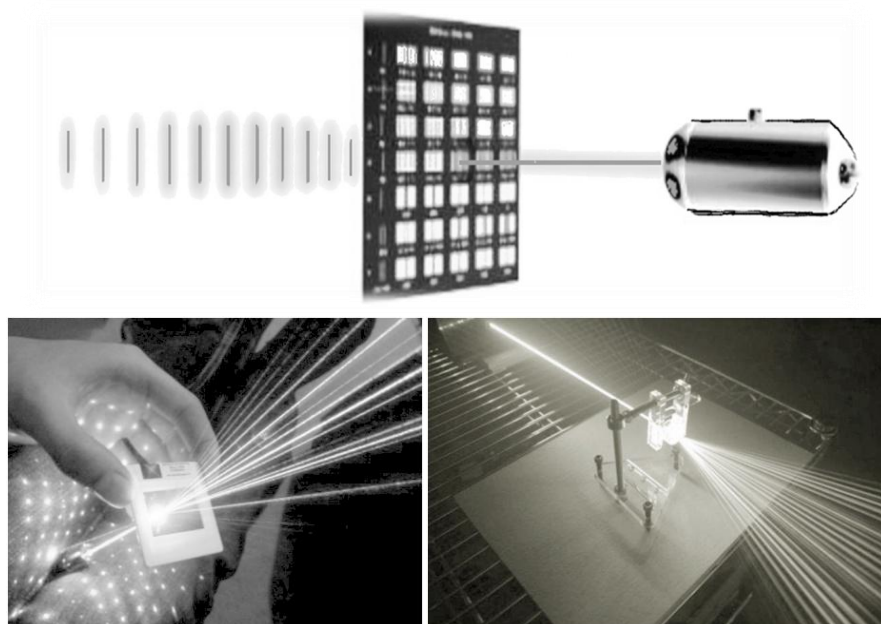


Рис. 10. Зображення дифракційної картини у досліді

Ми бачимо, що інтерференційні лінії доволі широкі. У зв'язку з цим реєстрація освітленості на екрані бажано проводити за допомогою фотоелектричної приставки.

Фотоелектрична приставка складається із фоторезистора, закріпленого на повзунку, який переміщується вздовж екрану. Виводи від фоторезистора підводяться до мідних шин, з'єднаних з мікроамперметром, всередині якого вмонтовано сухий елемент. Положення максимуму визначається положенням щілини фотоелемента, що відповідає найбільшому струмові.

Розрахунки довжини хвилі лазерного випромінювання будемо здійснювати за формулою, отриманою на підставі співвідношення (5):

$$\lambda = \frac{b \sin \varphi}{k} \quad (7)$$

Порядок виконання роботи:

1. Ввімкніть виводи контактів, розміщених на екрані, до мікроамперметра і зафіксуйте величину темнового струму.

2. З дозволу викладача увімкніть лазер в мережу і вивчіть дифракційну картину.

3. Установіть екран на вказаній викладачем відстані **L** від дифракційної ґратки перпендикулярно до напрямку первинного пучка лазера.

4. Переміщуючи фоторезистор вздовж екрана, знайдіть положення трьох максимумів ℓ_1' , ℓ_2' , ℓ_3' праворуч від нульового максимуму та ℓ_1'' , ℓ_2'' , ℓ_3'' ліворуч від нульового максимуму, які відповідають максимумам фотоструму.

5. Знайдіть положення максимумів як середнє між вимірами праворуч і ліворуч: $\ell_1 = (\ell_1' + \ell_1'') / 2$, $\ell_2 = (\ell_2' + \ell_2'') / 2$ і т.д.

6. Користуючись формулою (6), за даними ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 визначить величину $\sin(\varphi)$.

7. Визначить довжину хвилі лазера за (7).

8. За трьома одержаними λ значеннями визначить $\lambda_{\text{сер.}}$ і оцініть похибки вимірювань.

9. Розрахуйте абсолютну похибку $\Delta \lambda$ для кожного вимірювання.

10. Розрахуйте середню абсолютну похибку $\Delta \lambda_{\text{сер}}$ (Увага! При знаходженні середньої абсолютної похибки, абсолютні похибки всіх експериментів беруться за модулем).

11. Обчислити відносну похибку вимірювань $\delta = \Delta \lambda_{\text{сер}} / \lambda_{\text{сер}} \cdot 100\%$

Результати роботи подати у вигляді: $\lambda = \lambda_{\text{сер}} \pm \Delta \lambda_{\text{сер}}$, $\delta = \Delta \lambda_{\text{сер}} / \lambda_{\text{сер}} \cdot 100\%$

Дані вимірювань і розрахунків подайте в таблиці:

k	ℓ' , см	ℓ'' , см	ℓ , см	$\sin \varphi$	λ , нм	$\Delta \lambda$, нм
1						
2						
3						
Середні значення						

Відстань від дифракційної ґратки до екрана **L=34см.**

Стала дифракційної ґратки **b=0,01мм = 10⁻⁵м**

Питання для самоперевірки:

1. Що називається інтерференцією ?
2. Які хвилі називаються когерентними?
3. Запишіть умову максимумів при інтерференції.
4. Запишіть умову мінімумів при інтерференції.
5. Сформулюйте принцип Гюйгенса-Френеля.
6. Що називається дифракцією світла?
7. Для чого застосовується дифракційна ґратка ?
8. Що таке стала дифракційної ґратки?
9. Що називається дисперсією світла?
10. Чому дифракційна ґратка дає дисперсію світла ?
11. У чому полягає явище дифракції?
12. Чому дорівнює різниця ходу променів між сусідніми щілинами у напрямку під кутом φ ?
13. Що таке основний і збуджений рівні атома?
14. Що таке спонтанне випромінювання?
15. Що таке вимушене випромінювання?
16. Що становить принципову основу дії лазера ?
17. Які характерні особливості лазерного випромінювання?
18. Що таке відносна похибка вимірювання?
19. Що впливає на виникнення похибки у цьому експерименті?
20. Що треба змінити, щоб зменшити похибку розрахунків?

4. ДОДАТКИ

1. Основні фізичні сталі (округлені значення)

<i>Фізична стала</i>	<i>Позначення</i>	<i>Числове значення</i>
Швидкість світла у вакуумі	c	$3 \cdot 10^8$ м/с
Гравітаційна стала	γ	$6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м ² /кг ²
Електрична стала	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	μ_0	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Елементарний заряд	e	$1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Маса спокою нейтрона	m_n	$1,67493 \cdot 10^{-27}$ кг
Маса спокою протона	m_p	$1,67262 \cdot 10^{-27}$ кг
Маса спокою електрона	m_e	$9,12 \cdot 10^{-31}$ кг
Стала Рідберга	R_∞	$1,10 \cdot 10^7$ м ⁻¹
Стала Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Стала Стефана-Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² ·К ⁴)
Стала Віна	b	$2,90 \cdot 10^{-3}$ м·К
Стала Планка	h	$6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Універсальна газова стала	R	8,31 Дж/(моль·К)
Число Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Число Лошмідта	n_0	$2,69 \cdot 10^{25}$ м ⁻³
Нормальний атмосферний тиск	p_0	101325 Па
Густина повітря при н. у.	D_0	1,29 кг/м ³
Число Фарадея	F	$9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль
Прискорення вільного падіння	g	9,81 м/с ²

2. Деякі астрономічні величини

<i>Найменування параметра</i>	<i>Середнє значення</i>
Радіус Землі	$6,37 \cdot 10^6$ м
Маса Землі	$5,98 \cdot 10^{24}$ кг
Радіус Сонця	$6,96 \cdot 10^8$ м
Маса Сонця	$1,99 \cdot 10^{30}$ кг
Радіус Місяця	$1,74 \cdot 10^6$ м
Маса Місяця	$7,33 \cdot 10^{22}$ кг
Відстань від Землі до Сонця	$1,50 \cdot 10^{11}$ м
Відстань від Землі до Місяця	$3,84 \cdot 10^8$ м

3. Густина твердих тіл

<i>Тверде тіло</i>	<i>Густина, кг/м³</i>	<i>Тверде тіло</i>	<i>Густина, кг/м³</i>
Алюміній	$2,70 \cdot 10^3$	Сталь	$7,75 \cdot 10^3$
Мідь	$8,96 \cdot 10^3$	Уран	$19,0 \cdot 10^3$

4. Густина рідин

<i>Рідина</i>	<i>Густина, кг/м³</i>	<i>Рідина</i>	<i>Густина, кг/м³</i>
Вода (при 4°C)	$1,00 \cdot 10^3$	Кров	$1,05 \cdot 10^3$
Олія	$0,90 \cdot 10^3$	Плазма крові	$1,03 \cdot 10^3$
Гліцерин	$1,26 \cdot 10^3$	Бензол	$0,88 \cdot 10^3$
Спирт	$0,79 \cdot 10^3$	Ртуть	$13,6 \cdot 10^3$

5. Питома теплоємність деяких матеріалів

<i>Речовина</i>	<i>Питома теплоємність , Дж/(кг·К)</i>	<i>Сплав</i>	<i>Питома теплоємність , Дж/(кг·К)</i>
Вода	$4,19 \cdot 10^3$	Сталь	$0,48 \cdot 10^3$
Спирт	$2,51 \cdot 10^3$	Чавун	$0,54 \cdot 10^3$

6. В'язкість рідин та газів

<i>Рідина</i>	<i>В'язкість, Па·с</i>	<i>Газ</i>	<i>В'язкість, Па·с</i>
Вода	$1,004 \cdot 10^{-3}$	Повітря	$1,82 \cdot 10^{-5}$
Кров	$4,5 \cdot 10^{-3}$	Кисень	$2,02 \cdot 10^{-5}$
Молоко	$1,79 \cdot 10^{-3}$	Азот	$1,75 \cdot 10^{-5}$
Гліцерин	1,5	Водень	$0,88 \cdot 10^{-5}$

7. Коефіцієнт поверхневого натягу рідин

<i>Рідина</i>	<i>Коефіцієнт, мН/м</i>	<i>Рідина</i>	<i>Коефіцієнт, мН/м</i>
Вода	73	Бензол	30
Мильна вода	40	Гас	30
Спирт	22	Ртуть	510

8. Ефективний діаметр молекул

<i>Газ</i>	<i>Діаметр, Å</i>	<i>Газ</i>	<i>Діаметр, Å</i>
Азот	3,1	Кисень	2,9
Гелій	2,0	Водень	2,3
Вуглекислий газ	3,2	Водяна пара	2,8

9. Критичні значення температури T_K та тиску P_K

<i>Речовина</i>	<i>T_K, K</i>	<i>P_K, MPa</i>	<i>Речовина</i>	<i>T_K, K</i>	<i>P_K, MPa</i>
Вода	647	22,0	Кисень	154	5,07
CO ₂	304	7,38	Азот	126	3,40

10. Відносна діелектрична проникність речовин ϵ

<i>Речовина</i>	<i>Проникність</i>	<i>Речовина</i>	<i>Проникність</i>
Парафін	2,0	Вода	81
Скло	8,0	Олія	2,2
Слюда	6,5	Гас	2,0

11. Питомий опір металів і сплавів

<i>Метал</i>	<i>Питомий опір, мкОм·м</i>	<i>Метал</i>	<i>Питомий опір, мкОм·м</i>
Мідь	0,017	Нікелін	0,42
Срібло	0,016	Ніхром	1,0
Сталь	0,12	Константан	0,50

5. ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. **Палехін В. П.** Курс фізики : підручник. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2013. 516 с. URL: https://karazinbook.com/sites/default/files/books/palehin_2.pdf
2. **Чолпан. П. П.** Фізика : підручник. Київ : Вища школа, 2004. 567 с. URL: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Cholpan_2004_567.pdf
3. **Кучерук І. М.** Загальний курс фізики : у 3 т. / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик ; за ред. І. М. Кучерука. Київ : Техніка, 2006. Т.1. 532 с. URL: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Kycheryk_P1_2006_532.pdf
4. **Посудін Ю. І.** Фізика : підручник. Київ : Ліра-К, 2016. 472 с. URL: <https://docplayer.net/90372072-Yu-i-posudin-fizika-pidruchnik.html>
5. Фізика. Лабораторний практикум і збірник задач / Дідоборець О. Й., Козиркіна С.В., Попов Є.Г., Резчик Н.В., Толстенко О.В., Цоцко В.І. Дніпропетровськ, 2008. 229 с.
6. **Клим М., Якібчук П.** Задачі з молекулярної фізики : навчальний посібник. Львів, 2007. 227 с. URL: https://physics.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/klum_zadachi_z_mol_fizyky.pdf
7. Збірник задач із фізики. Ч. 1 : для студентів інженерних спеціальностей денної та заочної форм навчання / уклад. Якубенко В.П., Шматкова Р.І., Ківа О.В. Полтава : ПолтНТУ, 2017. 34 с. URL: <https://nupp.edu.ua/uploads/files/0/doc/disciplines/193bok5/zbirnik-z-p1.pdf>
8. **Відьмаченко А. П.** Розв'язання задач з фізики за розділами: 1. Механіка. 2. Молекулярна фізика і термодинаміка. Київ, 2015. 93 с. URL: https://www.researchgate.net/publication/265006249_Rozv'azanna_zadac_z_fiziki_za_rozdilami_1_Mehanika_2_Molekularna_fizika_i_termodinamika
9. **Петченко О. М.** Загальні основи фізики : навчальний посібник з курсу «Фізика» (для студентів 1-2 курсів денної форми навчання за напрямом підготовки 6.060101 – «Будівництво», 6.050702 – «Електромеханіка», 6.050701 – «Електротехніка і електротехнології») / О. М. Петченко, А. С. Сисоєв, Є. І. Назаренко, А. В. Безуглий. Харків : ХНАМГ, 2007. 224 с. URL: <https://eprints.kname.edu.ua/3391/1/%D0%9D%D0%9F%D0%A4%D1%96%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D0%BF%D0%B5%D1%87%D0%B0%D1%82%D0%BD.%D0%B2%D0%B0%D1%80.%2C10.01.08.pdf>
10. **Шкурдода Ю. О.** Фізика. Механіка, молекулярна фізика та термодинаміка : навчальний посібник / Ю. О. Шкурдода, О. О. Пасько, О. А. Коваленко. Суми : Сумський державний університет, 2021. 221 с. URL: https://essuir.sumdu.edu.ua/bitstream-download/123456789/83976/1/Shkurdoda_physics.pdf;jsessionid=9EFEAB06D00A8694A6FEF100208E2E41

Навчальне видання

О.Й. ДІДОБОРЕЦЬ, О.М. КЛЄЦКОВ, В.М. САХНО
ФІЗИКА. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТА ПРАКТИКА

навчальний посібник
(українською мовою)

Друкується в авторській редакції
Комп'ютерна верстка В.М. Сахно

Підписано до друку 07.05.2025 р. Формат 60х84¹/₁₆. Папір офсетний. Друк
цифровий. Обл.-вид. арк. 14,75. Ум.-друк. арк. 13,7. Наклад 20 прим. Зам. № 22

Видавництво «Журфонд»
49001, Дніпро, вул. Старокозацька, 8.
Свідцтво про внесення до Державного реєстру
ДК № 684 від 21.11.2001 р.

Віддруковано ПП Вахмістров О. Є.
49000, м. Дніпро, вул. Писаржевського, 18

Дідоборець О. Й.

Д44 Фізика. Основи теорії та практика: навчальний посібник / О. Й. Дідо-
борець, О. М. Клецьков, В. М. Сахно; Дніпровський державний аграрно-
економічний університет – Дніпро: Журфонд, 2025. – 234 с.

ISBN 978-966-934-679-7

У даному навчальному посібнику наводяться основні теоретичні відомості, які будуть корисні здобувачам вищої освіти, як для розв'язання конкретних задач з фізики, так і в якості фундаменту для вивчення інших дисциплін інженерно-технічного спрямування. Після розгляду конкретних розділів наведені приклади розв'язку та задачі для самоперевірки, які враховують в собі специфіку конкретних спеціальностей та дозволять здобувачам якісно опанувати будь-яку з тем, що розглядається у даному навчальному посібнику. Також у посібнику наведені найбільш показові лабораторні роботи, виконання яких дозволить здобувачам вищої освіти опанувати загальні правила проведення лабораторних та наукових досліджень.

Навчальний посібник рекомендується як для самостійної роботи так і для аудиторного використання. Призначений для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Харчові технології» спеціальності 181 Харчові технології та ОПП «Агроінженерія» спеціальності 208 Агроінженерія.

Навчальний посібник може бути корисним у процесі викладання та опанування навчальної дисципліни «Фізика» здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти інших ОП / спеціальностей.

УДК 53 (075.8)



дніпро 2025