

**ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**

О. Д. ОНОПРІЄНКО, Б. М. ТОВТ

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник



ДНІПРО 2025

УДК 531 (075.8)

О - 59

Рекомендовано до друку вченою радою Дніпровського державного аграрно-економічного університету (протокол № 6 від 27 березня 2025 р.)

Рецензенти:

Олена СДВИЖКОВА - д. ф.-м. н., професор, завідувачка кафедри прикладної математики
(Національний технічний університет «Дніпровська Політехніка»);

Володимир ЛОБОДА - д. ф.-м. н., професор, завідувач кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки
(Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара);

Ельчин АЛІЄВ – д.т.н., професор кафедри інжинірингу технічних систем
(Дніпровський державний аграрно-економічний університет);

Онопрієнко О. Д. Теоретична механіка: навчальний посібник / О. Д. Онопрієнко, Б. М. Товт; Дніпровський державний аграрно-економічний університет. – Дніпро: ДДАЕУ, 2025. – 256 с.

Даний навчальний посібник містить основні теоретичні відомості з теоретичної механіки, необхідні здобувачам вищої освіти для розв'язання практичних інженерних задач та формування фундаменту для подальшого опанування дисциплін інженерно-технічного спрямування. Посібник охоплює основні розділи теоретичної механіки: статику, кінематику та динаміку, що є базовими для розуміння механічних процесів та функціонування технічних систем в агроінженерії.

Навчальний матеріал представлено у доступній формі, із численними прикладами розв'язку задач та завданнями для самоперевірки, які враховують специфіку ОПП «Агроінженерія» спеціальності 208 «Агроінженерія». Особлива увага приділена аналізу механічних явищ, що мають значення для проектування, експлуатації та обслуговування сільськогосподарських машин та обладнання.

Посібник рекомендується для аудиторного та самостійного вивчення дисципліни «Теоретична механіка» здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 208 «Агроінженерія». Крім того, навчальний посібник може використовуватися у процесі викладання / опанування навчальної дисципліни «Теоретична механіка» здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти інших ОП інженерних спеціальностей ДДАЕУ

УДК 531 (075.8)

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. ЗБІЖНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ	7
1.1. Геометрична форма.....	7
1.2. Аналітична форма	18
РОЗДІЛ 2. ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ.....	21
2.1. Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил.....	21
2.2. Рівновага системи з'єднаних тіл.....	28
РОЗДІЛ 3. ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ.....	31
РОЗДІЛ 4. РОЗРАХУНОК ФЕРМ.....	35
РОЗДІЛ 5. РІВНОВАГА ТІЛ ПРИ НАЯВНОСТІ СИЛ ТЕРТЯ	42
РОЗДІЛ 6. ЦЕНТР ВАГИ.....	45
РОЗДІЛ 7. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ.....	50
7.1. Координатний спосіб задання руху точки	50
7.2. Природний спосіб задання руху точки.....	56
РОЗДІЛ 8. ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ.....	60
РОЗДІЛ 9. ПЛОСКИЙ РУХ.....	67
9.1. Теорема швидкостей	67
9.2. Миттєвий центр швидкостей	72
9.3. Теорема прискорень.....	78
9.4. Миттєвий центр прискорень.....	81
РОЗДІЛ 10. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ	83
РОЗДІЛ 11. ДИНАМІКА ТОЧКИ	96
11.1. Перша задача динаміки точки. Принцип Даламбера	96
11.2. Інтегрування диференціальних рівнянь руху точки	100
11.3. Загальні теореми динаміки точки.....	105
11.3.1. Теорема про зміну кількості руху точки	105
11.3.2. Теорема про зміну кінетичного моменту точки.....	107
11.3.3. Теорема про зміну кінетичної енергії точки	110
РОЗДІЛ 12. ДИНАМІКА СИСТЕМИ.....	113
12.1. Теорема про рух центра мас системи	113
12.2. Теорема про зміну кількості руху механічної системи	118
12.3. Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи	121
12.4. Закон збереження кінетичного моменту системи	124
12.5. Теорема про зміну кінетичної енергії системи	127
ВИСНОВКИ	135
ДОДАТОК А. МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ	136
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК.....	257

ВСТУП

Теоретична механіка — це основа розуміння фізичних явищ і процесів, що відбуваються в природі та в технічних системах. Її закони та принципи є фундаментом для створення, аналізу та вдосконалення інженерних конструкцій і технологій, що є особливо важливим для агроінженерії — галузі, яка займається проектуванням і обслуговуванням техніки та обладнання для сільського господарства.

Агроінженерія — це галузь, де техніка та механічні системи активно використовуються у процесах обробки ґрунту, збирання врожаю, транспортування, обробки й зберігання продукції. Тому майбутнім фахівцям у цій сфері необхідні знання про механічні явища, що дозволяють безпечно та ефективно застосовувати й обслуговувати техніку та машини в різних умовах сільськогосподарської діяльності.

У теоретичній механіці виділяють три ключові розділи: статику, кінематику та динаміку.

- **Статика** вивчає умови рівноваги сил, прикладених до твердого тіла, та методи перетворення цих сил до еквівалентних систем. Це знання необхідне для розрахунку навантажень, проектування стійких конструкцій, що можуть витримати вплив навколишнього середовища й експлуатаційні навантаження.
- **Кінематика** досліджує особливості руху безвідносно до причин, що його викликають, описуючи рухи тіл, зміну їх положень у просторі та часі. Це дозволяє прогнозувати траєкторії й швидкості рухомих частин машин та механізмів, що критично важливо для підвищення їх продуктивності.
- **Динаміка** розглядає взаємозв'язок між силами, що діють на тіла, і рухами, які вони викликають. Вона базується на законах Ньютона і дозволяє розв'язувати задачі, пов'язані із силовими впливами, що призводять до змін швидкості й траєкторії рухомих об'єктів. Це особливо важливо для аналізу роботи машин, що перебувають в русі, таких як трактори, комбайни, транспортні механізми.

Цей навчальний посібник є практичним і теоретичним ресурсом, що містить структурований курс з теоретичної механіки для здобувачів вищої освіти спеціальності 208 "Агроінженерія". Крім того, навчальний посібник може використовуватися у процесі викладання / опанування навчальної дисципліни «Теоретична механіка» здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти інших ОП інженерних спеціальностей ДДАЕУ. Метою посібника є допомогти студентам засвоїти основи теоретичної механіки, навчити застосовувати ці знання для вирішення прикладних задач агроінженерії, таких як проектування механічних систем, розрахунок навантажень і оцінка стійкості обладнання. Окрім теоретичного матеріалу, посібник включає численні приклади, задачі й ілюстрації, що сприяють практичному засвоєнню матеріалу і допомагають розвинути навички аналізу та проектування механічних систем.

Завдяки глибокому засвоєнню матеріалу з цього посібника, здобувачі освіти зможуть формувати міцний фундамент знань з механіки, що стане надійною основою для подальшого професійного зростання в агроінженерії.

РОЗДІЛ 1. ЗБІЖНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

1.1. Геометрична форма

Збіжна система сил – сукупність сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Для рівноваги твердого тіла, до якого прикладена збіжна система сил, необхідно і достатньо, щоб векторна сума цих сил (рівнодіюча) дорівнювала нулю:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{R} = 0.$$

При вирішенні задач на рівновагу твердого тіла, до якого прикладена збіжна плоска система сил, необхідно:

- 1) вибрати тверде тіло, рівновагу якого потрібно розглянути для визначення невідомих величин;
- 2) зобразити активні сили;
- 3) якщо тверде тіло невідільне, то, застосувавши принцип звільнення від в'язей, прикласти до нього відповідні реакції в'язей;
- 4) розглянути рівновагу даного невідільного твердого тіла, як тіла вільного і такого, що знаходиться під дією активних сил і реакцій в'язей;
- 5) побудувати замкнений силовий багатокутник (побудову необхідно починати з сили, відомої як за модулем, так і за величиною);
- 6) вирішивши силовий багатокутник, визначити невідомі величини.

Якщо число активних сил і реакцій в'язей, прикладених до твердого тіла, яке знаходиться у рівновазі, дорівнює трьом, то задача зводиться до побудови і вирішення силового трикутника.

Види опор

Шарнірно-рухома опора (рис. 1.1) – реакція спрямована перпендикулярно до поверхні, якою може рухатися опора.

Шарнірно-нерухома опора (рис. 1.2) – напрямок реакції невідомий, тому при вирішенні задач визначається не сама опорна реакція, а її складові по координатним вісям.

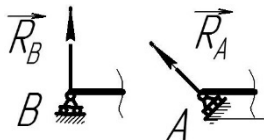


Рис. 1.1. Шарнірно-рухома опора

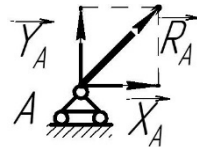


Рис. 1.2. Шарнірно-нерухома опора

Тверда поверхня (рис. 1.3) – реакція спрямована по взаємній нормалі до поверхні контакту.

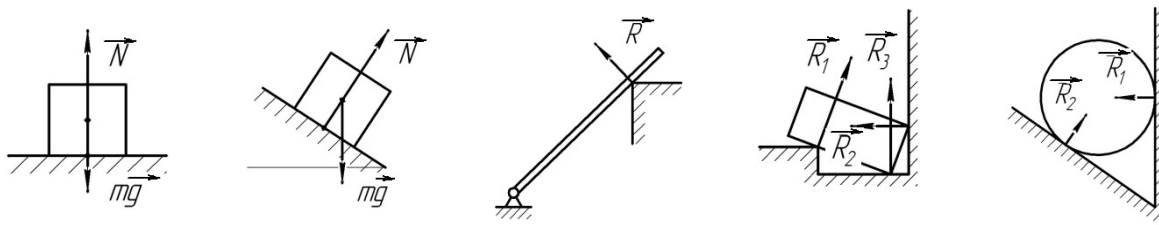


Рис. 1.3. Різновиди твердої поверхні

Нитка, що не розтягується (рис. 1.4) – реакція спрямована вздовж нитки.

Защемлення (рис. 1.5) – окрім двох складових опорної реакції, які були у шарнірно-нерухомій опорі, має місце момент защемлення.

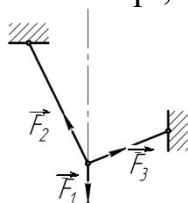


Рис. 1.4. Нитка

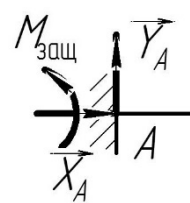


Рис. 1.5. Защемлення

Напрямки $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ і $M_{зощ}$ обираються довільним чином.

Розглянемо застосування геометричної форми розв'язання задач на рівновагу твердого тіла під дією збіжної плоскої системи сил.

Задача 1.1

Однорідна куля ваги $P = 20$ кН спирається у точці A на гладеньку похилу поверхню, а також на виступ B, розташований на одній горизонталі з точкою A (рис. 1.1.6). Визначити сили опорних реакцій похилої поверхні та виступу.

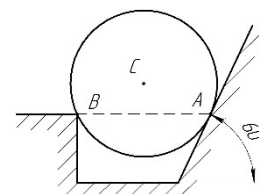


Рис. 1.6. До задачі 1.1

Розв'язання. Розглянемо рівновагу кулі. До кулі прикладена одна задана сила – її вага $\vec{P}$, спрямована вниз. Куля знаходиться у рівновазі при наявності двох в'язей: похилої площини і виступу. Застосовуючи принцип звільнення від в'язей, замінимо дію на кулю подумки відкинутих в'язей відповідними силами реакцій в'язей (рис. 1.7).

Тепер можна розглянути кулю як вільне тверде тіло, що знаходиться у рівновазі під дією плоскої системи трьох сил: $\vec{P}$, $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$, лінії дії яких перетинаються у точці C. Для рівноваги необхідно і достатньо, щоб сума цих трьох сил дорівнювала нулю. Тому сили утворюють замкнений силувий трикутник (рис. 1.8).

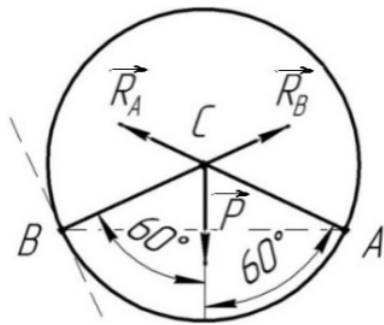


Рис. 1.7. До задачі 1.1

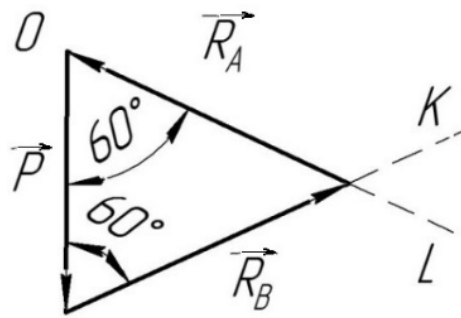


Рис. 1.8. До задачі 1.1

Побудову силового трикутника починаємо з сили $\vec{P}$, відомої як за величиною, так і за напрямком. Із довільної точки O , розташованої не на основному рисунку, проводимо вектор, який дорівнює силі $\vec{P}$. До кінця сили $\vec{P}$ потрібно прикласти початок сили $\vec{R}_A$ чи $\vec{R}_B$. Обираємо у якості наступної сторони силового трикутника силу реакції виступу $\vec{R}_B$. Оскільки напрямок сили $\vec{R}_B$ відомий, то проводимо через точку A пряму AK , паралельну лінії дії сили реакції $\vec{R}_B$. Для подальшої побудови силового трикутника необхідно до кінця $\vec{R}_B$ прикласти початок сили $\vec{R}_A$. Зробити це неможливо, оскільки модуль сили $\vec{R}_B$ невідомий. Проте побудову силового трикутника можна успішно завершити. Слід врахувати, що при рівновазі кулі силовий трикутник має бути замкнений. При цьому кінець вектора сили реакції $\vec{R}_A$ має суміститися з початком вектора сили $\vec{P}$, тобто потрапити до точки O . Тому проводимо через точку O пряму OL , паралельну лінії дії сили $\vec{R}_A$. Точка B пересічення прямих AK і OL визначає розташування третьої вершини B силового трикутника $\triangle OAB$. У побудованому силовому трикутнику має бути єдиний напрямок стрілок, тобто у кожній з вершин трикутника має бути розташований кінець тільки однієї із трьох сил.

Для визначення модулів сил опорних реакцій $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$ залишається розв'язати силовий трикутник $\triangle OAB$. Неважко побачити з рис. 3, що кути, утворені лінією дії сили P з лініями дії сил реакцій $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$ дорівнюють 60° ; таким чином, силовий трикутник рівносторонній і $R_A = R_B = P = 20 \text{ кН}$.

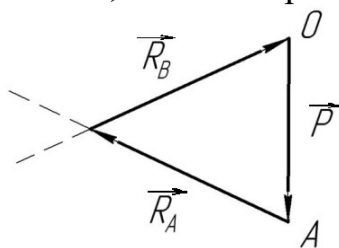


Рис. 1.9. До задачі 1.1

Якщо б при побудові силового трикутника ми до кінця сили $\vec{P}$ приклали початок сили $\vec{R}_A$, то отримали би силовий трикутник $\triangle OAD$ (рис. 1.9). Розв'язання цього силового трикутника привело б до тих самих результатів.

Відповідь: Обидві сили реакції складають 20 кН.

Задача 1.2

Вантаж вагою P утримується у рівновазі на гладенькій нахиленій поверхні завдяки паралельній їй нитці (рис. 1.10). Визначити тиск вантажу на площину і силу реакції нитки, якщо нахилена поверхня утворює кут α з горизонтом. Вантаж вважати матеріальною точкою.

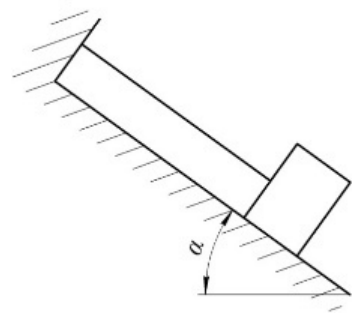


Рис. 1.10. До задачі 1.2

Розв'язання. Розглянемо рівновагу вантажу. Заданою силою є вага вантажу $\vec{P}$, направлена вертикально донизу. На вантаж накладено дві в'язі – нахилена поверхня і нитка. Застосуємо принцип звільнення від в'язів, подумки відкинувши в'язі та замінивши їх дію на вантаж відповідними силами реакцій в'язей. Сила реакції нитки $\vec{T}$ направлена вздовж нитки, сила реакції гладенької нахиленої поверхні $\vec{R}$ направлена по нормалі до площини (рис. 1.11).

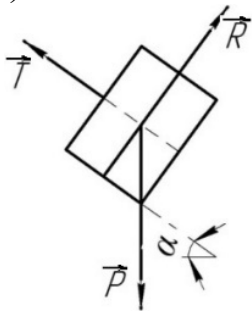


Рис. 1.11. До задачі 1.2

Тепер можна розглянути вантаж як вільне тверде тіло, до якого прикладені три сили: $\vec{P}$, $\vec{T}$ і $\vec{R}$, лінії дії яких перетинаються у одній точці. Для рівноваги необхідно і достатньо, щоб сума цих сил дорівнювала нулю, тобто силовий трикутник був замкнений (рис. 1.12).

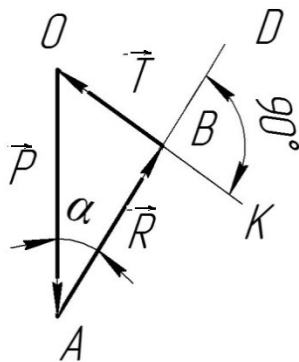


Рис. 1.12. До задачі 1.2

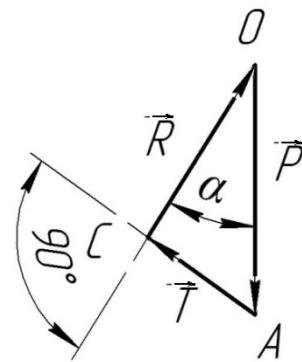


Рис. 1.1.13. До задачі 1.2

Із трикутника ΔOAB знаходимо: $R = P \cos \alpha$, $T = P \sin \alpha$.

При побудові силового трикутника можна було скористатися іншою послідовністю зображення сил, в результаті якої було б отримано силовий трикутник ΔOAC (рис. 1.13), такий самий як і ΔOAB .

Відповідь: Тиск вантажу на площину $R = P \cos \alpha$, сила реакції нитки $T = P \sin \alpha$.

Задача 1.3

Два абсолютно жорстких стрижні AB і AC з'єднані шарніром у точці A і прикріплені до підлоги шарнірами B і C , утворюючи з підлогою відповідно кути 45° і 60° (рис. 1.14). До валика шарніра A підвішений на нерозтяжній нитці вантаж D , вага якого $P = 100$ кН. Визначити зусилля, які виникають у стрижнях AB і AC . Вагою стрижнів знехтувати.

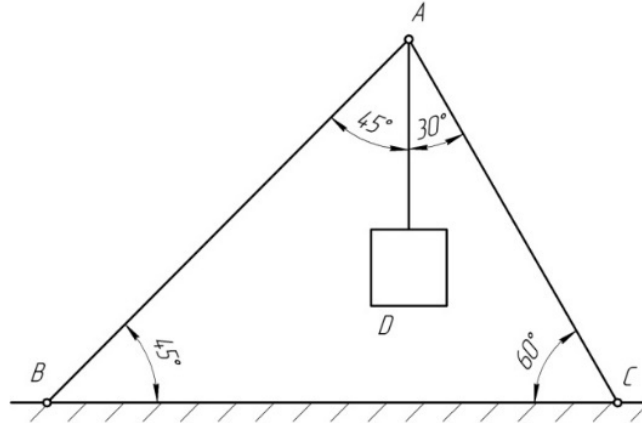


Рис. 1.14. До задачі 1.3

Розв'язання. Для визначення зусиль у стрижнях AB і AC слід розглянути рівновагу шарніра A . Проте безпосередньо приступити до дослідження рівноваги вузла A неможливо, оскільки він знаходиться у рівновазі під дією трьох невідомих сил: сил реакцій стрижнів AB і AC , і реакції нитки AD . Тому для визначення сили реакції нитки попередньо розглянемо рівновагу вантажу D (рис. 1.15).

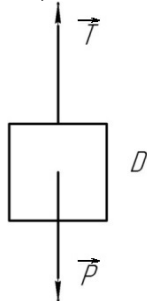


Рис. 1.15. До задачі 1.3

Враховуючи умову рівноваги вантажу, отримаємо, що $T = P = 100$ кН.

Тепер, коли одна із трьох сил, прикладених до шарніру A , відома, можна вивчити рівновагу шарніра A . До шарніра A прикладена одна відома сила – реакція нитки T , направлена по вертикалі донизу (з принципу рівності дії та протидії: T). Сили реакцій T_B і T_C стрижнів AB і AC направлені вздовж стрижнів. На рис. 1.16 ці три сили зображені прикладеними у шарнірі A .

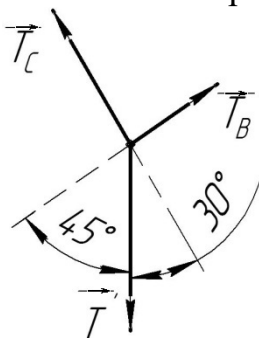


Рис. 1.16. До задачі 1.3

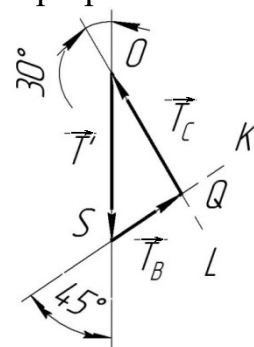


Рис. 1.17. До задачі 1.3

При рівновазі шарніра A рівнодіюча цих сил має бути нульовою, отже сили $\vec{T}'$, $\vec{T}_B$ і $\vec{T}_C$ утворюють замкнений силовий трикутник (рис. 1.17).

Переходячи до розв'язання силового трикутника, помітимо, що $\angle SOQ = \angle DAC = 30^\circ$ і $\angle OSQ = \angle BAD = 45^\circ$, як кути з відповідно паралельними сторонами. Звідси $\angle SQO = 105^\circ$.

Застосувавши теорему синусів, отримаємо:

$$\frac{T_B}{T'} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \text{ і } \frac{T_C}{T'} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ},$$

звідки

$$T_B = T' \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}, \quad T_C = T' \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}.$$

Підставивши чисельні значення, знаходимо:

$$T_B = 51,8 \text{ кН}, \quad T_C = 73,2 \text{ кН}.$$

Відповідь: зусилля у стержні AB складає 51,8 кН, у стержні AC – 73,2 кН.

Задача 1.4

На рис. 1.18 зображено механізм антипаралелограма $ABCD$, який складається із абсолютно жорстких стрижнів AB , BC і CD , шарнірно з'єднаних між собою у точках B і C , і прикріплених шарнірами A і D до нерухомої ланки AD ; $AD = BC$, $AB = CD$. До валика шарніра C прикладена по горизонталі наліво сила $F_C = 10$ кН.

Визначити величину сили $\vec{F}_B$, прикладеної у шарнірі B і спрямованої по вертикалі донизу, якщо механізм знаходиться у рівновазі у положенні, вказаному на рис. 1.18, тобто при $\angle BAD = 30^\circ$ і $\angle ADC = 90^\circ$. Вагою стрижнів знехтувати.

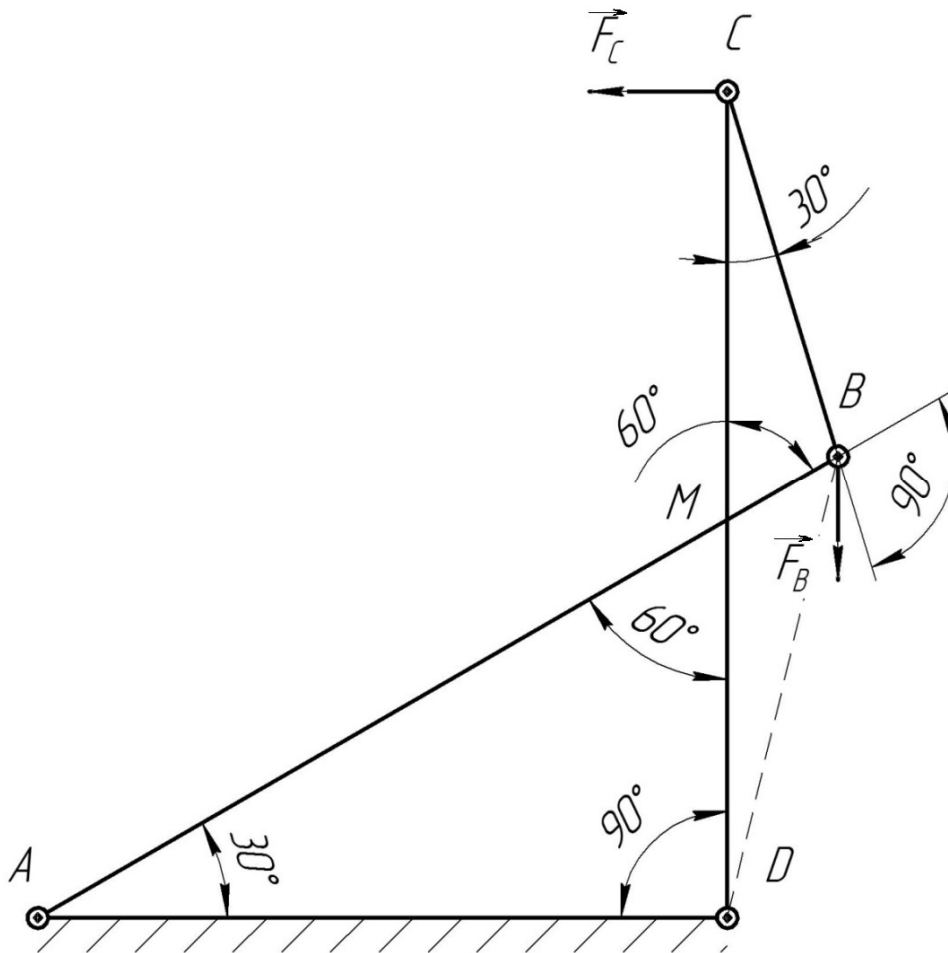


Рис. 1.18. До задачі 1.4

Розв'язання. Для визначення сили $\vec{F}_B$ необхідно розглянути рівновагу шарніру B . Проте безпосередньо це виконати неможливо, оскільки жодна з трьох сил, прикладених до шарніру B (сила $\vec{F}_B$ і сили реакцій стрижнів AB і BC), не відома за величиною. Тому для визначення величини сили реакції стрижня BC попередньо розглянемо рівновагу шарніру C (рис. 1.19). До шарніру C прикладена задана сила $\vec{F}_C$ і сили реакції стрижнів CD і CB . Оскільки стрижні з'єднані у своїх кінцях шарнірами, то сили реакції направлені вздовж відповідних стрижнів.

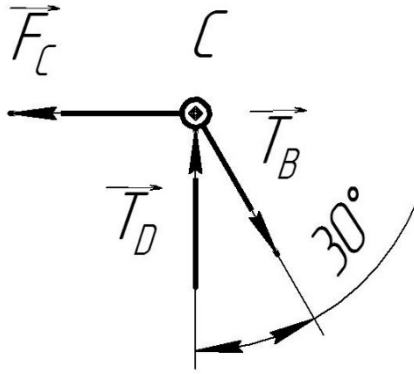


Рис. 1.19. До задачі 1.4

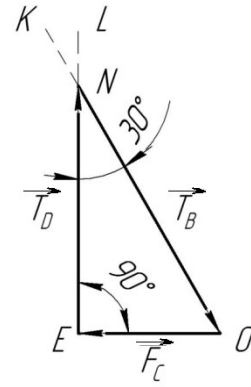


Рис. 1.20. До задачі 1.4

На рис. 1.1.20 зображено силовий трикутник для вузла C .

Звернувшись до силового трикутника $\triangle OEN$, неважко помітити, що $\angle ENO = \angle MCB = 30^\circ$. Оскільки $\vec{F}_C \perp \vec{T}_D$, то отримаємо

$$T_B = \frac{F_C}{\sin 30^\circ} = 2F_C.$$

Тепер можемо визначити шукану силу F_B , розглянувши рівновагу шарніра B (рис. 1.21).

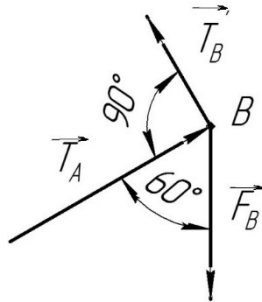


Рис. 1.21. До задачі 1.4

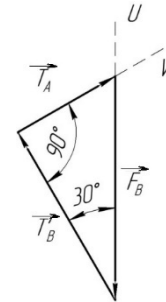


Рис. 1.22. До задачі 1.4

Побудуємо силовий трикутник для вузла B (рис. 1.22).

Помітивши, що $\angle RPS = \angle BAD = 30^\circ$, як кути із взаємно перпендикулярними сторонами, знаходимо з силового трикутника $\triangle PRS$:

$$F_B = \frac{T'_B}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{3}\sqrt{3}T_B.$$

І насамкінець отримуємо:

$$F_B = \frac{4}{3}\sqrt{3}F_C = 23,1 \text{ кН.}$$

Відповідь: шукана сила F_B складає 23,1 кН.

Теорема про три непаралельні сили. Якщо тверде тіло знаходиться у рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать у одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються у одній точці.

Варто відмітити, що перетин ліній дії трьох непаралельних сил у одній точці є лише необхідною умовою рівноваги твердого тіла. Дана умова не є достатньою, оскільки рівнодіюча цих сил може не дорівнювати нулю. Отже, достатньою умовою є наявність замкненого силового трикутника при одночасному перетині ліній дії трьох сил у одній точці.

Розглянемо застосування теореми про три непаралельні сили для розв'язання задач на рівновагу твердого тіла під дією збіжної системи сил.

Задача 1.5

Однорідна паличка ваги P і довжини $2a$ спирається кінцем A на гладеньку внутрішню поверхню полу сферичної чаші радіуса r . Проміжною точкою B паличка спирається на ребро чаші. Визначити кут α , утворений паличкою з горизонтом у положенні рівноваги, і сили опорних реакцій у точках A і B . C – центр тяжіння палички, M – центр сфери, половина якої утворює чашу (рис. 1.23).

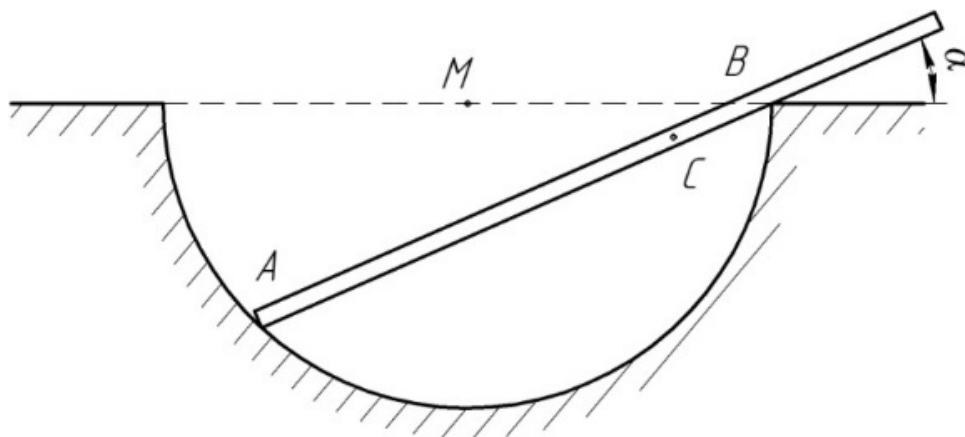


Рис. 1.23. До задачі 1.5

Розв'язання. Якщо опустити паличку кінцем A у напівсферичну чашу, то вона займе у ній положення рівноваги за деякого фіксованого значення кута α , утвореного паличкою з горизонтом. При цьому кут α залежить від довжини палички $2a$ і радіуса чаші r .

У випадку рівноваги кут α має бути таким, щоб лінії дії трьох сил, прикладених до палички – ваги $\vec{P}$ і сил реакцій $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$, – перетинались в одній точці. $\vec{P}$ – вертикально униз, $\vec{R}_B \perp AB$ точка перетину їх ліній дії – точка O . Тому реакція чаші у точці A буде проходити лінією AO . Напрямки сил наведені на рис. 1.24.

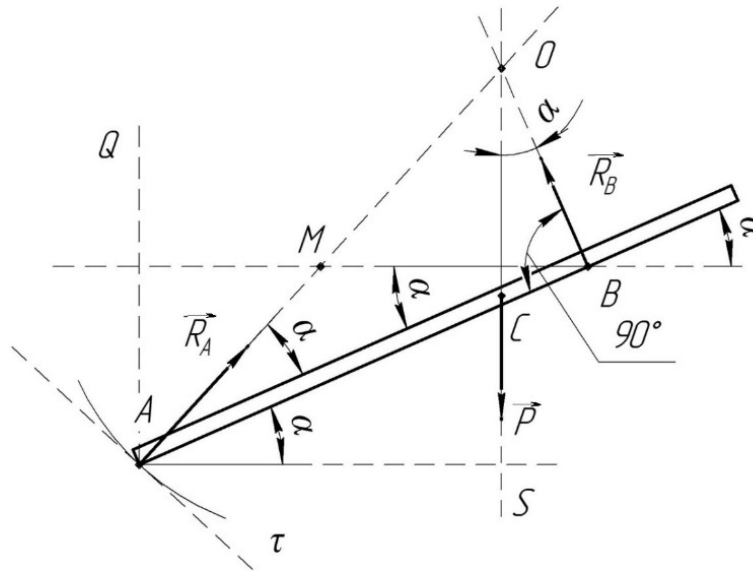


Рис. 1.24. До задачі 1.5

У випадку рівноваги лінії дії трьох сил $\vec{P}$, $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$ перетинаються в одній точці O . Цієї побудови виявляється достатньо для визначення значення кута α .

Розглядаючи рівнобедрений трикутник $\triangle AMB$, маємо: $AM = MB = r$, $\angle BAM = \angle ABM$. Оскільки $\angle MBA = \angle BAS = \alpha$, то $\angle BAM = \angle ABM = \alpha$. Кут $\angle ABO$, вписаний до кола радіуса r , є за побудовою прямим. Він має спиратися на діаметр кола, тому $AO = 2r$. Із трикутника $\triangle ACS$ маємо $AS = AC \cos \alpha = a \cos \alpha$ (оскільки центр тяжіння однорідної палички розташований посередині, то $AC = a$). Отже:

$$AS = 2r \cos 2\alpha = a \cos \alpha.$$

Використавши тригонометричні перетворення, матимемо

$$2r(2\cos^2 \alpha - 1) = a \cos \alpha$$

або

$$4r^2 \cos^2 \alpha - a \cos \alpha - 2r = 0.$$

Розв'язавши квадратне рівняння, знайдемо:

$$\cos \alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r}.$$

Оскільки $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $0 < \cos \alpha < 1$. Тому отримаємо:

$$\cos \alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r}.$$

Для визначення сил опорних реакцій $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$ побудуємо замкнений силовий трикутник (рис. 1.25).

1.2. Аналітична форма

Ортогональна проекція сили на вісь, подібно проекції будь-якого вектора на вісь, дорівнює добутку модуля сили на косинус кута, утвореного додатнім напрямком вісі проекцій та напрямком проектуємої сили (рис. 1.26):

$$F_x = \text{відрізок } ab = F \cos(\widehat{x, \vec{F}}).$$

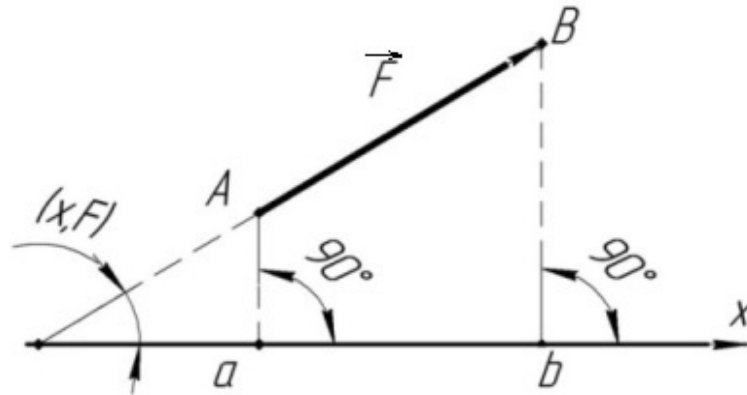


Рис. 1.26. Проекція сили

Для рівноваги твердого тіла, яке знаходиться під дією збіжної плоскої системи сил, необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил системи на вісі декартових координат дорівнювали нулю.

Рівняння рівноваги твердого тіла при наявності плоскої системи збіжних сил:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \end{cases}$$

Задача називається статично визначуваною, якщо число невідомих дорівнює числу незалежних рівнянь рівноваги. В іншому випадку задача є статично невизначуваною і лише за допомогою рівнянь статички задача не може бути вирішена.

Задача на рівновагу твердого тіла під дією збіжної плоскої системи сил є статично визначуваною, якщо число алгебраїчних невідомих не більше двох.

При вирішенні задач на рівновагу твердого тіла, до якого прикладена збіжна плоска система сил, необхідно:

- 1) вибрати тверде тіло, рівновагу якого потрібно розглянути для визначення невідомих величин;
- 2) зобразити активні сили;
- 3) якщо тверде тіло невідільне, то, застосувавши принцип звільнення від в'язей, прикласти до нього відповідні реакції в'язей;
- 4) розглянути рівновагу даного невідільного твердого тіла, як тіла вільного і такого, що знаходиться під дією активних сил і реакцій в'язей;

- 5) пересвідчитися у тому, що дана задача є статично визначуваною, тобто число алгебраїчних невідомих не більше двох;
- 6) обрати у площині дії сил систему осей декартових координат;
- 7) скласти рівняння рівноваги твердого тіла у проекціях на вісі декартових координат;
- 8) розв'язати систему складених рівнянь рівноваги і визначити невідомі величини; якщо величина деякої з невідомих сил буде від'ємною, то це вказує на те, що напрямок сили протилежний тому, який вказаний на рисунку.

Обираючи вісі декартових координат доцільно їх направляти таким чином, щоб вони були паралельні або перпендикулярні більшості сил.

Розглянемо застосування аналітичної форми розв'язання задач на рівновагу твердого тіла під дією збіжної плоскої системи сил.

Задача 1.6

Вирішити задачу 3 аналітичним способом (рис. 1.27).

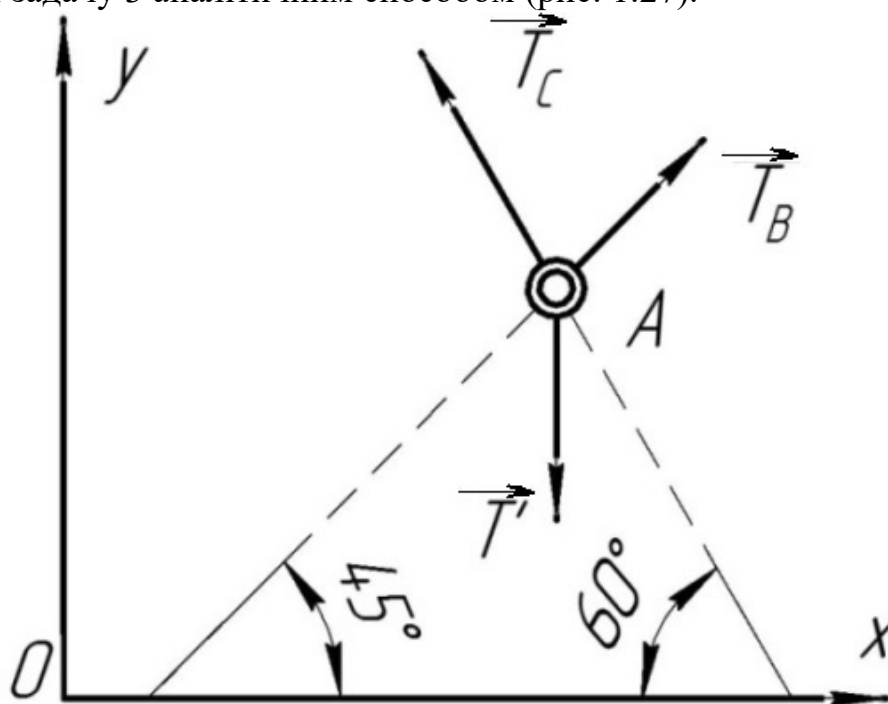


Рис. 1.27. До задачі 1.6

Розв'язання. Скористаємося зображенням сил $\vec{T}'$, $\vec{T}_C$ і $\vec{T}_B$, яке дано на рис. 1.27. Направимо вісь x по горизонталі направо, а вісь y по вертикалі догори. Складемо рівняння рівноваги шарніру A у проекціях на вісі x і y :

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= T_B \cos 45^\circ - T_C \cos 60^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} &= T_B \cos 45^\circ + T_C \cos 30^\circ - T' = 0.\end{aligned}$$

Вирішивши цю систему рівнянь, знайдемо: $T_C = 73,2$ кг, $T_B = 51,8$ кг.

Як видно, незалежно від способу розв'язування, результат однаковий.

Відповідь: зусилля у стержні AB складає 51,8 кН, у стержні AC – 73,2 кН.

Задача 1.7

На рис. 1.28 зображені чотири сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ і $\vec{F}_4$, прикладені до твердого тіла у точці O і такі, що лежать у одній площині. Визначити модуль і напрямок сили $\vec{F}_5$, яку слід прикласти у точці O для того, щоб тверде тіло знаходилося у рівновазі. Дано: $F_1 = 2$ Н, $F_2 = F_3 = 4$ Н, $F_4 = 6$ Н.

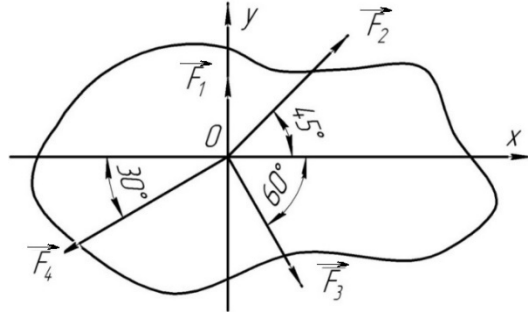


Рис. 1.28. До задачі 1.7

Розв'язання. Для вирішення задачі методом проекцій направимо вісі декартових координат: вісь x – по горизонталі направо, вісь y – по вертикалі догори.

Умови рівноваги твердого тіла у проекціях на вісі x і y мають вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x} = 0, \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y} = 0, \end{cases}$$

де F_{5x} і F_{5y} – проекції невідомої сили $\vec{F}_5$ на вісі x і y .

Оскільки число невідомих дорівнює числу рівнянь, то задача є статично визначеною.

Обчислимо проекції чотирьох заданих сил на вісі x і y :

$$F_{1x} = 0, \quad F_{1y} = F_1 = 2,$$

$$F_{2x} = F_2 \cos 45^\circ = 2\sqrt{2}, \quad F_{2y} = F_2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2},$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 60^\circ = 2, \quad F_{3y} = -F_3 \sin 30^\circ = -2\sqrt{3},$$

$$F_{4x} = -F_4 \cos 30^\circ = -3\sqrt{3}, \quad F_{4y} = -F_4 \sin 60^\circ = -3.$$

Після підстановки цих значень до рівнянь рівноваги, отримаємо:

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} + 2 - 3\sqrt{3} + F_{5x} = 0, \\ 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3 + F_{5y} = 0. \end{cases}$$

Із системи рівнянь знаходимо: $F_{5x} = 0,37$, $F_{5y} = 1,64$.

Модуль шуканої сили $\vec{F}_5$ дорівнює:

$$F_5 = \sqrt{F_{5x}^2 + F_{5y}^2} = 1,68 \text{ Н.}$$

Обчислимо направляючі косинуси:

$$\cos(\widehat{x, \vec{F}_5}) = \cos\alpha = \frac{F_{5x}}{F_5} = 0,22, \quad \cos(\widehat{y, \vec{F}_5}) = \cos\beta = \frac{F_{5y}}{F_5} = 0,98,$$

звідки

$$\alpha \approx 77^\circ, \quad \beta \approx 13^\circ.$$

Відповідь: модуль сили F_5 складає 1,68 Н, кут $\alpha = 77^\circ$.

РОЗДІЛ 2. ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

2.1. Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил

Момент сили $\vec{F}$ відносно точки O , який записується у вигляді $m_O(\vec{F})$, дорівнює за абсолютною величиною добутку модуля сили $\vec{F}$ і відстані h від точки O до лінії дії сили $\vec{F}$, яка називається **плечем**.

$$m_O(\vec{F}) = Fh.$$

Теорема Варіньйона для збіжної системи сил: момент рівнодіючої $\vec{R}$ збіжної системи сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ відносно точки дорівнює сумі моментів складових сил відносно тієї ж точки:

$$m_O(\vec{R}) = m_O(\vec{F}_1) + m_O(\vec{F}_2) + \dots + m_O(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n m_O(\vec{F}_k).$$

тут

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Теорема Варіньйона для довільної плоскої системи сил: якщо система сил приводиться до рівнодіючої, то момент рівнодіючої відносно довільної точки дорівнює сумі моментів складових сил відносно тієї ж точки:

$$m_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n m_O(\vec{F}_k).$$

Для рівноваги твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій усіх сил на довільно обрані вісі декартових координат і сума моментів цих сил відносно довільно обраної точки дорівнювала нулю.

Можна скласти одне рівняння проєкцій, але при цьому скласти два рівняння моментів відносно двох довільних точок, при цьому слід мати на увазі, що вісь, відносно якої складається рівняння проєкцій, не повинна бути розташованою перпендикулярно до прямої, яка проходить через дві точки, відносно яких складено рівняння моментів.

Також можна скласти три рівняння моментів відносно трьох довільно обраних точок, які не лежать на одній прямій.

У випадку довільної плоскої системи сил задача статично визначувана, якщо число алгебраїчних невідомих не більше трьох.

Рівняння рівноваги твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_O(\vec{F}_k) = 0.$$

або

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\vec{F}_k) = 0.$$

або

$$\sum_{k=1}^n m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_C(\vec{F}_k) = 0.$$

При вирішенні задач на рівновагу твердого тіла, до якого прикладена довільна плоска система сил, необхідно:

- 1) вибрати тверде тіло, рівновагу якого потрібно розглянути для визначення невідомих величин;
- 2) зобразити активні сили;
- 3) якщо тверде тіло невільне, то, застосувавши принцип звільнення від в'язей, прикласти до нього відповідні реакції в'язей;
- 4) розглянути рівновагу даного невільного твердого тіла, як тіла вільного і такого, що знаходиться під дією активних сил і реакцій в'язей;
- 5) пересвідчитися у тому, що дана задача є статично визначуваною, тобто число алгебраїчних невідомих не більше трьох;
- 6) обрати напрямки вісей декартових координат і точку (або точки), відносно якої передбачається складання рівняння моментів;
- 7) скласти рівняння рівноваги твердого тіла;
- 8) розв'язати систему отриманих рівнянь рівноваги і визначити невідомі величини.
- 9) перевірити розв'язання, склавши рівняння моментів відносно довільної точки.

Слід прагнути отримати такі рівняння рівноваги, до кожного з яких входила б одна невідома величина. У такому випадку кожен з невідомих величин можна безпосередньо визначити з відповідних рівнянь. Для цього вісі координат доцільно направляти так, щоб деякі невідомі сили були перпендикулярні до них. У такому разі величини цих невідомих сил у відповідне рівняння проєкцій не увійдуть. Точку, відносно якої потрібно скласти рівняння моментів, слід обрати у точці перетину ліній дії двох невідомих сил. Це дає можливість безпосередньо визначити з відповідних рівнянь моментів третю невідому силу.

Якщо напрямок будь-якої реакції в'язі невідомий, то слід замінити її двома складовими, направивши їх паралельно вісям координат у бік додатного відліку.

Розглянемо розв'язання задач на рівновагу твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил.

Задача 2.1

Горизонтальна однорідна балка AB (рис. 2.1) довжиною $l = 4$ м і вагою $P = 1$ кН, прикріплена шарніром A до стіни, утримується у рівновазі тросом DE , розташованим під кутом 45° до горизонту; $DB = 1$ м. До вільного кінця балки B прикладена зосереджена сила $F = 2$ кН, яка утворює кут 60° з горизонтом. Визначити тиск балки на шарнір A і натяг троса DE .

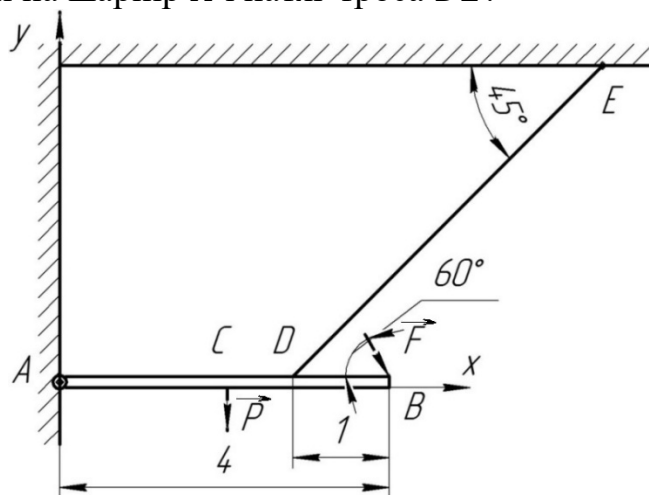


Рис. 2.1. До задачі 2.1.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки AB (рис. 2.2), на яку діють дві задані сили: вага балки $\vec{P}$, прикладена у її середині ($AC = CB = 2$ м) і зосереджена сила $\vec{F}$, прикладена у кінці балки B .

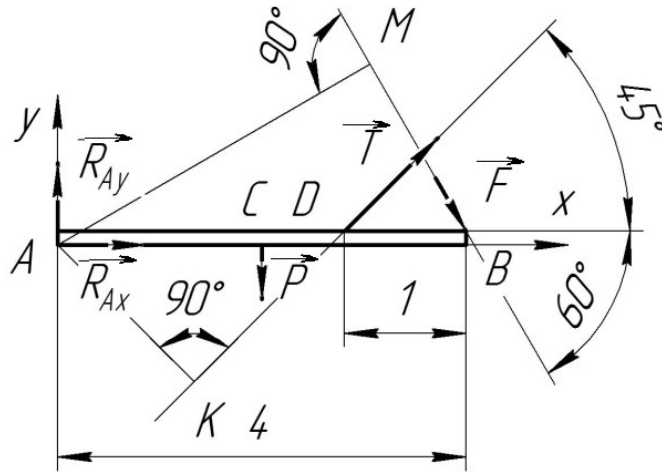


Рис. 2.2. До задачі 2.1

На балку накладені дві в'язі: шарнір A і трос DE . Подумки обірвавши трос DE , замінюємо дію троса на балку силою реакції троса $\vec{T}$, направленою від точки D вбік обриву. Напрямок сили реакції шарніра A попередньо вказати неможливо, тому зобразимо дві взаємно перпендикулярні складові цієї сили реакції $\vec{R}_{Ax}$ і $\vec{R}_{Ay}$.

Тепер можна розглянути балку як вільне тверде тіло, що знаходиться у рівновазі під дією п'яти сил, причому лише величини трьох сил невідомі. Тобто задача є статично визначеною.

Складемо рівняння рівноваги балки у проекціях на вісі x і y , а також рівняння моментів відносно точки A .

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = R_{Ax} + T \cos 45^\circ + F \cos 60^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} = R_{Ay} - P + T \cos 45^\circ - F \cos 30^\circ = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = T \cdot AK - P \cdot AC - F \cdot AM = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо

$$T = P \cdot \frac{AC}{AK} + F \frac{AM}{AK} = 4,2 \text{ кН.}$$

Підставивши це значення до перших двох рівнянь, знайдемо:

$$R_{Ax} = -3,96 \text{ кН}, R_{Ay} = -0,23 \text{ кН.}$$

Шукані тиски балки на в'язі направлені протилежно відповідним силам реакцій в'язі і дорівнюють їм за модулем.

Перевірка:

$$\begin{aligned} \sum m_D(\vec{F}_k) &= -R_{Ay} \cdot AD + P \cdot CD - F \sin 60^\circ \cdot BD, \\ \sum m_D(\vec{F}_k) &= -(-0,23) \cdot 3 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \approx 0. \end{aligned}$$

Відповідь: Натяг троса DE становить 4,2 кН, складові тиску балки на шарнір A складають $R_{Ax} = -3,96 \text{ кН}$ і $R_{Ay} = -0,23 \text{ кН}$.

Задача 2.2

На рис. 2.1.3 зображено симетричну стропильну ферму довжиною $l = 10\text{ м}$, вагою $P = 12\text{ кН}$, яка стоїть на двох опорах, причому ліва опора A розташована на котках, які можуть пересуватися вздовж горизонтальної площини. Перпендикулярно до AE у точці D , на відстані $AD = 2\text{ м}$, прикладена зосереджена сила $F = 4\text{ кН}$, $\angle EAB = 30^\circ$. Визначити сили опорних реакцій у A і B .

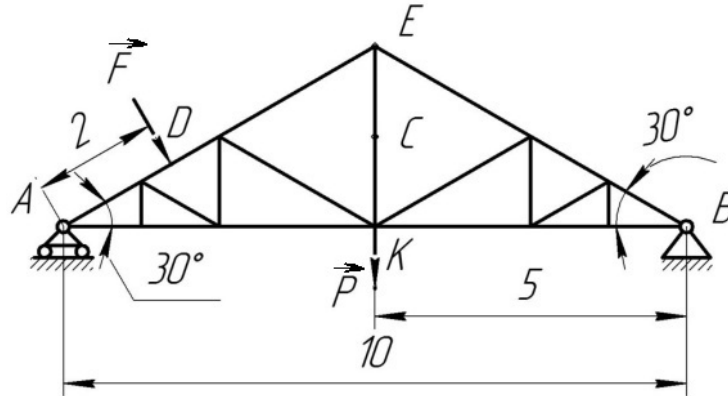


Рис. 2.3. До задачі 2.2

Розв'язання. У точці A маємо шарнірно-рухому підпору, реакція якої $\vec{R}_A$ спрямована перпендикулярно поверхні кочення котків. У точці B – шарнірно-нерухома підпора, реакцію якої показуємо двома взаємноперпендикулярними складовими.

Розглянемо рівновагу ферми (рис. 2.4) під дією двох заданих сил: ваги ферми $\vec{P}$ і зосередженої сили $\vec{F}$ і трьох невідомих сил: опорної реакції $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_{Bx}$ та $\vec{R}_{By}$. Задача є статично визначеною. Запишемо рівняння рівноваги ферми у проекціях на вісі x і y та рівняння моментів відносно точки A .

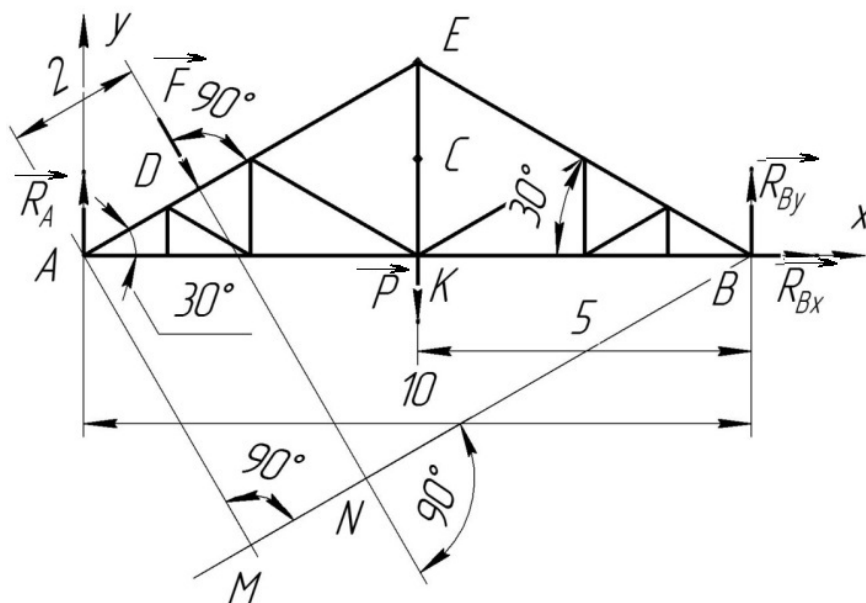


Рис. 2.4. До задачі 2.2

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = F \cos 60^\circ + R_{Bx} = 0, \\ \sum F_{ky} = R_A + R_{By} - F \cos 30^\circ - P = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = -F \cdot AD - P \cdot AK + R_{By} \cdot AB = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо:

$$R_{By} = F \frac{AD}{AB} + P \frac{AK}{AB} = 6,8 \text{ кН.}$$

Підставив це значення до двох перших рівнянь, знайдемо:

$$R_A = 8,66 \text{ кН}, R_{Bx} = -F \cos 60^\circ = -2 \text{ кН.}$$

Виконаємо перевірку:

$$\begin{aligned} \sum m_E(\vec{F}_k) &= -R_A \cdot AK + F \cdot DE + R_{Bx} \cdot EK + R_{By} \cdot BK, \\ \sum m_E(\vec{F}_k) &= -8,66 \cdot 5 + 4 \cdot 3,77 + (-2) \cdot 2,88 + 6,8 \cdot 5 \approx 0. \end{aligned}$$

Відповідь: сили опорних реакцій складають $R_A = 8,66 \text{ кН}$, $R_{Bx} = -2 \text{ кН}$, $R_{By} = 6,8 \text{ кН}$.

Задача 2.3

Однорідна балка AB довжиною $l = 4 \text{ м}$ і вагою $P = 40 \text{ кН}$ упирається кінцем A у виступ підлоги, а проміжною точкою D опирається на ребро ступені (Рис. 2.5). Балка утворює кут 30° з горизонтом, $AM = 2 \text{ м}$. Визначити сили опорних реакцій у точках A і D .

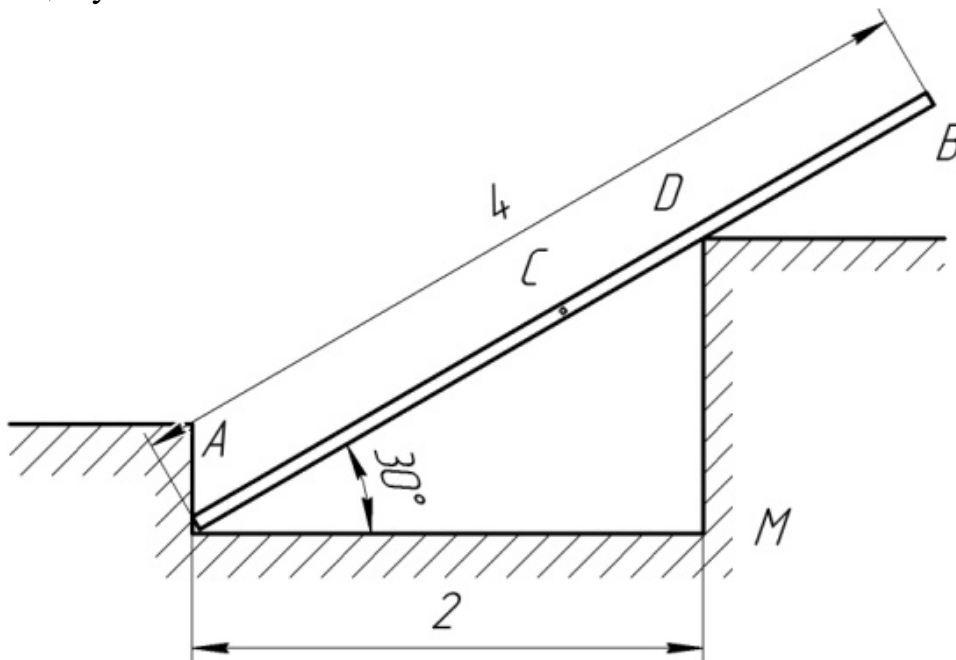


Рис. 2.5. До задачі 2.3

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки AB (рис. 2.6). Єдиною заданою силою є вага балки $\vec{P}$, прикладена у середині балки C .

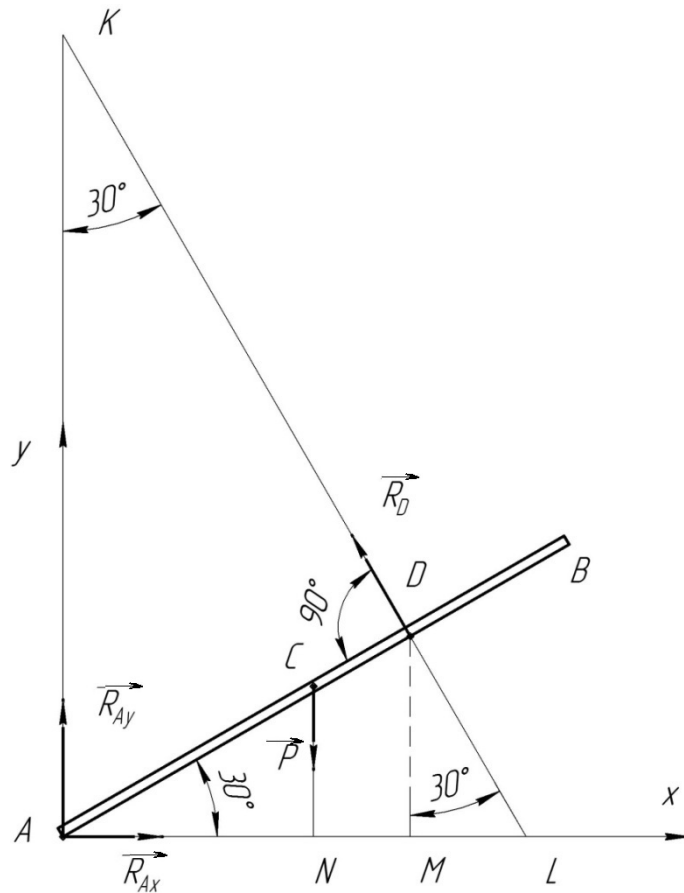


Рис. 2.6. До задачі 2.3

Сила опорної реакції $\vec{R}_D$ направлена перпендикулярно до балки AB . Попередньо вказати напрямок сили реакції у точці A не можна. Тому зобразимо у точці A дві взаємно перпендикулярні складові сили реакції $\vec{R}_{Ax}$ і $\vec{R}_{Ay}$. Задача є статично визначеною, оскільки число невідомих дорівнює трьом. Складемо систему рівнянь рівноваги, яка для даної задачі матиме вигляд:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = R_{Ax} - R_D \cos 60^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} = R_{Ay} - P + R_D \cos 30^\circ = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = R_D \cdot AD - P \cdot AN = 0. \end{cases}$$

$$AD = \frac{2}{\cos 30^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ м}, \quad AN = 2 \cos 30^\circ = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ м}.$$

З останнього рівняння системи знаходимо $R_D = \frac{3}{4}P = 30$ кН. Підставивши це значення до перших двох рівнянь, отримаємо: $R_{Ax} = \frac{3}{8}P = 15$ кН і $R_{Ay} = 0,35P = 14$ кН.

Перевірка:

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = R_{Ax} \cdot CN - R_{Ay} \cdot AN + R_D \cdot CD,$$
$$\sum m_C(\vec{F}_k) = 15 \cdot 1 - 14 \cdot 1,73 + 30 \cdot 0,31 \approx 0.$$

Відповідь: сили опорних реакцій становлять $R_D = 30$ кН, $R_{Ax} = 15$ кН, $R_{Ay} = 14$ кН.

2.2. Рівновага системи з'єднаних тіл

У статиці твердого тіла поряд із рівновагою одного тіла розглядають зчленовані системи тіл, тобто сукупність твердих тіл, які дотикаються один одного своїми поверхнями або з'єднані один з одним шарнірами, гнучкими нитками або стрижнями.

Важливою задачею статики системи твердих тіл є визначення реакцій в'язей. Для цього основним способом є розчленування, при якому поряд з рівновагою усієї системи тіл розглядається рівновага окремих тіл (або груп тіл системи). При цьому усі інші тіла системи і відповідні в'язі подумки відкидаються, а їх дія на тіло, рівновага якого розглядається, замінюється реакціями.

Варто відмітити, що при розгляді рівноваги усієї системи твердих тіл реакції в'язей між тілами, що входять до системи, не повинні враховуватися; вони не входять до рівнянь рівноваги, як внутрішні сили, такі що взаємно врівноважуються.

При розв'язанні задач на рівновагу системи тіл зазвичай недостатньо розглянути рівновагу усієї системи в цілому. Число невідомих може перевищувати число рівнянь рівноваги, які можна скласти. Проте це не робить систему статично невизначуваною, оскільки якщо розділити систему на окремі тверді тіла і скласти рівняння рівноваги для кожного з них, то число нових невідомих може бути менше за число нових рівнянь рівноваги.

При вирішенні задач на рівновагу твердих тіл необхідно:

- 1) вибрати тверде тіло, рівновагу якого потрібно розглянути для визначення невідомих величин;
- 2) зобразити активні сили;
- 3) якщо тверде тіло невіільне, то, застосувавши принцип звільнення від в'язей, прикласти до нього відповідні реакції в'язей;
- 4) розглянути рівновагу даного невіільного твердого тіла, як тіла вільного і такого, що знаходиться під дією активних сил і реакцій в'язей;
- 5) зіставити число невідомих величин і число незалежних рівнянь рівноваги; ці числа мають бути рівними, якщо задача статично визначувана;
- 6) обрати найбільш зручні системи координат; при цьому для кожного тіла і для усієї системи тіл може бути обрана своя система координат;
- 7) скласти рівняння рівноваги для кожного твердого тіла або для кожної системи твердих тіл, рівновага яких досліджується;
- 8) вирішити систему усіх рівнянь рівноваги.

9) перевірити розв'язання, склавши рівняння моментів відносно довільної точки.

Якщо систему твердих тіл розділяють на окремі тіла, то при заміні їх взаємодії реакціями в'язей слід ввести реакції, прикладені до одного тіла, і на основі третього закону Ньютона обрати реакції, діючі на друге тіло, рівними за модулем і спрямованими прямо протилежно.

Якщо згідно умови задачі потрібно визначити лише деякі невідомі величини, то слід скласти лише ті з рівнянь рівноваги, які необхідні для отримання відповіді.

Розглянемо розв'язання задач на рівновагу системи твердих тіл під дією довільної плоскої системи сил.

Задача 2.4

Визначити реакції опор A , B і C , а також шарніра D складеної балки, зображеної на рис. 2.7 разом із навантаженнями.

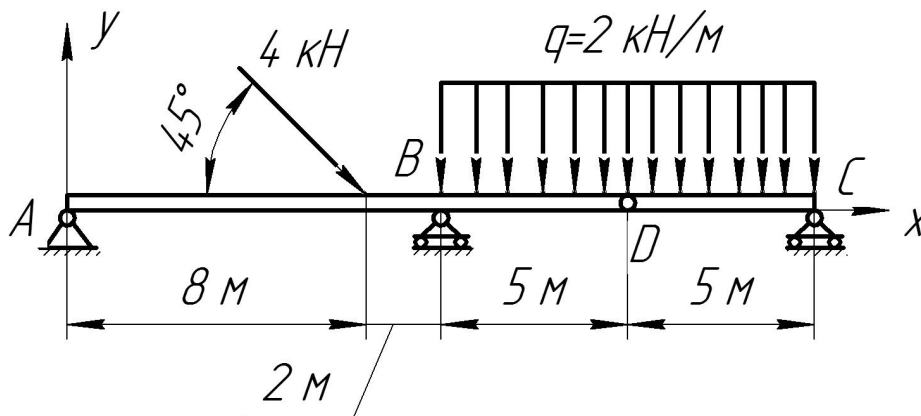


Рис. 2.7. До задачі 2.4

Розв'язання. Скористаємося принципом звільнення від в'язей і відкинемо опори, замінивши їх дію на складену балку опорними реакціями (рис. 2.8).

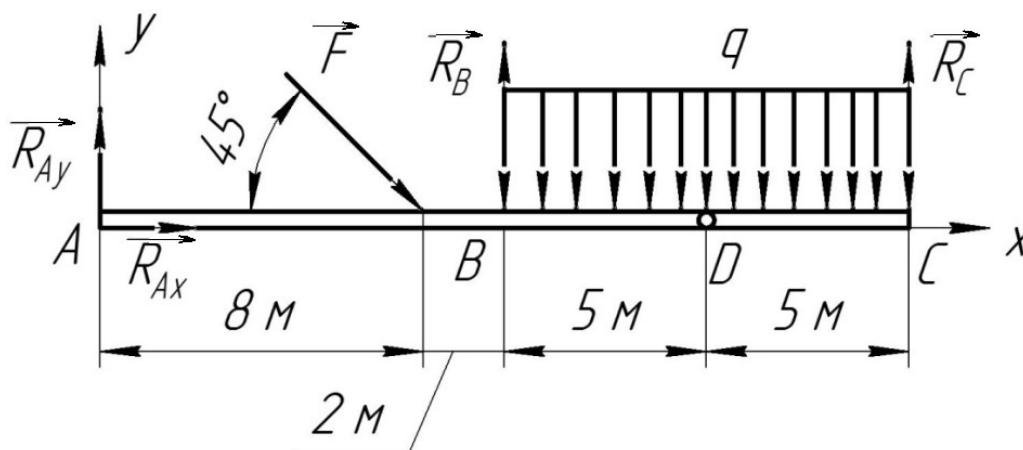


Рис. 2.8. До задачі 2.4

Оскільки ми маємо чотири невідомі опорні реакції: $\vec{R}_{Ax}, \vec{R}_{Ay}, \vec{R}_B, \vec{R}_C$, а можемо скласти лише три рівняння рівноваги для плоскої системи сил, то задача є статично невизначуваною. Проте розв'язання цієї задачі можливе завдяки наявності шарніра D , у якому під дією прикладеного до складеної балки навантаження не виникає реактивного моменту, і система рівнянь рівноваги все-таки виявляється замкненою.

Подумки розсікаємо конструкцію у шарнірі D і розглядаємо рівновагу кожної із частин складеної балки AD і DC окремо (рис. 2.9). Рівномірно розподілене навантаження q замінимо еквівалентною зосередженою силою $Q = q \cdot 10 = 2 \cdot 10 = 20$ кН.

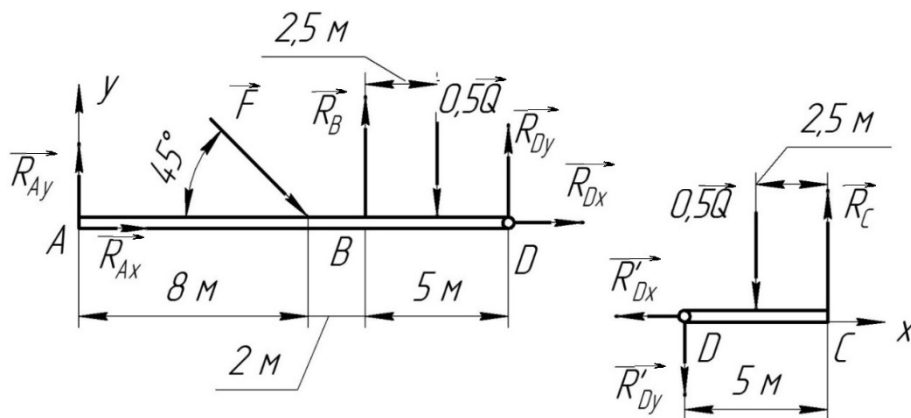


Рис. 2.9. До задачі 2.4

Розв'яжемо задачу аналітичним способом. Складемо систему рівнянь рівноваги для кожної із частин балки окремо. В результаті отримаємо для частини AD :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{xk} = R_{Ax} + F \cos 45^\circ + R_{Dx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{yk} = R_{Ay} - F \sin 45^\circ + R_B + R_{Dy} - \frac{Q}{2} = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = R_B \cdot 10 + R_{Dy} \cdot 15 - F \sin 45^\circ \cdot 8 - \frac{Q}{2} \cdot 12,5 = 0. \end{cases}$$

Запишемо рівняння рівноваги для частини балки DC :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{xk} = -R_{Dx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{yk} = R_C - R_{Dy} - \frac{Q}{2} = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = R_{Dy} \cdot 5 + \frac{Q}{2} \cdot 2,5 = 0. \end{cases}$$

Сумісно розв'язуючи ці дві системи рівнянь, знаходимо, що:

$$R_{Ay} = -4,43 \text{ кН}, R_{Ax} = -2,83 \text{ кН}, R_B = 22,26 \text{ кН}, \\ R_C = 5 \text{ кН}, R_{Dy} = -5 \text{ кН}, R_{Dx} = 0.$$

Перевірка:

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = -R_{Ay} \cdot AD + F \sin 45^\circ \cdot (BD + 2) - R_B \cdot BD + R_C \cdot CD, \\ \sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = -(-4,43) \cdot 15 + 4 \cdot 0,707 \cdot 7 - 22,26 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \approx 0.$$

Відповідь: $R_{Ax} = -2,83 \text{ кН}$, $R_{Ay} = -4,43 \text{ кН}$, $R_B = 22,26 \text{ кН}$, $R_C = 5 \text{ кН}$, $R_{Dx} = 0$, $R_{Dy} = -5 \text{ кН}$.

РОЗДІЛ 3. ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

Деякі види опор у просторових конструкціях:

Петля (рис. 3.1) – реакція розкладається на дві складові, взаємно перпендикулярні до вісі петлі (або обертання – для підшипника). Підшипник (рис. 3.2) – опора, аналогічна до петлі.

Підп'ятник (рис. 3.3) – реакція розкладається на три складові.

Просторова шарнірно-нерухома опора (кульовий шарнір) (рис. 3.4).

Для рівноваги твердого тіла під дією довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх даних сил на довільно обрані вісі декартових координат і суми моментів усіх сил відносно цих осей дорівнювали нулю.

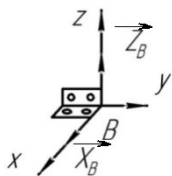


Рис. 3.1. Петля

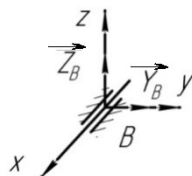


Рис. 3.2. Підшипник

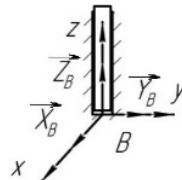


Рис. 3.3. Підп'ятник



Рис. 3.4. Кульовий шарнір

Рівняння рівноваги твердого тіла під дією довільної просторової системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_y(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k) = 0.$$

При розв'язанні задач на рівновагу твердого тіла, яке знаходиться під дією довільної просторової системи сил, потрібно:

вибрати тверде тіло, рівновагу якого необхідно розглянути для визначення невідомих величин;

1) зобразити активні сили;

2) якщо тверде тіло невільне, то, застосувавши принцип звільнення від в'язей, прикласти до нього відповідні реакції в'язей;

3) розглянути рівновагу даного невільного твердого тіла, як тіла вільного, і такого, що знаходиться під дією активних сил і реакцій в'язей;

4) пересвідчитися у тому, що дана задача є статично визначуваною, тобто що число алгебраїчних невідомих не більше шести;

5) обрати систему відліку у декартових координатах (вісі декартових координат рекомендується обирати таким чином, щоб вони були паралельні або перпендикулярні до якомога більшої кількості невідомих сил, а також щоб лінії дії невідомих сил перетинали ці вісі);

6) скласти шість рівнянь рівноваги твердого тіла і знайти невідомі величини.

7) перевірити розв'язання, склавши рівняння моментів відносно довільної вісі.

Розглянемо розв'язання задач на рівновагу твердого тіла під дією довільної просторової системи сил.

Задача 3.1

Багажна полиця залізничного вагону (рис. 3.5) прикріплена до стіни вагону двома петлями (циліндричними шарнірами) A і B і стрижнем MS . Стрижень, приєднаний шарнірами M і S до полиці і стіни, утворює кут 30° з горизонтальною площиною полиці.

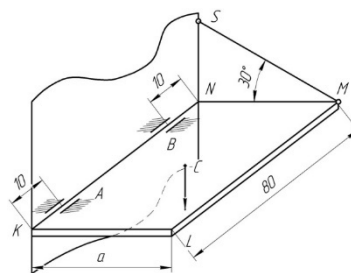


Рис. 3.5. До задачі 3.1

Визначити реакції петель A і B і стрижня MS , якщо вага полиці $P = 1$ кН. Розміри вказані на рисунку у см.

Розв'язання. Для визначення невідомих реакцій петель і стрижня розглянемо рівновагу полиці $KLMN$. На полицю діють одна активна сила – її вага $P = 1$ кН, прикладена до центра ваги C полиці (у точці перетину діагоналей прямокутника $KLMN$ (рис. 3.6)).

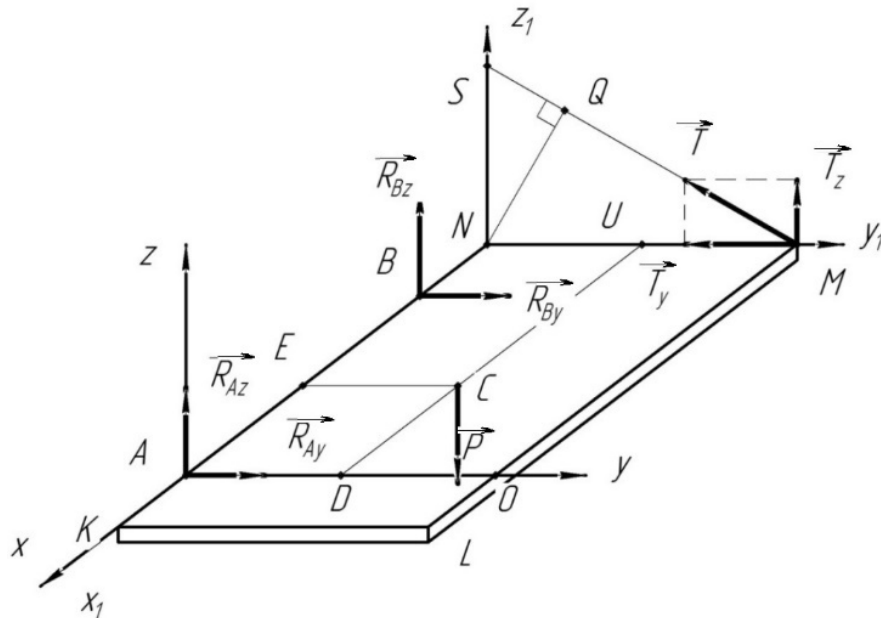


Рис. 3.6. До задачі 3.1

Початок координат оберемо у петлі A так, як показано на рис. 3.6.

Скористуємося принципом звільнення від в'язей, подумки відкинемо в'язі, тобто петлі A і B і стрижень MS , і компенсуємо їх дію на полицю відповідними реакціями в'язей. Реакцію стрижня $\vec{T}$ спрямуємо вздовж стрижня від M до S . Реакції петель розкладемо на дві взаємно перпендикулярні складові – $\vec{R}_{Ay}$, $\vec{R}_{Az}$, $\vec{R}_{By}$, $\vec{R}_{Bz}$.

Таким чином, полиця знаходиться у рівновазі під дією активної сили ваги – $\vec{P}$ і п'яти невідомих сил: $\vec{R}_{Ay}$, $\vec{R}_{Az}$, $\vec{R}_{By}$, $\vec{R}_{Bz}$ і $\vec{T}$. Оскільки усі ці сили утворюють просторову систему сил, то число рівнянь рівноваги дорівнює шести. Отже задача є статично визначуваною, до того ж одне з рівнянь має бути залежним від інших п'яти, або тотожно стати нулем.

Складемо рівняння рівноваги. Усі сили знаходяться у площинах, що перпендикулярні до вісі x , тому проекція кожної сили на цю вісь дорівнює нулю і рівняння проекцій на цю вісь матиме вигляд:

$$\sum F_{kx} = 0.$$

Із інших п'яти рівнянь рівноваги знайдемо усі інші невідомі.

Сили P , R_{Az} , і R_{Bz} перпендикулярні до вісі y , тому їх проекції на цю вісь дорівнюють нулю. Рівняння проекцій на вісь y має вигляд:

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} + R_{By} - T \cos 30^\circ = 0.$$

Сили R_{Ay} і R_{By} перпендикулярні до вісі z і їх проекції на цю вісь дорівнюють нулю. Рівняння проекцій на вісь z має вигляд:

$$\sum F_{kz} = R_{Az} + R_{Bz} - P + T \sin 60^\circ = 0.$$

Складемо рівняння моментів відносно вісей x , y , z .

Моменти сил R_{Ay} , R_{Az} , R_{By} , R_{Bz} відносно вісі x дорівнюють нулю, оскільки лінії їх дії перетинають вісь x . Рівняння моментів усіх сил відносно вісі x має вигляд:

$$\sum m_x(F_k) = -P \cdot EC + T \cdot NQ = 0.$$

Моменти сил R_{Ay} , R_{By} і R_{Az} відносно вісі y дорівнюють нулю (сила R_{By} паралельна вісі y , а лінії дії двох інших сил перетинають цю вісь). Таким чином рівняння моментів усіх сил відносно вісі y має вигляд:

$$\sum m_y(F_k) = -P \cdot DC + R_{Bz} \cdot AB + T_z \cdot OM = 0.$$

Складемо останнє рівняння – рівняння моментів відносно вісі z . Відмітимо, що моменти сил P , R_{Az} , R_{Bz} і R_{Ay} відносно вісі z дорівнюють нулю (сили P , R_{Az} , R_{Bz} паралельні вісі z , а лінія дії сили R_{Ay} перетинає цю вісь). Таким чином, рівняння моментів усіх сил відносно вісі z матиме вигляд:

$$\sum m_z(F_k) = -R_{By} \cdot AB + T_y \cdot AN = 0.$$

Отже, отримаємо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{ky} = R_{Ay} + R_{By} - T \cos 30^\circ = 0, \\ \sum F_{kz} = R_{Az} + R_{Bz} - P + T \sin 60^\circ = 0, \\ \sum m_x(F_k) = -P \cdot EC + T \cdot NQ = 0, \\ \sum m_y(F_k) = -P \cdot DC + R_{Bz} \cdot AB + T_z \cdot OM = 0, \\ \sum m_z(F_k) = -R_{By} \cdot AB + T_y \cdot AN = 0. \end{array} \right.$$

Залишається вирішити ці рівняння. У результаті розв'язання системи рівнянь, отримуємо $T = 1$ кН, $R_{Bz} = -0,083$ кН, $R_{By} = 1,01$ кН, $R_{Ay} = -0,144$ кН, $R_{Az} = 0,583$ кН.

Відповідь: $T = 1$ кН, $R_{Bz} = -0,083$ кН, $R_{By} = 1,01$ кН, $R_{Ay} = -0,144$ кН, $R_{Az} = 0,583$ кН.

РОЗДІЛ 4. РОЗРАХУНОК ФЕРМ

Ферма – геометрично незмінювана конструкція, утворена прямолінійними стрижнями, з'єднаними один із одним за допомогою шарнірів.

Шарнірні з'єднання кінців стрижнів називають **вузлами**.

Ферма є статично визначуваною тоді, коли задовольняється рівність:

$$m = 2n - 3,$$

де m – число стрижнів;

n – число вузлів.

Ферма є статично невизначуваною, коли $m > 2n - 3$, і ферма отримує рухомість, тобто перетворюється у механізм, коли $m < 2n - 3$.

Визначення зусиль у стрижнях ферми методами статички можливе лише для статично визначуваних ферм.

Вважається, що задані сили прикладені у вузлах ферми і знаходяться у одній з фермою площині; тертя у шарнірах відсутнє. Таким чином, стрижні будуть стиснуті, або розтягнуті, і реакції стрижнів будуть співпадати за напрямком зі стрижнями. Вага стрижнів не враховується.

Розрахунок зусиль у стрижнях ферми може проводитися такими способами:

1. способом вирізання вузлів;
2. методом Ріттера (методом перерізів).

При розрахунку ферм способом вирізання вузлів рекомендується наступна послідовність дій:

1) накреслити в обраному масштабі ферму і зобразити усі прикладені до неї задані сили;

2) застосувавши принцип звільнення від в'язей, подумки відкинути опори, замінивши їх дію реакціями;

3) визначити реакції опор, користуючись рівняннями рівноваги для усієї ферми, яка розглядається як тверде тіло;

4) вирізати вузол, у якому збігаються два стрижні, і розглянути його рівновагу під дією заданих сил і реакцій розрізаних стрижнів; визначити ці реакції шляхом складання рівнянь рівноваги для вузла, або побудовою замкненого трикутника, або багатокутника сил, прикладених до вузла;

5) переходячи від вузла до вузла, розглянути аналогічно рівновагу кожного вузла; при цьому у кожному вузлі має бути лише два невідомих зусилля у стрижнях; для кожного вузла складаючи рівняння рівноваги, або будуючи замкнений силовий багатокутник, визначити усі невідомі зусилля у стрижнях.

Розглянемо задачу на визначення зусиль у стрижнях ферми.

Задача 4.1

Визначити зусилля у стрижнях ферми (рис. 4.1), до вузлів якої прикладено дві сили: $F_1 = 2 \text{ кН}$ і $F_2 = 1,5 \text{ кН}$.

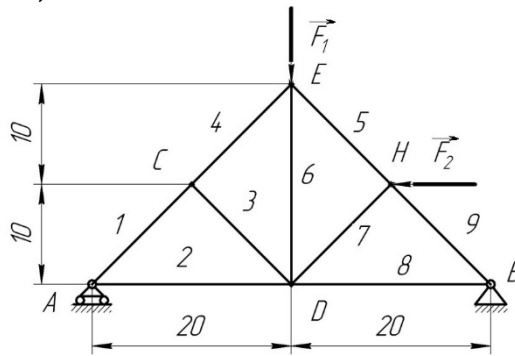


Рис. 4.1. До задачі 4.1

Розв'язання. У точці A маємо шарнірно-рухому опору, реакція якої $\vec{R}_A$ спрямована перпендикулярно поверхні кочення котків. У точці B – шарнірно-нерухома опору, реакцію якої показуємо двома взаємноперпендикулярними складовими.

Розглянемо рівновагу ферми (рис. 4.2) під дією двох заданих сил: зосереджених сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, і трьох невідомих сил: опорних реакцій $\vec{R}_A$, $\vec{R}_{Bx}$ і $\vec{R}_{By}$. Задача є статично визначеною. Запишемо рівняння рівноваги ферми у проекціях на вісі x і y та рівняння моментів відносно точки A .

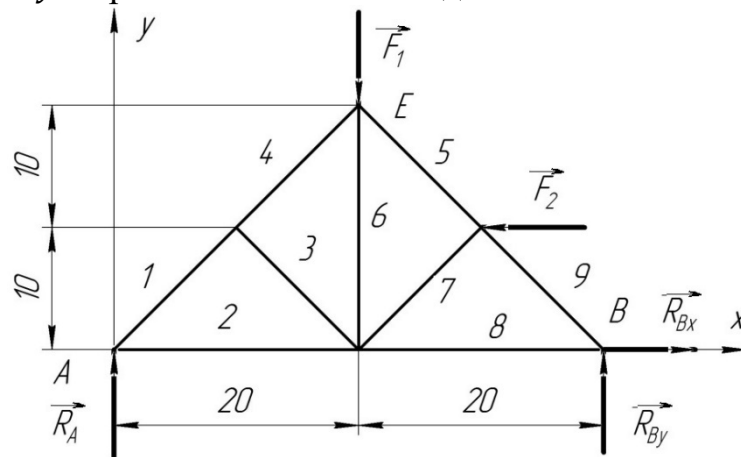


Рис. 4.2. До задачі 4.1

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = R_{Bx} - F_2 = 0, \\ \sum F_{ky} = R_A + R_{By} - F_1 = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = R_{By} \cdot 40 + F_2 \cdot 10 - F_1 \cdot 20 = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо:

$$R_{By} = \frac{20F_1 - 10F_2}{40} = \frac{20 \cdot 2 - 10 \cdot 1,5}{40} = 0,625 \text{ кН. кН.}$$

Підставивши це до другого рівняння знайдемо:

$$R_{Bx} = F_2 = 1,5 \text{ кН}, R_A = F_1 - R_{By} = 2 - 0,625 = 1,38 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum m_E(\vec{F}_k) = R_{Bx} \cdot 20 + R_{By} \cdot 20 - R_A \cdot 20 - F_2 \cdot 10,$$

$$\sum m_E(\vec{F}_k) = 1,5 \cdot 20 + 0,625 \cdot 20 - 1,38 \cdot 20 - 1,5 \cdot 10 \approx 0.$$

Таким чином, сили опорних реакцій складають $R_A = 1,38 \text{ кН}$, $R_{Bx} = 1,5 \text{ кН}$, $R_{By} = 0,625 \text{ кН}$.

Визначивши реакції опор, перейдемо до визначення реакцій у стрижнях ферми способом вирізання вузлів. Позначимо (рис. 4.2) стрижні цифрами 1, 2, 3, ..., 9, а вузли – буквами A, B, C, D, E, H. Визначимо зусилля у стрижнях 4 – 9.

Першим вирізаємо вузол B. У ньому збігаються два стрижні 8 і 9, зусилля у яких невідомі. До вузла B прикладено чотири сили: опорні реакції $\vec{R}_{Bx}$ і $\vec{R}_{By}$, а також реакції $\vec{S}_8$ і $\vec{S}_9$ перерізаних стрижнів (рис. 4.3).

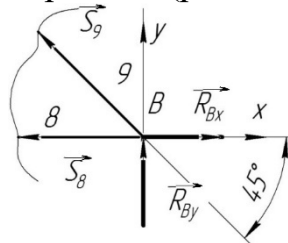


Рис. 4.3. До задачі 4.1

Опорні реакції $\vec{R}_{Bx}$ і $\vec{R}_{By}$ відомі за величиною і напрямком, реакції стрижнів $\vec{S}_8$ і $\vec{S}_9$ спрямовані вздовж відповідних стрижнів, але їх величина невідома. Відмітимо, що такий збіг напрямків реакцій зі стрижнями має місце завжди, якщо прямолінійні стрижні закріплено шарнірно своїми кінцями та усі сили прикладено у вузлах. Для визначення реакцій стрижнів складаємо рівняння рівноваги для збіжної плоскої системи сил у проекціях на вісі x і y:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = R_{Bx} - S_8 - S_9 \cos 45^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} = R_{By} + S_9 \sin 45^\circ = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо:

$$S_9 = -\frac{R_{By}}{\sin 45^\circ} = -\frac{0,625}{0,707} = -0,884 \text{ кН}.$$

Підставляючи це до першого рівняння, знайдемо:

$$S_8 = R_{Bx} - S_9 \cos 45^\circ = 1,5 - (-0,884) \cdot 0,707 = 2,12 \text{ кН}.$$

Отже, стрижень 8 розтягнутий, а стрижень 9 стиснутий, причому $S_8 = 2,12 \text{ кН}$ і $S_9 = -0,884 \text{ кН}$.

Перевіримо значення реакцій у стрижнях 8 і 9, побудувавши силовий багатокутник, причому відкладаємо сили у тому порядку, у якому вони зустрічаються при обході вузла проти годинникової стрілки. Першою відкладемо у масштабі силу $\vec{R}_{Bx}$ (рис. 4.4). З її кінця у масштабі відкладемо силу $\vec{R}_{By}$. З початку сили $\vec{R}_{Bx}$ і з кінця сили $\vec{R}_{By}$ проведемо прямі, відповідно паралельні стрижням 9 і 8, до їх перетину. Сторони отриманого багатокутника визначають величини реакцій $\vec{S}_8$ і $\vec{S}_9$. Для того, щоб знайти їх напрямки, обійдемо силовий багатокутник у напрямку, вказаному відомими силами $\vec{R}_{Bx}$ і $\vec{R}_{By}$ (при рівновазі вузла стрілки у замкненому силовому багатокутнику йдуть в одному напрямку).

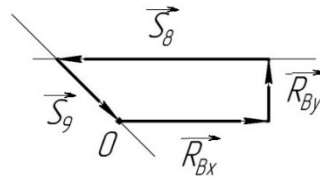


Рис. 4.4. До задачі 4.1

Переносячи реакцію $\vec{S}_9$ на стрижень 9, знайдемо, що вона направлена до вузла B , а отже стрижень 9 стиснутий. Переносячи реакцію $\vec{S}_8$ на стрижень 8, знаходимо, що вона направлена від вузла B , а отже стрижень 8 розтягнутий.

Таким чином, отримано однаковий результат як за допомогою складання рівнянь рівноваги вузла, так і за допомогою побудови силового багатокутника.

Наступним вирізаємо вузол H (рис. 4.5). До нього прикладено чотири сили: дві невідомі реакції $\vec{S}_5$ і $\vec{S}_7$ стрижнів 5, 7, задана сила $\vec{F}_2$, і відома реакція стрижня 9 $\vec{S}'_9$, яка за модулем дорівнює реакції $\vec{S}_9$, прикладеній до вузла B , але спрямована у протилежний бік.

Для визначення реакцій стрижнів складаємо рівняння рівноваги для збіжної плоскої системи сил у проекціях на вісі x і y :

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = -S_7 - F_2 \cos 45^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} = S_5 - S'_9 + F_2 \sin 45^\circ = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння знайдемо:

$$S_7 = -F_2 \cos 45^\circ = -1,5 \cdot 0,707 = -1,061 \text{ кН.}$$

З останнього рівняння знаходимо:

$$S_5 = S'_9 - F_2 \sin 45^\circ = -0,884 - 1,5 \cdot 0,707 = -1,94 \text{ кН.}$$

Отже, стрижні 5 і 7 розтягнуті, причому $S_5 = -1,94$ кН і $S_7 = -1,061$ кН.

Перевіримо значення реакцій у стрижнях 5 і 7, побудувавши силовий багатокутник. Першою відкладемо у масштабі силу $\vec{F}_2$ (рис. 4.6). З її кінця у масштабі відкладемо силу $\vec{S}'_9$. З початку сили $\vec{F}_2$ і з кінця сили $\vec{S}'_9$ проведемо прямі, відповідно паралельні стрижням 5 і 7, до їх перетину.

Сторони отриманого багатокутника визначають величини реакцій $\vec{S}_5$ і $\vec{S}_7$. Для того, щоб знайти їх напрямки, обійдемо силовий багатокутник у напрямку, вказаному відомими силами $\vec{F}_2$ і $\vec{S}_9$.

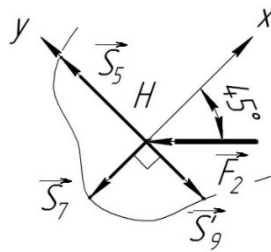


Рис. 4.5. До задачі 4.1

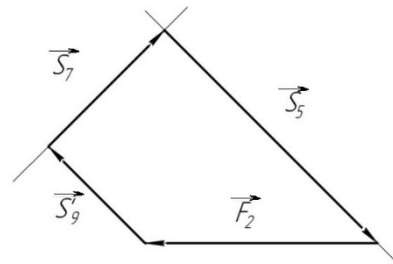


Рис. 4.6. До задачі 4.1

Переносячи реакцію $\vec{S}_5$ на стрижень 5, знайдемо, що вона направлена до вузла H , а отже стрижень 5 розтягнутий. Переносячи реакцію $\vec{S}_7$ на стрижень 7, знаходимо, що вона направлена також до вузла H , а отже стрижень 7 також розтягнутий.

Таким чином, отримано однакові результати за допомогою складання рівнянь рівноваги вузла і побудови силового багатокутника.

Наступним вирізаємо вузол E (рис. 4.7). До нього прикладено чотири сили: дві невідомі реакції $\vec{S}_4$ і $\vec{S}_6$ стрижнів 4, 6, задана сила $\vec{F}_1$, і відома реакція стрижня 5 $\vec{S}_5'$, яка за модулем дорівнює реакції $\vec{S}_5$, прикладеній до вузла H , але спрямована у протилежний бік.

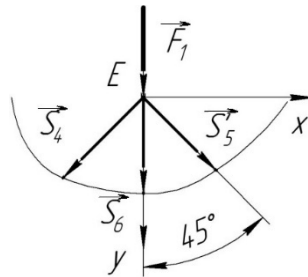


Рис. 4.7. До задачі 4.1

Для визначення реакцій стрижнів складаємо рівняння рівноваги для збіжної плоскої системи сил у проекціях на вісі x і y :

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = S_5' \cos 45^\circ - S_4 \cos 45^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} = F_1 + S_6 + S_5' \sin 45^\circ + S_4 \sin 45^\circ = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння знайдемо:

$$S_4 = S_5' = -1,94 \text{ кН.}$$

З останнього рівняння знаходимо:

$$S_6 = -F_1 - S_5' \sin 45^\circ - S_4 \sin 45^\circ = -2 + 1,94 \cdot 0,707 + 1,94 \cdot 0,707 = 0,743 \text{ кН.}$$

Отже, стрижні 4 і 6 стиснуті, причому $S_4 = -1,94 \text{ кН}$ і $S_6 = 0,743 \text{ кН}$.

Перевіримо значення реакцій у стрижнях 4 і 6, побудувавши силовий багатокутник. Першою відкладемо у масштабі силу $\vec{S}_5'$ (рис. 4.8). З її кінця у масштабі відкладемо силу $\vec{F}_1$. З початку сили $\vec{S}_5'$ і з кінця сили $\vec{F}_1$ проведемо прямі, відповідно паралельні стрижням 4 і 6, до їх перетину. Сторони отриманого багатокутника визначають величини реакцій $\vec{S}_4$ і $\vec{S}_6$. Для того, щоб знайти їх напрямок, обійдемо силовий багатокутник у напрямку, вказаному відомими силами $\vec{S}_5'$ і $\vec{F}_1$.

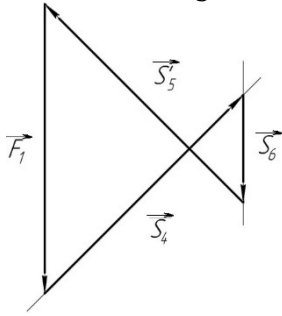


Рис. 4.8. До задачі 4.1

Переносячи реакцію $\vec{S}_4$ на стрижень 4, знайдемо, що вона направлена до вузла E , а отже стрижень 4 стиснутий. Переносячи реакцію $\vec{S}_6$ на стрижень 6, знаходимо, що вона направлена від вузла E , а отже стрижень 6 також стиснутий.

Таким чином, отримано однакові результати за допомогою складання рівнянь рівноваги вузла і побудови силового багатокутника.

У такий самий спосіб, як показано вище, можна визначити зусилля в усіх стрижнях, які залишилися.

При розрахунку ферм способом методом Ріттера (методом перерізів) рекомендується наступна послідовність дій:

1) визначити опорні реакції, розглядаючи рівновагу ферми як твердого тіла, яке знаходиться під дією плоскої системи сил; для цього скласти три рівняння рівноваги;

2) подумки розрізати ферму, до якої прикладено усі зовнішні сили, на дві частини, таким чином, щоб число розрізаних стрижнів не перевищувало трьох, і замінити дію відкинутої частини шуканими зусиллями стрижнів, вважаючи усі стрижні розтягнутими;

3) складаємо рівняння рівноваги для частини ферми таким чином, щоб у кожне рівняння увійшло одне невідоме зусилля; для цього складаємо рівняння моментів відносно точок Ріттера (точок, у яких перетинаються лінії дії двох невідомих зусиль); якщо ж два стрижні паралельні, то складаємо рівняння проекцій на вісь, перпендикулярну до цих стрижнів, до якого також увійде одне невідоме зусилля;

4) вирішуючи кожне зі складених рівнянь, знаходимо невідомі зусилля у стрижнях; якщо у відповіді отримуємо від'ємну величину, то це вказує на те, що стрижень стиснутий, а не розтягнутий.

5) перевіряємо розв'язання, складаючи рівняння для суми проекцій усіх сил на довільну вісь.

Знайдемо зусилля у стрижнях 5, 7 і 8 ферми, яка представлена у задачі 15, методом Ріттера (рис. 4.9).

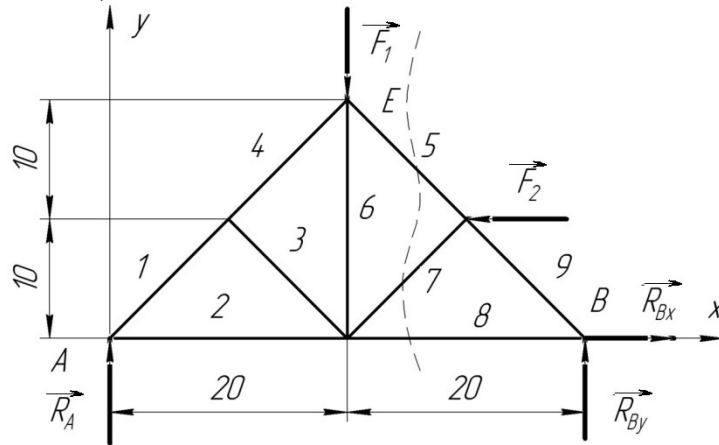


Рис. 4.9. До задачі 4.1

Подумки розрізаємо ферму за стрижнями 5, 7 і 8 та видаляємо ліву частину. Права частина ферми буде у рівновазі, якщо, окрім опорних реакцій, до її вузлів прикласти реакції перерізаних стрижнів. Позначимо ці реакції $\vec{S}_5$, $\vec{S}_7$ і $\vec{S}_8$ і направимо їх вздовж відповідних стрижнів таким чином, щоб ці стрижні були розтягнуті. Тепер права частина ферми (рис. 4.10) знаходиться у рівновазі під дією шести сил: двох опорних реакцій $\vec{R}_{Bx}$ і $\vec{R}_{By}$, заданої сили $\vec{F}_2$ і реакцій стрижнів $\vec{S}_5$, $\vec{S}_7$, $\vec{S}_8$. Для того, щоб знайти величини цих реакцій, складемо рівняння рівноваги, прирівнюючи нулю суму моментів усіх сил відносно точок Ріттера r_{78} , r_{57} і r_{58} (у кожній з цих точок перетинаються лінії дії двох невідомих реакцій, тому рівняння моментів буде містити одне невідоме).

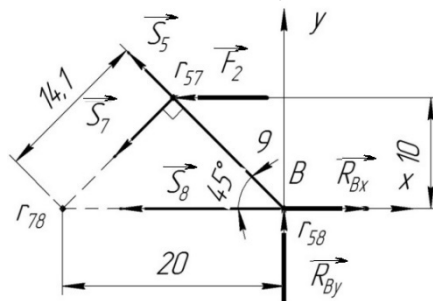


Рис. 4.10. До задачі 4.1

Рівняння рівноваги запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} \sum m_{r_{78}}(\vec{F}_k) = R_{By} \cdot 20 + S_5 \cdot 14,1 + F_2 \cdot 10 = 0, \\ \sum m_{r_{57}}(\vec{F}_k) = R_{Bx} \cdot 10 + R_{By} \cdot 10 - S_8 \cdot 10 = 0, \\ \sum m_{r_{58}}(\vec{F}_k) = F_2 \cdot 10 + S_7 \cdot 14,1 = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо:

$$S_5 = -\frac{10F_2 + 20R_{By}}{14,1} = -\frac{10 \cdot 1,5 + 20 \cdot 0,625}{14,1} = -1,95 \text{ кН.}$$

З другого рівняння знаходимо:

$$S_8 = R_{Bx} + R_{By} = 1,5 + 0,625 = 2,13 \text{ кН.}$$

З третього рівняння знаходимо:

$$S_7 = -\frac{10F_2}{14,1} = -\frac{10 \cdot 1,5}{14,1} = -1,064 \text{ кН.}$$

Таким чином, за допомогою методу Ріттеру отримано величини зусиль у стрижнях 5, 7 і 8, а саме $S_8 = 2,13 \text{ кН}$ (стрижень розтягнутий), $S_7 = -1,064 \text{ кН}$ (стрижень стиснутий), $S_5 = -1,95 \text{ кН}$ (стрижень стиснутий).

РОЗДІЛ 5. РІВНОВАГА ТІЛ ПРИ НАЯВНОСТІ СИЛ ТЕРТЯ

Сили тертя виникають між шорстким тілом і шорсткою поверхнею, якщо рівнодіюча заданих сил $\vec{R}$ не направлена за нормаллю до поверхні, на якій покоїться тіло (рис. 5.1).

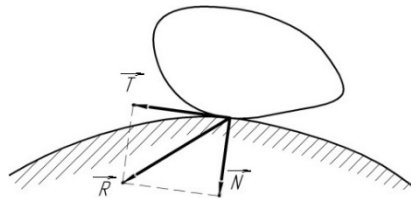


Рис. 5.1. До визначення сили тертя

Залежність між силою тертя і нормальним тиском визначається законом Кулона: найбільша величина сили тертя ковзання пропорційна нормальному тиску тіла на поверхню:

$$F_{\max} = fN,$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання.

Кут тертя φ :

$$\varphi = \arctg f.$$

Деяка сила Q не може порушити рівновагу тіла, якщо:

$$f = \tg \alpha > \frac{Q \sin \alpha}{P + Q \cos \alpha},$$

де α – кут між напрямками ліній дії сили Q і реакції поверхні.

При розв'язанні задач на рівновагу твердого тіла за наявності сил тертя необхідно:

- 1) вибрати тверде тіло, рівновагу якого потрібно розглянути для визначення невідомих величин;
- 2) зобразити активні сили;
- 3) якщо тверде тіло невільне, то, застосувавши принцип звільнення від в'язей, прикласти до нього відповідні реакції в'язей;

4) розглянути рівновагу даного невідомого твердого тіла, як тіла вільного і такого, що знаходиться під дією активних сил і реакцій в'язей;

5) зіставити число невідомих величин і число невідомих рівнянь рівноваги, які мають бути рівними для статично визначуваних задач; при цьому до рівнянь рівноваги твердого тіла слід додати залежність сили тертя від нормального тиску;

6) обрати систему координат;

7) скласти систему рівнянь рівноваги для сил, прикладених до твердого тіла або до системи твердих тіл;

8) вирішити систему рівнянь рівноваги і визначити невідомі величини.

Реакцію шорсткої поверхні слід представляти двома складовими - нормальною реакцією і силою тертя, або ж, не розкладаючи цю реакцію на складові, направити її під кутом φ до нормалі до поверхні (при максимальній силі тертя).

Розглянемо розв'язання задач на рівновагу твердого тіла при наявності сил тертя.

Задача 5.1

Обертний момент мотору електричної лебідки дорівнює $M = 120$ Нм. Для зупинки мотора використовуються дерев'яні колодки гальма A (рис. 5.2), які прижимаються силами P до гальмівного диска B , жорстко зв'язаного з робором мотору. Радіус гальмівного диска $r = 600$ мм. Визначити силу тиску P , необхідну для утримання ротору у рівновазі, якщо коефіцієнт тертя між дерев'яними колодками і чавунним гальмівним диском складає $f = 0,5$.

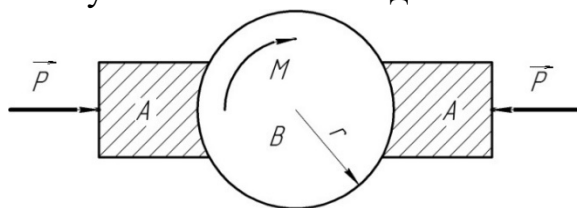


Рис. 5.2. До задачі 5.1

Розв'язання. Розглянемо рівновагу гальмівного диска B (рис. 5.3). Відкидаємо подумки гальмівні колодки та замінюємо їх дію силами реакцій, кожна з яких розкладається на нормальний тиск $\vec{P}$ і силу тертя $\vec{F}$.

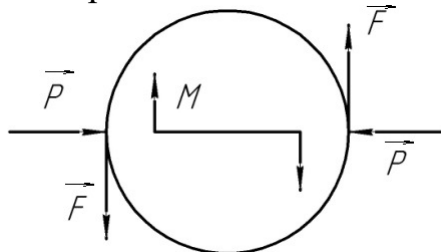


Рис. 5.3. До задачі 5.1

Залежність між нормальним тиском і силою тертя:

$$F = fP.$$

Для рівноваги диска необхідно, щоб сума моментів усіх сил, прикладених до диску, дорівнювала нулю. Таким чином,

$$\begin{aligned} F \cdot 2r - M &= 0, \\ fP \cdot 2r - M &= 0, \\ P &= \frac{M}{2rf} = 200 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Задача 5.2

Драбина AB ваги P спирається кінцем B на вертикальну стіну. Коефіцієнт тертя драбини о стіну дорівнює f_2 . Іншим кінцем A драбина спирається на підлогу, яка утворює кут α з горизонтом. Коефіцієнт тертя драбини о підлогу складає f_1 . Драбина виготовлена з однорідного матеріалу. Її центр ваги знаходиться у точці C , віддаленій від кінців драбини $AC = a$, $BC = b$.

Визначити найменше значення кута φ , за якого ще має місце рівновага (рис. 5.4) і нормальну складову реакцій у точках A і B .

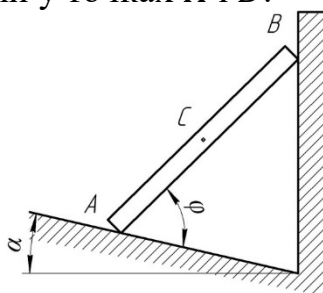


Рис. 5.4. До задачі 5.2

Розв'язання. Розглянемо рівновагу драбини AB (рис. 5.5). Застосувавши принцип звільнення від в'язей, відкинемо подумки обидві в'язі та замінимо їх дію на драбину силами реакцій.

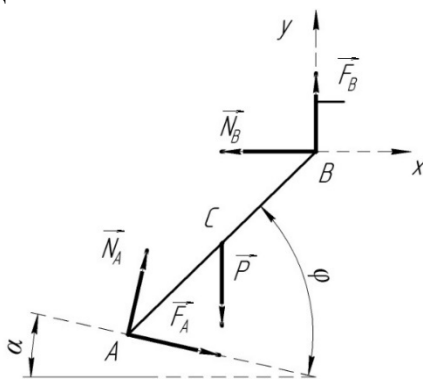


Рис. 5.5. До задачі 5.2

Складемо рівняння рівноваги:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum F_{kx} &= F_A \cos \alpha + N_A \sin \alpha - N_B = 0, \\ \sum F_{ky} &= N_A \cos \alpha - F_A \sin \alpha - P + F_B = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) &= -P a \cos(\varphi - \alpha) + F_B(a + b) \cos(\varphi - \alpha) + N_B(a + b) \sin(\varphi - \alpha) = 0. \end{aligned} \right.$$

Модуль сили тертя може бути виражений наступним чином:

$$F_A = f_1 N_A,$$

$$F_B = f_2 N_B.$$

Задача є статично визначеною, оскільки маємо п'ять рівнянь рівноваги з п'ятьма невідомими величинами, тож вирішивши її отримаємо:

$$N_A = \frac{P}{\cos\alpha - f_1 \sin\alpha + f_1 f_2 \cos\alpha + f_2 \sin\alpha},$$

$$N_B = \frac{P(f_1 \cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha - f_1 \sin\alpha + f_1 f_2 \cos\alpha + f_2 \sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = \frac{a}{(a+b)} \frac{[(1 + f_1 f_2) \cos\alpha + (f_2 - f_1) \sin\alpha]}{(f_1 \cos\alpha + \sin\alpha)} - f_2.$$

Значення кута φ , відповідне останньому виразу, є найменшим значенням, за якого можлива рівновага драбини. Якщо кут φ буде більшим, ніж велчина, отримана за останнім виразом, то рівновага збережеться.

РОЗДІЛ 6. ЦЕНТР ВАГИ

Координати центра ваги однорідного твердого тіла наближено знаходяться за формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i V_i}{V}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i V_i}{V}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i V_i}{V},$$

де V_i – об'єм i -ї матеріальної частини, x_i, y_i, z_i – координати точки прикладення сили ваги цієї частини, $V = \sum_{i=1}^n V_i$ – об'єм однорідного твердого тіла, причому $V = \frac{P}{\rho \gamma}$, де ρ – густина матеріалу твердого тіла.

Координати центра ваги однорідної поверхні наближено знаходяться за формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i S_i}{S}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i S_i}{S}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i S_i}{S},$$

де S_i – площа поверхні i -ї матеріальної частини, x_i, y_i, z_i – координати точки прикладення сили ваги цієї частини, $S = \sum_{i=1}^n S_i$ – площа поверхні твердого тіла.

Як бачимо з формул для визначення центру ваги однорідного твердого тіла, положення центра ваги залежить лише від геометричної форми і розмірів твердого тіла.

Координати центра ваги однорідної лінії наближено знаходяться за формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i l_i}{L}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i l_i}{L}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i l_i}{L},$$

де l_i – довжина i -ї матеріальної частини, x_i, y_i, z_i – координати точки прикладення сили ваги цієї частини, $L = \sum_{i=1}^n l_i$ – довжина тіла (наприклад, дроту).

Якщо в однорідному твердому тілі є площина симетрії, то центр ваги знаходиться у цій площині. Якщо ж у тілі є вісь симетрії, то центр ваги знаходиться на цій осі.

Найбільш поширеним способом використання вищенаведених виразів є уявне розбиття однорідного твердого тіла на такі частини, положення центра тяжіння кожної з яких відомо, або легко може бути визначеним.

Положення центрів ваги деяких твердих тіл найпростішої геометричної форми:

1. центр ваги площі однорідного прямокутника розташований у точці перетину його діагоналей;
2. центр ваги площі однорідного трикутника знаходиться у точці перетину його медіан.

Розглянемо розв'язання задач на визначення координат центрів ваги однорідних твердих тіл і фігур.

Задача 6.1

Визначити координати центра ваги площі фігури (рис. 6.1), якщо $a = 0,1$ м, $b = 0,6$ м, $c = 0,4$ м, $d = 1$ м, $l = 0,4$ м.

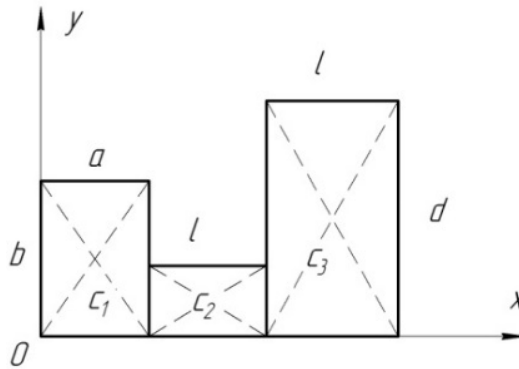


Рис. 6.1. До задачі 6.1

Розв'язання. Розіб'ємо фігуру на три прямокутники. Запишемо дані про площі елементарних фігур, а також координати їхніх центрів ваги:

$$S_1 = 0,06 \text{ м}^2, S_2 = 0,24 \text{ м}^2, S_3 = 0,4 \text{ м}^2,$$

$$x_1 = 0,05 \text{ м}, x_2 = 0,3 \text{ м}, x_3 = 0,7 \text{ м},$$

$$y_1 = 0,3 \text{ м}, y_2 = 0,3 \text{ м}, y_3 = 0,5$$

Координати центра ваги усієї фігури знайдемо за вище приведеними формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i S_i}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = 0,5 \text{ м},$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i S_i}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = 0,4 \text{ м}.$$

Задача 6.2

Визначити координати центра ваги площі кругового сектора AOB з центральним кутом $\angle AOB = \alpha = \frac{\pi}{4}$ і радіусом $r = 0,2$ м (рис. 6.2).

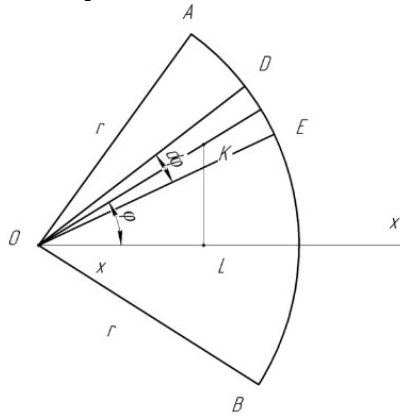


Рис. 6.2. До задачі 6.2

Розв'язання. Оскільки коловий сектор має вісь симетрії Ox , то центр ваги знаходимо на цій самій вісі ($y_C = 0$). Слід визначити лише x_C .

$$x_C = \frac{\int_{(S)} x dS}{S}.$$

Площа сектора складає $S = \frac{1}{2} r^2 \alpha$. Виділимо елементарний сектор ODE , знайдемо $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$; $\angle KOL = \varphi$, $OK = \frac{2}{3} r$, $x = OL = OK \cos \varphi = \frac{2}{3} r \cos \varphi$.

Визначимо $\int_{(S)} x dS$:

$$\int_{(S)} x dS = \frac{2}{3} r \frac{1}{2} r^2 2 \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\pi}{8}.$$

Остаточно дістанемо:

$$x_c = \frac{\frac{2}{3}r^3 \sin \frac{\pi}{8}}{\frac{1}{2}r^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{16}{3}r \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\pi}$$

Задача 6.3

Знайти координати центру ваги фігури, зображеної на рис. 6.3.

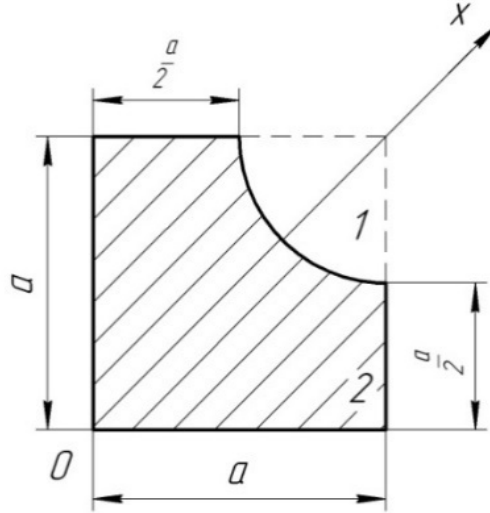


Рис. 6.3. До задачі 6.3

Розв'язання. Діагональ квадрата дорівнює $d = a\sqrt{2}$.

Відстань від верхнього правого кута квадрата до центра ваги площі кругового сектора:

$$x_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}a.$$

Тоді маємо:

$$x_1 = d - x_0 = a\sqrt{2} \left(1 - \frac{2}{3\pi}\right), \quad x_2 = \frac{d}{2} = a \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$S_1 = \frac{\pi a^2}{16}, \quad S_2 = a^2,$$

$$x_c = \frac{S_2 x_2 - S_1 x_1}{S_2 - S_1} = 0,61a.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗА РОЗДІЛОМ «СТАТИКА»

- Що вивчає теоретична механіка і на які розділи вона поділяється?
- Що таке матеріальна точка?
- Що таке абсолютне тверде тіло?
- Що називається силою, системою сил?
- Що розуміють під рівновагою тіла, системи сил?
- Що таке рівнодіюча сила?
- Що таке в'язі? Які існують в'язі та їх реакції?
- Яка система сил називається збіжною?
- Сформулюйте правило побудови силового трикутника, багатокутника?
- Графічні та аналітичні умови рівноваги плоскої збіжної системи сил.
- Що називається проекцією сили на вісь?
- Яка задача називається статично невизначуваною?
- Що називається моментом сили відносно точки?
- Чи змінюється момент сили відносно точки при перенесенні сили вздовж лінії її дії?
- У якому випадку момент сили відносно точки дорівнює нулю?
- Сформулюйте теорему Варіньона.
- Що таке пара сил і момент пари сил?
- Які пари сил називаються еквівалентними?
- Умови рівноваги довільної плоскої системи сил.
- Записати еквівалентні умови рівноваги довільної плоскої системи сил.
- Назвіть види тертя в залежності від характеру відносного руху.
- Що таке коефіцієнт тертя спокою і руху?
- Як визначається центр ваги твердого тіла?

РОЗДІЛ 7. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

7.1. Координатний спосіб задання руху точки

Траєкторія – лінія, яку описує рухома точка у просторі.

Рух точки визначається заданням *закону руху*. Закон (рівняння) руху точки встановлюють залежність положення точки у просторі від часу.

При вивченні руху у нерухомій системі координат $\mathcal{XYZ}$, закон руху точки M задається трьома функціями (рис. 7.1):

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t). \end{cases}$$

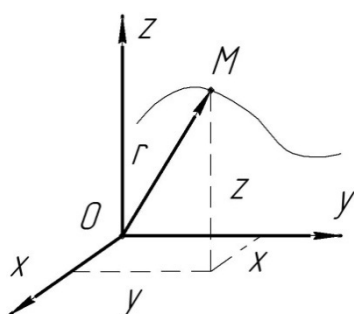


Рис. 7.1.

Підставляючи до рівнянь руху значення часу $t = t_1$, можна визначати координати і положення точок у просторі у цей момент часу.

Виключаючи час з рівнянь руху, отримуємо рівняння траєкторії у явній формі:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = 0, \\ \varphi_2(y, z) = 0. \end{cases}$$

Сукупність цих рівнянь визначає криву, якою рухається точка.

Проекції *швидкості* на вісі нерухомих декартових координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Модуль швидкості визначається за формулою:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Напрямок швидкості визначаються напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{v}, x) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vec{v}, y) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\vec{v}, z) = \frac{v_z}{v}.$$

Проекції *прискорення* на вісі нерухомих декартових координат:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{a}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{a}_z = \ddot{z}.$$

Модуль прискорення визначається за формулою:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Напрямок швидкості визначаються напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{a}, x) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\vec{a}, y) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\vec{a}, z) = \frac{a_z}{a}.$$

Послідовність вирішення задач на визначення закону руху і рівнянь траєкторії:

1. Обрати систему нерухомих координат – прямокутну, полярну, або будь-яку інша; початок координат і систему обирають виходячи з умов задачі, таким чином, щоб подальший розв'язок задачі був якомога простішим;
2. На основі умов задачі для обраної системи координат скласти рівняння руху точки, тобто знайти залежність координат точки від часу;
3. Маючи рівняння руху точки, визначити її положення у довільний момент часу; підставивши це значення часу до рівняння руху, можна також встановити напрямок її руху, знайти траєкторію та відповісти на інші питання, що стосуються руху точки.

Послідовність вирішення задач на визначення швидкостей і прискорень:

1. Обрати систему координат;
2. Скласти рівняння руху точки в обраній системі координат;
3. За рівняннями руху точки визначити проекції швидкості на вісі координат і швидкість за величиною і напрямком;
4. Знаючи проекції швидкості, визначити проекції прискорення на вісі координат і прискорення за величиною і напрямком.

Розглянемо розв'язання задач на координатний спосіб представлення руху точки.

Задача 7.1

Кривошип ON довжиною a обертається навколо вісі, перпендикулярної до площини рисунка і проходячої через точку O (рис. 7.2). Кут φ між нерухомою віссю Ox і кривошипом змінюється пропорційно часу: $\varphi = kt$. Скласти рівняння руху точки N у декартовій системі координат. Знайти рівняння її траєкторії. Визначити час одного повного оберту точки N і момент часу, коли обидві координати точки рівні між собою.

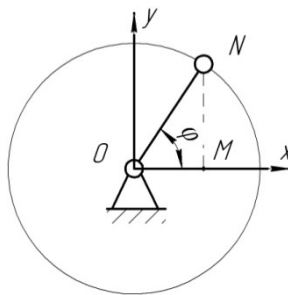


Рис. 7.2. До задачі 7.2

Розв'язання. Перш ніж скласти рівняння руху точки N , виразимо її координати як функції часу. З рис. 2. знаходимо:

$$x = ON \cos \varphi = a \cos kt,$$

$$y = ON \sin \varphi = a \sin kt,$$

Це і є шукані рівняння руху точки N .

Щоб знайти рівняння траєкторії точки у явній формі, виключимо із рівнянь руху час. Для цього зведемо кожне рівняння руху у квадрат:

$$x^2 = a^2 \cos^2 kt,$$

$$y^2 = a^2 \sin^2 kt,$$

та складемо рівняння їх:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Це рівняння траєкторії точки N – рівняння кола радіусом a із центром у початку координат.

Час одного повного оберту точки N – це час T , протягом якого кут φ змінюється на 2π радіан:

$$\varphi = kT = 2\pi,$$

звідки

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Знайдемо початкове положення рухомої точки. Підставимо для цього до рівнянь руху значення часу $t=0$. Тоді

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0.$$

Визначимо момент часу, коли обидві координати точки N рівні між собою:

$$x = y = a \cos kt_1 = a \sin kt_1,$$

тобто

$$\operatorname{tg} kt_1 = 1.$$

Ця рівність можлива при

$$kt_1 = \pi n + \frac{\pi}{4},$$

де $n=0,1,2,3,\dots$

З останнього виразу визначаються моменти часу, коли координати точки рівні між собою:

$$t_1 = \frac{\pi}{k}n + \frac{\pi}{4k}.$$

Відповідь: рівняння траєкторії точки N $x^2 + y^2 = a^2$, час одного повного обертю $T = \frac{2\pi}{k}$, момент часу, коли обидві координати рівні між собою

$$t_1 = \frac{\pi}{k}n + \frac{\pi}{4k}.$$

Задача 7.2

Точка M , кинута під кутом α до горизонту, якщо знехтувати опором повітря, рухається згідно рівнянь:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

У цих рівняннях $v_0, \alpha, g = \text{const}$.

Визначити рівняння траєкторії точки, найбільшу висоту h її підйому над рівнем початкового положення, відстань s за горизонталлю, за якої точка досягне найвищого положення, а також дальність польоту точки за горизонталлю l .

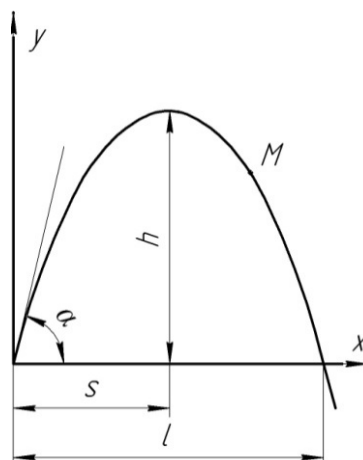


Рис. 7.3. До задачі 7.2.

Розв'язання. Визначимо рівняння траєкторії точки у явній формі, виключивши час з рівнянь руху.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha},$$

підставимо цей вираз до другого з рівнянь руху $y(t)$, отримаємо шукане рівняння траєкторії:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Це є рівняння параболи з віссю симетрії, паралельною осі Oy . Ця парабола проходить через початок координат, оскільки значення координат $x=0$, $y=0$ задовольняють її рівнянню.

Знайдемо найбільшу висоту підйому точки h , визначивши екстремальне значення y :

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0.$$

Екстремальне значення y досягає при

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Підставимо отримане значення до другого рівняння руху $y(t)$ і знайдемо найбільшу висоту підйому:

$$h = y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{gv_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}.$$

Оскільки друга похідна від y при $t = t_1$ від'ємна $\ddot{y}|_{t=t_1} = -g$, то екстремальне значення y буде дійсно максимумом.

Визначимо абсцису s , за якої точка досягає найвищого положення. Для цього значення часу t_1 підставимо до першого рівняння руху $x(t)$:

$$s = x_1 = v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Дальність польоту за горизонталлю l знайдемо з рівняння траєкторії $y(x)$, якщо покласти у ньому $y=0$:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 = 0.$$

Звідси знаходимо два значення x :

$$x_0 = 0, \quad x_2 = l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Перше значення відповідає початковому моменту (момент вильоту точки), друге значення визначає дальність польоту за горизонталлю. Помітимо також, що точка досягає свого найвищого положення на половині горизонтальної дальності.

Відповідь: рівняння траєкторії точки M $y = \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$, найбільша

висота підйому $h = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$, відстань $s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$, дальність польоту

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Задача 7.3

Точка M_1 кинута вертикально догори. Рівняння руху точки за відсутності опору повітря має вигляд:

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

де v_0 і g – сталі коефіцієнти.

Визначити швидкість і прискорення точки, максимальну висоту підйому точки, час, коли точка досягне найвищого положення.

Розв'язання. Проекція швидкості точки знаходиться як похідна від координати за часом:

$$v_x = \dot{x} = v_0 - gt.$$

Проекція прискорення точки при прямолінійному русі є похідна від проекції швидкості за часом:

$$a_x = \dot{v}_x = -g,$$

тобто прискорення точки – стала величина. З рівняння $v_x(t)$ видно, що при $t=0$ $v_x = v_0$. Отже, стала v_0 є значенням проекції швидкості точки у початковий момент часу.

Час, коли точка досягне максимальної висоти, відповідає нульовій швидкості. З $v_x(t)$ знайдемо:

$$0 = v_0 - gT.$$

Таким чином, час, протягом якого точка досягне найвищого положення, складає:

$$T = \frac{v_0}{g}.$$

Найбільшу висоту підйому знайдемо, підставивши отриманий час до рівняння $x(t)$:

$$h = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Відповідь: швидкість точки $v_x = v_0 - gt$, прискорення $a_x = -g$, максимальна висота підйому $h = \frac{v_0^2}{2g}$, час, що відповідає максимальній висоті підйому $T = \frac{v_0}{g}$.

7.2. Природний спосіб задання руху точки

У випадку природнього способу задання руху точки єдиним рівнянням руху точки (природнім рівнянням руху точки) є:

$$\sigma = OM = f(t),$$

де σ – криволінійна координата, яка відраховується вздовж дуги від деякої початкової точки O на траєкторії. При цьому способі передбачається, що траєкторія рухомої точки M відома.



Рис. 7.4. Природній спосіб задання руху точки.

Якщо рівняння руху точки дані у декартових координатах

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t). \end{cases}$$

і необхідно знайти рівняння руху у природній формі, то необхідно спочатку визначити траєкторію точки, а потім знайти закон руху цієї точки траєкторією.

Знаходження рівняння траєкторії виконується шляхом виключення часу з рівнянь руху у координатній формі. Для знаходження рівняння руху $\sigma = f(t)$ необхідно використати вираз для диференціалу дуги:

$$\pm d\sigma = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)} dt.$$

Інтегруючи, знайдемо:

$$\sigma = \pm \int \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)} dt + c.$$

Довільна похідна інтегрування c знаходиться із початкових умов.

Швидкість точки при природньому способі задання руху точки:

$$v_\tau = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma}.$$

Якщо v_τ додатня, то точка рухається вбік збільшення значень σ , якщо ж від'ємна – зменшення.

Прискорення при природньому способі заданні руху точки визначається за допомогою проекцій на природні вісі координат.

Природні вісі координат, або *натуральний триєдр* – ортогональна система координат, яка складається з вісей: *дотичної*, направленої вбік зростання дугової координати; *головної нормалі*, направленої вбік увігнутості траєкторії; *бінормалі*, направленої таким чином, щоб вісі утворювали праву систему координат. При переході від однієї точки траєкторії до іншої природні вісі, залишаючись між собою ортогональними, безперервно повертаючись, супроводжуючи руху точку.

Прискорення точки $\vec{a}$ визначається як векторна сума дотичного $\vec{a}_\tau$ і нормального прискорень $\vec{a}_n$ точки:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Дотичне прискорення визначається за формулою:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \dot{v}_\tau.$$

Дотичне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною. Дотичне прискорення відсутнє за незмінної швидкості і тоді, коли швидкість досягає екстремальних значень.

Нормальне прискорення визначається згідно формули:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho},$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії.

Нормальне прискорення характеризує зміну швидкості за напрямком. Нормальне прискорення відсутнє при прямолінійному русі точки, а також у точках перегину траєкторії, оскільки в обох випадках радіус кривизни прямує до нескінченності.

Модуль прискорення визначається за виразами:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}.$$

Напрямок прискорення визначається напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{a}, \vec{\tau}) = \frac{\dot{v}}{a}, \quad \cos(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{v^2}{\rho a}.$$

Розглянемо розв'язання задач на природній спосіб представлення руху точки.

Задача 7.4

Точка здійснює плоский рух згідно рівнянь:

$$x = a \cos kt,$$

$$y = \frac{g}{k^2} (1 - \cos kt).$$

Визначити рівняння траєкторії точки і закон руху точки траєкторією, відраховуючи відстань від початкового положення точки.

Розв'язання. Для отримання рівняння траєкторії точки виконуємо наступні перетворення:

$$\cos kt = \frac{x}{a},$$

$$y = \frac{g}{k^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Отже траєкторію точки являє собою відрізок прямої лінії, що визначається останнім рівнянням і додатковою умовою $|x| \leq a$ (рис. 7.5).

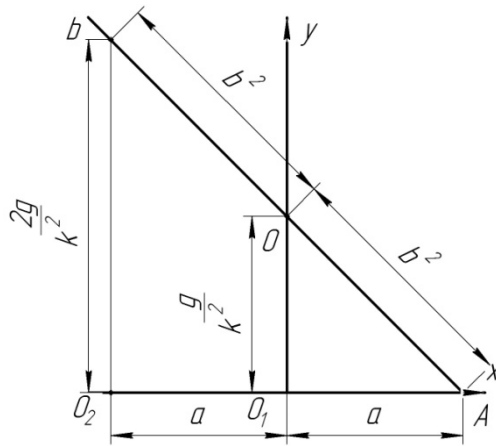


Рис. 7.5. До задачі 7.4.

Для знаходження закону руху точки траєкторією, маємо:

$$dx = -ak \sin kt \cdot dt,$$

$$dy = \frac{g}{k^2} k \sin kt \cdot dt.$$

Тоді

$$d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{a^2 k^2 + \frac{g^2}{k^2}} \sin kt \cdot dt.$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$\sigma = -\sqrt{a^2 k^2 + \frac{g^2}{k^2}} \cdot \frac{1}{k} \cos kt + c_1.$$

Оскільки координата σ відраховується за умовою задачі від початкового положення точки, то при $t=0$ $\sigma=0$. Підставляючи ці значення до останнього виразу, отримаємо:

$$c_1 = \frac{1}{k} \sqrt{a^2 k^2 + \frac{g^2}{k^2}}.$$

І остаточно отримуємо закон руху точки траєкторією:

$$\sigma = \frac{1}{k} \sqrt{a^2 k^2 + \frac{g^2}{k^2}} (1 - \cos kt).$$

Це рівняння гармонічного коливального руху точки.

Задача 7.5

Точка рухається колом радіуса $R=6$ м за законом:

$$s = 6 + 9t^2 - 12t^3.$$

Визначити швидкість і прискорення точки у момент часу $t=1$ с, а також найменше значення швидкості точки.

Розв'язання. Визначимо швидкість точки згідно формули $v=\dot{s}$:

$$v_{\tau}=18t-36t^2.$$

$$v_{1\tau}=v_{\tau}|_{t=1\text{с}}=-18\text{ м/с}; |v_{1\tau}|=v_1=18\text{ м/с}.$$

Знак “–” вказує на те, що швидкість точки у момент часу $t=1$ с направлена до початку відліку дуги.

Знайдемо прискорення точки за формулою $a_1=\sqrt{a_{1\tau}^2+a_{1n}^2}$:

$$a_{\tau}=\dot{v},\ a_{\tau}=18-72t,\ a_{1\tau}=a_{\tau}|_{t=1\text{с}}=-54\text{ м/с}^2,$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho},\ a_n=\frac{(18t-36t^2)^2}{\rho},\ \text{де } \rho=R=6\text{ м}.$$

$$a_{1n}=a_n|_{t=1\text{с}}=54\text{ м/с}^2.$$

Отже,

$$a_1=54\sqrt{2}\text{ м/с}^2.$$

$$v=v_{\min}\text{ при } \dot{v}=0; 18-72t=0,\ t_2=0,25\text{ с}.$$

$$v_{\min}=v|_{t=t_2}=2,25\text{ м/с}.$$

Відповідь: $v_1=18\text{ м/с}$, $a_1=54\sqrt{2}\text{ м/с}^2$, $v_{\min}=2,25\text{ м/с}$.

РОЗДІЛ 8. ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ

До простіших рухів твердого тіла належать *поступальний рух* і *обертання твердого тіла навколо нерухомої вісі*.

Поступальний рух твердого тіла – такий рух, при якому будь-яка пряма, проведена у тілі, залишається увесь час паралельною своєму початковому положенню.

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої вісі, точки, що лежать на вісі обертання, нерухомі, інші точки описують кола із центрами, що знаходяться на вісі обертання і з радіусами, що дорівнюють довжині перпендикуляра, опущеного із точки на вісь обертання.

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої вісі криволінійна координата будь-якої точки, що рухається колом, що є її траєкторією, визначається формулою:

$$\sigma=\sigma_0+h\varphi,$$

де σ – дугова координата рухомої точки, σ_0 – початкове значення дугової координати, h – найменша відстань від точки до вісі обертання, φ – кут повороту твердого тіла навколо вісі.

Рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої вісі:

$$\varphi = f(t).$$

Кутова швидкість твердого тіла характеризує швидкість зміни кута повороту твердого тіла, і є вектором, що спрямований за віссю обертання у той бік, з якого обертання видно таким, що проходить проти часової стрілки:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Кутове прискорення:

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}.$$

Рівномірне обертання твердого тіла здійснюється за законом:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_z t.$$

Рівнозмінне обертання:

$$\begin{aligned}\omega_z &= \omega_{0z} + \varepsilon_z t, \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}.\end{aligned}$$

Швидкість точки твердого тіла, що обертається:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

де $\vec{r}$ – вектор-радіус, проведений із будь-якої точки, що лежить на вісі обертання до точки твердого тіла, що розглядається.

Прискорення точки складається з нормального і тангенціального прискорень.

Нормальне прискорення спрямоване за перпендикуляром до вісі обертання у бік цієї вісі, а його модуль дорівнює:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 h.$$

Дотичне прискорення спрямоване за дотичною до траєкторії, а його проекція дорівнює:

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \varepsilon_z h.$$

Модуль повного прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Послідовність розв'язання задач на обертання твердого тіла навколо нерухомої вісі:

Тип задач I. Задано рівняння обертання твердого тіла. Необхідно знайти кутову швидкість, кутове прискорення, швидкість і прискорення точки твердого тіла.

1. Обираємо систему координат так, щоб одна із осей (для визначеності z) співпадала із віссю обертання;

2. Складаємо рівняння обертання твердого тіла (залежність кута повороту від часу);

3. Диференціюючи за часом кут повороту, визначаємо проекцію кутової швидкості на вісь обертання;

4. Обчислюючи другу похідну від кута повороту за часом, знаходимо проекцію кутового прискорення на вісь обертання;

5. Користуючись виразом проекції кутової швидкості на вісь обертання, обчислюємо лінійну швидкість точки і її нормальне прискорення;

6. Користуючись виразом проекції кутового прискорення на вісь обертання, визначаємо дотичне прискорення точки;

7. За знайденими нормальним і дотичним прискореннями знаходимо повне прискорення точки за величиною і напрямком.

Тип задач II. Задано кутове прискорення або кутова швидкість твердого тіла; необхідно визначити рівняння обертання, швидкість і прискорення точки твердого тіла.

1. Інтегруючи диференціальне рівняння, яке визначає проекцію кутового прискорення на вісь обертання, знайти проекцію кутової швидкості; довільну сталу інтегрування визначити за початковими умовами;

2. Інтегруючи диференціальне рівняння, яке визначає проекцію кутової швидкості на вісь обертання, знайти рівняння обертання твердого тіла; довільну сталу інтегрування визначити за початковими умовами;

3. Користуючись виразами проекції кутової швидкості на вісь обертання, обчислити величину швидкості і нормального прискорення точки;

4. Визначити величину дотичного прискорення точки, знаючи проекцію кутового прискорення на вісь обертання, і потім знайти повне прискорення точки.

Розглянемо розв'язання задач на обертальний рух твердих тіл.

Задача 8.1

Вал разом із приєднаними до нього пластинами (рис. 8.1) обертається у підшипниках згідно рівняння:

$$\varphi = a \ln \left(1 + \frac{\omega_0 t}{a} \right),$$

де φ – кут повороту вала, a і ω_0 – сталі коефіцієнти.

Знайти кутову швидкість і кутове прискорення вала. Знайти швидкість і прискорення центра пластини A , що знаходиться на відстані R від вісі обертання.

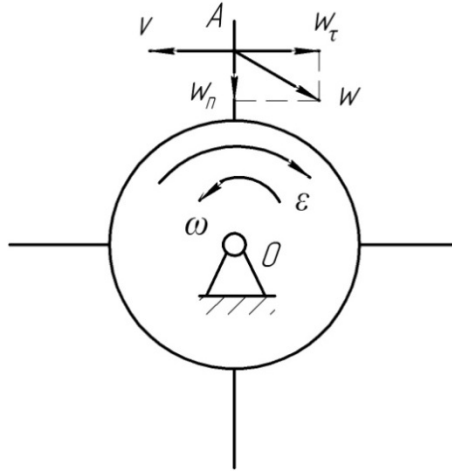


Рис. 8.1. До задачі 8.1

Розв'язання. Проекція кутової швидкості вала на вісь обертання:

$$\omega_z = \dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\omega_0}{a} t}.$$

З цієї рівності видно, що у початковий момент часу при $t=0$ кутова швидкість дорівнювала ω_0 .

Проекція кутового прискорення вала на вісь обертання:

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = -\frac{\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0}{a} t\right)^2} \cdot \frac{1}{a},$$

або

$$\varepsilon_z = -\frac{\omega_z^2}{a}.$$

Модуль швидкості середини пластини дорівнює:

$$v = R\omega = \frac{R\omega_0}{1 + \frac{\omega_0}{a}t}.$$

Прискорення цієї точки складається із нормального і тангенціального прискорень. Величина нормального прискорення:

$$w_n = R\omega^2 = \frac{R\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0}{a}t\right)^2}.$$

Дотичне прискорення:

$$w_\tau = R\varepsilon_z = -R\frac{\omega^2}{a} = -\frac{R}{a}\frac{\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0}{a}t\right)^2}.$$

Модуль повного прискорення дорівнюватиме:

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = \frac{R\omega^2}{a}\sqrt{1 + a^2} = \frac{R}{a}\frac{\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0}{a}t\right)^2}\sqrt{1 + a^2}.$$

Відповідь: кутова швидкість вала $\omega_z = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\omega_0}{a}t}$, кутове прискорення вала

$$\varepsilon_z = -\frac{\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0}{a}t\right)^2} \cdot \frac{1}{a}, \quad \text{швидкість центра пластини } v = \frac{R\omega_0}{1 + \frac{\omega_0}{a}t}, \quad \text{прискорення}$$

$$\text{центра пластини } w = \frac{R}{a}\frac{\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0}{a}t\right)^2}\sqrt{1 + a^2}.$$

Задача 8.2

На вал радіусом $R = 0,6$ м колеса 2 (рис. 8.2) навитий канат, до кінця якого підвішений вантаж 1. Цей вантаж рухається вертикально за законом $x = 0,3t + 0,2\cos\frac{\pi}{6}t$ м. При цьому зубчасте колесо 2 радіусом $r_2 = kR_2$ ($k = 0,35$) знаходиться у внутрішньому зачепленні із колесом 3 радіуса $r_3 = kR_3$, де $R_3 = 0,3$ м.

Знайти кутові швидкості та прискорення усіх тіл, а також дотичні, нормальні та повні прискорення точок M і N у момент часу $t=6$ с.

Розв'язання. Визначаємо швидкість тіла 1:

$$v_1 = \dot{x} = 0,3 - 0,2 \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} t.$$

У момент часу $t=6$ с $v_1 = 0,3$ м/с.

Швидкість тіла 1 спрямована вниз вздовж вісі x .

Прискорення тіла 1:

$$a_1 = \dot{v}_1 = \ddot{x} = -0,2 \frac{\pi^2}{36} \cos \frac{\pi}{6} t.$$

У момент часу $t=6$ с $a_1 = 0,2 \frac{\pi^2}{36} = 0,055$ м/с².

Прискорення спрямоване у той самий бік, куди й швидкість.

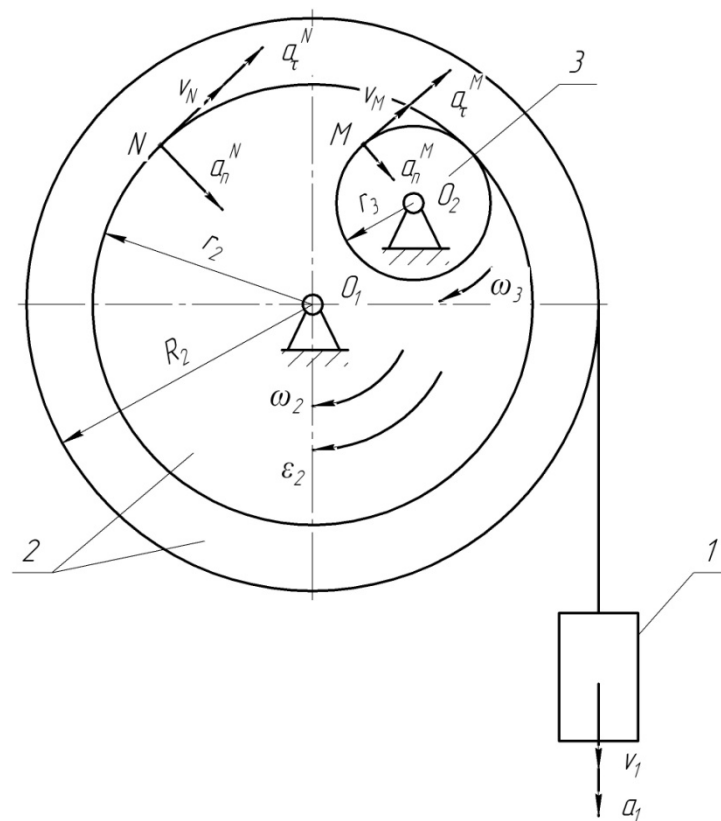


Рис. 8.2. До задачі 8.2

Кутова швидкість і кутове прискорення тіла 2:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5 \text{ с}^{-1}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2} = \frac{0,055}{0,6} = 0,1 \text{ с}^{-2}.$$

Повне прискорення точки N :

$$a^N = \sqrt{(a_n^N)^2 + (a_\tau^N)^2}.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n^N = \omega_2^2 r_2 = \omega_2^2 k R_2 = 0,5^2 \cdot 0,35 \cdot 0,6 = 0,053 \text{ м/с}^2.$$

Дотичне прискорення:

$$a_\tau^N = \varepsilon_2 r_2 = \varepsilon_2 k R_2 = 0,1 \cdot 0,35 \cdot 0,6 = 0,021 \text{ м/с}^2.$$

Тоді повне прискорення буде:

$$a = \sqrt{0,021^2 + 0,053^2} = 0,057 \text{ м/с}^2.$$

Швидкості точок N і M рівні між собою, тому що колеса радіусами r_2 і r_3 знаходяться у зачепленні. Тож $v_M = v_N = 0,105 \text{ м/с}$.

Кутова швидкість і прискорення тіла 3:

$$\omega_3 = \frac{v_M}{k R_3} = \frac{0,105}{0,35 \cdot 0,3} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_\tau^M}{k R_3} = \frac{0,021}{0,105} = 0,2 \text{ с}^{-2}.$$

Повне прискорення точки M :

$$a^M = \sqrt{(a_n^M)^2 + (a_\tau^M)^2}.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n^M = \omega_3^2 r_3 = 1^2 \cdot 0,35 \cdot 0,3 = 0,105 \text{ м/с}^2.$$

Дотичне прискорення:

$$a_\tau^M = a_\tau^N = 0,021 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення точки M :

$$a^M = \sqrt{0,105^2 + 0,021^2} = 0,107 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $v_1 = \text{м/с}$, $a_1 = \text{м/с}^2$, $\omega_2 = \text{с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = \text{с}^{-2}$, $a_\tau^M = \text{м/с}^2$, $a_n^M = \text{м/с}^2$, $a_M = \text{м/с}^2$, $a_\tau^N = \text{м/с}^2$, $a_n^N = \text{м/с}^2$, $a_N = \text{м/с}^2$.

РОЗДІЛ 9. ПЛОСКИЙ РУХ

9.1. Теорема швидкостей

Плоский (плоско-паралельный) рух – такий рух твердого тіла, за якого траєкторії усіх його точок лежать у площинах, паралельних деякій нерухомій площині.

За такого руху всі точки твердого тіла, що лежать на перпендикулярі, відновленому до цієї площини, мають однакові траєкторії, швидкості та прискорення. Із цього випливає, що при вивченні плоского руху твердого тіла досить досліджувати рух плоскої фігури, що є перерізом твердого тіла площиною, паралельною нерухомій.

Будь-яке переміщення плоскої фігури можна розкласти на поступальний рух разом із довільно обраною точкою O_1 , яка називається *полюсом*, і на обертання фігури навколо цієї точки (рис. 9.1).

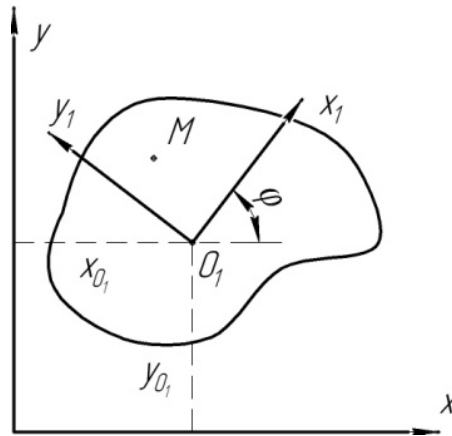


Рис. 9.1. Плоска фігура.

Обираючи нерухому систему координат xOy і систему координат $x_1O_1y_1$, жорстко зв'язану із плоскою фігурою, маємо *рівняння плоского руху твердого тіла*:

$$\begin{cases} x_{O_1} = f_1(t), \\ y_{O_1} = f_2(t), \\ \varphi = f_3(t). \end{cases}$$

У цих рівняннях x_{O_1} , y_{O_1} – координати полюса – початку рухомої системи осей; φ – кут повороту рухомих осей координат відносно нерухомих.

Система рівнянь повністю визначає положення плоскої фігури у будь-який момент часу.

Спосіб визначення швидкостей точок тіла при його плоскому русі за допомогою теореми швидкостей базується на використанні формули розподілу швидкостей (рис. 9.2):

$$\vec{v} = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{r}_1,$$

де $\vec{v}$ – шукана швидкість точки M , $\vec{v}_{O_1}$ – швидкість полюса O_1 , $\vec{\omega}$ – кутова швидкість плоскої фігури, $\vec{r}_1$ – вектор-радіус, проведений із полюса O_1 до точки M .

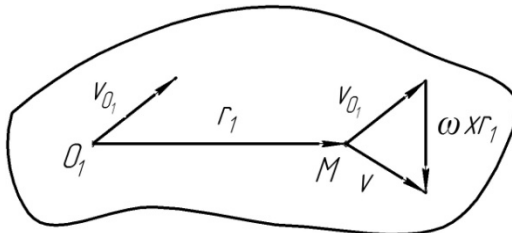


Рис. 9.2. До визначення теореми швидкостей.

Теорема швидкостей часто записується й у іншому вигляді:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA},$$

де $\vec{v}_B$ – шукана швидкість точки B , $\vec{v}_A$ – відома швидкість точки A , обраної за полюс, а $\vec{v}_{BA}$ – обертова швидкість точки B навколо точки A , що дорівнює за модулем добутку миттєвої кутової швидкості плоскої фігури на відстань від точки до полюсу, та направлена перпендикулярно до відрізка прямої BA у бік миттєвого обертання фігури.

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times A\vec{B}, \quad v_{BA} = \omega \cdot BA,$$

Чимала кількість задач може бути вирішена за допомогою теореми про рівність проєкцій швидкості кінців відрізка плоскої фігури на напрямок відрізка.

Послідовність розв'язання задач при використанні теореми швидкостей:

1. Обрати за полюс ту точку плоскої фігури, швидкість якої відома чи легко визначається з умов задачі;
2. Знайти іншу точку плоскої фігури, напрямок швидкості якої відомий;
3. Використовуючи теорему швидкостей, знайти швидкість цієї точки плоскої фігури;
4. Виходячи із теореми швидкостей, визначити значення кутової швидкості плоскої фігури у даний момент часу;
5. Знаючи кутову швидкість фігури та швидкість полюса, знайти за допомогою формули розподілу швидкостей шукані швидкості інших точок фігури.

Розглянемо використання теореми швидкостей для розв'язання задач на плоский рух.

Задача 9.1

Стрижень AB здійснює плоский рух. Швидкість точки A утворює кут 30° із стрижнем і дорівнює у даний момент часу за величиною 5 м/с . Швидкість точки B того ж моменту утворює кут 60° із продовженням стрижня (рис. 9.3). Визначити величину швидкості точки B , а також кутову швидкість стрижня, якщо його довжина $AB = 2 \text{ м}$. Знайти також швидкість точки D , середини стрижня.

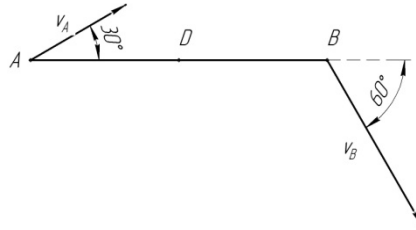


Рис. 9.3. До задачі 9.1

Розв'язання. Цю задачу вирішимо за допомогою теореми швидкостей. Згідно формули розподілу швидкостей:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Будуємо трикутник швидкостей, що відповідає останньому рівнянню (рис. 9.4).

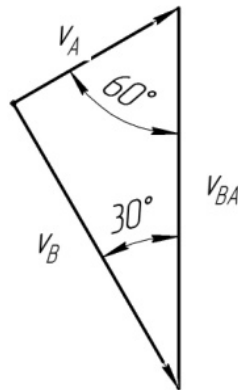


Рис. 9.4. До задачі 9.1

Вирішуючи цей трикутник, знаходимо:

$$v_{BA} = \frac{v_A}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{0,5} = 10 \text{ м/с},$$

$$v_B = v_{BA} \cdot \cos 30^\circ = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 8,65 \text{ м/с}.$$

Помічаючи, що

$$v_{BA} = \omega \cdot BA = \omega \cdot 2,$$

Визначаємо величину кутової швидкості:

$$\omega \cdot 2 = 10, \text{ або } \omega = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Швидкість точки D , середини стрижня AB , може бути знайдена за допомогою теореми швидкостей:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \frac{1}{2} \vec{v}_{BA}.$$

Побудуємо трикутник швидкостей (рис. 12) за останнім виразом.

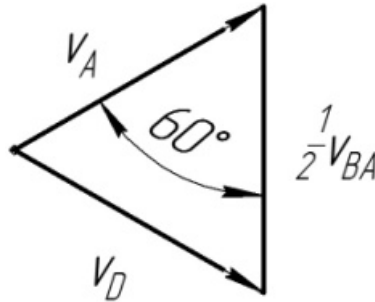


Рис. 9.5. До задачі 9.1

Величина швидкості точки D легко визначається із трикутника швидкостей.

Дві сторони цього трикутника рівні за величиною $v_A = \frac{1}{2}v_{BA} = 5 \text{ м/с}$, а кут між цими сторонами дорівнює 60° . Це вказує на те, що трикутник рівносторонній. Величина швидкості точки D також дорівнює 5 м/с .

Відповідь: $v_B = 8,65 \text{ м/с}$, $\omega_{AB} = 5 \text{ с}^{-1}$, $v_D = 5 \text{ м/с}$.

Задача 9.2

Кривошипно-шатунний механізм складається із кривошипа OA , шатуна AB і повзуна B . Кривошип обертається навколо точки O згідно рівняння $\varphi = kt$, де $k = 3 \text{ с}^{-1}$ – постійний коефіцієнт. Повзун B рухається горизонтальними напрямними, що проходять через точку O (рис. 9.6).

Розміри дані: $OA = r = 2 \text{ м}$, $AB = l = 3,46 \text{ м}$. Визначити у положенні, коли кут $\angle OAB = 90^\circ$, швидкість повзуна B і кутову швидкість шатуна. Знайти у цьому положенні швидкість середини шатуна – точки D .

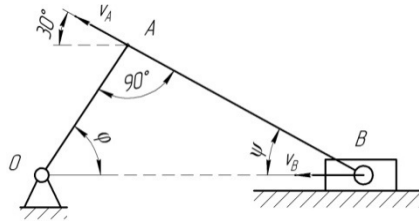


Рис. 9.6. До задачі 9.2

Розв'язання. Вирішимо задачу за допомогою теореми швидкостей. Оскільки кут $\angle ABO = 30^\circ$, то використовуючи теорему про рівність проєкцій швидкостей точок A і B на напрямок відрізка AB , маємо:

$$v_A = v_B \cos 30^\circ,$$

або

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 6,92 \text{ м/с.}$$

Проектуючи векторну рівність

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA},$$

(де $v_{BA} = BA \cdot \omega_{\text{мш}}$) на напрямок, перпендикулярний до AB , маємо:

$$v_B \cdot \sin \psi = \omega_{\text{мш}} \cdot AB,$$

звідкіля визначається величина миттєвої кутової швидкості шатуна

$$\omega_{\text{мш}} = \frac{v_B \cdot \sin \psi}{AB} = \frac{6,92 \cdot 0,5}{3,46} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Швидкість точки D може бути знайдена за формулою розподілу швидкостей:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + 0,5 \cdot \vec{v}_{BA}.$$

Будуємо трикутник швидкостей згідно останнього рівняння (рис. 9.7).

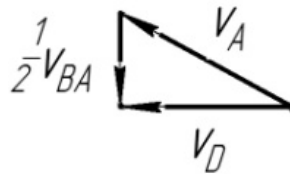


Рис. 9.7. До задачі 9.2

Вирішуючи його, знаходимо величину шуканої швидкості точки D .

Відповідь: $v_B = 6,92 \text{ м/с}$, $\omega_{AB} = 1 \text{ с}^{-1}$.

9.2. Миттєвий центр швидкостей

При непоступальному русі плоскої фігури у кожен момент часу існує така точка тіла, швидкість якої дорівнює нулю. Ця точка зазвичай називається *миттєвим центром швидкостей* (МЦШ) і позначається P . Єдиним виключенням є випадок миттєво-поступального руху.

Обираючи МЦШ за полюс, маємо такий закон розподілу швидкостей у пласкій фігурі:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1, \quad v = v_{MP},$$

де v – шукана швидкість довільної точки M , ω – кутова швидкість плоскої фігури, r_1 – вектор-радіус, проведений із МЦШ до точки M , який називається *миттєвим радіусом*.

Таким чином, швидкості усіх точок плоскої фігури є у даний момент обертовими швидкостями навколо МЦШ. Величини швидкостей точок плоскої фігури пропорційні величинам миттєвих радіусів

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP}.$$

Методи знаходження положення МЦШ

а) Відомі швидкість однієї точки O і кутова швидкість плоскої фігури (рис. 9.8). МЦШ знаходиться на перпендикулярі, відновленому до швидкості точки O , на відстані:

$$OP = \frac{v_O}{\omega}.$$

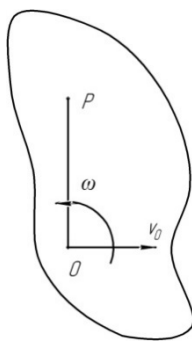


Рис. 9.8. Миттєвий радіус.

Напрямок перпендикуляра знаходиться обертанням v_O на кут $0,5\pi$ вбік обертання.

б) Відомі напрямки швидкостей двох точок плоскої фігури A і B (рис. 9.9). МЦШ знаходиться на перехресті перпендикулярів, відновлених у точках A і B до швидкостей цих точок.

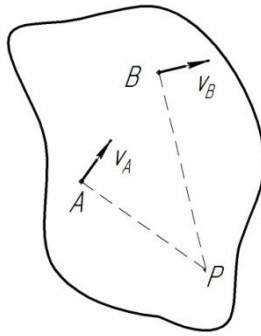


Рис. 9.9. МЦШ.

с) Швидкості двох точок A і B плоскої фігури паралельні одна одній, перпендикулярні відрізку AB , спрямовані в один бік та нерівні. МЦШ знаходиться на продовженні AB з боку тієї точки, чия швидкість менша (рис. 9.10).

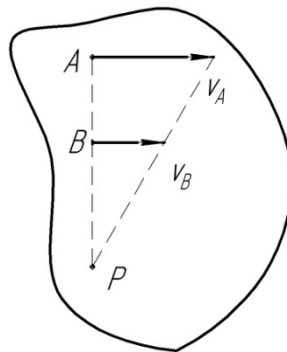


Рис. 9.10. МЦШ.

д) Швидкості двох точок A і B плоскої фігури паралельні одна одній, перпендикулярні відрізку AB і спрямовані у різні сторони (рис. 9.11).

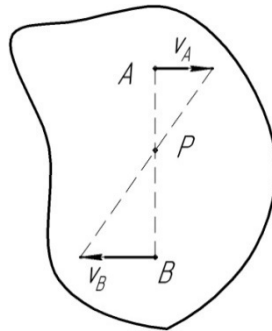


Рис. 9.11. МЦШ

е) Плоска фігура котиться без ковзання нерухомою кривою (рис. 9.12). МЦШ знаходиться у точці дотику фігури з кривою.

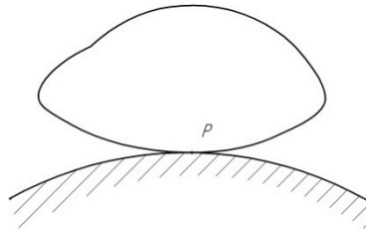


Рис. 9.12. МЦШ.

Якщо швидкості двох точок плоскої фігури рівні за величиною, паралельні одна одній і не перпендикулярні до відрізка, з'єднуючого обидві точки (рис. 9.13), або швидкості двох точок фігури паралельні, рівні одна одній і перпендикулярні до відрізка, з'єднуючого обидві точки (рис. 9.14), то МЦШ у даний момент не існує, або, можна сказати, що він знаходиться у нескінченності. Кутова швидкість плоскої фігури у даний момент часу нульова і рух називається миттєво-поступальним, причому швидкості усіх точок плоскої фігури у цей момент часу рівні.

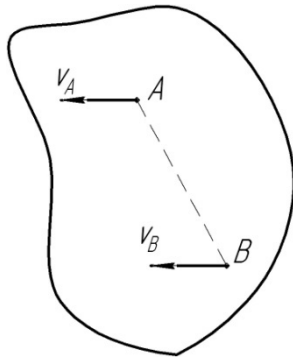


Рис. 9.13.

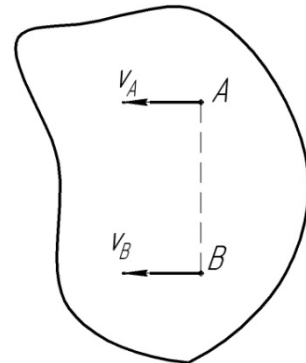


Рис. 9.14.

Послідовність розв'язання задач за допомогою МЦШ:

1. Визначити положення МЦШ плоскої фігури одним із вищезазначених способів;
2. Знайти величину миттєвого радіуса тієї точки плоскої фігури, швидкість якої відома, і визначити кутову швидкість плоскої фігури, розділивши величину швидкості точки на величину миттєвого радіуса;
3. Знайти шукані величини швидкостей точок плоскої фігури, помножуючи кутову швидкість на миттєвий радіус відповідної точки чи використовуючи відповідну формулу.

Розглянемо використання поняття МЦШ для розв'язання задач на плоский рух.

Задача 9.3

Стрижень AB здійснює плоский рух. Швидкість точки A утворює кут 30° із стрижнем і дорівнює у даний момент часу за величиною 5 м/с . Швидкість точки B того ж моменту утворює кут 60° із продовженням стрижня (рис. 9.15). Визначити величину швидкості точки B , а також кутову швидкість стрижня, якщо його довжина $AB = 2 \text{ м}$. Знайти також швидкість точки D , середини стрижня.

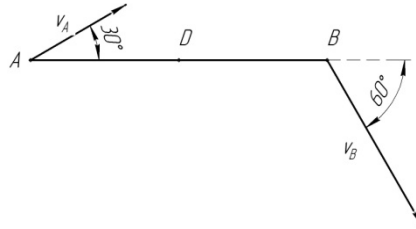


Рис. 9.15. До задачі 9.3

Розв'язання. Вирішимо цю задачу за допомогою МЦШ.

Відновимо перпендикуляри до швидкостей точок A і B (рис. 9.16) для знаходження МЦШ стрижня AB .

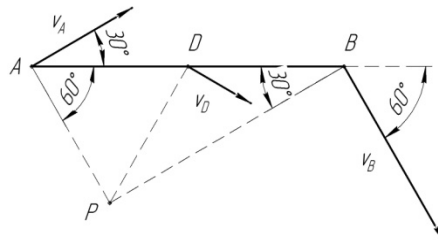


Рис. 9.16. До задачі 9.3

Перехрестя цих прямих визначає положення МЦШ P . Знаходимо миттєві радіуси:

$$AP = AB \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м},$$

$$BP = AB \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,73 \text{ м}.$$

Кутова швидкість стрижня:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{5}{1} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

І звідси швидкість точки B :

$$v_B = \omega \cdot BP \approx 5 \cdot 1,73 = 8,65 \text{ м/с}.$$

Для визначення швидкості середини стрижня D , проведемо миттєвий радіус PD . Із трикутника ADP випливає, що $AP = AD = 1$ м. Звідси трикутник рівносторонній і $DP = 1$ м. Тоді

$$v_D = \omega \cdot DP = 5 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v_B = 8,65$ м/с, $\omega_{AB} = 5$ с⁻¹, $v_D = 5$ м/с.

Задача 9.4

Кривошипно-шатунний механізм складається із кривошипа OA , шатуна AB і повзуна B . Кривошип обертається навколо точки O згідно рівняння $\varphi = kt$, де $k = 3$ с⁻¹ – постійний коефіцієнт. Повзун B рухається горизонтальними напрямними, що проходять через точку O (рис. 9.17).

Розміри дані: $OA = r = 2$ м, $AB = l = 3,46$ м. Визначити у положенні, коли кут $\angle OAB = 90^\circ$, швидкість повзуна B і кутову швидкість шатуна. Знайти у цьому положенні швидкість середини шатуна – точки D .

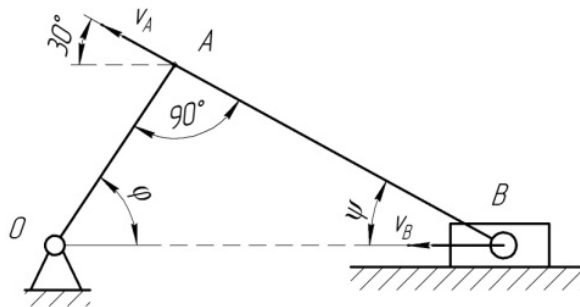


Рис. 9.17. До задачі 9.4

Розв'язання. Вирішимо задачу за допомогою МЦШ.

Проекція кутової швидкості кривошипа на вісь z :

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = k = 3 \text{ с}^{-1}.$$

Величина швидкості точки A , як такої, що належить кривошипу, дорівнює:

$$v_A = r \cdot |\omega_z| = 2 \cdot 3 = 6 \text{ м/с}.$$

Знаходимо МЦШ (рис. 9.18).

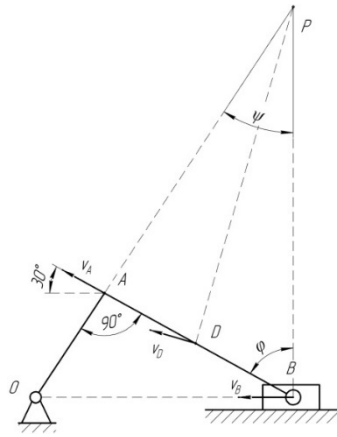


Рис. 9.18. До задачі 9.4

У $\triangle OAB$ сторона $OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = 4 \text{ м}$, і звідси, кут $\varphi = 60^\circ$, а кут $\angle ABO = \psi = 30^\circ$.

Далі помічаємо, що кут $\angle ABP = \varphi$, як утворений сторонами, перпендикулярними до OA і OB . Аналогічно кут $\angle APB = \psi$. І з трикутника ABP випливає, що:

$$AP = AB \cdot \operatorname{tg} \varphi = 3,46\sqrt{3} = 6 \text{ м},$$

$$BP = \frac{AB}{\cos \varphi} = 3,46 \cdot 2 = 6,92 \text{ м}.$$

Миттєву кутову швидкість шатуна знаходимо, визначаючи величину швидкості точки A , як приналежної шатуну, і прирівнюємо її величині, знайдений за виразом:

$$v_A = r \cdot \omega = AP \cdot \omega_{\text{шатуна}},$$

де $\omega_{\text{шатуна}}$ – величина миттєвої кутової швидкості шатуна.

Звідси

$$\omega_{\text{шатуна}} = \frac{r \cdot \omega}{AP} = \frac{6}{6} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Величина швидкості точки B визначиться так:

$$v_B = BP \cdot \omega_{\text{шатуна}} = 6,92 \text{ м/с}.$$

Перші ніж знайти швидкість точки D обчислимо довжину миттєвого радіусу DP :

$$DP = \sqrt{AP^2 + AD^2} = \sqrt{36 + 3} = \sqrt{39} = 6,25 \text{ м}.$$

Тоді

$$v_D = DP \cdot \omega_{\text{шатуна}} = 6,25 \cdot 1 = 6,25 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v_B = 6,92 \text{ м/с}$, $\omega_{AD} = 1 \text{ с}^{-1}$, $v_D = 6,25 \text{ м/с}$.

9.3. Теорема прискорень

Формула розподілу прискорень (рис. 9.19) при плоскому русі тіла має такий вигляд:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO}^{ob} + \vec{a}_{MO}^{\partial\omega},$$

де $\vec{a}_M$ – повне прискорення довільної точки M плоскої фігури; $\vec{a}_O$ – прискорення полюса O ; $\vec{a}_{MO}^{ob}$ – доцентрове прискорення при обертанні фігури навколо полюса; $\vec{a}_{MO}^{\partial\omega}$ – обертове прискорення навколо полюса.

Причому:

$$\vec{a}_{MO}^{\partial\omega} = -\omega^2 \vec{r}_1, \quad \vec{a}_{MO}^{\partial\omega} = \omega^2 \cdot OM;$$

$$\vec{a}_{MO}^{ob} = \varepsilon \times \vec{r}_1, \quad \vec{a}_{MO}^{ob} = \varepsilon \cdot OM,$$

де $\vec{r}_1$ – вектор-радіус точки M , проведений з полюса O .

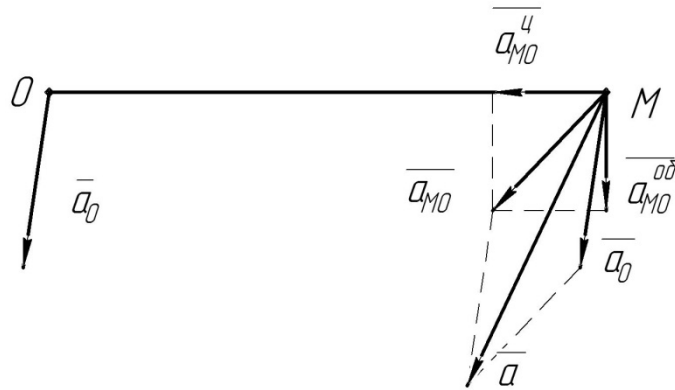


Рис. 9.19. До визначення теореми прискорень.

Відносне прискорення:

$$\vec{a}_{MO} = \vec{a}_{MO}^{\partial\omega} + \vec{a}_{MO}^{ob},$$

причому доцентрове прискорення $\vec{a}_{MO}^{\partial\omega}$ направлено від точки M до полюса O . Обертове прискорення $\vec{a}_{MO}^{ob}$ направлено перпендикулярно до вектор-радіуса $\vec{r}_1$ вбік обертання плоскої фігури, якщо обертання прискорене, та в інший бік, якщо обертання сповільнене.

У такий спосіб можна визначити прискорення точки, якщо відомий кут повороту плоскої фігури як функція часу, оскільки диференціюючи його за часом можна визначити ω_z і ε_z .

Одна із точок плоскої фігури, напрямок прискорення якої може бути визначений, співпадає із МЦШ. Прискорення цієї точки є дотичним прискорення, оскільки нормальне прискорення її дорівнює нулю. Прискорення буде спрямоване за спільною нормаллю до нерухомої і рухомої центроїд (рис. 9.20).

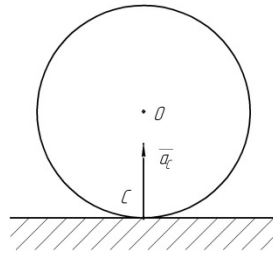


Рис. 9.20.

Послідовність вирішення задач на визначення прискорень точок плоскої фігури (відомі швидкість та прискорення однієї точки плоскої фігури та напрямок швидкості та прискорення другої точки фігури):

1. Знайти МЦШ, збудувавши перпендикуляри до швидкостей двох точок плоскої фігури, і визначити миттєву кутову швидкість фігури;
2. Визначити доцентрове прискорення другої точки навколо першої;
3. Прирівнявши до нуля суму проекцій усіх складових прискорень на вісь, перпендикулярну до відомого напрямку прискорення, знайти з цієї рівності величину невідомого обертового прискорення;
4. Визначити миттєве кутове прискорення плоскої фігури за знайденим обертовим прискоренням;
5. Знайти прискорення будь-якої точки плоскої фігури за допомогою теореми прискорень.

Розглянемо використання теореми прискорень для розв'язання задач на плоский рух.

Задача 9.5

Прямокутник $ABCD$ (рис. 9.21) здійснює плоский рух. Прискорення точки A у даний момент дорівнює 2 см/с^2 і складає кут 30° із прямою AB . Прискорення точки B дорівнює 6 см/с^2 і утворює кут 60° з прямою BA . Довжини сторін: $AB = 10 \text{ см}$, $BC = 5 \text{ см}$. Визначити миттєву кутову швидкість і миттєве кутове прискорення прямокутника, а також прискорення точки C .

Розв'язання. Оберемо точку A за полюс.

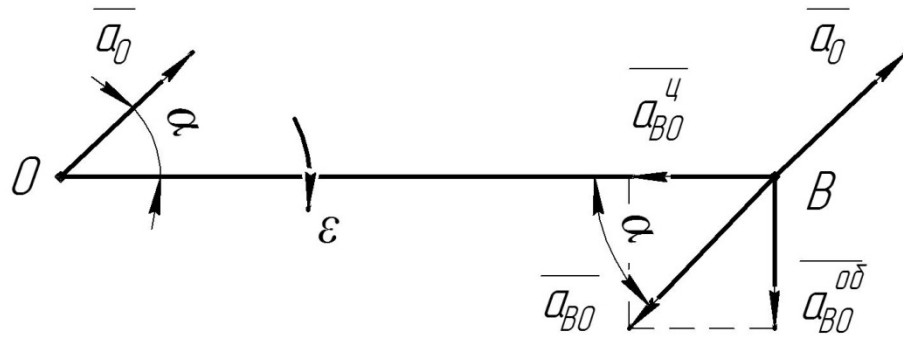


Рис. 9.21. До задачі 9.5.

Прискорення точки B дорівнює:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{o\bar{o}} + \vec{a}_{BA}^{\partial\partial},$$

Проектуємо останнє рівняння на вісь x . Маємо:

$$-a_B \cos 60^\circ = a_A \cos 30^\circ - a_{BA}^{\partial\partial},$$

Звідки маємо:

$$a_{BA}^{\partial\partial} = a_A \cos 30^\circ + a_B \cos 60^\circ \approx 4,73 \text{ см/с}^2.$$

Миттєва кутова швидкість:

$$\omega_{\text{мит}} = \sqrt{\frac{a_{BA}^{\partial\partial}}{AB}} \approx 0,69 \text{ с}^{-1}.$$

Проектуючи перше рівняння на y , маємо:

$$-a_B \cos 30^\circ = a_A \sin 30^\circ - a_{BA}^{o\bar{o}},$$

Звідси знаходимо обертову швидкість точки B :

$$a_{BA}^{o\bar{o}} = a_B \cos 30^\circ + a_A \sin 30^\circ \approx 6,19 \text{ см/с}^2.$$

Миттєве прискорення фігури дорівнює:

$$\varepsilon_{\text{мит}} = \frac{a_{BA}^{o\bar{o}}}{AB} \approx 0,619 \text{ с}^{-2}.$$

Кутове прискорення спрямоване за віссю z у від'ємний бік.

Переходимо до знаходження прискорення точки C . Обираючи за полюс точку B , запишемо:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{BC}^{o\bar{o}} + \vec{a}_{BC}^{\partial\partial},$$

Проектуємо останнє рівняння на вісі x і y . Знаходимо:

$$a_{Cx} = -a_B \cos 60^\circ - a_{BC}^{o\bar{o}} \approx -6,095 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{Cy} = -a_B \cos 30^\circ + a_{BC}^{\partial\partial} \approx -2,825 \text{ см/с}^2,$$

Повне прискорення точки C легко знайдеться за:

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{45} \approx 6,7 \text{ см/с}^2.$$

Напрямок a_C визначиться за:

$$\cos(\vec{a}_C \quad x) = \frac{a_{Cx}}{a_C} = -0,906,$$

$$\cos(\vec{a}_C \quad y) = \frac{a_{Cy}}{a_C} = -0,422.$$

Відповідь: $\omega_{\text{min}} = 0,69 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon_{\text{min}} = 0,619 \text{ с}^{-2}$, $a_C = 6,7 \text{ м/с}^2$.

9.4. Миттєвий центр прискорень

Миттєвий центр прискорень (МЦП) – точка плоскої фігури, прискорення якої у даний момент нульове. Положення МЦП визначається виразами (рис. 9.22):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Якщо за полюс прийняти МЦП, то прискорення будь-якої точки плоскої фігури визначиться за:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{MQ}^{\text{доц}} + \vec{a}_{MQ}^{\text{об}} = -\omega^2 \vec{r}_1 + \varepsilon \times \vec{r}_1.$$

Прискорення визначаються за виразами (рис. 9.22):

$$a_A = AQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

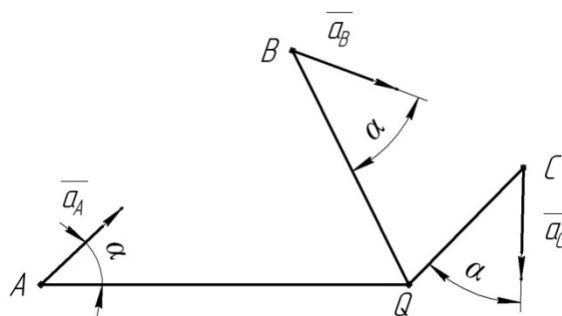


Рис. 9.22. МЦП

Послідовність вирішення задач на визначення прискорень точок плоскої фігури (відомі прискорення двох точок плоскої фігури, необхідно знайти місцезосташування МЦП і прискорення будь-якої точки плоскої фігури):

1. Розглядаючи першу точку як полюя, зпроектувати на пряму AB , яка з'єднує обидві точки, рівність:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{ob} + \vec{a}_{BA}^{\partial\omega};$$

2. Знайти з отриманої рівності величину $\vec{a}_{BA}^{\partial\omega}$ і, після цього, величину миттєвої кутової швидкості плоскої фігури;
3. Зпроектувати ту саму векторну рівність на напрямок, перпендикулярний до AB і знайти величину $\vec{a}_{BA}^{ob}$, і, після цього, миттєве кутове прискорення плоскої фігури;
4. Знайти прискорення будь-якої точки плоскої фігури, користуючись теоремою прискорень;
5. Знайти місцезосташування МЦП, користуючись формулами:

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Для прямокутника, який розглядався у задачі 9.5 знайдемо місцезосташування МЦП.

Кут, утворений напрямком на МЦП з прискоренням будь-якої точки плоскої фігури визначимо за формулою:

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{0,619}{0,69^2} = 1,3.$$

Відстань від точки A до МЦП Q :

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{2}{\sqrt{0,619^2 + 0,69^4}} = 2,56 \text{ см.}$$

Відкладаємо кут α від напрямку прискорення точки A вбік миттєвого кутового прискорення ε . На цьому напрямку відкладаємо від точки A відрізок AQ , кінець якого буде МЦП (Рис. 30).

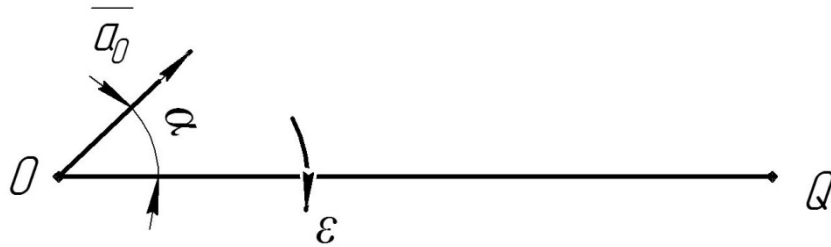


Рис. 9.23. До задачі 9.5

РОЗДІЛ 10. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

Розглянемо рух точки по відношенню до системи рухомих осей координат x_1, y_1, z_1 (рис. 10.1), які у свою чергу рухаються відносно осей x, y, z . Систему осей x, y, z умовно будемо вважати нерухомою.

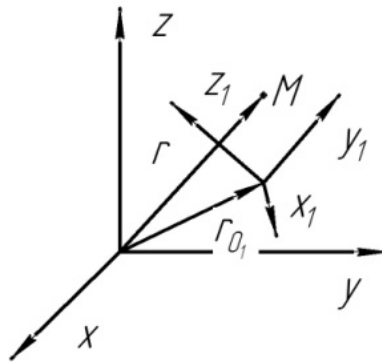


Рис. 10.1. До визначення складного руху точки

Рух точки відносно нерухомих осей координат x, y, z називатимемо *абсолютним рухом*. Рух точки по відношенню до рухомих осей x_1, y_1, z_1 – *відносним рухом*. Рух відносно нерухомої системи осей x, y, z тієї точки рухомої системи осей x_1, y_1, z_1 , з якою у даний момент співпадає точка, що рухається, називається *переносним рухом*.

Індекс у кінематичних характеристиках: a – абсолютний рух, r – відносний рух, e – переносний рух.

Теорема про складання швидкостей при складному русі тіла:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

де $\vec{v}_a$ – абсолютна швидкість; $\vec{v}_e$ – переносна швидкість; $\vec{v}_r$ – відносна швидкість.

Для визначення відносної швидкості точки слід зупинити переносний рух і обчислити відносну швидкість за правилами кінематики точки, для визначення переносної швидкості досить зупинити відносний рух та відшукати переносну швидкість за правилами кінематики точки, як швидкість тієї точки відносної системи координат, з якою співпадає у даний момент рухома точка.

Послідовність вирішення задач на теорему про складання швидкостей:

1. Розкласти рух на складові, визначивши абсолютний, відносний і переносний рухи;
2. Обрати дві системи координат: абсолютну і відносну;
3. Подумки зупинивши переносний рух, знайти швидкість відносного руху точки;
4. Подумки зупинивши відносний рух, знайти швидкість переносного руху точки;
5. Застосувавши теорему про складання швидкостей, визначити абсолютну швидкість точки.

Теорема про складання прискорень при складному русі тіла (теорема Коріоліса):

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c,$$

де $\vec{a}_a$ – абсолютне прискорення; $\vec{a}_e$ – переносне прискорення; $\vec{a}_r$ – відносне прискорення; $\vec{a}_c$ – коріолісове прискорення.

Для визначення відносного прискорення точки слід зупинити переносний рух і обчислити відносне прискорення за правилами кінематики точки, для визначення переносного прискорення досить зупинити відносний рух та відшукати переносне прискорення за правилами кінематики точки, як прискорення тієї точки відносної системи координат, з якою співпадає у даний момент рухома точка.

Коріолісове прискорення:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r,$$

де $\vec{\omega}_e$ – кутова швидкість переносно руху; $\vec{v}_r$ – відносна швидкість точки.

Величина коріолісова прискорення:

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\omega_e, v_r).$$

Визначення напрямку коріолісова прискорення

Правило векторного добутку: коріолісове прискорення $\vec{a}_c$ спрямоване перпендикулярно площині, у якій лежать вектор кутової швидкості переносного руху $\vec{\omega}_e$ і вектор відносної швидкості точки $\vec{v}_r$ у той бік, щоб спостерігач, що знаходиться за вектором коріолісова прискорення $\vec{a}_c$, бачив поворот від вектор $\vec{\omega}_e$ до вектор $\vec{v}_r$ на найменший кут проти ходу годинникової стрілки.

Правило М. Є. Жуковського: спроектуємо відносну швидкість $\vec{v}_r$ на площину, перпендикулярну кутовій швидкості переносного руху $\vec{\omega}_e$, і повернемо проекцію у цій площині на кут 90° у бік обертання визначаємого $\vec{\omega}_e$ – це і буде напрямок прискорення Коріоліса.

Послідовність вирішення задач на теорему про складання прискорень (теорему Коріоліса):

1. Розкласти рух на складові, визначивши абсолютний, відносний і переносний рухи;
2. Обрати дві системи координат: абсолютну і відносну;
3. Подумки зупинивши переносний рух, знайти швидкість і прискорення у відносному русі точки;
4. Подумки зупинивши відносний рух, знайти швидкість і прискорення у переносному русі точки;
5. За відомими кутовою швидкістю переносного руху і швидкістю точки у відносному русі знайти коріолісове прискорення точки;
6. Скориставшись методом проекцій, визначити проекції абсолютного прискорення на нерухомі вісі координат;
7. За знайденими проекціями абсолютного прискорення знайти абсолютне прискорення за величиною і напрямком.

Розглянемо використання теореми про складання швидкостей і теореми про складання прискорень (теореми Коріоліса) для розв'язання задач на складний рух точки.

Задача 10.1

При пуску в хід головного судового двигуна кулі відцентрового регулятора Уатта (рис. 10.1) розходяться так, що кут α змінюється згідно рівняння:

$$\alpha = \omega_{01}t + \frac{\varepsilon_1 t^2}{2},$$

$$\text{де } \omega_{01} = \frac{\pi}{90} \text{ с}^{-1}, \varepsilon_1 = \frac{\pi}{900} \text{ с}^{-2}.$$

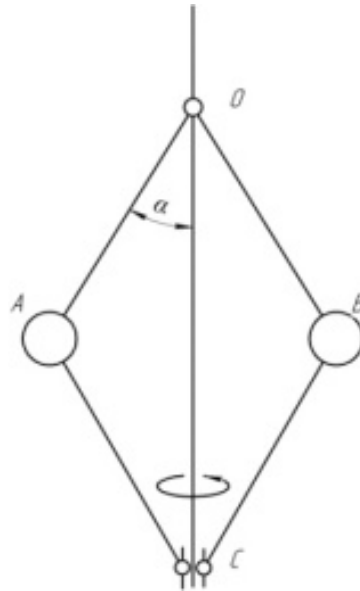


Рис. 10.1. Відцентровий регулятор Уатта.

Кут повороту регулятора вертикальної вісі є заданою функцією часу:

$$\varphi = kt^3,$$

де $k = 0,3 \text{ с}^{-3}$ – сталий коефіцієнт.

Довжини стрижнів $OA = OB = AC = BC = l = 90 \text{ см}$.

Визначити у момент часу $t_1 = 10 \text{ с}$ абсолютну швидкість і абсолютне прискорення куль регулятора, вважаючи їх точками.

Розв'язання. Розкладемо абсолютний рух точки на два рухи: переносний рух – обертання навколо вертикальної вісі, що проходить згідно $\varphi(t)$, і відносний рух – обертання навколо горизонтальної вісі, що проходить через точку O і перпендикулярної площині $OABC$, що проходить за законом $\alpha(t)$.

Нерухому систему координат xyz оберемо з початком у точці O : вісь x направимо перпендикулярно до площини $OABC$ (у момент $t_1 = 10 \text{ с}$), вісь y – у площині $OABC$ за горизонталлю вправо, вісь z – за вертикальною віссю обертання догори.

За $\alpha(t)$ знайдемо значення кута α у момент $t_1 = 10 \text{ с}$:

$$\alpha = \frac{\pi}{90} \cdot 10 + \frac{\pi}{900} \cdot \frac{10^2}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

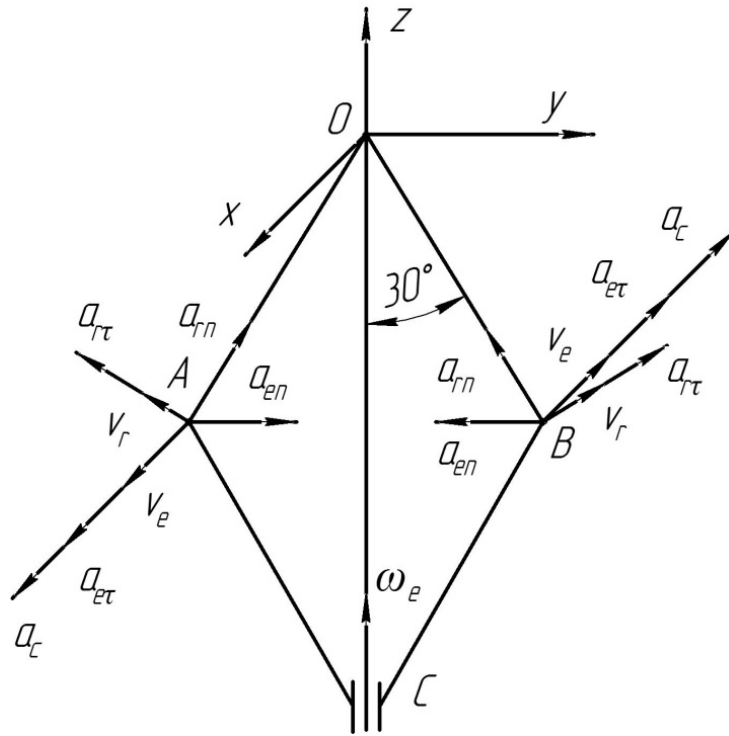


Рис. 10.2. До задачі 10.1

Проекція відносної кутової швидкості на вісь x , тобто на вісь, навколо якої відбувається відносне обертання:

$$\omega_{rx} = \dot{\alpha} = \omega_{01} + \varepsilon_1 t.$$

У момент часу $t_1 = 10$ с проекція відносної кутової швидкості на вісь x дорівнюватиме:

$$\omega_{rx} = \frac{\pi}{45} \text{ с}^{-1}.$$

Проекція відносного кутового прискорення на вісь x :

$$\varepsilon_{rx} = \dot{\omega}_{rx} = \ddot{\alpha} = \varepsilon_1 = \frac{\pi}{900} \text{ с}^{-2}.$$

Для того, щоб знайти відносну швидкість і відносне прискорення куль, зупинимо переносний рух. Відносна швидкість куль дорівнюватиме:

$$v_r = l\omega_{rx} = 90 \frac{\pi}{45} = 2\pi \text{ см/с} = 0,02\pi \text{ м/с}.$$

Відносна швидкість спрямована, відповідно, перпендикулярно до стрижнів OA і OB .

Перейдемо до визначення відносного прискорення куль. Оскільки відносний рух є обертання навколо вісі, то природно обчислити окремо відносне нормальне і відносне дотичне прискорення.

Відносне нормальне прискорення:

$$a_{rn} = \omega_r^2 l = \frac{\pi^2}{45^2} \cdot 90 \approx 0,0043 \text{ м/с}^2.$$

Спрямоване відносне нормальне прискорення від кулі до точки O .

Відносне дотичне прискорення:

$$a_{rt} = \varepsilon_r l = \frac{\pi}{900} \cdot 90 = \pi \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2.$$

Відносне дотичне прискорення співпадає з відносною швидкістю кожної кулі.

Перейдемо до визначення переносної швидкості і переносного прискорення куль. Переносний рух – обертання регулятора навколо вертикальної осі згідно $\omega(t)$. Щоб обчислити швидкість і прискорення куль у переносному русі, зупинимо відносний рух. Проекція кутової швидкості переносного руху у проекції на вісь обертання:

$$\omega_{ez} = \dot{\phi} = 3kt^2.$$

У момент часу $t_1 = 10$ с проекція переносної кутової швидкості на вісь z дорівнюватиме:

$$\omega_{ez} = 3 \cdot 0,3 \cdot 10^2 = 90 \text{ с}^{-1}.$$

Проекція кутового прискорення переносного руху у проекції на вісь обертання:

$$\varepsilon_{ez} = \dot{\omega}_{ez} = \ddot{\phi} = 6kt.$$

У момент часу $t_1 = 10$ с:

$$\varepsilon_{ez} = 6 \cdot 0,3 \cdot 10 = 18 \text{ с}^{-2}.$$

Переносна швидкість є швидкість кулі при обертанні регулятора навколо вертикальної осі OC . У момент $t_1 = 10$ с переносна швидкість дорівнює:

$$v_e = \omega_e l \sin \alpha = 90 \cdot 90 \sin 30^\circ = 40,5 \text{ м/с}.$$

Переносна швидкість куль направлена паралельно вісі x . Для кулі A вона співпадає із додатнім напрямком, для кулі B – з від'ємним напрямком вісі.

Переносне прискорення складається з нормального і дотичного прискорень. Величина нормального переносного прискорення при $t_1 = 10$ с дорівнюватиме:

$$a_{en} = \omega_e^2 l \sin \alpha = 90^2 \cdot 90 \sin 30^\circ \approx 3645 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне переносне прискорення направлене до вісі обертання OC .

Дотичне переносне прискорення:

$$a_{er} = \varepsilon_e l \sin \alpha = 18 \cdot 90 \sin 30^\circ = 8,1 \text{ м/с}^2.$$

Дотичне переносне прискорення направлене паралельно вісі x і співпадає із напрямком переносної швидкості кожної кулі.

Коріолісове прискорення:

$$a_c = 2 \omega_e v_r \sin(\omega_e, v_r).$$

Помічаючи, що кут між векторами $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$ складає 60° , знаходимо величину коріолісова прискорення у момент часу $t_1 = 10$ с:

$$a_c = 2 \cdot 90 \cdot 2\pi \sin 60^\circ = 1,8\sqrt{3}\pi \text{ м/с}^2.$$

Напрямок коріолісова прискорення знайдемо за правилом векторного добутку. Коріолісове прискорення спрямоване перпендикулярно площині, визначеній векторами $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$ у той бік, з якого поворот від вектора $\vec{\omega}_e$ до $\vec{v}_r$ на найменший кут бачимо проти ходу годинникової стрілки. У нашому випадку прискорення Коріоліса спрямоване за переносною швидкістю.

Знайдемо абсолютну швидкість і абсолютне прискорення кулі, користуючись методом проєкцій. Спроекуємо на нерухомі осі векторну рівність:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Маємо:

$$\left. \begin{aligned} v_{ax} &= v_e = 40,5 \text{ м/с}, \\ v_{ay} &= -v_r \cos 30^\circ = -0,01\sqrt{3}\pi \text{ м/с}, \\ v_{az} &= v_r \cos 60^\circ = 0,01\pi \text{ м/с}. \end{aligned} \right\}$$

Абсолютна швидкість:

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2} \approx 40,51 \text{ м/с}.$$

Напрямок абсолютної швидкості визначається направляючими косинусами:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{v}_a, x) &= \frac{v_{ax}}{v_a} = 0,999, \\ \cos(\vec{v}_a, y) &= \frac{v_{ay}}{v_a} = -0,00134, \\ \cos(\vec{v}_a, z) &= \frac{v_{az}}{v_a} = 0,000775. \end{aligned} \right\}$$

Згідно теореми про складання прискорень, маємо:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{en} + \vec{a}_{er} + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_{r\tau} + \vec{a}_c.$$

Проектуючи цю векторну рівність на нерухомі осі координат, знаходимо проекції на ці осі абсолютного прискорення кулі:

$$\left. \begin{aligned} a_{ax} &= a_{er} + a_c \approx 17,9 \text{ м/с}^2, \\ a_{ax} &= a_{en} + a_{rn} \sin 30^\circ - a_{r\tau} \cos 30^\circ \approx 3645 \text{ м/с}^2, \\ a_{ax} &= a_{rn} \cos 30^\circ + a_{r\tau} \sin 30^\circ \approx 0,0055 \text{ м/с}^2. \end{aligned} \right\}$$

Величина і напрямок абсолютного прискорення визначаються за звичайними формулами:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} \approx 3646 \text{ м/с}^2,$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{a}_a, x) &= \frac{a_{ax}}{a_a} \approx 0,005, \\ \cos(\vec{a}_a, y) &= \frac{a_{ay}}{a_a} \approx 0,999, \\ \cos(\vec{a}_a, z) &= \frac{a_{az}}{a_a} \approx 1,37 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \right\}$$

Відповідь: $v_a = 40,5 \text{ м/с}$, $a_a = 3646 \text{ м/с}^2$.

Задача 10.2

Стрижень AC обертається навколо точки A , що лежить на нерухомому дротовому напівколі, радіус кого дорівнює r (рис. 10.3). Стрижень проходить крізь кільце P , яке ковзає при його обертанні дугою кола APB . У початковий момент положення стрижня співпадало з діаметром AB , а його кутова швидкість у цей момент дорівнювала нулю. Визначити абсолютну швидкість кільця P , його абсолютні нормальне і дотичне прискорення як функції кута φ , якщо кутове прискорення стрижня AC дорівнює за величиною $\varepsilon = k \cos \varphi$, де k – сталий коефіцієнт; кут φ змінюється у межах $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

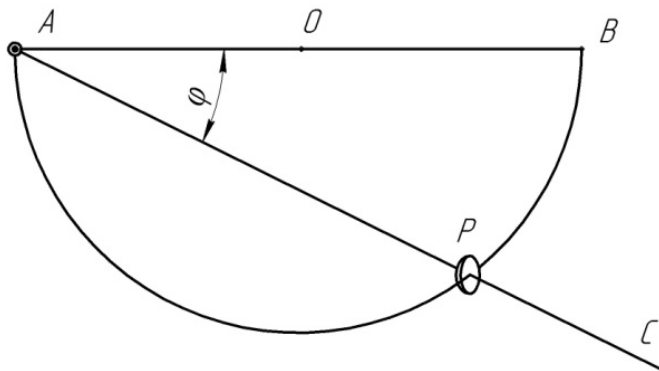


Рис. 10.3. До задачі 10.2

Розв'язання. Перший спосіб.

Розглянемо рух кільця як складений чи складний рух. Переносним рухом кільця назовемо його обертання разом із стрижнем AC . Переносною швидкістю і переносним прискоренням кільця будуть швидкість та прискорення тієї точки стрижня AC , з якою у даний момент співпадає кільце. Відносним рухом кільця буде його переміщення вздовж стрижня AC . Абсолютним рухом кільця буде його пересування дугою кола APB .

Знайдемо кутову швидкість стрижня. За умовою дана проекція кутового прискорення стрижня AC , тобто проекція кутового прискорення переносного руху кільця на вісь z , перпендикулярну площині рисунка:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = k \cos \varphi.$$

Помножимо цю рівність на $d\varphi$ і отримаємо:

$$\frac{d\omega_z}{dt} d\varphi = \omega_z d\omega_z = k \cos \varphi d\varphi.$$

Інтегруємо (5.2) у межах від 0 до ω зліва і від 0 до φ справа, тому що при $\varphi=0$ за умовою $\omega = 0$:

$$\int_0^{\omega} \omega_z d\omega_z = k \int_0^{\varphi} \cos \varphi d\varphi,$$

або

$$\omega_z^2 = \omega^2 = 2k \sin \varphi.$$

Визначимо переносну швидкість кільця. Це швидкість точки стрижня AC , з якою співпадає у даний момент кільце. Переносна швидкість кільця дорівнює:

$$v_e = AP \cdot \omega = 2r \cos \varphi \cdot \omega = 2r \cos \varphi \sqrt{2k \sin \varphi}$$

і перпендикулярна до стрижня AC .

Відносна швидкість кільця спрямована за стрижнем AC і є перпендикулярною переносній швидкості. Абсолютна швидкість є діагоналлю прямокутника, побудованого на переносній та відносній швидкостях і направлена за дотичною до кола APB .

За відомим вектором $\vec{v}_e$ і напрямками $\vec{v}_r$ і $\vec{v}$ будемо паралелограм швидкостей (рис. 10.4). Кут між переносною і абсолютною швидкостями буде дорівнювати φ , оскільки він утворений сторонами, перпендикулярними до AP і OP . З трикутника швидкостей знаходимо:

$$v_r = v_e \operatorname{tg} \varphi = 2r \sin \varphi \sqrt{2k \sin \varphi}.$$

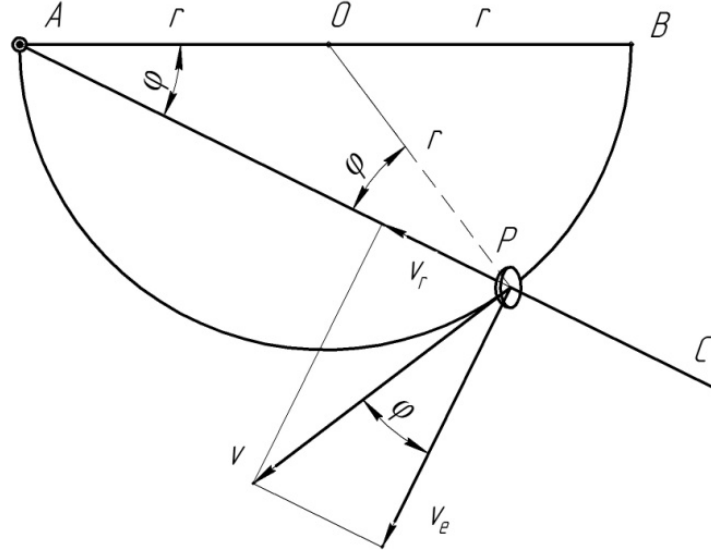


Рис. 10.4. До задачі 10.2.

Абсолютна швидкість кільця дорівнює за величиною:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = 2r \sqrt{2k \sin \varphi}.$$

Переходимо до визначення прискорень. Переносне прискорення кільця складається із переносного нормального прискорення, модуль якого дорівнює:

$$a_{en} = AP \cdot \omega^2 = 2r \cos \varphi \cdot 2k \sin \varphi = 4kr \sin \varphi \cos \varphi$$

направленого від P до A , і переносного дотичного прискорення

$$a_{er} = AP \cdot \varepsilon = 2r \cos \varphi \cdot k \cos \varphi = 2kr \cos^2 \varphi$$

спрямованого перпендикулярно до стрижня AC (рис. 10.5). Величина відносного прискорення кільця визначиться як похідна від відносної швидкості за часом, оскільки відносний рух є прямолінійним рухом кільця стрижнем

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = \sqrt{8r^2 k} \frac{d}{dt} \left(\sin^{\frac{3}{2}} \varphi \right) = \sqrt{8r^2 k} \cdot \frac{3}{2} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = 6kr \sin \varphi \cos \varphi.$$

Відносне прискорення спрямоване вздовж стрижня. Величина коріолісова прискорення визначиться за формулою:

$$a_c = 2\omega v_r \sin(\vec{a}, \vec{v}_r) = 2\omega v_r = 8kr \sin^2 \varphi.$$

Кут між вектором кутової швидкості, перпендикулярним до рисунка, і вектором відносною швидкості, що лежить у площині рисунка, становить $\frac{\pi}{2}$. Напрямок коріолісова прискорення знаходимо за правилом векторного добутку. Воно направлене перпендикулярно до стрижня AC у бік, протилежний $\vec{a}_{er}$.

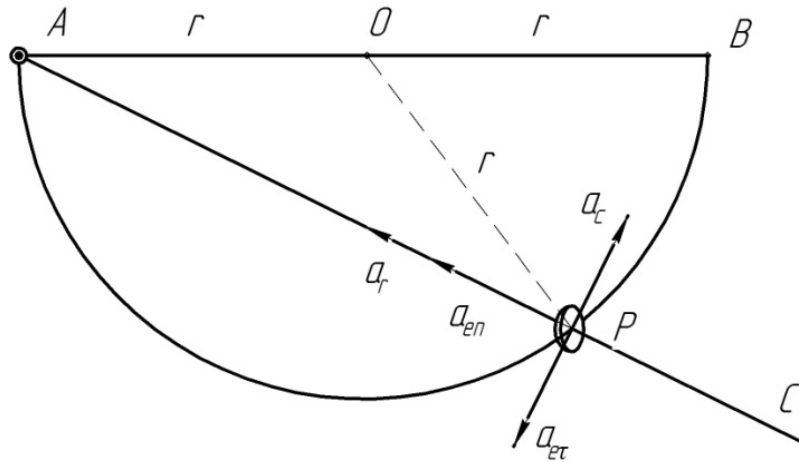


Рис. 10.5. До задачі 10.3

Абсолютне прискорення кільця дорівнює:

$$\vec{a} = \vec{a}_{en} + \vec{a}_{er} + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

Проектуємо останню геометричну рівність на нормаль до абсолютної траєкторії кільця, тобто на пряму OP . В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} a_n &= (a_{en} + e_r) \cos \varphi + (a_c - a_{er}) \sin \varphi = \\ &= 10kr \sin \varphi \cos^2 \varphi + (8kr \sin^2 \varphi - 2kr \cos^2 \varphi) \sin \varphi = 8kr \sin \varphi. \end{aligned}$$

Проекцію абсолютного прискорення кільця на дотичну знаходимо, проектуючи рівність (5.12) на дотичну до абсолютної траєкторії:

$$\begin{aligned} a_\tau &= (a_r + a_{en}) \sin \varphi + (a_{er} - a_c) \cos \varphi = \\ &= 10kr \sin^2 \varphi \cos \varphi + (2kr \cos^2 \varphi - 8kr \sin^2 \varphi) \cos \varphi = 2kr \cos \varphi. \end{aligned}$$

Другий спосіб.

Ця задача може бути вирішена іншим, більш коротким шляхом. Кут $\angle BOP = 2\varphi$, отже, абсолютна швидкість кільця у його русі колом APB буде дорівнювати за величиною:

$$v = r \cdot 2\dot{\varphi} = 2r\sqrt{2k \sin \varphi},$$

оскільки $2\dot{\varphi}$ – проекція абсолютної кутової швидкості прямої OP на вісь z

Абсолютне нормальне прискорення кільця:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = 8kr \sin \varphi,$$

А проекція абсолютного прискорення кільця на дотичну дорівнює:

$$a_\tau = r \cdot 2\ddot{\varphi} = 2kr \cos \varphi,$$

оскільки $2\ddot{\varphi}$ – проекція на вісь z абсолютного кутового прискорення при обертанні прямої OP .

Другий спосіб рішення дозволяє визначити абсолютні швидкість і прискорення точки, проте залишає невирішеним питання щодо цих величин у відносному і переносному рухах, на відміну від першого способу, де знаходяться ці величини.

Відповідь: $v_a = 2r\sqrt{2k \sin \varphi}$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗА РОЗДІЛОМ «КІНЕМАТИКА»

- Що називається законом руху тіла та точки?
- Що таке траєкторія?
- У яких формах може бути записаний закон руху точки?
- У чому різниця між середньою і миттєвою швидкістю і прискоренням?
- Що таке поступальний рух тіла?
- Що таке обертальний рух тіла?
- Означення кутової швидкості і кутового прискорення тіла.
- Назвіть механізми для передачі обертального руху тіла.
- Що таке плоский рух?
- Назвіть кінематичні характеристики плоского руху.
- Що таке миттєвий центр швидкостей?
- Як визначається середня швидкість тіла за час руху?
- Що таке лінійне прискорення і як воно пов'язане з кутовим прискоренням?
- Які умови необхідні для рівномірного руху?
- Що таке період і частота обертання тіла?
- Як визначити кутову швидкість в залежності від кута та часу?
- Як обчислити переміщення тіла в рівноприскореному русі?
- Що таке радіус кривизни траєкторії?
- Що таке обертальний рух тіла відносно осі?
- Що таке рух вільного падіння і його кінематичні характеристики?
- Які особливості має рух тіла по колу?
- Що таке відцентрове прискорення?
- Що таке рівняння руху для тіла, що рухається під кутом до горизонту?
- Яка залежність між швидкістю, прискоренням і силами, що діють на тіло під час руху?

РОЗДІЛ 11. ДИНАМІКА ТОЧКИ

11.1. Перша задача динаміки точки. Принцип Даламбера

Основний закон динаміки точки записується:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки у проекціях на вісі декартових координат мають вигляд:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \\ m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \\ m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}, \end{cases}$$

де $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекції прискорення $\vec{a}$, а F_{kx} , F_{ky} , F_{kz} – проекції сили $\vec{F}_k$ на відповідні вісі декартових координат.

Перша задача динаміки (пряма задача динаміки) – задача, у якій за заданим рухом і масою матеріальної точки визначаються рівнодіючі сил, прикладених до точки.

Якщо задані рівняння руху матеріальної точки маси m у декартових координатах: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то проекції F_x , F_y , F_z сили $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, яка викликає цей рух, визначаються за формулами:

$$F_x = m\ddot{x}, F_y = m\ddot{y}, F_z = m\ddot{z},$$

звідки

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$
$$\cos(\widehat{x, \vec{F}}) = \frac{F_x}{F}, \cos(\widehat{y, \vec{F}}) = \frac{F_y}{F}, \cos(\widehat{z, \vec{F}}) = \frac{F_z}{F}.$$

Перша задача динаміки матеріальної точки легко вирішується диференціюванням заданих рівнянь руху точки.

У відповідності з основним законом динаміки, дія дорівнює $\vec{F}_1 = m\vec{a}$, а тому протидія дорівнює $\vec{F}_2 = -m\vec{a}$. Протидія називається силою інерції і позначається Φ .

Принципом Даламбера (методом кінетостатики) називається формальний прийом, який дає можливість записати рівняння руху у вигляді рівнянь рівноваги.

Принцип Даламбера для матеріальної точки, яка рухається, полягає у записуванні умов її «рівноваги» під дією заданих сил, сил реакцій в'язей і фіктивних сил інерції:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0,$$

$\vec{R}$ – рівнодіюча сил реакцій в'язей, накладених на матеріальну точку;

$\vec{F}$ – рівнодіюча заданих сил, діючих на матеріальну точку;

$\vec{\Phi}$ – сила інерції матеріальної точки, яка за модулем дорівнює добутку маси точки на модуль її прискорення і направлена протилежно прискоренню.

У формулюванні принципу Даламбера сила інерції називається фіктивною тому, що насправді вона до точки не прикладена.

Якщо траєкторією руху матеріальної точки є крива, то сила інерції може бути розкладена на дві складові: дотичну і нормальну:

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_\tau &= -m\vec{a}_\tau, & \vec{\Phi}_n &= -m\vec{a}_n, \\ \vec{\Phi} &= -m\vec{a} = \vec{\Phi}_\tau + \vec{\Phi}_n.\end{aligned}$$

Принцип Даламбера приналежно до невіільної системи матеріальних точко
приводить до системи рівнянь:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{R}_1 + \vec{\Phi}_1 = 0, \\ \vec{F}_2 + \vec{R}_2 + \vec{\Phi}_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k = 0. \end{cases}$$

Порядок розв'язання прямих задач динаміки точки:

1. Зобразити на рисунку матеріальну точку у положенні, що розглядається та прикладені до неї задані сили;
2. Застосувавши принцип звільненості від в'язей, зобразити відповідні сили реакцій в'язей;
3. Обрати систему відліку, якщо вона не вказана в умові задачі;
4. Визначити за заданим законом руху прискорення матеріальної точки та знайти його проекції на обрані вісі координат;
5. Скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки, відповідні прийнятій системі відліку;
6. Із системи складених рівнянь визначити невідому величину.

Розглянемо використання основного закону динаміки для розв'язання прямих задач динаміки точки.

Задача 11.1

Матеріальна точка маси m (рис. 11.1) рухається згідно рівнянь $x = a \cos kt$, $y = b \sin kt$. Визначити силу $\vec{F}$, яка викликає цей рух, якщо відомо, що сила залежить лише від положення точки

Розв'язання. Проекції сили $\vec{F}$ визначаються за формулами:

$$F_x = m\ddot{x}, F_y = m\ddot{y}.$$

У даному випадку:

$$\ddot{x} = -ak^2 \cos kt,$$

$$\ddot{y} = -bk^2 \sin kt.$$

Маємо

$$F_x = -mak^2 \cos kt,$$

$$F_y = -mbk^2 \sin kt.$$

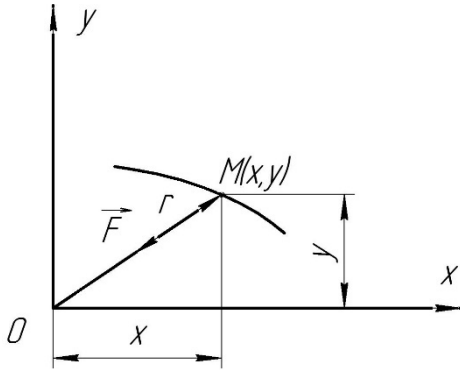


Рис. 11.1. До задачі 11.1.

Оскільки, за умовою, сила $\vec{F}$ залежить від положення матеріальної точки, то її проекції F_x і F_y є функціями координат x і y .

Отримаємо

$$F_x = -mk^2 x,$$

$$F_y = -mk^2 y.$$

Модуль сили $\vec{F}$ дорівнює $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r$, де r – модуль вектора-радіуса матеріальної точки $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Напрямок сили $\vec{F}$ визначаємо за допомогою направляючих косинусів:

$$\cos(\widehat{x, \vec{F}}) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}, \cos(\widehat{y, \vec{F}}) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Сила $\vec{F}$ спрямована від M до O . Ця сила називається центральною.

Відповідь: $\vec{F} = mk^2 \vec{r}$.

Задача 11.2

Визначити силу опору води руху човна ваги P (рис. 11.2), якщо його рух здійснюється згідно рівняння $x = \frac{P}{ag} v_0 \left(1 - e^{-\frac{ag}{P}t}\right)$ де v_0 – початкова швидкість руху, a – сталий коефіцієнт. Сила опору руху є функцією лише швидкості човна.

Розв’язання. До човна прикладені сили: $\vec{P}$ – вага човна, $\vec{N}$ – архімедова сила, $\vec{R}$ – сила опору води руху човна, спрямована у напрямку, протилежному руху.

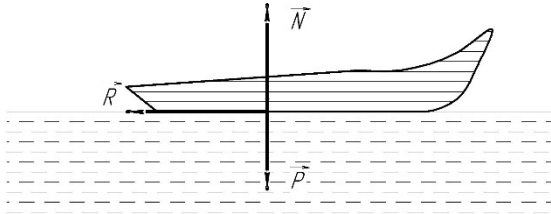


Рис. 11.2. До задачі 11.2.

Проекція швидкості човна на вісь x дорівнює:

$$v_x = \dot{x} = v_0 e^{-\frac{ag}{P}t}.$$

Проекція прискорення човна на вісь x дорівнює:

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{ag}{P} v_0 e^{-\frac{ag}{P}t}.$$

Запишемо диференціальне рівняння руху човна у проекції на вісь x :

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = R_x,$$

Знайдемо:

$$R_x = -av_0 e^{-\frac{ag}{P}t}.$$

Оскільки за умовою сила опору $\vec{R}$ є функцією швидкості човна, то отримаємо: $R_x = -av_x$.

Відповідь: $R_x = -av_x$.

Задача 11.3

Визначити максимальне натягіння нитки математичного маятника довжини l і ваги P (рис. 3), якщо гойдання маятника здійснюються згідно рівняння $\varphi = \varphi_0 \sin kt$, де φ – кут відхилення маятника від вертикалі, φ_0 і k – сталі коефіцієнти.

Розв’язання. Зобразимо маятник у положенні, при якому його нитка утворює із вертикаллю кут φ , спрямуємо вісь n вздовж нитки, а вісь τ – перпендикулярно до вісі n , вбік зростання кута φ .

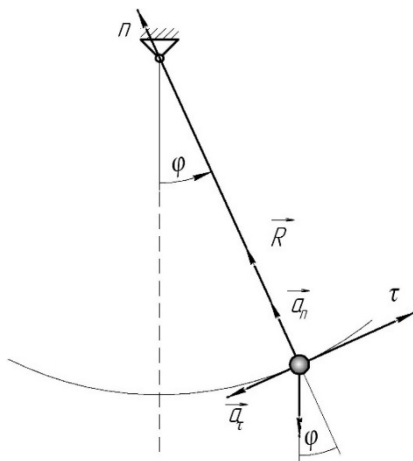


Рис. 11.3. До задачі 11.3.

До маятника прикладені наступні сили: вага маятника $\vec{P}$ і сила реакції нитки $\vec{R}$.

Застосуємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки у проекції на головну нормаль n :

$$ma_n = \sum F_{kn}.$$

Враховуючи, що $a_n = l\dot{\varphi}^2$, маємо:

$$ml\dot{\varphi}^2 = R - P\cos\varphi,$$

звідки

$$R = P\cos\varphi + \frac{P}{g}l\dot{\varphi}^2.$$

Оскільки за умовою $\varphi = \varphi_0 \sin kt$, то

$$\dot{\varphi} = \varphi_0 k \cos kt$$

Підставивши значення φ і $\dot{\varphi}$, знаходимо:

$$R = P \left[\cos(\varphi_0 \sin kt) + \frac{k^2 l \varphi_0^2}{g} \cos^2 kt \right].$$

Найбільше значення сила реакції нитки досягає у прямовисному положенні, тобто коли $kt = n\pi$:

$$R_{\max} = P \left(1 + \frac{k^2 l}{g} \varphi_0^2 \right).$$

Відповідь: $R_{\max} = P \left(1 + \frac{k^2 l}{g} \varphi_0^2 \right).$

11.2. Інтегрування диференціальних рівнянь руху точки

Друга задача динаміки (зворотна задача динаміки) – задача, у якій за заданими силами і масою матеріальної точки визначається її рух.

Дано сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ прикладені до матеріальної точки маси m . Для визначення закону руху цієї точки слід проінтегрувати систему диференціальних рівнянь руху, відповідних обраній системі відліку.

Сили, прикладені до матеріальної точки, можуть бути:

- постійними силами (наприклад, сили тяжіння при русі матеріальної точки поблизу земної поверхні);
- силами, залежними від часу (наприклад, сили, що періодично змінюються);

- силами, залежними від положення точки (наприклад, сили притягання і відштовхування, сили пружності пружин, пружних ниток);
- силами, залежними від швидкості точки (наприклад, сили опору руху точки).

Порядок розв'язання зворотніх задач динаміки точки:

1. Обрати систему координат;
2. Записати початкові умови руху точки;
3. Зобразити на рисунку задані сили та сили реакцій в'язей, прикладені до матеріальної точки;
4. Скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки;
5. Проінтегрувати систему диференціальних рівнянь руху. Використавши початкові умови руху, визначити сталі інтегрування;
6. Скориставшись рівняннями руху матеріальної точки, отриманими у попередньому пункті, визначити невідомі величини.

Розглянемо використання основного закону динаміки для розв'язання обернених задач динаміки точки та інтегрування диференціальних рівнянь руху точки.

Задача 11.4

Вантаж вагою P прикріплений до правого кінця пружини, лівий кінець якої заземлений у стіні (рис. 11.4). У початковий момент пружина була недеформована, а вантажу, лежачому на горизонтальній площині, за допомогою поштовху надали початкову швидкість v_0 , направлену горизонтально вправо. Вісь x спрямована вздовж вісі пружини по горизонталі вправо, причому початок відліку знаходиться у правому кінці недеформованої пружини.

Знайти найбільше зміщення вантажу, якщо проекція пружної сили пружини дорівнює $F_x = -\alpha x - \beta x^3$, де x – подовження пружини, а α і β – сталі додатні коефіцієнти. Силою тертя ковзання вантажу по горизонтальній площині та масою пружини знехтувати.

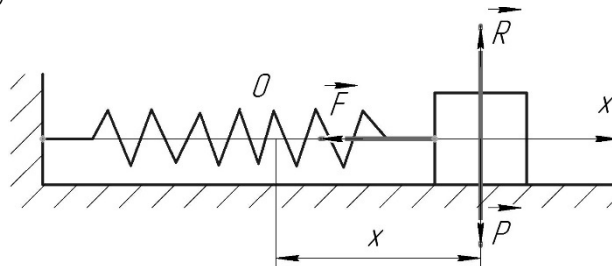


Рис. 11.4. До задачі 11.4.

Розв'язок. Запишемо початкові умови руху вантажу:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0 \quad \dot{x} = v_0.$$

Зобразимо вантаж під час руху зміщеним по осі x вправо. При цьому пружина розтягнеться на x . До вантажу прикладені наступні сили: $\vec{P}$ – вага вантажу, $\vec{R}$ – нормальна сила реакції горизонтальної площини, $\vec{F}$ – пружна сила пружини.

Складемо диференціальне рівняння руху вантажу у проекції на вісь x :

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = -\alpha x - \beta x^3.$$

Це нелінійне диференціальне рівняння другого порядку. Інтегрування цього рівняння для визначення рівняння руху вантажу пов'язане з обчислювальними складнощами. Разом з тим обчислення найбільшого зміщення можна легко здійснити, оскільки для цього достатньо знайти залежність між $\dot{x}$ і x та, прирівнявши потім у крайньому положенні вантажу $\dot{x}$ нулю, знайти шукану величину. Для цього помножимо ліву і праву частини диференціального рівняння на dx , і враховуючи, що $\ddot{x}dx = \frac{d\dot{x}}{dt}dx = \dot{x}d\dot{x}$, запишемо:

$$\frac{P}{g} \dot{x}d\dot{x} = -(\alpha x + \beta x^3)dx.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знайдемо:

$$\frac{P}{g} \frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta x^4}{4} + C.$$

У початковий момент часу $x = 0$ і $\dot{x} = v_0$. Звідси $C = \frac{P}{g} \frac{v_0^2}{2}$. І тепер маємо таке рівняння:

$$\frac{P}{g} \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{P}{g} \frac{v_0^2}{2} = -\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta x^4}{4}.$$

У момент, що відповідає найбільшому зміщенню a , швидкість вантажу дорівнює нулю. Тому, підставивши до останнього рівняння $x = a$, $\dot{x} = 0$, отримаємо бікватратне рівняння відносно шуканого зміщення a :

$$a^4 + 2\frac{\alpha}{\beta} - 2\frac{P}{g\beta}v_0^2 = 0.$$

Вирішивши це рівняння, знайдемо:

$$a = \frac{1}{g\beta} \sqrt{g\beta \left(\sqrt{g^2\alpha^2 + 2Pg\beta v_0^2} - g\alpha \right)}.$$

Відповідь: $a = \frac{1}{g\beta} \sqrt{g\beta \left(\sqrt{g^2\alpha^2 + 2Pg\beta v_0^2} - g\alpha \right)}.$

Задача 11.5

Людина кидає камінь з точки, розташованої на висоті h над поверхнею Землі, надавши йому горизонтальну початкову швидкість v_0 (рис. 11.5). Визначити рівняння траєкторії каменя. Сила опору руху, пропорційна швидкості каменя, складає $\vec{R} = -kt\vec{v}$, де m – маса каменя, $\vec{v}$ – його швидкість, k – сталий коефіцієнт. Кривизною Землі знехтувати.

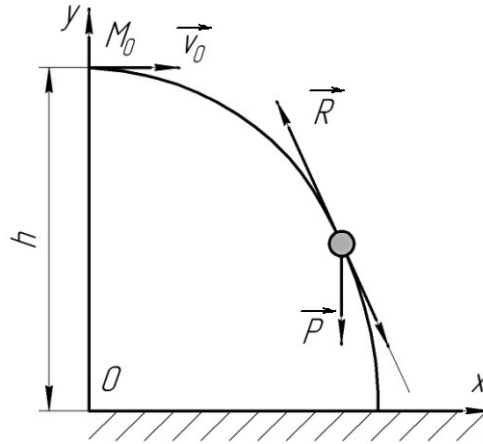


Рис. 11.5. До задачі 11.5.

Розв'язання. Початкові умови руху каменя:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, y = h, \dot{x} = v_0, \dot{y} = 0.$$

До каменя прикладені дві сили: $\vec{P}$ – вага каменя, $\vec{R}$ – сила опору руху, направлена за дотичною до траєкторії у даній точці вбік, протилежний рухові.

Складемо векторне диференціальне рівняння руху каменя:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R},$$

оскільки $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ і $\vec{R} = -mk\vec{v} = -mk\dot{\vec{r}}$, то отримаємо

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g} - k\dot{\vec{r}}.$$

Проектуючи на осі x і y , маємо:

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad \ddot{y} = -g - k\dot{y}.$$

Оскільки $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, то

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -kdt,$$

звідки

$$\ln \dot{x} = -kt + C_1.$$

Стала C_1 знаходиться шляхом використання початкових умов руху і дорівнює $C_1 = \ln v_0$. Отримаємо:

$$\ln \frac{\dot{x}}{v_0} = -kt,$$

тобто

$$\dot{x} = v_0 e^{-kt}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо:

$$x = -\frac{v_0}{k}e^{-kt} + C_2,$$

причому за початковими умовами $C_2 = \frac{v_0}{k}$. Отже

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Для вирішення другого диференціального рівняння замінимо $\ddot{y}$ на $\frac{d\dot{y}}{dt}$ и відділимо змінні:

$$-\frac{d\dot{y}}{k\dot{y} + g} = dt.$$

Тоді

$$-\frac{1}{k}\ln(k\dot{y} + g) = t + C_3.$$

Використавши початкові умови, знайдемо $C_3 = -\frac{1}{k}\ln g$. Отримаємо

$$\frac{1}{k}\ln \frac{g + k\dot{y}}{g} = -t,$$

звідки

$$\dot{y} = \frac{g}{k}e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

Замінивши в останньому рівнянні $\dot{y}$ на $\frac{dy}{dt}$ і проінтегрувавши, отримаємо:

$$y = -\frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_4.$$

Використавши початкові умови, отримаємо $C_4 = h + \frac{g}{k^2}$ і

$$y = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

Отже, камінь здійснює рух згідно рівнянь:

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}),$$
$$y = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

Визначимо траєкторію руху каменя, виключивши із вищенаведених рівнянь час:

$$y = h - \frac{g}{k^2} \ln \frac{v_0}{v_0 - kx} + \frac{gx}{kv_0}.$$

Відповідь: рівняння траєкторії $y = h - \frac{g}{k^2} \ln \frac{v_0}{v_0 - kx} + \frac{gx}{kv_0}$.

11.3. Загальні теореми динаміки точки

У деяких задачах динаміки точки можна значно спростити розв'язання шляхом застосування так званих загальних теорем динаміки.

До загальних теорем динаміки точки відносять:

- теорема про зміну кількості руху точки;
- теорема про зміну кінетичного моменту точки;
- теорема про зміну кінетичної енергії точки.

11.3.1. Теорема про зміну кількості руху точки

Імпульс сили $\vec{F}$, яка діє протягом проміжку часу $t_2 - t_1$, визначається за формулою:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt.$$

Кількість руху $\vec{q}$ точки маси m , що рухається зі швидкістю $\vec{v}$, визначається за формулою:

$$\vec{q} = m\vec{v}.$$

Кількість руху є одною із мір руху матеріальної точки.

Теорема про зміну кількості руху точки (в інтегральній формі): зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює векторній сумі імпульсів сил, прикладених до точки за той же проміжок часу.

$$\vec{q}_2 - \vec{q}_1 = \sum_{k=1}^n \vec{S}(\vec{F}_k).$$

Порядок розв'язання задач на застосування теореми про зміну кількості руху точки:

1. Зобразити на рисунку усі сили, прикладені до точки, тобто задані сили та сили реакцій в'язей;
2. Обрати систему координат;
3. Записати теорему про зміну кількості руху точки у проекціях на вісі:

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^n S_x(\vec{F}_k),$$

$$m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \sum_{k=1}^n S_y(\vec{F}_k),$$

$$m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \sum_{k=1}^n S_z(\vec{F}_k);$$

4. Визначити невідому величину.

Розглянемо використання теореми про зміну кількості руху точки для розв'язання задачі динаміки точки.

Задача 11.6

Вантаж спускається вниз шорсткою похилою поверхнею, розташованою під кутом α до горизонту (рис. 11.6); f – коефіцієнт тертя ковзання вантажу об похилу поверхню. У початковий момент часу швидкість вантажу дорівнює v .

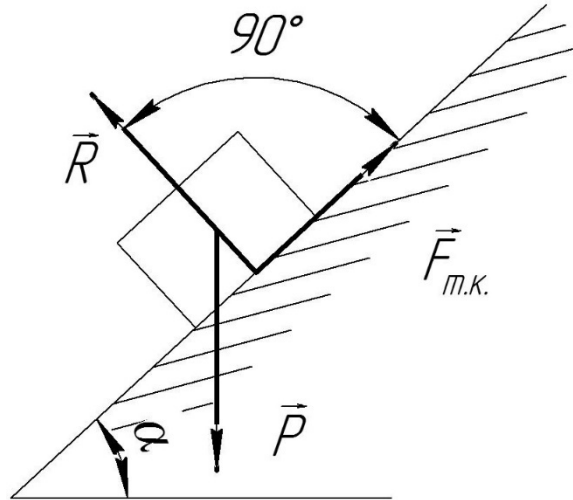


Рис. 11.6. До задачі 11.6.

Через який проміжок часу швидкість вантажу подвоїться?

Розв'язання. Зобразимо сили, прикладені до вантажу (рис. 6), де $\vec{P}$ – вага вантажу, $\vec{R}$ – нормальна сила реакції площини, $\vec{F}_{m.k.}$ – сила тертя ковзання вантажу по площині, причому $F_{m.k.} = fN = fP\cos\alpha$.

Направимо вісь x вздовж похилої поверхні.

Запишемо теорема про зміну кількості руху матеріальної точки у проекції на вісь x :

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum_{k=1}^n S_x(\vec{F}_k).$$

Згідно умови задачі, $v_{1x} = v, v_{2x} = 2v$. Оскільки усі сили, прикладені до вантажу, сталі, то

$$\sum_{k=1}^n S_x(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n F_{kx} \Delta t = (P \sin \alpha - F_{m.k.}) \Delta t = P(\sin \alpha - f \cos \alpha) \Delta t,$$

де Δt – шуканий проміжок часу. Отже

$$2mv - mv = P(\sin \alpha - f \cos \alpha) \Delta t,$$

звідки

$$\Delta t = \frac{v}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

Відповідь: швидкість вантажу подвоїться через $\Delta t = \frac{v}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}$.

11.3.2. Теорема про зміну кінетичного моменту точки

Кінетичним моментом $\vec{k}_O$ (моментом кількості руху) матеріальної точки (рис. 11.7) відносно центра O називається вектор, який визначається за формулою:

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

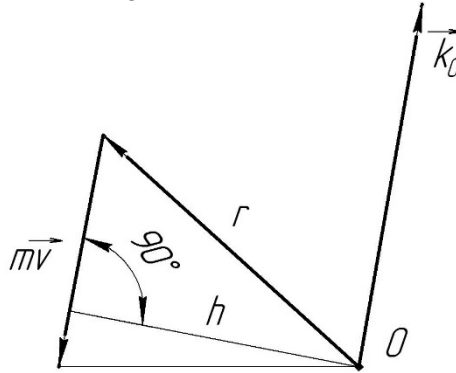


Рис. 11.7. Кінетичний момент точки.

Теорема про зміну кінетичного моменту точки: похідна за часом від вектора кінетичного моменту матеріальної точки відносно нерухомого центра дорівнює векторній сумі моментів відносно того ж центру усіх сил, прикладених до матеріальної точки.

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k).$$

Порядок розв'язання задач на застосування теореми про зміну кінетичного моменту точки:

1. Обрати систему координат;
2. Зобразити на рисунку усі сили, прикладені до точки, тобто задані сили та сили реакцій в'язей;

3. Обчислити суму моментів сил, прикладених до точки відносно вісей координат;
4. Зобразити вектор кількості руху точки, записати вираз для кінетичного моменту точки відносно вісей координат і взяти від них похідні за часом;
5. Підставити результати розрахунків двох попередніх пунктів до рівняння теореми про зміну кінетичного моменту точки;
6. Вирішити згідно з умовою пряму чи обернену задачу динаміки точки.

Розглянемо використання теореми про зміну кінетичного моменту точки для розв'язання задачі динаміки точки.

Задача 11.7

Знайти закон і період коливань математичного маятника, довжина нитки якого дорівнює l (рис. 11.8). У початковий момент маятнику, нитка якого займала прямовисне положення, була надана за допомогою поштовху початкова швидкість $\dot{\varphi}_0$.

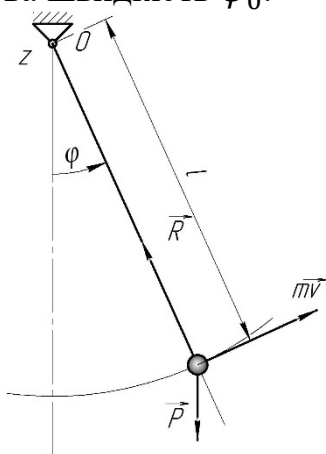


Рис. 11.8. До задачі 11.7.

Розв'язання. Для вирішення цієї задачі застосуємо теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної точки відносно вісі z :

$$\frac{dk_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k).$$

Зобразимо на рисунку (див. рис. 8) вагу матеріальної точки $\vec{P}$ і силу реакції нитки $\vec{R}$.

Сума моментів усіх сил, прикладених до маятника, дорівнює:

$$\sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k) = -Pl \sin \varphi.$$

Кінетичний момент маятника відносно вісі z дорівнює $k_z = mvl$; оскільки $v = l\dot{\varphi}$, то $k_z = ml^2\dot{\varphi}$ і

$$\frac{dk_z}{dt} = ml^2\ddot{\varphi}.$$

Маємо за теоремою про зміну кінетичного моменту матеріальної точки відносно вісі z :

$$ml^2\ddot{\varphi} = -Pl \sin \varphi,$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Розв'язання цього нелінійного диференціального рівняння коливань маятника викликає відомі складнощі. Тому вирішимо задачу наближено, вважаючи коливання маятника малими. Розкладемо $\sin\varphi$ у ряд

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

і знехтувавши членами розкладу порядку вище першого, отримаємо $\sin\varphi \approx \varphi$. Тоді диференціальне рівняння коливань маятника прийме вигляд:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Позначивши $\frac{g}{l} = k^2$, запишемо

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Розв'язок рівняння має вигляд:

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Для визначення сталих інтегрування використаємо початкові умови руху $t = 0, \varphi = 0, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

Диференціюючи φ за часом, знаходимо:

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Отримаємо, що $C_1 = 0, C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}$. Отже, можемо переписати:

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt,$$

де $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Позначимо $\frac{\dot{\varphi}_0}{k} = \alpha$ і отримаємо насамкінець

$$\varphi = \alpha \sin kt.$$

Отже, маятник здійснює гармонічні коливання з кутовою амплітудою α і з круговою частотою k . При малих коливаннях маятника кругова частота коливань не залежить від початкових умов руху, тобто коливання маятника **ізохронні**.

Період коливань маятника:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Маса матеріальної точки не входить до виразу періоду коливань T . З цього виходить, що матеріальні точки, незважаючи на різні маси, мають за однакової довжини нитки маятника l один і той самий період.

Відповідь: закон руху $\varphi = \alpha \sin k t$, період коливань $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

11.3.3. Теорема про зміну кінетичної енергії точки

Роботою сталої сили на прямолінійному переміщенні називається скалярний добуток векторів сили і переміщення:

$$A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos(\vec{F}, \Delta \vec{r}).$$

Елементарна робота змінної сили є скалярний добуток векторів сили і елементарного переміщення $\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$.

Робота змінної сили на скінченному переміщенні за криволінійною траєкторією дорівнює криволінійному інтегралу, взятому вздовж дуги кривої від M_1 до M_2 , від скалярного добутку векторів сили і елементарного переміщення:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F dr \cos(\vec{F}, d\vec{r}).$$

Роботи сили тяжіння матеріальної точки дорівнює добутку сили тяжіння на різницю висот кінцевого і початкового положень точки, тобто

$$A = P \cdot \Delta h.$$

Робота пружної сили ($F_x = -cx$) на прямолінійному переміщенні за лінією дії сили із точки з абсцисою x_1 у точку з абсцисою x_2 визначається за формулою:

$$A = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

Кінетична енергія точки дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Теорема про зміну кінетичної енергії точки: зміна кінетичної енергії точки при її переміщенні дорівнює сумі робіт, які здійснені силами, прикладеними до точки, на цьому переміщенні:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(\vec{F}_k),$$

або

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \sum_{k=1}^n A(\vec{F}_k).$$

Порядок розв'язання задач на застосування теореми про зміну кінетичної енергії точки:

1. Зобразити на рисунку усі сили, прикладені до точки, тобто задані сили та сили реакцій в'язей;
2. Обчислити суму робіт усіх сил, прикладених до точки, на її переміщенні;
3. Обчислити кінетичну енергію точки у її початковому і кінцевому положеннях;

4. Використати результати обчислень двох попередніх пунктів, застосувавши теорему про зміну кінетичну енергію точки та визначити невідому величину.

Розглянемо використання теореми про зміну кінетично енергії точки для розв'язання задачі динаміки точки.

Задача 11.8

Вантаж вагою $P = 20$ кН підіймається похилою поверхнею за допомогою мотузки, розташованої під кутом $\alpha = 30^\circ$ до площини (рис. 11.9). Похила поверхня утворює кут $\beta = 30^\circ$ з горизонтом. Натяг мотузки $S = 15$ кН. У початковому положенні вантаж знаходився у спокої. Знайти величину переміщення l вантажу вздовж похилої поверхні у момент, коли вантаж має швидкість $v = 2$ м/с. Коефіцієнт тертя ковзання вантажу з похилою поверхнею f дорівнює 0,2.

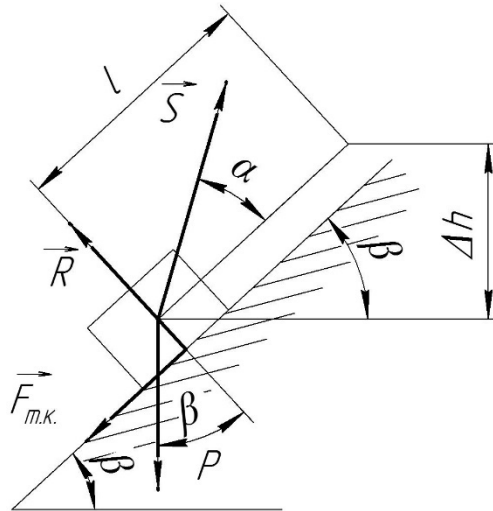


Рис. 11.9. До задачі 11.8.

Розв'язання. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії точки:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \sum_{k=1}^n A(\vec{F}_k).$$

До вантажу прикладені: $\vec{P}$ – вага вантажу, $\vec{S}$ – сила реакції мотузки, $\vec{R}$ – нормальна сила реакції похилої поверхні, $\vec{F}_{m.k.}$ – сила тертя ковзання вантажу з похилою поверхнею, причому $F_{m.k.} = fN$, де нормальний тиск дорівнює $N = P\cos\beta - S\sin\alpha$, таким чином $F_{m.k.} = f(P\cos\beta - S\sin\alpha)$.

Обчислимо суму робіт цих сил на переміщенні вантажу, яке складає l :

$$\sum A(\vec{F}_k) = A(\vec{P}) + A(\vec{S}) + A(\vec{R}) + A(\vec{F}_{m.k.}).$$

Робота сили тяжіння від'ємна, тому що вантаж підіймається догори:

$$A(\vec{P}) = -P\Delta h = -Pl\sin\beta.$$

Робота сили реакції мотузки дорівнює:

$$A(\vec{S}) = Sl\cos\alpha.$$

Робота нормальної сили реакції похилої поверхні дорівнює нулю, тому що сила $\vec{R}$ перпендикулярна переміщенню l :

$$A(\vec{R}) = 0.$$

Робота сили тертя ковзання від'ємна, оскільки кут між напрямком сили $\vec{F}_{m.k.}$ і переміщенням l складає 180° :

$$A(\vec{F}_{m.k.}) = -F_{m.k.}l = -f(P\cos\beta - S\sin\alpha)l.$$

Отже сума робіт усіх сил, прикладених до вантажу, на переміщенні l складе:

$$\sum A(\vec{F}_k) = [S(\cos\alpha + f\sin\alpha) - P(\sin\beta + f\cos\beta)]l.$$

Обчислимо зміну кінетичної енергії вантажу на його переміщенні l . У початковий момент вантаж знаходився у спокої, тому $T_1 = 0$. У кінцевому положенні вантаж набув швидкість v , тому $T_2 = \frac{1}{2}mv^2$.

Маємо:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mv^2.$$

Підставивши знайдені вирази до теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки, знайдемо шукане переміщення:

$$l = \frac{mv^2}{2g[S(\cos\alpha + f\sin\alpha) - P(\sin\beta + f\cos\beta)]}.$$

Після підстановки чисельних даних отримаємо $l = 3,54$ м.

Відповідь: $l = 3,54$ м.

РОЗДІЛ 12. ДИНАМІКА СИСТЕМИ

На відміну від статички та динаміки точки, де сили поділялися на задані та сили реакцій в'язей, у динаміці системи сили прийнято класифікувати на **внутрішні** ($\vec{F}^i$, сили взаємодії між точками, які входять до складу системи) і **зовнішні** ($\vec{F}^e$, сили, прикладені до точок системи ззовні).

Диференціальні рівняння руху системи у проекціях на вісі декартових координат записуються у формі:

$$\begin{cases} m_k \ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i, \\ m_k \ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i, \\ m_k \ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i, \end{cases}$$

де $k = 1, 2, \dots, n$.

Отже, для повного визначення руху системи з n точок необхідно вирішити систему $3n$ звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з $3n$ невідомими функціями однієї змінної t . Для знаходження $6n$ сталих інтегрування мають бути задані $6n$ початкових умов руху. До того ж, зовнішні та внутрішні сили можуть залежати не лише від часу, а й від положення, швидкості та прискорень точок системи. Розв'язання таких задач є складною проблемою.

Проте у деяких задачах динаміки системи розв'язання можна значно спростити шляхом застосування загальних теорем динаміки.

До найбільш поширених загальних теорем динаміки системи відносять:

- теорема про рух центра мас системи;
- теорема про зміну кількості руху системи;
- теорема про зміну кінетичного моменту системи;
- теорема про зміну кінетичної енергії системи.

12.1. Теорема про рух центра мас системи

Центром мас (центром інерції) системи є точка, розташування якої визначається вектор-радіусом $\vec{r}_C$ за формулою

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{M},$$

де $M = \sum_{k=1}^n m_k$ – маса системи матеріальних точок.

Декартові координати центра мас системи визначаються за виразами:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{M}.$$

Поняття центра мас є узагальнення поняття центра тяжіння твердого тіла для випадку системи матеріальних точок.

Залежність між швидкістю центра мас і швидкостями точок системи має вигляд:

$$\vec{v}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k}{M}.$$

Залежність між прискоренням центра мас і прискореннями точок системи має вигляд:

$$\vec{a}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k}{M}.$$

Теорема про рух центра мас системи: центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі матеріальної системи і до якої прикладені усі зовнішні сили, діючі на систему:

$$M \vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e.$$

Та сама теорема, записана у проекціях на осі декартових координат, має вигляд:

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, M \ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e.$$

Порядок вирішення задач за допомогою теореми про рух центра мас системи:

1. Зобразити на рисунку усі зовнішні сили системи;
2. Обрати систему координат;
3. Записати теорему про рух центра мас систему у проекціях на вісі декартових координат;
4. Обчислити суму проекцій усіх зовнішніх сил системи на вісі координат.

Записати координати центрів мас усіх точок системи x_k, y_k, z_k , де $k = 1, 2, \dots, n$, і, продиференціювавши їх двічі за часом, визначити $M \ddot{x}_C, M \ddot{y}_C, M \ddot{z}_C$;

Скориставшись отриманими результатами, записати диференціальні рівняння руху центра мас системи стосовно даної системи;

Визначити невідомі зовнішні сили системи при вирішенні прямої задачі динаміки, або шуканий закон руху центра мас однієї із точок системи при вирішенні зворотної задачі.

Розглянемо використання теореми про рух центра мас системи для розв'язання задач динаміки системи.

Задача 12.1

При польоті снаряду у безповітряному просторі центр інерції снаряда описує параболу. Чи зміниться траєкторія центра інерції, якщо снаряд під час польоту розірветься на кілька уламків?

Розв'язання. Розрив снаряда відбувається під дією внутрішніх сил, які безпосередньо не впливають на рух центра інерції системи. Тому, уламки снаряда мають рухатися так, щоб центр інерції снаряда, що розірвався, рухався тією ж траєкторією, тобто параболою.

Задача 12.2

Яка сила приводить у рух центр інерції залізничного екіпажу, який рухається негладенькою горизонтальною дорогою?

Розв'язання. Часто помилково вважають, що центр інерції залізничного екіпажу безпосередньо приводиться у рух силою тиску газів у циліндрах двигуна. Ця сила, яка є внутрішньою, на рух центра інерції залізничного екіпажу не впливає. Під дією цієї сили виникають обертові моменти пар сил, прикладених до ведучих коліс. У результаті виникає сила тертя між ведучими колесами та землею, направлена горизонтально убік руху залізничного екіпажу.

Сила тертя, що є зовнішньою по відношенню до залізничного екіпажу, приводить у рух його центр інерції.

Задача 12.3

Тонкий однорідний стрижень OA довжини l і ваги P (рис. 12.1) обертається навколо вертикальної вісі O_1O_2 зі сталою кутовою швидкістю ω . Визначити головний вектор зовнішніх сил. Масою вісі O_1O_2 знехтувати.

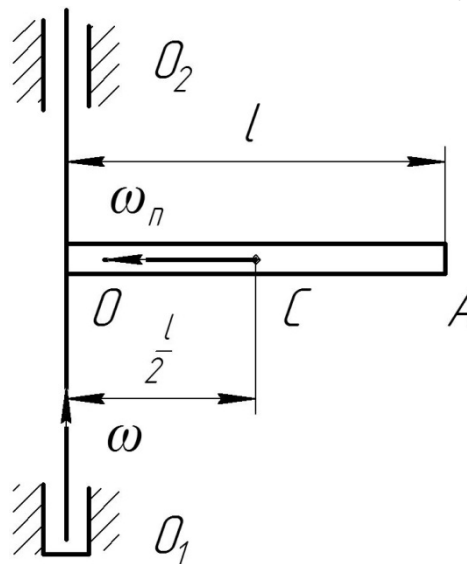


Рис. 12.1. До задачі 12.3

Розв'язання. У відповідності з теоремою про рух центра інерції системи матеріальних точок $M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$ для визначення головного вектора зовнішніх сил системи $\vec{F}^{\text{гол}} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$ достатньо знайти $M\vec{a}_C$. Оскільки центр інерції стрижня знаходиться у точці C на відстані $\frac{l}{2}$ від осі обертання і має, у силу сталості вектора $\vec{\omega}$, тільки доцентрове прискорення $a_n = \omega^2 OC = \omega^2 \frac{l}{2}$, яке направлене вздовж стрижня від C до O , то головний вектор зовнішніх сил системи $\vec{F}^{\text{гол}}$ має той самий напрямок і за модулем складає

$$\vec{F}^{\text{гол}} = Ma_C = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \omega^2.$$

Відповідь: $V^e = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \omega^2.$

Випадок збереження швидкості центра мас системи: якщо головний вектор зовнішніх сил системи нульовий $\vec{F}^{\text{гол}} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0$, то швидкість центра інерції системи незмінна за величиною і напрямком, тобто центр інерції системи матеріальних точок рухається рівномірно і прямолінійно, або знаходиться у спокої.

Задача 12.4

Чи може людина ходити ідеально гладенькою горизонтальною поверхнею?

Розв'язання. Зовнішніми силами, прикладеними до людини, є його вага $\vec{P}$ і сумарна нормальна сила реакції землі $\vec{R}$. Горизонтальна сила реакції відсутня, бо площина є ідеально гладенькою.

Запишемо теорему про рух центра інерції матеріальних точок у проекціях на горизонтальну вісь x :

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx}^e.$$

Оскільки сили $\vec{P}$ і $\vec{R}$ перпендикулярні до вісі x , то $\sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx}^e = 0$ і $M\ddot{x}_C = 0$, звідки $M\dot{x}_C = C_1 = \text{const}$. Оскільки у початковий момент людина знаходилася у стані спокою, то $C_1 = 0$ і $M\dot{x}_C = 0$. Значить $Mx_C = C_2 = \text{const}$, тобто абсциса центра інерції C людини залишається незмінною і людина гладенькою горизонтальною поверхнею не може ходити.

Задача 12.5

Похилою поверхнею KL зрізаної чотирикутної призми $DEKL$ опускається вантаж A ваги $P_A = 10$ кН, приводячи у рух за допомогою невагомої нерозтяжної нитки вантаж B ваги $P_B = 6$ кН.

Знайти переміщення призми $DEKL$ ваги $P = 20$ кН ідеально гладенькою поверхнею, якщо вантаж A перемістився похилою поверхнею KL донизу на 1 м. У початковий момент система знаходилася у спокої.

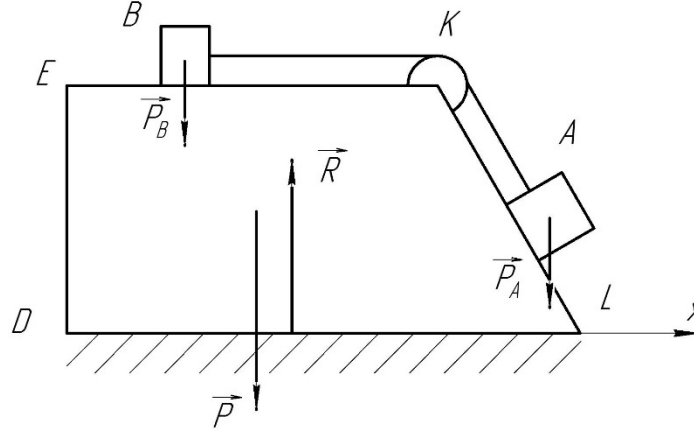


Рис. 12.2. До задачі 12.5

Розв'язання. Зобразимо всі зовнішні сили, прикладені до матеріальної системи, яка складається з призми і двох вантажів (рис. 12.2).

Запишемо теорему про рух центра інерції системи матеріальних точок у проекції на вісь x :

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e.$$

Оскільки усі зовнішні сили перпендикулярні до вісі x , то $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$. А це означає, що й $M\ddot{x}_C = 0$. Тоді $M\dot{x}_C = C_1$. У початковий момент часу система знаходилася у спокої, тому $C_1 = 0$ і $M\dot{x}_C = 0$. Звідки слідує, що $Mx_C = C_2$, тобто абсциса центра інерції системи, незалежно від переміщень окремих мас, що входять до системи, залишається сталою. Із визначення центра інерції системи матеріальних точок випливає, що

$$Mx_C = \sum_{k=1}^n m_k x_k.$$

Позначимо індексами 1 координати матеріальних точок системи, які відповідають моменту t_1 початку переміщення, а індексами 2 – координати, які відповідають моменту t_2 закінчення переміщення.

Тоді

$$\begin{aligned}\text{при } t = t_1 \quad Mx_C &= \sum_{k=1}^n m_k x_{1k}, \\ \text{при } t = t_2 \quad Mx_C &= \sum_{k=1}^n m_k x_{2k}.\end{aligned}$$

Віднімаючи з другого співвідношення перше, маємо:

$$0 = \sum_{k=1}^n m_k (x_{2k} - x_{1k}).$$

Позначивши $x_{2k} - x_{1k} = \Delta x_k$ отримаємо, що за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$ за незмінної абсциси x_C центра інерції системи матеріальних точок здійснилися такі переміщення точок матеріальної системи, що сума добутків мас точок на проекції їх переміщень на вісь x дорівнює нулю: $\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = 0$. Приналежно до даної задачі, запишемо:

$$m_A \Delta x_A + m_B \Delta x_B + m \Delta x = 0,$$

де Δx – шукане переміщення призми горизонтальною площиною.

Вирішивши рівняння відносно Δx , знайдемо, що $\Delta x = -\frac{11}{36}$ м. Знак мінус вказує, що призма переміщується вбік, протилежний додатному напрямку вісі x , тобто наліво.

Відповідь: $\Delta x = -\frac{11}{36}$ м.

12.2. Теорема про зміну кількості руху механічної системи

Головний вектор кількості руху механічної системи є векторна сума кількостей руху точок системи і дорівнює добутку маси системи на швидкість її центра інерції.

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n \vec{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = M \vec{v}_C.$$

Теорема про зміну кількості руху системи: зміна головного вектора кількості руху системи за деякий проміжок часу дорівнює векторній сумі імпульсів усіх зовнішніх сил системи за той самий проміжок часу:

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum_{k=1}^n \vec{S}(\vec{F}_k^e).$$

Ця теорема у проекціях на вісі декартових координат буде мати вигляд:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^n S_x(\vec{F}_k^e), \quad Q_{2y} - Q_{1y} = \sum_{k=1}^n S_y(\vec{F}_k^e), \quad Q_{2z} - Q_{1z} = \sum_{k=1}^n S_z(\vec{F}_k^e),$$

або

$$M\dot{x}_{C_2} - M\dot{x}_{C_1} = \sum_{k=1}^n S_x(\vec{F}_k^e), \quad M\dot{y}_{C_2} - M\dot{y}_{C_1} = \sum_{k=1}^n S_y(\vec{F}_k^e), \quad M\dot{z}_{C_2} - M\dot{z}_{C_1} = \sum_{k=1}^n S_z(\vec{F}_k^e).$$

Варто звернути увагу на те, що сума імпульсів внутрішніх сил системи дорівнює нулю, іншими словами внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну кількості руху системи.

Якщо векторна сума імпульсів зовнішніх сил системи дорівнює нулю, то кількість руху системи є сталою і має місце випадок збереження кількості руху системи:

$$\sum_{k=1}^n \vec{S}(\vec{F}_k^e) = 0, \\ \vec{Q}_2 = \vec{Q}_1.$$

Порядок вирішення задач за допомогою теореми про зміну кількості руху системи:

1. Зобразити на рисунку усі зовнішні сили;
2. Обрати систему координат;
3. Записати теорему про зміну кількості руху системи у проекціях на вісі координат;
4. Якщо сума проекцій імпульсів зовнішніх сил на вісь дорівнює нулю, то слід прирівняти між собою проекції на цю вісь кількості руху системи у початковий та кінцевий моменти часу і з отриманого рівняння визначити невідому величину.

Розглянемо використання теореми про зміну кількості руху системи для розв'язання задач динаміки системи.

Задача 12.6

Механічна система (рис. 12.3) складається із вантажу A вагою $\vec{P}_A$, який лежить на похилій площині клина B вагою $\vec{P}_B$, розташованій під кутом α до горизонту. У початковий момент система знаходилася у спокої; потім вантаж A почав спускатися похилою площиною з відносною швидкістю u .

Визначити швидкість руху клина B . Силою тертя ковзання клина по горизонтальній площині знехтувати.

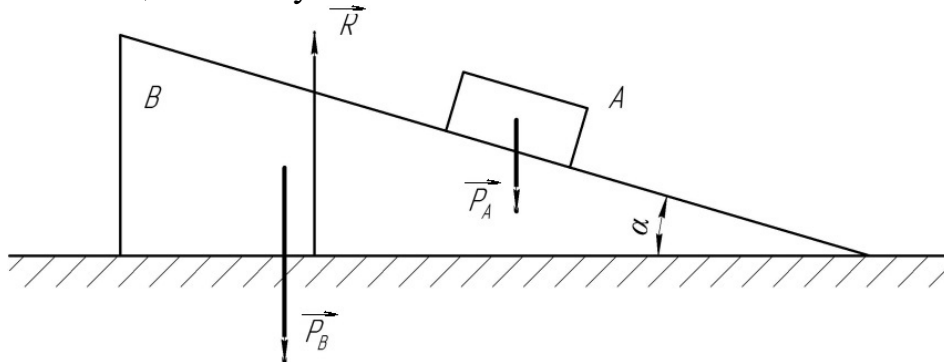


Рис. 12.3. До задачі 12.6.

Розв'язання. До складу механічної системи, що розглядається входять два тіла: вантаж A і клин B .

На рис. 12.4 зображено усі зовнішні сили системи. Вісь x направимо горизонтально праворуч (рис. 12.4).

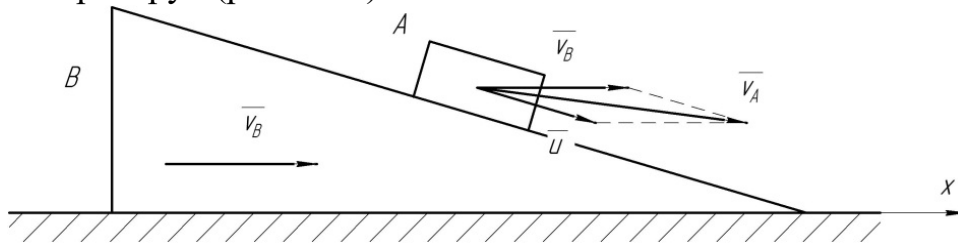


Рис. 12.4. До задачі 12.6.

Запишемо теорему про зміну кількості руху системи у проекції на вісь x :

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^n S_x(\vec{F}_k^e).$$

Оскільки сума проекцій усіх зовнішніх сил на вісь x дорівнює нулю $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0$, то й сума проекцій імпульсів усіх зовнішніх сил на цю вісь також дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n S_x(\vec{F}_k^e) = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{kx}^e dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx}^e \right) dt = 0.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} Q_{2x} - Q_{1x} &= 0, \\ Q_{2x} &= Q_{1x}. \end{aligned}$$

Таким чином, має місце випадок збереження проекції кількості руху системи на вісь x .

У початковий момент система знаходилася у спокої, тобто $Q_{1x} = 0$.

Обчислимо проекцію на вісь x кількості руху системи у момент часу, який розглядається. Якщо клин рухається праворуч з шуканою швидкістю $\vec{v}_B$. Для знаходження швидкості вантажу необхідно скористатися теоремою про додавання швидкостей точки $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$. Вантаж здійснює переносний поступальний рух разом з клином, тобто $\vec{v}_e = \vec{v}_B$, і відносний рух по відношенню до клина, тобто $\vec{v}_r = \vec{u}$.

Отже, $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{u}$ і можемо записати:

$$v_{Ax} = v_{Bx} + u_x = v_{Bx} + u \cos \alpha.$$

Тепер обчислимо проекцію кількості руху системи на вісь x :

$$Q_{2x} = m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = \frac{P_A}{g} (v_{Bx} + u \cos \alpha) + \frac{P_B}{g} v_{Bx},$$

У силу того, що було показано раніше, можемо записати:

$$\frac{P_A}{g}(v_{Bx} + u \cos \alpha) + \frac{P_B}{g} v_{Bx} = 0,$$

Звідки

$$v_{Bx} = -\frac{P_A}{P_A + P_B} u \cos \alpha.$$

Отрианий від'ємний знак вказує на те, що насправді клин рухається ліворуч.

Відповідь: $v_{Bx} = -\frac{P_A}{P_A + P_B} u \cos \alpha$.

12.3. Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи

Кінетичний момент $\vec{K}_O$ (головний момент кількості руху) системи відносно центра O дорівнює сумі кінетичних моментів точок системи відносно того ж центра, тобто:

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{k}_{kO} = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k).$$

Кінетичні моменти системи відносно осей декартових координат визначаються наступним чином:

$$K_x = \sum_{k=1}^n k_{kx}, \quad K_y = \sum_{k=1}^n k_{ky}, \quad K_z = \sum_{k=1}^n k_{kz}.$$

Теорема про зміну кінетичного моменту системи: похідна за часом від кінетичного моменту системи матеріальних точок відносно нерухомого центра дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил системи відносно того ж центра, тобто

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^e).$$

Кінетичний момент твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої вісі дорівнює:

$$K_z = I_z \omega.$$

Розглянемо використання теореми про зміну кінетичного моменту системи для розв'язання задач динаміки системи.

Задача 12.7

Вантаж A ваги P , спускаючись похилою поверхнею донизу, приводить в обертання барабан B за допомогою намотаної на нього мотузки; r – радіус барабана, f – коефіцієнт тертя ковзання вантажу о похилу поверхню, розташовану під кутом α до горизонту; I_z – момент інерції барабана відносно його вісі обертання z , перпендикулярної до площини рисунку (рис. 12.5). Визначити кутову швидкість обертання барабана. Масою мотузки знехтувати.

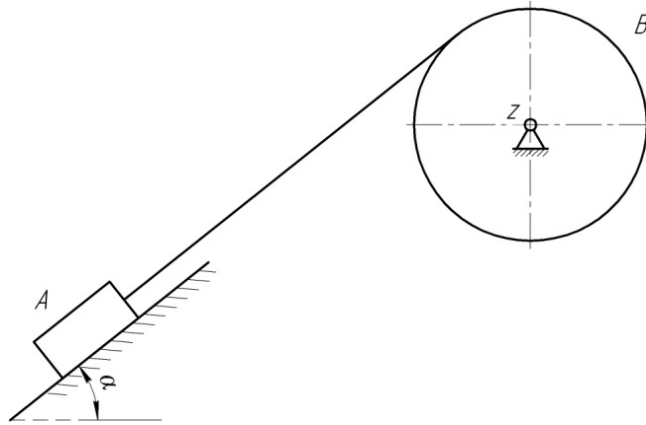


Рис. 12.5. До задачі 12.7.

Розв'язання. Вирішимо задачу, застосувавши теорему про зміну кінетичного моменту системи матеріальних точок відносно вісі z :

$$\frac{d\vec{K}_z}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_z(\vec{F}_k^e).$$

Оскільки дана матеріальна система складається з барабана B і вантажу A , то сила реакції мотузки $\vec{T}$ є внутрішньою і до рівняння теореми не входить.

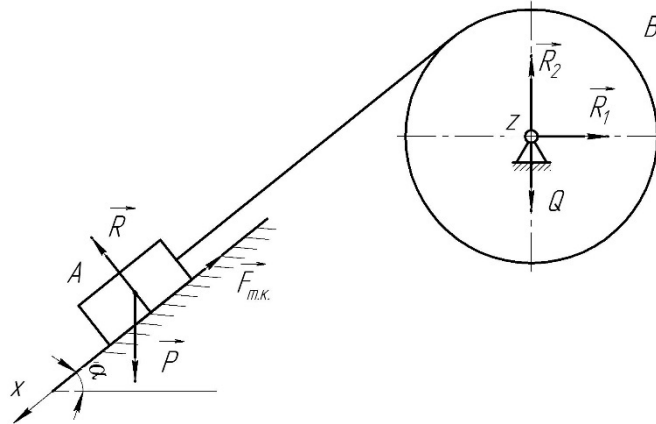


Рис. 12.6. До задачі 12.7.

Зобразивши усі зовнішні сили системи (рис. 12.6), складемо суму моментів усіх зовнішніх сил відносно вісі z :

$$\sum_{k=1}^n \vec{m}_z(\vec{F}_k^e) = Pr \sin \alpha - F_{m.k.} r = Pr(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Кінетичний момент системи, яка складається з барабана і вантажу, відносно вісі z запишеться так:

$$K_z = K_z^{(1)} + K_z^{(2)},$$

$K_z^{(1)}$ – кінетичний момент барабана, $K_z^{(2)}$ – кінетичний момент вантажу.

Маємо:

$$K_z^{(2)} = \frac{P}{g} v r = \frac{P}{g} r^2 \dot{\phi},$$

$$K_z^{(1)} = I_z \dot{\phi},$$

$$K_z = \left(I_z + \frac{P}{g} r^2 \right) \dot{\phi}.$$

Підставивши вищенаведені вирази до рівняння теореми, отримаємо:

$$\left(I_z + \frac{P}{g} r^2 \right) \dot{\phi} = Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Звідси отримаємо диференціальне рівняння:

$$\ddot{\phi} = \frac{Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{I_z + \frac{P}{g} r^2}.$$

Проінтегрувавши, знайдемо:

$$\dot{\phi} = \frac{Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{I_z + \frac{P}{g} r^2} t + C_1.$$

При $t = 0$, $\dot{\phi} = 0$ маємо, що $C_1 = 0$. Отже кутова швидкість барабана дорівнює:

$$\dot{\phi} = \frac{Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{I_z + \frac{P}{g} r^2} t.$$

Відповідь: $\dot{\phi} = \frac{Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{I_z + \frac{P}{g} r^2} t.$

12.4. Закон збереження кінетичного моменту системи

Закон збереження кінетичного моменту: якщо векторна сума моментів усіх зовнішніх сил системи відносно нерухомого центра дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно того ж центра сталий, тобто, якщо

$$\sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) = 0,$$

то вектор $\vec{K}_O$ сталий.

Аналогічно, якщо сума моментів усіх зовнішніх сил системи відносно нерухомої вісі дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно тієї ж вісі сталий.

Порядок вирішення задач за допомогою теореми про збереження кінетичного моменту:

1. Обрати координатні вісі, направив одну з них вздовж нерухомої вісі обертання;
2. Зобразити на рисунку усі зовнішні сили системи;
3. Записати теорему про зміну кінетичного моменту системи відносно обраної вісі;
4. Показати, що сума моментів усіх зовнішніх сил системи відносно вісі дорівнює нулю;
5. Обчислити і прирівняти кінетичні моменти системи відносно вісі у початковий і кінцевий моменти часу $K_{1z} = K_{2z}$;
6. Вирішити отримане рівняння, визначити невідому величину.

Розглянемо застосування закону збереження кінетичного моменту системи для розв'язання задач динаміки системи.

Задача 12.8

Чи можу повернутися людина, яка стоїть на ідеально гладенькій горизонтальній поверхні, якщо вона почне обертати руку над головою?

Розв'язання. Направимо через центр тяжіння C людини вісь z перпендикулярно нерухомій площині. На людину діють зовнішні сили: її вага $\vec{P}$ і нормальна сила реакції площини $\vec{R}$ (оскільки площина ідеально гладенька, то сила тертя відсутня).

Застосовуючи теорему про зміну кінетичного моменту системи відносно вісі z , запишемо:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k^e).$$

Оскільки зовнішні сили $\vec{P}$ і $\vec{R}$ лежать на вісі z , то $\sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k^e) = 0$, таким чином $\frac{dK_z}{dt} = 0$ і $K_z = \text{const}$.

Має місце випадок збереження кінетичного моменту відносно z :

$$K_{1z} = K_{2z}$$

У початковий момент людина знаходилася у спокої, то $K_{1z} = 0$. Потім людина підняла руку над головою і почала нею обертати навколо вісі z з відносною кутовою швидкістю $\omega_z^{(1)*}$. Припустимо, що при цьому людина починає обертати у той же бік тулуб з кутовою швидкістю $\omega_z^{(2)*}$. Тепер кінетичний момент системи відносно вісі z буде $K_{2z} = K_z^{(1)} + K_z^{(2)}$, причому

$$K_z^{(1)} = I_z^{(1)} \omega_z^{(1)}, K_z^{(2)} = I_z^{(2)} \omega_z^{(2)},$$

де $I_z^{(1)}$ – момент інерції руки відносно вісі обертання z , $I_z^{(2)}$ – момент інерції тулубу відносно вісі обертання z , $\omega_z^{(1)}$ – абсолютна кутова швидкість руки.

Враховуючи те, що рука людини здійснює складний рух (відносний по відношенню до тулубу і переносний разом із тулубом), отримаємо: $\omega_z^{(1)} = \omega_z^{(1)*} + \omega_z^{(2)}$, отже

$$K_z^{(1)} = I_z^{(1)} (\omega_z^{(1)*} + \omega_z^{(2)}).$$

Тоді

$$K_{2z} = K_z^{(1)} + K_z^{(2)} = I_z^{(1)} (\omega_z^{(1)*} + \omega_z^{(2)}) + I_z^{(2)} \omega_z^{(2)}.$$

Враховуючи, що $K_{1z} = K_{2z}$ і $K_{1z} = 0$, отримаємо:

$$I_z^{(1)} (\omega_z^{(1)*} + \omega_z^{(2)}) + I_z^{(2)} \omega_z^{(2)} = 0,$$

звідки

$$\omega_z^{(2)} = -\frac{I_z^{(1)}}{I_z^{(1)} + I_z^{(2)}} \omega_z^{(1)*}.$$

Знак мінус вказує, що людина буде обертатися навколо вісі z вбік, протилежний обертанню руки.

Відповідь: людина, яка стоїть на ідеально гладенькій поверхні, може повернутися навколо вісі, що проходить через його центр тяжіння перпендикулярно до цієї площини.

Задача 12.9

На бічній поверхні кругового конуса симетрично розташовані два вантажі, з'єднані між собою тонкою ниткою і віддалені від вісі обертання конуса на відстані однієї треті радіуса основи конуса. Конус разом із вантажами обертається з кутовою швидкістю ω . Після раптового розриву нитки вантажі почали опускатися бічною поверхнею конуса. Визначити кутову швидкість конуса у момент, коли вантажі досягнуть основи конуса. Силами опору руху знехтувати. Вантажі вважати точковими масами.

Розв'язання. Взявши початок координат у нижній опорі A вісі конуса, направимо вісь z за віссю обертання конуса. Нехай P – вага конуса, r – радіус основи конуса. Зобразимо зовнішні сили матеріальної системи, яка складається з конуса і двох вантажів (рис. 12.7).

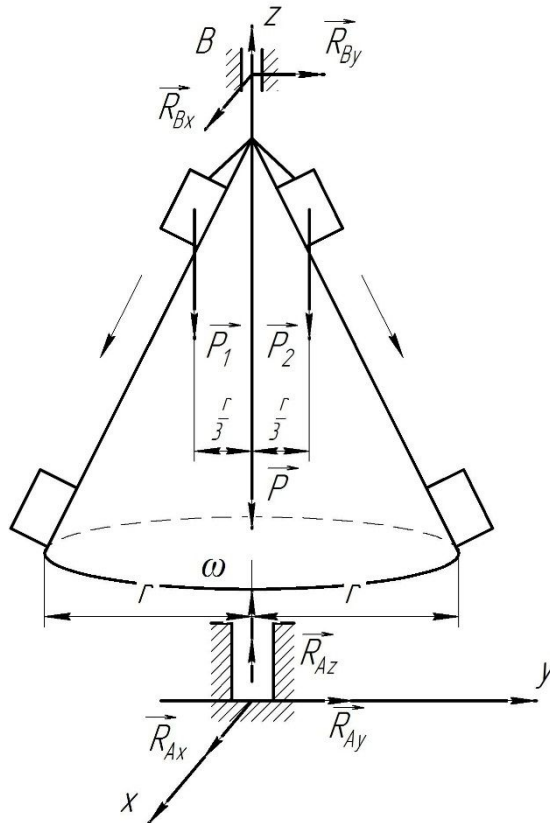


Рис. 12.7. До задачі 12.9

Застосуємо теорему про зміну кінетичного моменту системи матеріальних точок відносно вісі z :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k^e).$$

Оскільки усі зовнішні сили або паралельні, або перетинають вісь обертання z , то сума моментів усіх зовнішніх сил відносно вісі z дорівнює нулю $\sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k^e) = 0$, тобто $\frac{dK_z}{dt} = 0$ і $K_z = \text{const}$. А це тягне за собою, що $K_{1z} = K_{2z}$. Отже, має місце випадок збереження кінетичного моменту відносно вісі z .

Можемо записати:

$$K_{1z} = I_{1z}\omega_{1z}, K_{2z} = I_{2z}\omega_{2z},$$

де I_{1z} і I_{2z} – відповідно моменти інерції системи у першому і у другому положенні вантажів.

$$I_{1z}\omega_{1z} = I_{2z}\omega_{2z},$$

звідки

$$\omega_{2z} = \frac{I_{1z}}{I_{2z}} \omega_{1z}.$$

Залишається обчислити I_{1z} і I_{2z} . Оскільки матеріальна система складається із конуса і двох вантажів, то момент інерції системи дорівнює сумі моментів інерції конуса і вантажів. Момент інерції конуса відносно z дорівнює $\frac{3}{10} \frac{P}{g} r^2$, вантажі вважають точковими масами. У відповідності із початковим і кінцевим положеннями вантажів запишемо:

$$I_{1z} = \frac{3}{10} \frac{P}{g} r^2 + 2 \frac{P}{4g} \left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{16}{45} \frac{P}{g} r^2,$$
$$I_{2z} = \frac{3}{10} \frac{P}{g} r^2 + 2 \frac{P}{4g} r^2 = \frac{4}{5} \frac{P}{g} r^2.$$

Використавши знайдені моменти інерції, отримаємо:

$$\omega_{2z} = \frac{4}{9} \omega_{1z}.$$

Відповідь: $\omega_{2z} = \frac{4}{9} \omega_{1z}$.

12.5. Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Елементарна роботи сил, прикладених до твердого тіла:

при поступальному русі: $\delta A = \vec{F}^{\text{гол}} \cdot \delta \vec{r}$ де $\vec{F}^{\text{гол}}$ – головний вектор системи сил, $\delta \vec{r}$ – елементарне переміщення будь-якої точки твердого тіла;

при обертанні навколо нерухомої вісі: $\delta A = m_z \cdot \delta \varphi$ де $m_z A$ – головний момент системи сил відносно вісі обертання z , $\delta \varphi$ – елементарне кутове переміщення твердого тіла;

при плоскому русі: $\delta A = \vec{F}^{\text{гол}} \cdot \delta \vec{r}_O + m_{zO} \cdot \delta \varphi$ де $\vec{F}^{\text{гол}}$ – головний вектор системи сил, $\delta \vec{r}_O$ – елементарне переміщення полюса O , m_{zO} – головний момент системи сил відносно вісі обертання z , що проходить через полюс O перпендикулярно до нерухомої площини, $\delta \varphi$ – елементарне кутове переміщення навколо цієї вісі.

Потужність N характеризує швидкість здійснення роботи із плином часу і визначається за формулою:

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Кінетична енергія твердого тіла обчислюється за формулами:

при поступальному русі: $T = \frac{1}{2} M v^2$. де M – маса твердого тіла, v – швидкість будь-якої його точки;

при обертанні навколо нерухомої вісі: $T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$, де I_z – момент інерції твердого тіла відносно вісі обертання z , а ω – кутова швидкість обертання;

при плоскому русі: $T = \frac{1}{2} M_C v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2$ де M_C – маса твердого тіла, v_C – швидкість його центра інерції, I_{zC} – момент інерції твердого тіла відносно вісі обертання z , яка проходить через центр інерції перпендикулярно до нерухомої площини, а ω – величина миттєвої кутової швидкості обертання. При плоскому русі кінетична енергія може бути обчислена і за таким виразом $T = \frac{1}{2} I_P \omega^2$, де I_P – момент інерції твердого тіла відносно вісі P , що проходить через миттєвий центр швидкостей перпендикулярно до нерухомої площини.

при обертанні навколо нерухомої точки: $T = \frac{1}{2} I \omega^2$, де I – момент інерції твердого тіла відносно миттєвої вісі, ω – величина миттєвої кутової швидкості;

у загальному випадку руху твердого тіла: $T = \frac{1}{2} M_C v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$ де M_C – маса твердого тіла, v_C – швидкість його центра інерції, I_C – момент інерції твердого тіла відносно миттєвої вісі, що проходить через центр інерції, а ω – величина миттєвої кутової швидкості.

Теорема про зміну кінетичної енергії системи: зміна кінетичної енергії системи при її переміщенні дорівнює сумі робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил системи на цьому переміщенні:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n A(\vec{F}_k^i).$$

Теорема про зміну кінетичної енергії системи – єдина з чотирьох загальних теорем динаміки, у формулювання якої входять не тільки зовнішні, а й внутрішні сили.

У випадку незмінюваної системи сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю і теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок прийме вигляд:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(\vec{F}_k^e).$$

Порядок вирішення задач за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії:

1. Зобразити на рисунку усі зовнішні та внутрішні сили системи (якщо система є незмінюваною, то лише зовнішні);
2. Обчислити суму робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил на переміщеннях точок системи (якщо система є незмінюваною, то лише суму робіт зовнішніх сил);
3. Обчислити кінетичну енергію системи у початковому та кінцевому положеннях;
4. Скориставшись результатами обчислень, записати теорему про зміну кінетичної енергії системи та визначити невідому величину.

Розглянемо використання теореми про зміну кінетичної енергії системи для розв'язання задач динаміки системи.

Задача 12.10

До вісі C_1 котка A ваги P_1 і радіуса r_1 прив'язаний кінець однорідної недеформуємої мотузки, перекинutoї через блок B ваги P_2 і намотаний на циліндр D ваги P_3 і радіуса r_3 (рис. 12.8). Під дією обертового моменту, пропорційного куту повороту котка, $m = a\varphi$, де a – стала, коток A , що котиться без ковзання, підіймається похилою поверхнею, розташованою під кутом α до горизонту, і за допомогою мотузки приводить у рух циліндр D , який, котячись без ковзання, підіймається догори похилою поверхнею, розташованою під кутом β до горизонту. Коефіцієнт тертя кочення котка A о похилу поверхню дорівнює $f_{1к}$, коефіцієнт тертя кочення циліндра D з намотаною на нього мотузкою о похилу поверхню дорівнює $f_{3к}$.

Визначити швидкість вісі C_1 котка A у положенні системи, при якому вісь C_1 переміститься паралельно лінії найбільшого скату похилої поверхні на відстань s . У початковому положенні система знаходилася у спокої. Коток A , блок B і циліндр D вважати суцільними циліндрами. Масою мотузки знехтувати.

Розв'язання. Направимо вісь s через центр інерції C_1 котка A паралельно лінії найбільшого скату верхньої похилої поверхні.

У відповідності з додатнім напрямком вісі s , кути повороту котка A , блока B і циліндра D , відповідно дорівнюють $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ мають додатній напрямок відліку проти руху годинникової стрілки.

Вирішимо задачу за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A(\vec{F}_k^e).$$

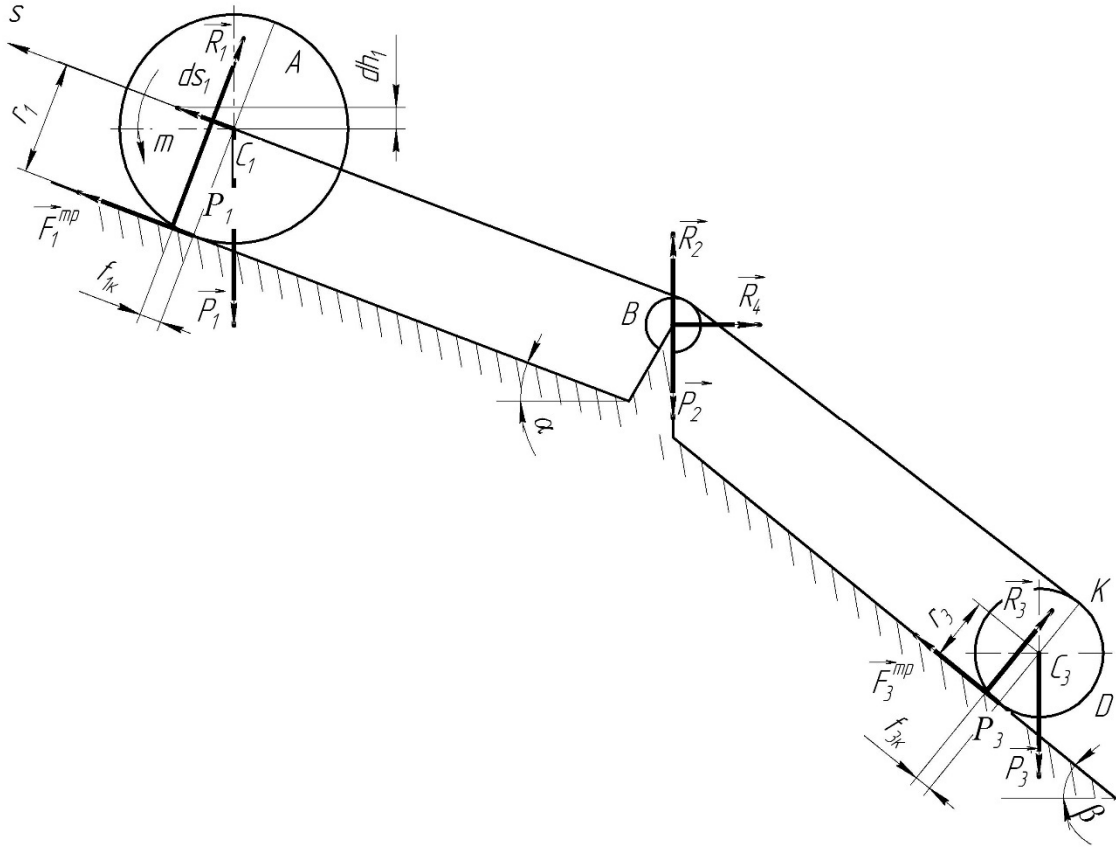


Рис. 12.8. До задачі 12.10.

Зобразимо зовнішні сили системи: $\vec{P}_1$ – вага котка A , $\vec{P}_2$ – вага блока B , $\vec{P}_3$ – вага циліндра D , m – обертовий момент, прикладений до котка A , $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_3$ – нормальні сили реакції похилих поверхонь, зміщені вбік руху відносно центрів інерції C_1 і C_3 відповідно котка A і циліндра D , $\vec{R}_2$ і $\vec{R}_4$ – складові сили реакції вісі блока B , F_1^{mp} – сила тертя котка A о похилу поверхню, направлена вбік руху, F_3^{mp} – сила тертя ковзання мотузки, намотаної на циліндр о похилу поверхню, направлена вбік руху.

Надамо елементарне переміщення ds центру інерції C_1 котка A паралельно похилій площині догори. У зв'язку з недеформованістю мотузки точка ободу блока B і точка K мотузки, намотаної на обід циліндра D , також отримують переміщення ds . Отже маємо, $ds = r_1 d\varphi_1 = r_2 d\varphi_2 = 2r_3 d\varphi_3$, де $d\varphi_1, d\varphi_2, d\varphi_3$ – елементарні кутові переміщення відповідно котка A , блока B і циліндра D .

Переміщення ds точки K циліндра D слід розглядати по відношенню до миттєвого центра P_3 циліндра. Як бачимо з рис. 12.9, $ds_{C_3} = \frac{ds}{2}$. Тому

$$ds = ds = r_1 d\varphi_1 = r_2 d\varphi_2 = 2r_3 d\varphi_3 = 2ds_{C_3}.$$

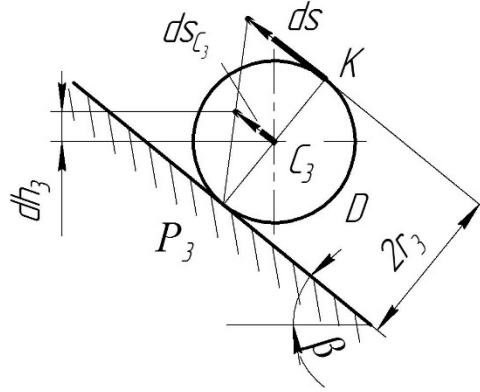


Рис. 12.9. До задачі 12.10.

Обчислимо елементарну роботу усіх зовнішніх сил системи:

$$\delta A = \delta A(\vec{P}_1) + \delta A(\vec{P}_2) + \delta A(\vec{P}_3) + \delta A_{m.K.A} + \delta A_{m.K.D} + \delta A(\vec{R}_2) + \delta A(\vec{R}_4) + \delta A(m) + \delta A(\vec{F}_1^{mp}) + \delta A(\vec{F}_3^{mp}).$$

Маємо:

$$\delta A(\vec{P}_1) = -P_1 dh_1 = -P_1 ds \sin \alpha,$$

$$\delta A(\vec{P}_2) = 0, \text{ (точка прикладання сили } \vec{P}_2 \text{ нерухома)}$$

$$\delta A(\vec{P}_3) = -P_3 dh_3 = -P_3 ds_{C_3} \sin \beta = -P_3 \frac{ds}{2} \sin \beta,$$

$$\delta A_{m.K.A} = -m_{m.K.A} d\varphi_1.$$

Оскільки $m_{m.K.A} = R_1 f_{1K} = P_1 \cos \alpha f_{1K}$, то маємо

$$\delta A_{m.K.A} = -P_1 \frac{f_{1K}}{r_1} \cos \alpha ds,$$

$$\delta A_{m.K.D} = -P_3 \frac{f_{3K}}{2r_3} \cos \beta ds,$$

$$\delta A(\vec{R}_2) = \delta A(\vec{R}_4) = 0, \text{ (точки прикладання відповідних сил нерухомі)}$$

$$\delta A(m) = m d\varphi.$$

Оскільки $m = a\varphi_1$, то можемо записати

$$\delta A(m) = \frac{a\varphi_1}{r_1} ds,$$

$$\delta A(\vec{F}_1^{mp}) = \delta A(\vec{F}_3^{mp}) = 0, \text{ (коток } A \text{ і циліндр } D \text{ котяться без ковзання).}$$

Підставивши усе до головної формули, отримаємо вираз елементарної роботи зовнішніх сил системи:

$$\delta A = \left[\frac{a}{r_1} \varphi_1 - P_1 \left(\sin \alpha + \frac{f_{1\kappa}}{r_1} \cos \alpha \right) - \frac{P_3}{2} \left(\sin \beta + \frac{f_{3\kappa}}{r_3} \cos \beta \right) \right] ds.$$

Для визначення суми робіт зовнішніх сил системи на скінченному переміщенні s залишається, взяти визначений інтеграл від останнього виразу у межах від 0 до s . При цьому $r_1 \varphi_1 = s$. Інтегруючи, отримаємо:

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{as}{r_1^2} - 2P_1 \left(\sin \alpha + \frac{f_{1\kappa}}{r_1} \cos \alpha \right) - \frac{P_3}{2} \left(\sin \beta + \frac{f_{3\kappa}}{r_3} \cos \beta \right) \right] s.$$

Обчислимо кінетичну енергію даної системи, яка складається із трьох мас (котка A , блока B і циліндра D):

$$T = T_A + T_B + T_D.$$

У початковому положенні система знаходилася у спокої, тобто

$$T_1 = 0.$$

Кінетична енергія у кінцевому положенні:

$$T_2 = T_{2A} + T_{2B} + T_{2D}.$$

Позначимо через v шукану швидкість точки C_1 . Швидкість вісі C_1 дорівнює швидкості точки на ободі блока B і швидкості точки K на ободі циліндра D , тобто

$$v = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 = 2r_3 \omega_3 = 2v_{C_3},$$

де $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – кутові швидкості відповідно котка A , блока B і циліндра D . Швидкість $\vec{v}$ точки K циліндра D слід розглядати по відношенню до миттєвого центра P_3 циліндра. Як видно з рис. 14.3, швидкість центра інерції C_3 циліндра D у два рази менше швидкості точки K .

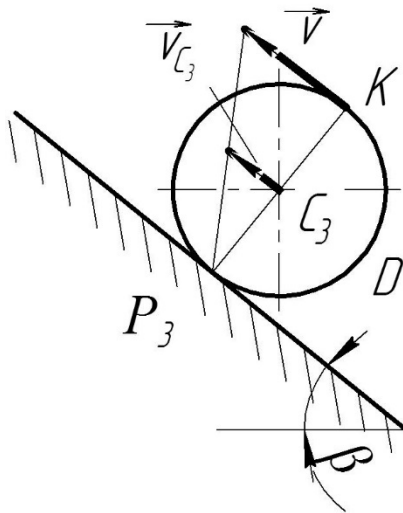


Рис. 12.10. До задачі 12.10.

Кінетична енергія котка A , який здійснює плоский рух, обчислюється за формулою:

$$T_{2A} = \frac{1}{2} M_1 v_{C_1}^2 + \frac{1}{2} I_{C_1} \omega_1^2.$$

Враховуючи, що $M_1 = \frac{P_1}{g}$, $v_{C_1} = v$, $I_{C_1} = \frac{P_1 r_1^2}{2g}$, $\omega_1 = \frac{v}{r_1}$, знаходимо:

$$T_{2A} = \frac{3}{4} \frac{P_1}{g} v^2.$$

Кінетична енергія блока B , який обертається навколо нерухомої вісі, буде:

$$T_{2B} = \frac{1}{2} I_z \omega_2^2,$$

де $I_z = \frac{P_2 r_2^2}{2g}$, $\omega_2 = \frac{v}{r_2}$. Значить,

$$T_{2B} = \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} v^2.$$

Кінетична енергія циліндра D , який здійснює плоский рух, обчислюється таким чином:

$$T_{2D} = \frac{1}{2} M_3 v_{C_3}^2 + \frac{1}{2} I_{C_3} \omega_3^2,$$

де $M_3 = \frac{P_3}{g}$, $v_{C_3} = \frac{v}{2}$, $I_{C_3} = \frac{P_3 r_3^2}{2g}$, $\omega_3 = \frac{v}{2r_3}$. Отже,

$$T_{2D} = \frac{3}{16} \frac{P_3}{g} v^2.$$

Кінетична енергія системи у її кінцевому положенні матиме вигляд:

$$T_2 = \frac{v^2}{16g} (12P_1 + 4P_2 + 3P_3).$$

Залишається підставити обчисленні значення виразів до теореми:

$$v = 2 \sqrt{2gs \frac{\frac{as}{r_1^2} - 2P_1 \left(\sin\alpha + \frac{f_{1\kappa}}{r_1} \cos\alpha \right) - P_3 \left(\sin\beta + \frac{f_{3\kappa}}{r_3} \cos\beta \right)}{12P_1 + 4P_2 + 3P_3}}.$$

Рух можливий, якщо вираз, який знаходиться під знаком радикалу, додатний.

Відповідь:
$$v = 2 \sqrt{2gs \frac{\frac{as}{r_1^2} - 2P_1 \left(\sin\alpha + \frac{f_{1\kappa}}{r_1} \cos\alpha \right) - P_3 \left(\sin\beta + \frac{f_{3\kappa}}{r_3} \cos\beta \right)}{12P_1 + 4P_2 + 3P_3}}.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗА РОЗДІЛОМ «ДИНАМІКА»

- Сформулюйте закони Ньютона.
- Пряма і обернена задачі динаміки точки.
- Диференціальне рівняння вільних коливань.
- Що таке період і частота коливань?
- Що таке амплітуда коливань?
- Що таке механічна система?
- Які сили називаються внутрішніми, а які – зовнішніми?
- Як визначається момент інерції диска?
- Що таке кількість руху матеріальної точки і механічної системи?
- Що таке імпульс сили?
- Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки і механічної системи.
- Закон збереження кількості руху системи.
- Що таке кінетичний момент матеріальної точки і механічної системи?
- Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної точки і механічної системи.
- Закон збереження кінетичного моменту системи.
- Що таке елементарна робота сили?
- Що таке потужність?
- Які сили називаються потенціальними?
- Що таке кінетична енергія матеріальної точки і механічної системи?
- Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і механічної системи.
- Закон збереження механічної енергії системи.
- Які в'язі називаються ідеальними?
- Сформулюйте принцип Д'аламбера.
- Що таке можливе переміщення?
- Сформулюйте принцип можливих переміщень.

ВИСНОВКИ

Цей навчальний посібник з теоретичної механіки має на меті сформувати у здобувачів вищої освіти спеціальності 208 "Агроінженерія" фундаментальні знання з механічних законів і принципів, що є основою для їхньої професійної діяльності. Опанування теоретичної механіки є важливим кроком до розуміння фізичних процесів у технічних системах, що використовуються в аграрному секторі, та є основою для проектування, експлуатації й обслуговування сільськогосподарської техніки.

У цьому посібнику розглянуті ключові розділи теоретичної механіки — статика, кінематика і динаміка. Вивчення кожного з цих розділів дозволяє студентам не лише оволодіти основами механіки, а й закріпити їх через вирішення практичних задач.

1. **Статика** навчила здобувачів вищої освіти визначати умови рівноваги та розраховувати навантаження на різні елементи техніки. Ці знання є надзвичайно важливими для забезпечення безпечної і стійкої роботи сільськогосподарського обладнання.
2. **Кінематика** допомогла зрозуміти і описати рухи об'єктів без урахування причин, що їх викликають. Вона забезпечила навички моделювання траєкторій і швидкостей рухомих елементів машин, що є основою для оптимізації роботи механізмів і зменшення зносу обладнання.
3. **Динаміка** розкрила взаємозв'язок між силами і рухами, які вони викликають, що є ключовим для аналізу робочих процесів у сільськогосподарських машинах. Вивчення законів Ньютона та їх застосування дозволяє прогнозувати поведінку техніки під дією різних сил, оцінювати вплив навантажень та розробляти способи їх регулювання.

Засвоєний матеріал сприяє формуванню у студентів навичок аналітичного мислення, вміння застосовувати математичні методи для розрахунків механічних систем і здатності вирішувати комплексні інженерні задачі. Набуті знання стануть основою для подальших дисциплін агроінженерного спрямування, а також допоможуть випускникам адаптуватися до сучасних вимог у галузі проектування та експлуатації аграрної техніки.

Завдяки систематичному опануванню матеріалу цього посібника, здобувачі освіти отримують потужний інструмент для вирішення актуальних задач агроінженерії, що дозволить їм ефективно працювати в умовах сучасного аграрного виробництва.

ДОДАТОК А. МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

I. СТАТИКА

Теоретична частина

Основні поняття, формули та теореми статички

Статика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються умови рівноваги сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, та правила заміни однієї системи сил на іншу – їй еквівалентну.

Сила – міра механічної взаємодії двох тіл, визначається модулем, напрямком та точкою прикладення, тобто є вектором.

Абсолютно тверде тіло – тіло, у якого відстань між будь-якими двома точками не змінюється.

Системою сил називають сукупність сил, прикладених до одного або декількох твердих тіл, які сумісно розглядаються.

Еквівалентними називають дві системи сил, які однаково діють на тверде тіло, тобто при заміні однієї системи на іншу стан тіла не змінюється.

Зрівноваженою системою сил називають систему сил, під дією якої тіло знаходиться в рівновазі. Одна із сил зрівноваженої системи називається зрівноважуючою по відношенню до всіх інших сил.

Вільним називають тверде тіло, довільне переміщення якого нічим не обмежується.

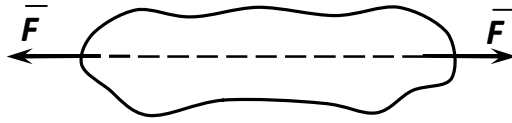
Невільним називають тверде тіло, на яке накладені в'язі.

В'язями називають тіла, які перешкоджають вільному переміщенню тіла, що розглядається.

Реакція в'язі – це сила, з якою в'язь діє на тверде тіло, що розглядається. Реакція в'язі направлена в той бік, в якому рух тіла не можливий.

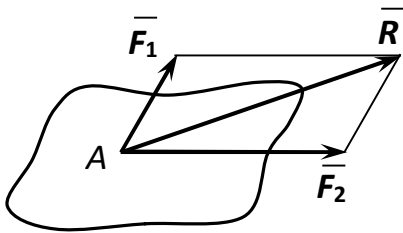
Аксиоми статики

Аксиома 1. Якщо тверде тіло під дією двох сил знаходиться в рівновазі, то ці сили рівні за модулем, протилежні за напрямком і мають одну лінію дії.



Аксиома 2. Дія системи сил на тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або відняти від неї дві зрівноважені сили.

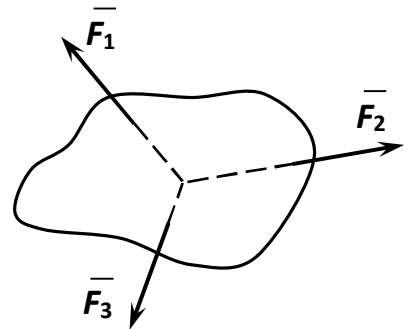
Наслідок. Не змінюючи дії сили на тверде тіло, точку прикладання сили можемо переносити уздовж її лінії дії.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Аксиома 3. Дві сили, прикладені до твердого тіла в одній точці під кутом, додаються за правилом паралелограма, тобто їх рівнодійна дорівнює за модулем діагоналі паралелограма, збудованого на цих силах як на сторонах.

Теорема про три непаралельні сили. Якщо тверде тіло під дією трьох непаралельних сил, які лежать в одній площині, знаходиться в рівновазі, то лінії дії сил перетинаються в одній точці.

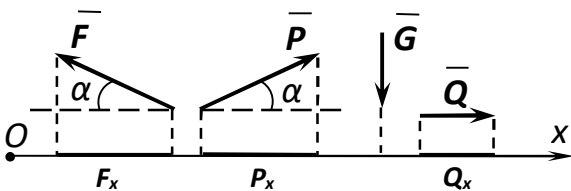


Аксиома 4. Сили взаємодії двох тіл рівні за модулем, протилежні за напрямком і мають спільну лінію дії.

Аксиома 5. Якщо деформоване тіло під дією будь-якої системи сил знаходиться в рівновазі, то рівновага його не порушиться, якщо тіло затвердіє.

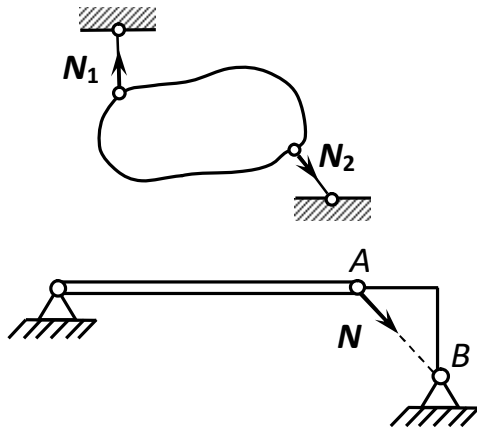
Проекція вектора сили на вісь – це алгебраїчна величина, яка дорівнює добутку модуля сили на косинус гострого кута між силою та віссю.

$$F_x = \pm F \cos \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$



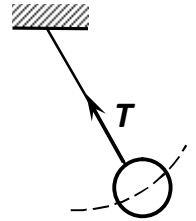
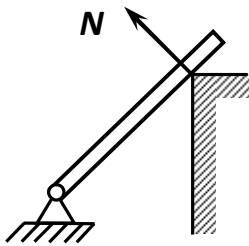
Знак «+» приймається тоді, коли напрямок осі та напрямок сили збігаються; знак «-» приймається тоді, коли напрямки протилежні.

Різновидності в'язей та їх реакції



1. **Невагомий шарнірно закріплений стержень** (ідеальний стержень). Реакція N направлена вздовж осі стержня. У випадку криволінійного стержня або стержня з ламаною віссю, реакція направлена вздовж прямої, що з'єднує шарніри.

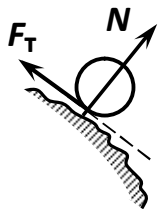
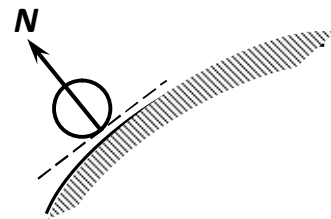
2. **Гнучке нерозтяжне тіло** (нитка, канат, трос, ланцюг, пас). Реакція T направлена вздовж тіла.



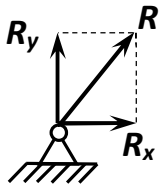
3. **Нерухома кутова точка** (ребро). Реакція N направлена по нормалі до поверхні тіла, яке підтримується, в контактній точці.

4. **Абсолютно гладенька поверхня**.

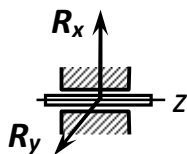
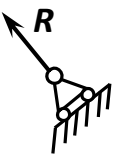
Реакція N направлена по нормалі до поверхні у точці контакту.



5. **Шорстка поверхня**. Крім нормальної реакції N виникає ще й сила тертя ковзання F_t , тому повна реакція має дві складові.

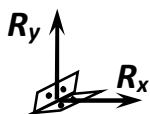


6. **Рухомий шарнір** (каток). Реакція R направлена перпендикулярно до опорної поверхні.

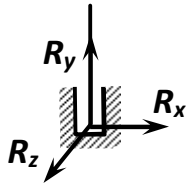
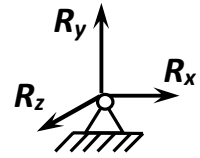


7. **Нерухомий циліндричний шарнір** (підшипник). Утворюється таке з'єднання двох тіл, при якому одне тіло може обертатись по відношенню до іншого навколо загальної осі, яка називається віссю шарніра. Реакція R проходить через центр шарніра і має довільний напрямок, причому вона перпендикулярна до осі шарніра, тому її розкладають в площині, яка перпендикулярна до осі, на дві складові R_x і R_y .

Реакцію *петлі* також розкладаємо на дві складові.

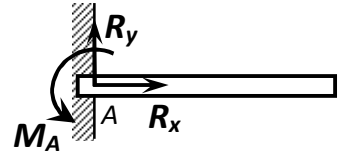


8. **Сферичний шарнір** дозволяє тілу вільно обертатись навколо центра шарніра. Напрямок реакції R , яка проходить через центр шарніра, вказати неможливо, тому її розкладають в просторі на три складові R_x , R_y , R_z .



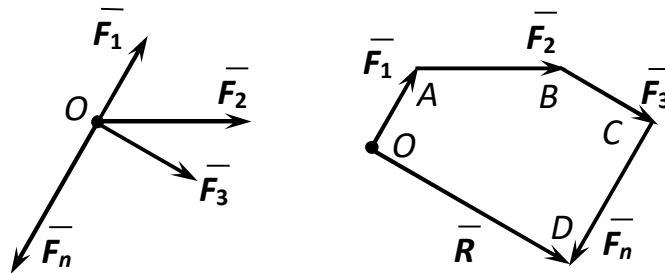
Реакція **підп'ятника** (радіально-упорного підшипника) складається з реакцій циліндричного підшипника R_x і R_y та нормальної реакції R_z опорної площини.

9. **Жорстке затиснення** балки (консоль). Виникає реакція R і пара сил з моментом M_A . Так як напрям реакції R невідомий, то вона розкладається на дві взаємно перпендикулярні складові R_x і R_y .



Збіжна система сил

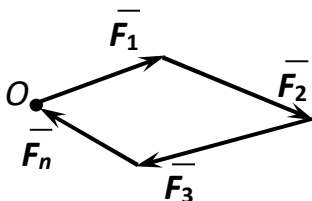
Збіжною системою сил називають систему сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці.



Рівнодійна системи збіжних сил дорівнює геометричній сумі векторів цих сил.

Ламана лінія $OABCD$ має назву **силовий многокутник**. Замикаюча сторона OD силового многокутника є рівнодійною цієї системи сил.

Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил



Для того, щоб тіло під дією системи збіжних сил знаходилося в рівновазі, необхідно і достатньо, щоб силовий многокутник цієї системи сил був замкненим, тобто щоб її рівнодійна дорівнювала нулю.

Проекція рівнодійної на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю саму вісь.

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum X.$$

Модуль рівнодійної системи сил визначається за формулою

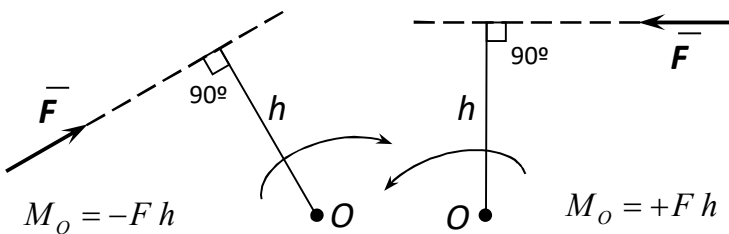
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил

1. Просторова система сил:
$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum Z = 0. \end{cases}$$
2. Плоска система сил:
$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases}$$
3. Сили, направлені вздовж однієї прямої: $\sum X = 0.$

Момент сили відносно точки

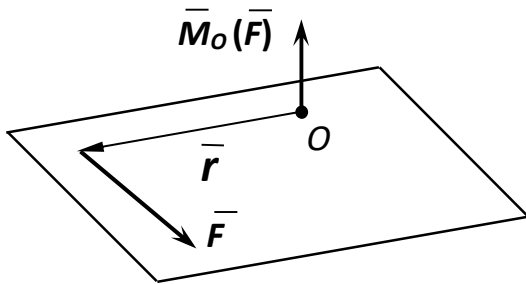
Момент сили відносно точки дорівнює добутку модуля сили на плече сили.



$$M_O = \pm F \cdot h$$

Знак «+» приймається тоді, коли сила викликає обертання проти годинникової стрілки; знак «-» — якщо за годинниковою стрілкою.

Плечем сили називають довжину перпендикуляра, опущеного з точки O на лінію дії сили.



Вектор моменту сили відносно точки дорівнює векторному добутку двох векторів: радіуса-вектора $\vec{r}$ і сили $\vec{F}$:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Причому вектор $\vec{M}_O$ перпендикулярний до площини векторів $\vec{r}$ і $\vec{F}$.

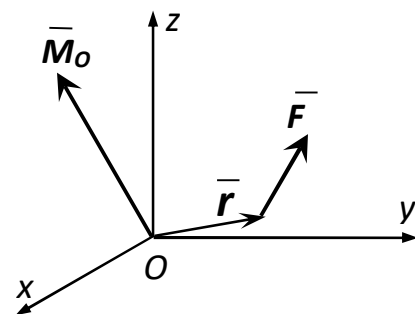
Проекції вектора моменту сили відносно точки на осі координат, що проходять через цю точку, визначаються за формулами:

$$M_{Ox} = yF_z - zF_y;$$

$$M_{Oy} = zF_x - xF_z;$$

$$M_{Oz} = xF_y - yF_x.$$

де x, y, z — координати точки прикладення сили;
 F_x, F_y, F_z — проекції сили на координатні осі.



Момент сили відносно осі

Момент сили відносно осі дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною

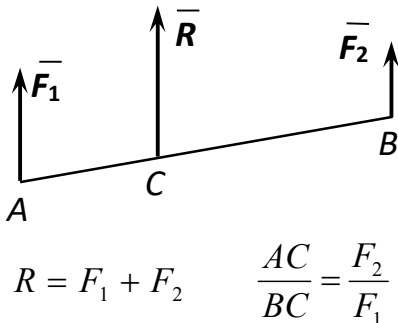
$$m_z = \pm F \cdot h.$$

Знак «+» беремо в тому випадку, коли з кінця осі видно обертання, яке викликається силою, проти годинникової стрілки; якщо за годинниковою стрілкою – беремо знак «-».

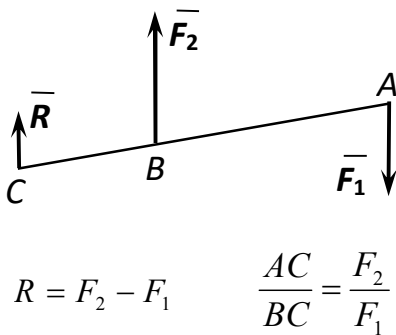
Момент сили відносно осі дорівнює проекції вектора момента сили відносно точки, яка лежить на осі, на цю вісь

$$M_{Ox} = m_x; \quad M_{Oy} = m_y; \quad M_{Oz} = m_z.$$

Додавання двох паралельних сил



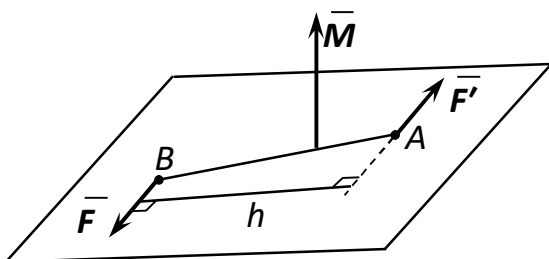
Модуль рівнодійної двох паралельних сил, направлених *в одну сторону*, дорівнює сумі модулів сил. Рівнодійна паралельна силам, що додаються, та направлена в ту ж сторону. Лінія дії рівнодійної ділить відстань між точками прикладання сил внутрішнім чином на частини, обернено-пропорційні величинам сил.



Модуль рівнодійної двох паралельних сил, направлених *у протилежні сторони*, дорівнює різниці модулів сил. Рівнодійна паралельна силам, що додаються, і має напрямок більшої сили. Лінія дії рівнодійної ділить відстань між точками прикладання сил зовнішнім чином на частини, обернено-пропорційні модулям сил, і розташована ближче до більшої за модулем сили.

Пара сил

Парою сил називають систему двох паралельних сил, модулі яких рівні, а напрямки протилежні.



Моментом пари називають добуток однієї із сил на плече пари. **Плече пари** – найкоротша відстань між лініями дії сил пари.

$$M = \pm F \cdot h$$

Знак «+» беремо, якщо пара викликає обертання проти годинникової стрілки; якщо за годинниковою стрілкою, беремо знак «-».

Вектор моменту пари перпендикулярний до площини пари і направлений так, щоб з його кінця було видно обертання, що викликає пара, проти годинникової стрілки. Вектор $\vec{M}$ являється *вільним вектором*, тобто може бути прикладений в будь-якій точці.

$$\vec{M} = \vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = \vec{M}_B(\vec{F}') = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}'.$$

Еквівалентність пар

Дві пари **еквівалентні**, якщо вектори їх моментів рівні між собою, тобто пари лежать в паралельних площинах, мають рівні модулі моментів та викликають обертання в одну сторону.

Висновок. Не змінюючи дії пари на тверде тіло, пару можна переносити в довільну точку твердого тіла, паралельно площині її дії.

Додавання пар

Моменти «пар» додаються векторно, тобто сумарний вектор моментів декількох пар дорівнює геометричній сумі векторів моментів складових пар

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i.$$

Якщо пари лежать в паралельних площинах, то сумарний момент дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових.

Зведення довільної системи сил до одного центра. Головний вектор. Головний момент

Довільною системою сил називають систему сил, довільно розташованих у просторі.

Зведення сили до заданого центра

Для того, щоб перенести точку прикладання сили в заданий центр O , необхідно перенести силу паралельно самій собі в новий центр і прикласти до нього приєднаний момент, який дорівнює моменту цієї сили, прикладеної в початковому центрі відносно нового.

Довільна система сил при зведенні до одного центра замінюється головним вектором $\vec{R}$ і головним моментом системи сил $\vec{M}_O$ відносно цього центра.

Головний вектор дорівнює геометричній сумі векторів усіх сил системи

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i.$$

Головний момент дорівнює геометричній сумі моментів сил системи відносно центра зведення

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_i).$$

Умови рівноваги довільної системи сил

Для того, щоб тіло знаходилося у рівновазі, необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались умови: $\vec{R} = 0$; $\vec{M}_O = 0$.

Аналітичні умови рівноваги

а) Для довільної просторової системи сил:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum Z = 0; \end{cases} \begin{cases} \sum m_x = 0; \\ \sum m_y = 0; \\ \sum m_z = 0. \end{cases}$$

б) Для довільної плоскої системи сил:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum m_O(\vec{F}_i) = 0. \end{cases}$$

Теорема Варіньона (справедлива для будь-якої системи сил, яка має рівнодійну)

Момент рівнодійної системи сил відносно будь-якого центра дорівнює геометричній сумі моментів складових сил відносно того ж центра

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_i).$$

Вплив зміни центра зведення на головний момент

Зміна головного момента системи сил при зміні центра зведення дорівнює моменту головного вектора цієї системи, прикладеного в попередньому центрі зведення C , відносно нового центра O

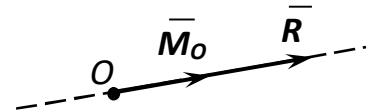
$$\vec{M}_O - \vec{M}_C = \vec{M}_O(\vec{R}).$$

Інваріанти системи сил

1. Головний вектор системи сил інваріантний щодо центра зведення (не залежний від вибору центра зведення).
2. Проекція головного моменту на напрямок головного вектора системи сил не залежить від вибору центра зведення.
3. Скалярний добуток головного вектора та головного моменту системи сил $\vec{R} \cdot \vec{M}$ інваріантний по відношенню до центра зведення.

7.7. Основні випадки зведення довільної просторової системи сил до найпростішого виду

1. Якщо головний момент і головний вектор взаємно перпендикулярні, то система сил зводиться до рівнодійної. Лінія дії рівнодійної називається центральною (головною) віссю системи сил.
2. Якщо головний момент паралельний головному вектору, то таку систему сил називають **динамою** або динамічним гвинтом. Пряму, вздовж якої направлений вектор $\vec{R}$, називають віссю динами або центральною (головною) віссю системи.
3. Якщо головний момент не перпендикулярний головному вектору, то система зводиться до динами.



Центр паралельних сил

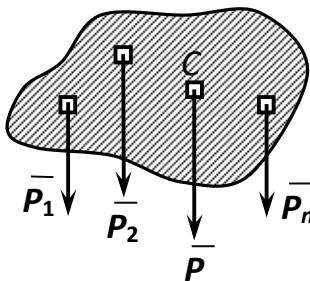
Центром паралельних сил називають таку точку прикладання рівнодійної цих сил, яка не змінює свого положення при повороті всіх сил в одному напрямку на один і той же кут.

Положення центра паралельних сил $\vec{r}_C$ визначається у векторному вигляді за формулою

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \vec{r}_i F_i}{\sum F_i} = \frac{\sum \vec{r}_i F_i}{\sum F_i}.$$

В декартовій системі координат $x_C = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}$; $y_C = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i}$; $z_C = \frac{\sum z_i F_i}{\sum F_i}$.

Центр ваги



Центром ваги твердого тіла називають центр паралельних сил земного тяжіння.

Координати центра ваги неоднорідного тіла:

$$x_C = \frac{\sum x_i P_i}{\sum P_i}; \quad y_C = \frac{\sum y_i P_i}{\sum P_i}; \quad z_C = \frac{\sum z_i P_i}{\sum P_i}.$$

$$P = \sum_{i=1}^n P_i \text{ — вагатіла.}$$

Координати центрів ваги однорідних тіл:

- а) об'ємного: $x_C = \frac{\sum x_i V_i}{V}$; $y_C = \frac{\sum y_i V_i}{V}$; $z_C = \frac{\sum z_i V_i}{V}$, де $V = \sum_{i=1}^n V_i$ – об'єм тіла;
- б) плоского: $x_C = \frac{\sum x_i S_i}{S}$; $y_C = \frac{\sum y_i S_i}{S}$, де $S = \sum_{i=1}^n S_i$ – площа пластини;
- в) ліній: $x_C = \frac{\sum x_i l_i}{L}$; $y_C = \frac{\sum y_i l_i}{L}$; $z_C = \frac{\sum z_i l_i}{L}$, де $L = \sum_{i=1}^n l_i$ – довжина лінії.

Теорема. Якщо однорідне тіло має площину симетрії, вісь або центр симетрії, то центр ваги лежить відповідно в цій площині, на цій осі або в цьому центрі симетрії.

Теорема Паппа

I теорема. Площа бічної поверхні тіла, утвореного обертанням плоскої кривої навколо осі, що розташована в площині цієї кривої і не перетинає її, дорівнює добутку довжини кривої на довжину кола, описаного центром ваги цієї кривої.

II теорема. Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі, що розташована в площині цієї фігури і не перетинає її, дорівнює добутку площі фігури на довжину кола, описаного центром ваги цієї фігури.

План розв'язування задач статки

Розв'язування задач на рівновагу тіла під дією будь-якої системи сил рекомендується виконувати в такому порядку:

- виділити об'єкт (точку, тіло, систему тіл), рівновагу якого необхідно розглянути;
- показати на розрахунковій схемі активні сили та реакції в'язей;
- вибрати систему координат;
- визначити різновидність діючої системи сил;
- скласти аналітичні умови рівноваги цієї системи сил і визначити з них невідомі величини.

Розрахунково-графічна робота №1

Завдання С1. Плоска система збіжних сил

Задача 1. Вантаж вагою $P(H)$, який підіймають краном ABC , утримують в рівновазі за допомогою каната, перекинутого через блок A і закріпленого в точці D нерухомо. Кріплення в точках A , B і C шарнірні, кути α , β , γ задані, вагою стержнів AB та AC нехтують. Визначити реакції в шарнірах B і C (рис. 1.1, табл. 1.1).

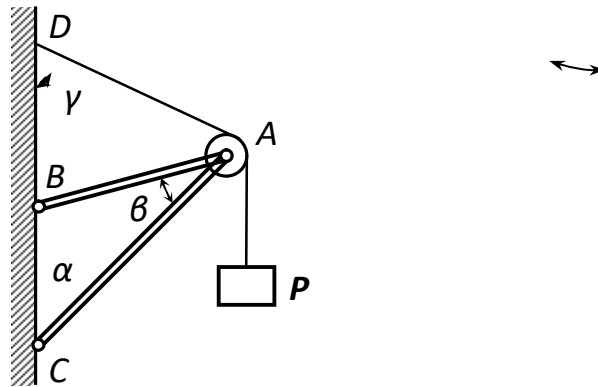


Рис. 1.1

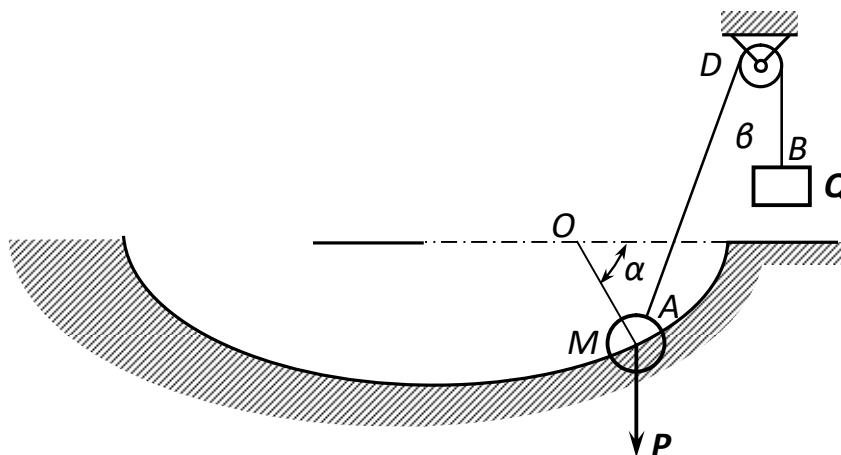


Рис. 1.2

Задача 2. Однорідна куля вагою $P(H)$ утримується в рівновазі на внутрішній поверхні гладкої півсфери за допомогою невагомої мотузки AB , яка перекинута через блок D і утворює з вертикаллю кут β . До кінця B цієї мотузки прив'язаний вантаж Q . Визначити тиск кулі на поверхню півсфери та вагу вантажу Q , якщо радіус OM складає з горизонталлю кут α (рис. 1.2, табл. 1.2). Тертям на блоці можна знехтувати.

Задача 3. Вантаж вагою $P(H)$ утримується в рівновазі двома мотузками AB та BC , причому мотузка AB прикріплена до стіни в точці A і складає з вертикаллю кут α , а до мотузки BC , перекинутої через блок D , прикріплено вантаж. Визначити натяг мотузки AB та вагу вантажу Q_2 , якщо напрямок BD складає з вертикаллю кут β (рис. 1.3, табл. 1.2).

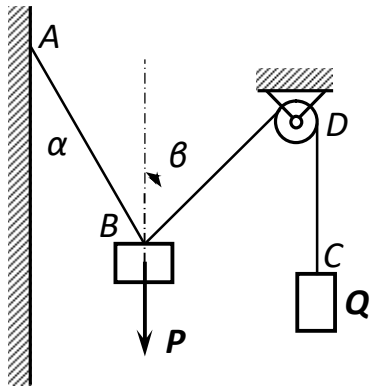


Рис. 1.3

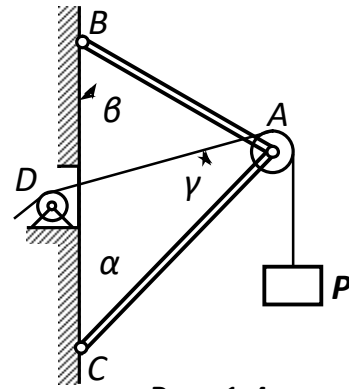


Рис. 1.4

Задача 4. Вантаж вагою P (Н), який піднімають краном ABC , утримується в рівновазі за допомогою каната, перекинутого через блоки A та D . Визначити реакції невагомих стержнів AB та AC , якщо задані кути α , β , γ та сила P (рис. 1.4, табл. 1.3).

Задача 5. Через блок B кронштейна ABC перекинута трос, один кінець якого тримає вантаж P , а другий намотується на барабан лебідки. Визначити зусилля в стержнях AB і BC , якщо відомі вага вантажу P і кути α , β , γ . Вагою стержнів, розмірами блока і тертям на блоці нехтують (рис. 1.5, табл. 1.3).

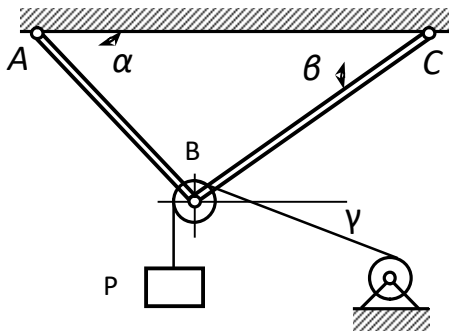


Рис. 1.5

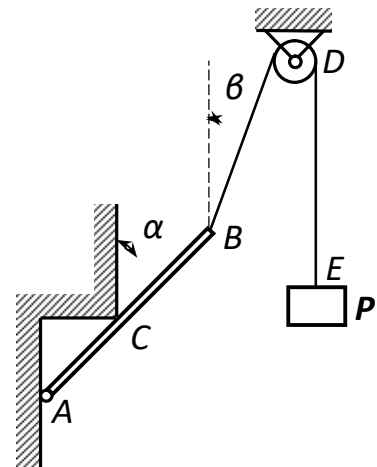


Рис. 1.6

Задача 6. Однорідний невагомий стержень, нахилений до вертикалі під кутом α , в точці A закріплений шарнірно, а проміжною точкою C упирається у виступ стіни. Стержень утримується у рівновазі за допомогою невагомого каната BDE , що утворює з вертикаллю кут β , до кінця якого підвішений вантаж вагою P (Н). Визначити реакцію шарніра A і т. C , якщо $AC = \frac{1}{2}CB$ (рис. 1.6, табл. 1.2).

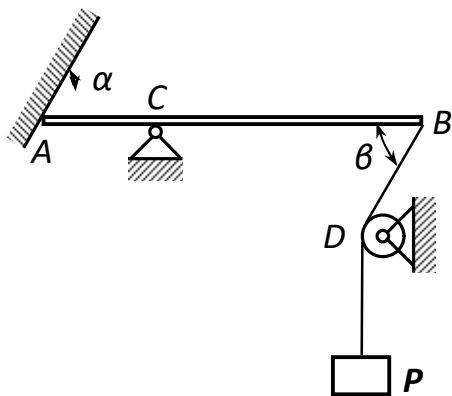


Рис. 1.7

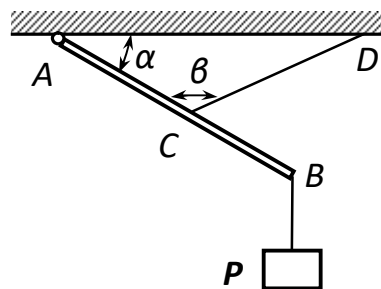


Рис. 1.8

Задача 7. Однорідний невагомий стержень AB закріплений в точці C за допомогою шарніра і опирається кінцем A на нерухому площину під кутом α до неї. До точки B прикріплено канат, перекинутий через блок D , який на своєму кінці несе вантаж вагою P (H). Стержень утворює з канатом кут β . Знайти реакцію в точці A і реакцію шарніра C , якщо $AC = \frac{AB}{4}$ (рис. 1.7, табл. 1.2).

Задача 8. Однорідний невагомий стержень AB в точці A закріплений за допомогою шарніра під кутом α до горизонтальної стелі та утримується в рівновазі мотузкою CD , яка утворює зі стержнем кут β . До кінця стержня підвішений вантаж вагою P (H). Знайти реакцію в шарнірі A і натяг T каната, якщо $AC = \frac{AB}{2}$ (рис. 1.8, табл. 1.2).

Таблица 1.1

№	P	α	β	γ
1	100	30	10	90
2	150	35	15	85
3	175	40	20	80
4	200	45	25	75
5	225	50	30	70
6	250	55	35	65
7	275	60	40	60
8	300	55	45	55
9	325	50	50	50
10	350	45	55	45
11	375	30	60	40
12	400	35	65	35
13	425	25	70	30
14	450	20	75	35
15	475	25	80	30
16	500	30	90	35
17	525	35	85	30
18	550	40	80	40
19	575	45	85	45
20	600	50	70	50
21	625	55	75	40
22	650	60	60	55
23	675	65	65	60
24	700	70	55	40
25	800	70	60	30

Таблица 1.2

P	α	β
100	5	45
160	10	40
175	15	55
200	20	50
225	25	65
250	30	70
275	35	80
300	40	75
325	45	60
350	50	80
375	55	75
400	60	70
425	65	65
450	70	60
475	75	55
500	80	50
525	60	45
550	75	40
575	80	35
600	70	30
625	65	25
100	50	20
200	55	15
300	40	10
400	45	45

Таблица 1.3

P	α	β	γ
300	10	10	10
200	15	15	15
100	20	20	20
110	25	20	25
120	35	25	30
130	40	25	35
140	45	25	40
150	50	25	45
175	55	25	50
200	60	30	60
225	55	30	55
250	50	30	50
275	45	30	45
300	40	30	40
350	35	35	40
100	30	40	35
125	25	45	35
150	20	45	30
175	25	50	30
200	35	50	30
175	40	50	30
150	45	50	25
125	50	50	25
100	55	50	25
200	60	50	20

Приклад виконання завдання С1

Два абсолютно жорстких стержні AB і AC , з'єднані шарніром в точці A і прикріплені до підлоги шарнірами B і C , утворюють з підлогою відповідно кути 45° та 60° (рис. 1.9). До осі шарніра A підвішений на нитці вантаж D , вага якого $P = 100 \text{ Н}$. Визначити зусилля, які виникають в стержнях AB і AC . Вагою стержнів знехтувати.

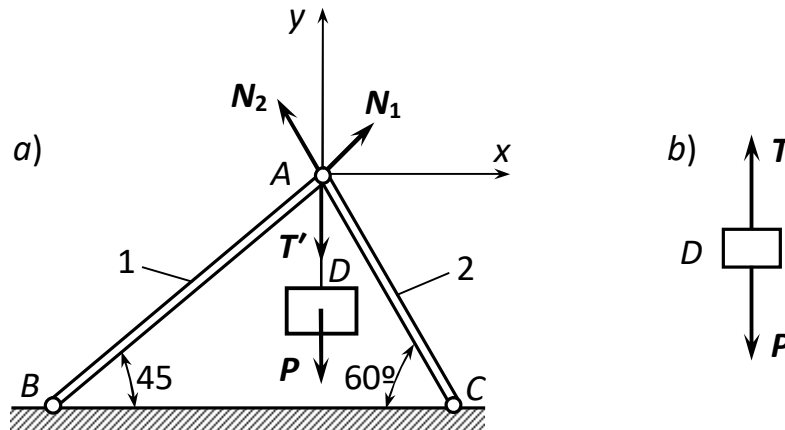


Рис. 1.9

Розв'язок. Для визначення зусиль в стержнях AB і AC слід розглянути рівновагу шарніра A , на який діє три сили: реакції стержнів AB і AC та реакція нитки AD . Для визначення реакції нитки спочатку розглянемо рівновагу вантажу D . Вантаж D знаходиться в рівновазі під дією двох сил: ваги P і реакції нитки T . Ці сили направлені в протилежні сторони (рис. 1.9, b). Враховуючи рівновагу вантажу, одержимо $T = P = 100 \text{ Н}$. Таким чином, до шарніру A прикладена одна відома сила – реакція $T' = T$, направлена по вертикалі вниз (на основі аксіоми рівності дії та протидії), і реакції N_1 і N_2 стержнів AB і AC .

Направимо вісь x по горизонталі праворуч, а вісь y по вертикалі вгору. Складемо рівняння рівноваги шарніра A в проекції на осі x, y :

$$\begin{aligned} \sum X &= N_1 \cos 45^\circ - N_2 \cos 60^\circ = 0, \\ \sum Y &= N_1 \cos 45^\circ + N_2 \cos 30^\circ - T' = 0. \end{aligned}$$

Віднімаючи від другого рівняння перше, одержимо

$$N_2 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ - T' = 0,$$

звідки

$$N_2 = \frac{T'}{\cos 30^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{100}{0,866 + 0,5} = 73,2(\text{Н}).$$

З першого рівняння знайдемо

$$N_1 = N_2 \cdot \frac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = 73,2 \cdot \frac{0,5}{0,707} = 51,8(\text{Н}).$$

Завдання С2. Довільна плоска система сил

Задача 1. Визначити реакції невагомої балки AD , які виникають під дією сил P і F (H), розподіленого навантаження q ($H/м$) і моменту m ($H \cdot м$) (рис. 2.1, табл. 2.1). $AB = BC = CD$.

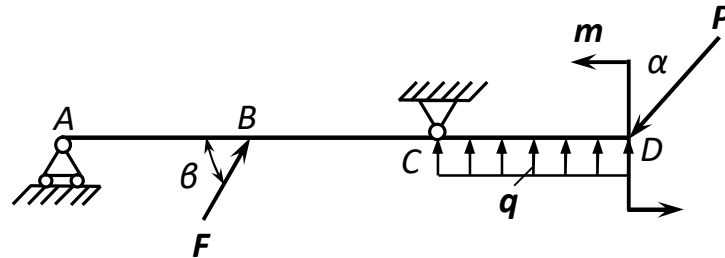


Рис. 2.1

Задача 2. Визначити реакції невагомої балки AD , які виникають під дією сил P і F (H), розподіленого навантаження q ($H/м$) і моменту m ($H \cdot м$) (рис. 2.2, табл. 2.1). $AB = BC = CD$. Правую опору балки є кривий стержень DE , у якого відношення $\frac{h}{R} = 3$.

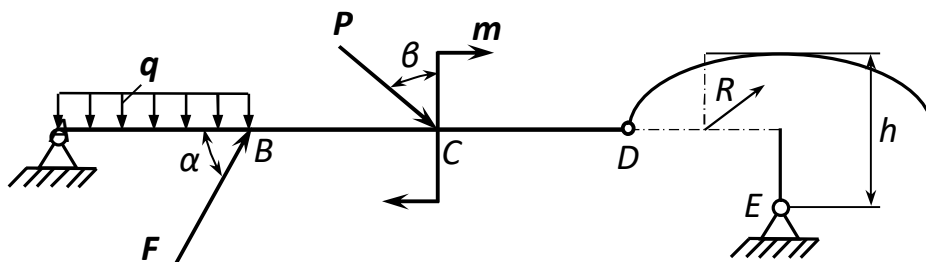


Рис. 2.2

Задача 3. Визначити реакції невагомої балки AD , які виникають під дією сил P і F (H), розподіленого навантаження q ($H/м$) і моменту m ($H \cdot м$) (рис. 2.3, табл. 2.1). Правую опору балки AD є зігнутий стержень DKE , причому $\frac{KE}{DK} = 2$. $AB = BC = CD$.

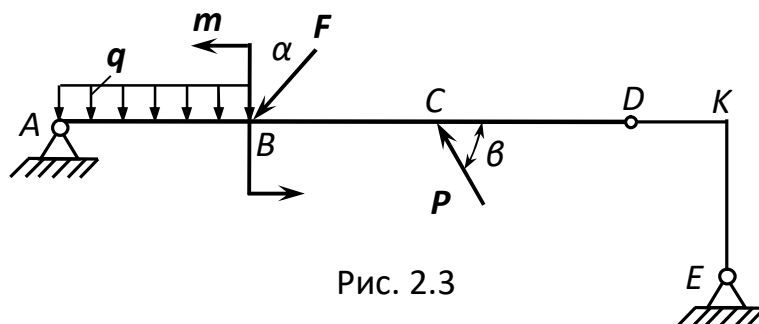


Рис. 2.3

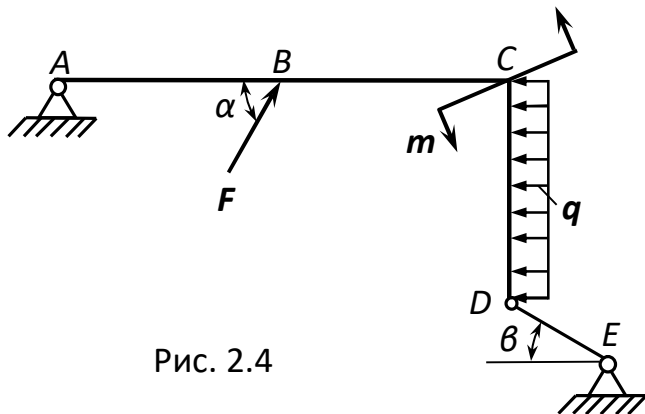


Рис. 2.4

Задача 4. Визначити реакції невагомого зігнутого стержня ACD (рис. 2.4, табл. 2.1), які виникають під дією сили F (H), розподіленого навантаження q ($H/м$) і моменту m ($H \cdot м$). В точці D зв'язок здійснюється невагомим стержнем ED . $AB = BC = CD$.

Задача 5. Визначити опорні реакції невагомої балки AD , які виникають під дією сили P (H), розподіленого навантаження q та q_1 ($H/м$) і моменту m ($H \cdot м$) (рис. 2.5, табл. 2.1). $AB = BC = CD$.

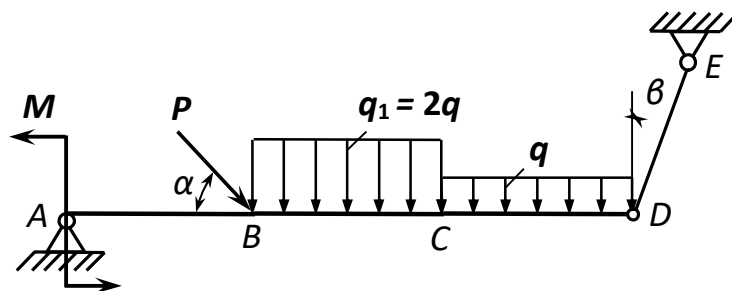


Рис. 2.5

Задача 6. Визначити опорні реакції невагомої балки AD , які виникають під дією сили P (H), розподіленого навантаження q ($H/м$) і моменту m ($H \cdot м$) (рис. 2.6, табл. 2.1). $AB = BC = CD$.

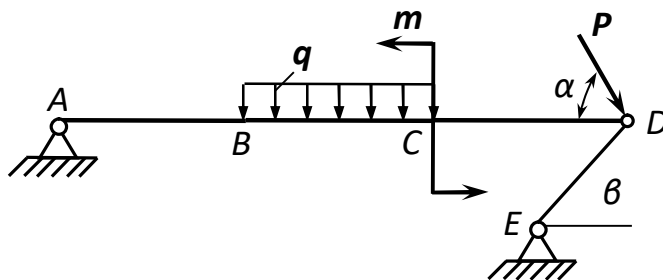


Рис. 2.6

Задача 7. Визначити опорні реакції невагомої балки AD , які виникають під дією сили P (H), розподіленого навантаження q ($H/м$) і моменту m ($H \cdot м$) (рис. 2.7, табл. 2.1). $AB = BC = CD$.

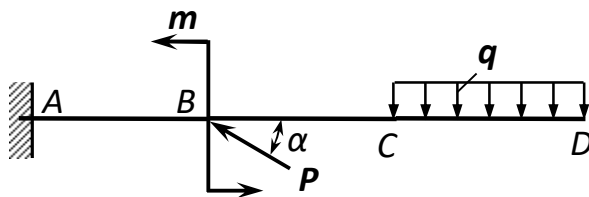


Рис. 2.7

Задача 8. Визначити опорні реакції невагомої балки AD , які виникають під дією сили P (Н), розподіленого навантаження q та q_1 (Н/м) і моменту m (Н·м) (рис. 2.8, табл. 2.1). $AB = BC = CD$.

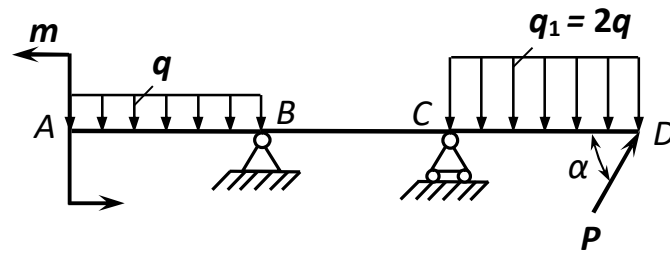


Рис. 2.8

Таблиця 2.1

№	P, H	F, H	$m, H \cdot m$	$q, H/m$	$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	AD, m
1	100	800	200	100	10	10	2
2	150	750	225	110	20	15	2,6
3	175	700	250	120	30	20	3
4	200	650	275	130	40	25	3,2
5	225	600	300	140	50	30	3,8
6	250	550	325	150	60	35	4
7	275	500	350	160	80	40	4,4
8	300	450	375	170	90	45	5
9	325	400	400	180	100	50	5,6
10	350	350	420	190	110	55	6
11	375	300	440	200	120	60	6,2
12	400	250	460	210	130	65	6,8
13	425	200	480	220	140	70	7
14	450	150	520	230	150	75	7,4
15	475	100	540	240	160	80	8
16	500	50	580	250	170	85	8,6
17	525	175	620	260	15	75	9
18	550	275	660	270	25	60	9,2
19	575	375	700	280	35	65	9,8
20	600	475	740	290	45	55	10
21	625	575	780	300	55	50	2,4
22	650	675	820	310	65	45	3,6
23	675	775	860	320	75	40	4,8
24	700	150	900	330	135	35	5,2
25	800	200	960	340	155	30	10

Приклад виконання завдання С2

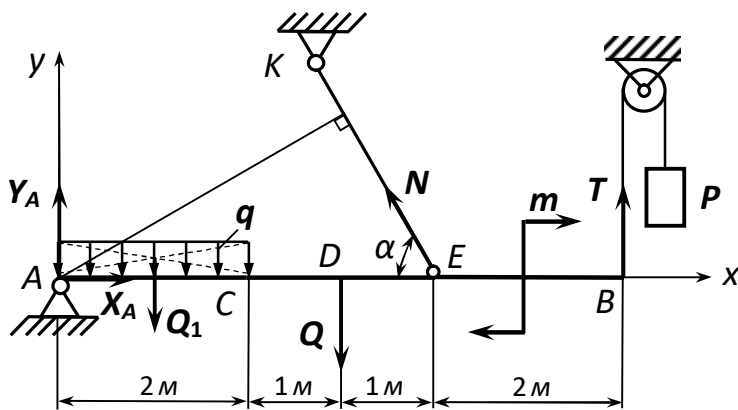


Рис. 2.9

Однорідна балка AB шарнірно закріплена в точках A і E (рис. 2.9). В точці B до балки прикріплений канат, який перекинуто через блок. До кінця каната підвішений вантаж, вага якого $P = 5 \text{ кН}$. На ділянці AC на балку діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивності $q = 0,5 \text{ кН/м}$. Крім того, до балки прикладений момент $m = 8 \text{ кНм}$. Визначити реакцію опори A і реакцію стержня EK , якщо вага балки $Q = 10 \text{ кН}$, кут

нахилу стержня EK $\alpha = 30^\circ$.

Розв'язок. Розглянемо рівновагу балки AB , на яку діє сила ваги Q , прикладена посередині балки, момент m , рівномірно розподілене навантаження q .

Рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q замінюємо зосередженою силою Q_1 , яка прикладена посередині ділянки AC і дорівнює

$$Q_1 = q \cdot AC = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ кН}.$$

На балку накладено три в'язі: нерухомий шарнір A , стержень EK і канат. Напрямок реакції шарніра A заздалегідь вказати не можемо. Тому зобразимо дві взаємно перпендикулярні складові цієї реакції. Направимо вісь x вздовж осі балки по горизонталі праворуч, а вісь y вертикально вгору. Складові реакції X_A , Y_A направимо вздовж координатних осей у додатному напрямку. Уявно перерізаючи стержень EK , заміняємо його дію реакцією N , яку направляємо від перерізу в бік відкинутого стержня. Реакцію гнучкого тіла (канату) T , модуль якої дорівнює P , направимо вертикально вгору.

Для плоскої системи сил, прикладеної до балки, складаємо три рівняння рівноваги:

$$\sum X = X_A - N \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y = Y_A - Q_1 - Q + N \sin \alpha + T = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = -Q_1 \cdot \frac{AC}{2} - Q \cdot AD + N \sin \alpha \cdot AE - m + T \cdot AB = 0. \quad (3)$$

Із рівняння (3) визначимо

$$N = \frac{Q_1 \cdot \frac{AC}{2} + Q \cdot AD + m - T \cdot AB}{AE \sin \alpha} = \frac{1 \cdot \frac{2}{2} + 10 \cdot 3 + 8 - 5 \cdot 6}{4 \cdot 0,5} = 4,5 (\text{кН}).$$

Із рівняння (1) $X_A = N \cos \alpha = 4,5 \cos 30^\circ = 3,9 (\text{кН})$.

Із рівняння (2) $Y_A = Q_1 + Q - N \sin \alpha - T = 1 + 10 - 4,5 \cdot 0,5 - 5 = 3,75 (\text{кН})$.

Значення X_A , Y_A , N одержані додатні. Це вказує на те, що прийняті напрямки цих сил збігаються з їх дійсними напрямками.

Завдання С3. *Визначення реакцій опор складової конструкції (система двох тіл)*

Задача 1. Однорідний стержень AB вагою P_1 (H), закріплений шарнірно в точці A , вільно спирається на однорідний стержень CD вагою P_2 (H), який має шарнірне кріплення в точці D , а в точці K вільно спирається на нерухому опору. В точці B до стержня AB підвішений вантаж вагою P_3 (H). Стержні AB та CD складають з вертикаллю кути α та β . Визначити реакції шарнірів A та D і опори K , а також тиск одного стержня на другий в точці C , якщо задані кути α , β , сили P_1 , P_2 , P_3 та відношення $\frac{KD}{CD} = K_1$, $\frac{AC}{AB} = K_2$ (рис. 3.1, табл. 3.1).

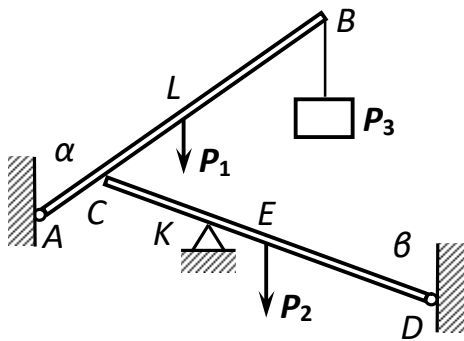


Рис. 3.1

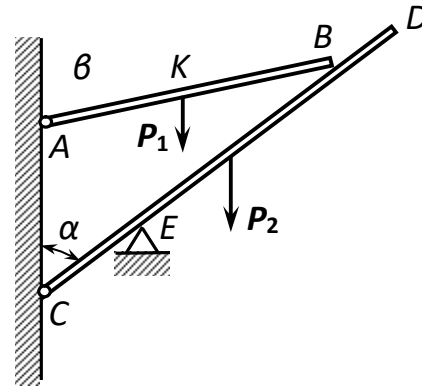


Рис. 3.2

Задача 2. Однорідний стержень CD вагою P_2 (H) в точці C закріплений шарнірно, а в точці E вільно спирається на нерухому опору. В точці B на стержень CD вільно спирається однорідний стержень AB вагою P_1 (H), кінець якого закріплений шарнірно в точці A . Визначити реакції шарнірів A і C та опори E , а також тиск одного стержня на другий в точці B , якщо задані кути α , β , сили P_1 , P_2 та відношення $\frac{CE}{CD} = K_1$, $\frac{CB}{CD} = K_2$ (рис. 3.2, табл. 3.1).

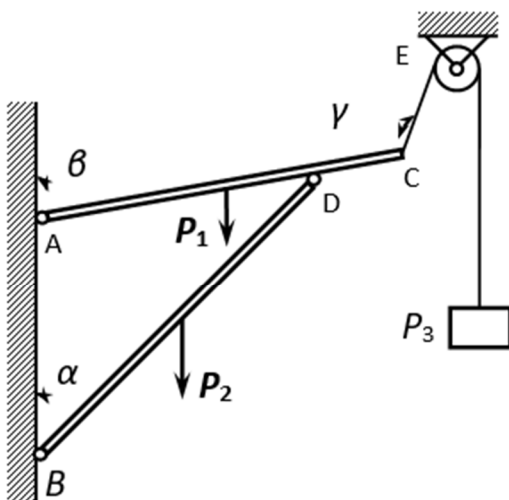


Рис. 3.3

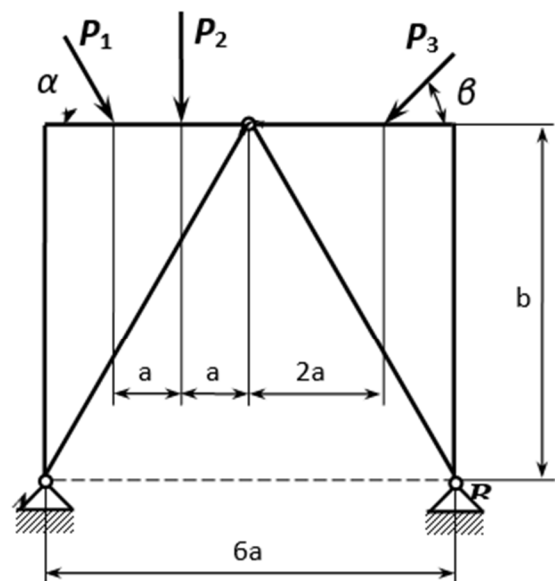


Рис. 3.4

Задача 3. Два однорідних стержня AC та BD , вага яких дорівнює відповідно P_1 та P_2 (H), з'єднані шарнірно в точці D та прикріплені шарнірами A і B до вертикальної стіни. До кінця C стержня AC прикріплено канат, перекинутий через блок E , який несе вантаж вагою P_3 (H). Стержні AC та BD утворюють з вертикальною стіною кути α та β . Визначити реакції шарнірів A , B і D , якщо задані кути α , β , γ , сили P_1 , P_2 , P_3 та відношення $\frac{AD}{AC} = K_1$ (рис. 3.3, табл. 3.1).

Задача 4. Визначити реакції шарнірів A , B , C тришарнірної арки, які виникають під дією сил P_1 , P_2 , P_3 (κH) (рис. 3.4, табл. 3.1).

Задача 5. Однорідний стержень AB вагою P_1 (H), закріплений шарнірно у точці A , спирається на однорідний горизонтальний стержень CD вагою P_2 (H), закріплений шарнірно в точці E . До кінців B і D цих стержнів підвішені вантажі P_3 і P_4 , що утримують систему в рівновазі. Визначити реакції шарнірів A і E та тиск одного стержня на другий в точці C , а також вагу вантажу P_4 , якщо задані сили P_1 , P_2 , P_3 . Точки A і E лежать на одній вертикалі, $AE = EC$, відношення $\frac{BC}{AB} = K_1$, $\frac{CE}{CD} = K_2$ (рис. 3.5, табл. 3.1).

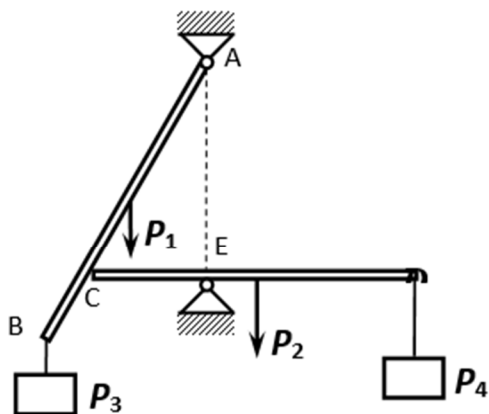


Рис. 3.5

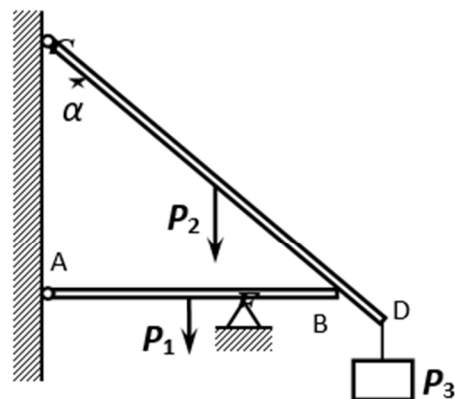


Рис. 3.6

Задача 6. Однорідний горизонтальний стержень AB вагою P_1 (H), закріплений шарнірно у точці A , вільно спирається в точці E на нерухому опору. В точці B на стержень AB вільно спирається однорідний стержень CD вагою P_2 (H), закріплений шарнірно в точці C . До кінця D стержня CD підвішений вантаж вагою P_3 (H). Визначити реакції шарнірів A і C та опори E , а також тиск одного стержня на другий в точці B , якщо задані кут α , сили P_1 , P_2 , P_3 та відношення $\frac{AE}{AB} = K_1$, $\frac{CB}{CD} = K_2$ (рис. 3.6, табл. 3.1).

Задача 7. Розв'язати задачу 1 (рис. 3.1, табл. 3.1), припускаючи, що стержень CD розташований горизонтально ($\beta = 90^\circ$).

Задача 8. Розв'язати задачу 3, припускаючи, що кут $\gamma = \beta$ (рис. 3.3, табл. 3.1).

Таблиця 3.1

№	P_1	P_2	P_3	$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	$\gamma, ^\circ$	K_1	K_2
1	100	200	50	60	90	135	0,1	0,56
2	110	280	100	30	90	136	0,2	0,6
3	120	260	150	45	90	120	0,3	0,7
4	130	220	200	70	60	120	0,4	0,8
5	140	240	50	90	135	150	0,5	0,75
6	150	200	100	90	120	135	0,6	0,65
7	160	180	150	60	120	135	0,7	0,55
8	170	140	200	90	150	150	0,8	0,65
9	180	120	50	45	60	120	0,9	0,75
10	190	100	100	30	60	100	0,85	0,6
11	200	160	150	35	60	120	0,8	0,7
12	210	120	200	40	75	120	0,75	0,35
13	220	140	50	45	80	120	0,7	0,3
14	230	160	100	55	85	130	0,65	0,25
15	240	180	150	60	90	90	0,6	0,2
16	250	200	200	65	90	80	0,55	0,35
17	260	220	50	70	90	85	0,6	0,3
18	270	240	100	60	100	70	0,7	0,2
19	280	260	150	55	90	75	0,8	0,1
20	290	280	200	45	80	60	0,19	0,5
21	300	300	50	50	75	65	0,95	0,6
22	310	310	100	40	75	50	0,85	0,7
23	320	320	150	35	60	55	0,75	0,8
24	340	340	200	30	60	40	0,65	0,6
25	350	350	100	30	60	45	0,55	0,4

Приклад виконання завдання СЗ

Балка AB , закріплена шарнірно в точці A , підтримується в точці B балкою CD , закріпленою шарнірно в точці D . Система утримується в рівновазі невагомим шарнірно закріпленим стержнем EF . Розміри і розташування навантажень показані на рис. 3.7. Визначити реакції шарнірів A , D і стержня EF , якщо $P_1 = P_2 = 20 \text{ кН}$, $q = 12 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, $\alpha = 48^\circ$.

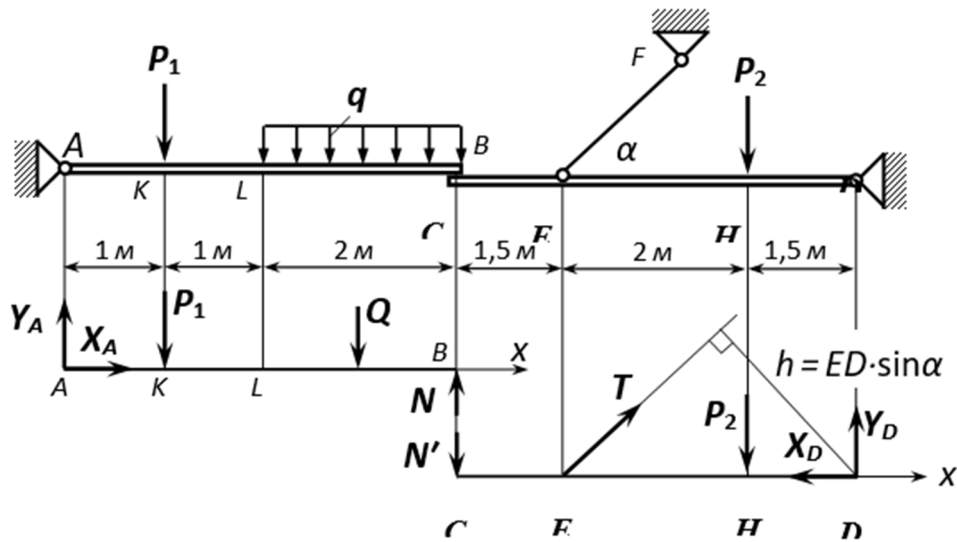


Рис. 3.7

Розв'язок. Розглянемо рівновагу кожної балки. Для цього зобразимо балки AB і CD окремо. До балки AB прикладене зовнішнє навантаження: зосереджена сила P_1 та рівнодійна Q від рівномірно розподіленого навантаження, а також реакції в'язей: X_A , Y_A – складові реакції шарніра A , N – реакція опори в точці B . На балку CD діють задана сила P_2 та невідомі навантаження N' ; X_D , Y_D – складові реакції шарніра D та реакція T стержня EF .

$$Q = q \cdot LB = 12 \cdot 2 = 24 \text{ кН}.$$

Розглянемо рівновагу балки AC і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0; \quad X_A = 0; \quad (1)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -P_1 \cdot AK - Q \cdot \left(AL + \frac{LB}{2} \right) + N \cdot AB = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_B(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot AB + P_1 \cdot KB + Q \cdot \left(\frac{LB}{2} \right) = 0. \quad (3)$$

Рівняння рівноваги балки CD мають вигляд:

$$\sum X = 0; \quad -X_D + T \cos \alpha = 0; \quad (4)$$

$$\sum m_E(\vec{F}_i) = 0; \quad Y_D \cdot ED - P_2 \cdot EH + N' \cdot CE = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_D(\vec{F}_i) = 0; \quad P_2 \cdot HD - T \cdot ED \sin \alpha + N' \cdot CD = 0. \quad (6)$$

Розв'яжемо ці рівняння, враховуючи, що $N = N'$:

з рівняння (1) $X_A = 0;$

з рівняння (2) $N = \frac{P_1 \cdot AK + Q \cdot \left(AL + \frac{LB}{2} \right)}{AB} = \frac{20 \cdot 1 + 24 \cdot 3}{4} = 23 (\text{кН});$

з рівняння (3) $Y_A = \frac{P_1 \cdot KB + Q \cdot \left(\frac{LB}{2} \right)}{AB} = \frac{20 \cdot 3 + 24 \cdot 1}{4} = 21 (\text{кН});$

з рівняння (6) $T = \frac{P_2 \cdot HD + N' \cdot CD}{ED \sin \alpha} = \frac{20 \cdot 1,5 + 23 \cdot 5}{3,5 \sin 48^\circ} = 55,7 (\text{кН});$

з рівняння (4) $X_D = T \cos \alpha = 55,7 \cos 48^\circ = 37,8 (\text{кН});$

з рівняння (5) $Y_D = \frac{P_2 \cdot EH - N' \cdot CE}{ED} = \frac{20 \cdot 2 - 23 \cdot 1,5}{3,5} = 1,57 (\text{кН}).$

Завдання С4. Рівновага просторової системи

Задача 1. Три невагомих стержня AD , AC та AB з'єднані шарнірно між собою в точці A і з нерухомими опорами в точках B , C і D . До вузла A прикладена сила Q , яка розташована в координатній площині zOy і утворює з віссю y заданий кут β . Стержень AB , який лежить в координатній площині zOy , складає з вертикальною віссю z кут ψ , а стержні AC і AD нахилені до осі x під кутами φ_1 і φ_2 ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$). Площина трикутника ACD складає з горизонтальною площиною xOy кут δ . Визначити зусилля в стержнях AC , AD і AB , якщо $AK \perp CD$, а кути φ , ψ та δ задані (рис. 4.1, табл. 4.1).

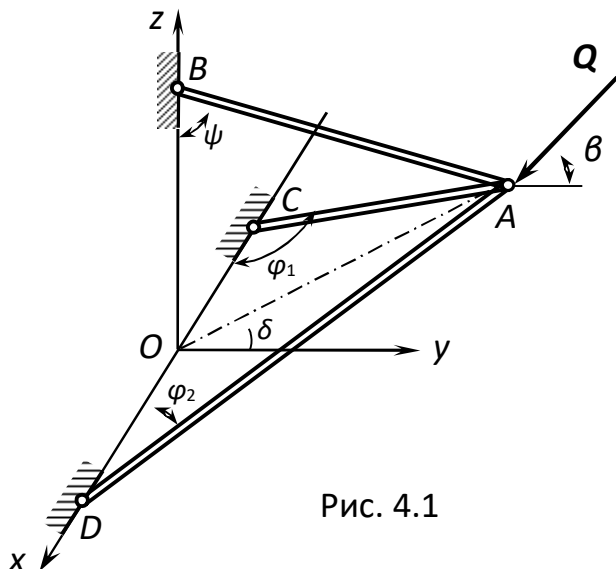


Рис. 4.1

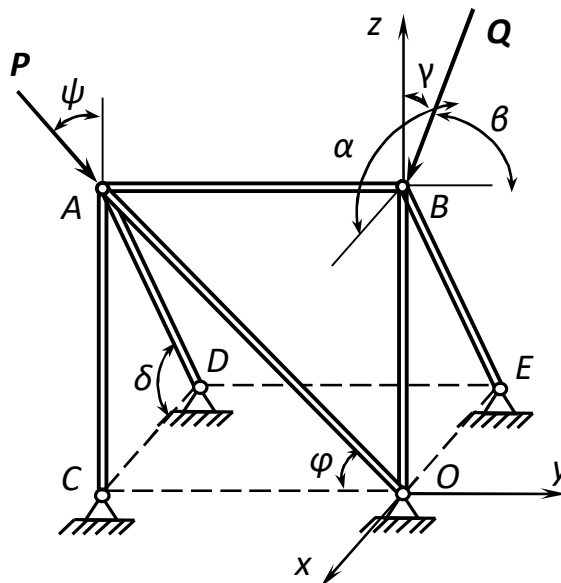


Рис. 4.2

Задача 2. Розв'язати задачу 1 за умови, що сила Q паралельна до осі x , а значення кутів ψ , φ , δ і сила Q задані (рис. 4.1, табл. 4.1).

Задача 3. Шість невагомих стержнів шарнірно з'єднані між собою в точках A і B , в точках C , D , E , O – з нерухомими опорами. До шарніра B прикладена сила Q , яка утворює з осями координат кути α , β та γ . До шарніра A прикладена сила P , яка лежить в площині zOy і складає з вертикальною віссю z кут φ .

Визначити зусилля в цих стержнях за умови, що сили P та Q , а також кути α , β , γ , φ , ψ і δ задані (рис. 4.2, табл. 4.1).

Задача 4. Визначити зусилля в трьох невагомих стержнях AO , AB , AC , які шарнірно з'єднані між собою в точці A і з нерухомими опорами в точках O , B , C . До верхнього кінця стержня AO прив'язаний канат, перекинутий через блок D , до якого підвішений вантаж вагою Q . Висота AE трикутника ABC і канат AD лежать у вертикальній площині zOy і утворюють з вертикальною віссю z кути δ і α , а стержні AC і AB утворюють із стороною BC , яка паралельна осі x , кути φ та ψ (рис. 4.3, табл. 4.1).

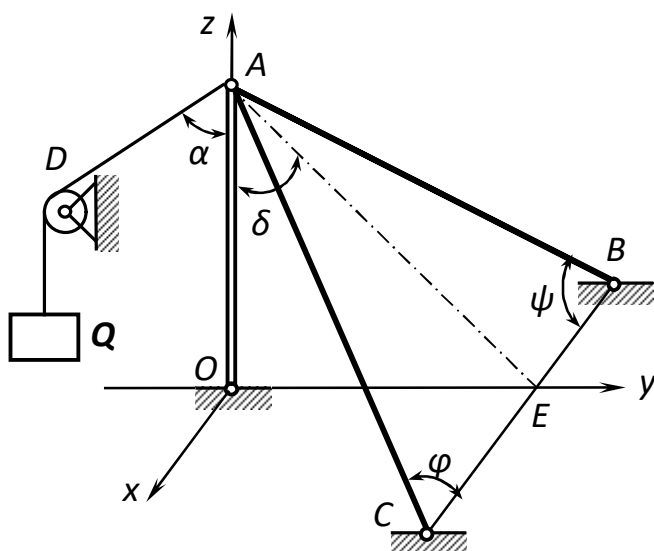


Рис. 4.3

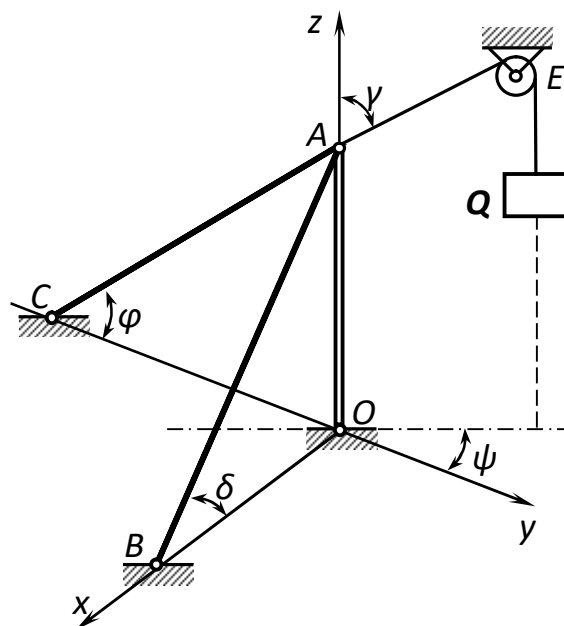


Рис. 4.4

Задача 5. Вертикальна стойка AO утримується в рівновазі за допомогою двох відтяжок AC та AB . В точці A до стойки прикріплений канат, перекинутий через блок E , який несе вантаж вагою Q . Канат складає з віссю z кут γ , розташований у вертикальній площині, що утворює з координатною площиною yOz заданий кут ψ .

Припускаючи, що стойка AO не підлягає згину та нехтуючи її вагою, визначити зусилля в цій стойці та в стержнях AC і AB , якщо відомі кути φ і δ , які утворюються відтяжками з горизонтальною координатною площиною xOy (рис. 4.4, табл. 4.1).

Задача 6. Розв'язати задачу 5 за умови, що кут $\gamma = \frac{\pi}{2}$, значення кутів φ , δ , ψ і вага вантажу Q задані (рис. 4.4, табл. 4.1).

Задача 7. Розв'язати задачу 4 за умови, що кут $\psi = \frac{\pi}{2}$, значення кутів α , δ , φ і вага вантажу Q задані (рис. 4.3, табл. 4.1).

Задача 8. Розв'язати задачу 4 за умови, що стержень OA нахилений в площині zOy і утворює з віссю z кут 60° (рис. 4.3, табл. 4.1).

Таблица 4.1

№	$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	$\gamma, ^\circ$	$\delta, ^\circ$	$\varphi, ^\circ$	$\psi, ^\circ$	$P, \text{кН}$	$Q, \text{кН}$
1	60	45	60	45	30	30	300	400
2	45	45	30	60	45	30	600	250
3	60	60	45	30	45	30	500	300
4	90	90	0	30	30	90	450	350
5	45	90	45	60	60	15	420	480
6	60	30	90	45	45	30	320	500
7	60	90	30	30	60	60	360	420
8	45	60	60	45	15	45	350	240
9	90	90	0	60	30	90	540	280
10	0	90	90	15	60	45	300	200
11	90	90	0	30	20	30	100	200
12	90	0	90	35	15	5	200	100
13	0	90	90	40	20	10	300	200
14	30	85	15	45	25	15	200	400
15	35	80	20	50	30	20	400	500
16	40	75	25	55	35	25	500	300
17	45	70	30	60	40	30	300	450
18	50	65	35	65	45	35	450	800
19	55	60	40	60	50	40	800	300
20	60	55	45	60	30	50	300	400
21	65	55	50	55	45	55	400	900
22	70	45	55	50	55	65	900	700
23	75	40	30	45	60	75	700	900
24	60	35	35	40	65	80	900	100
25	15	30	30	30	70	90	100	500

Приклад виконання завдання С4

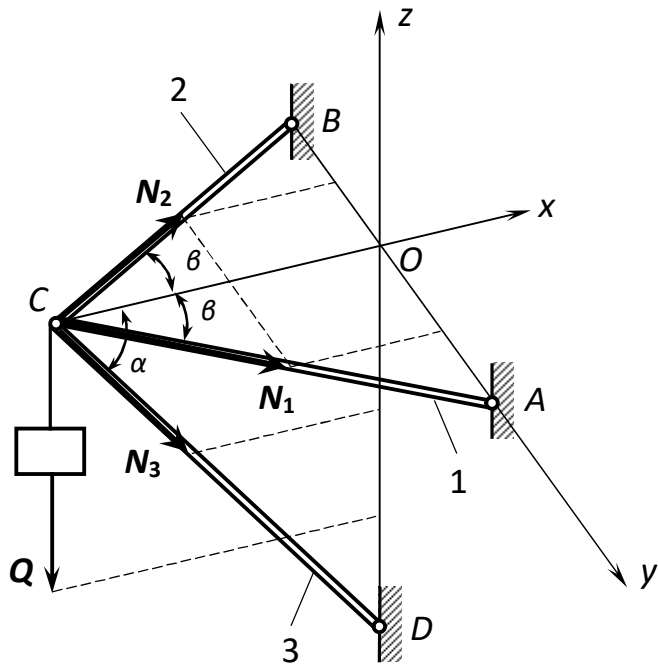


Рис. 4.5

Вантаж, маса якого $m = 500 \text{ кг}$, підвішений на кронштейн $ABCD$, який складається з трьох стержнів. Стержні 1 і 2 утворюють в місці з'єднання прямий кут і розташовані в горизонтальній площині xOy . Стержень 3 складає з горизонтальною площиною кут $\alpha = 40^\circ$ (рис. 4.5). Визначити зусилля в стержнях, викликані дією вантажу. З'єднання стержнів між собою і з вертикальною стінкою шарнірне. Вагою стержнів знехтувати.

Розв'язок.

1. Розглянемо рівновагу точки C . На неї діє вертикальне навантаження, яке дорівнює вазі вантажу.

$$Q = m \cdot g = 500 \cdot 9,81 = 4900 \text{ (Н)} = 4,9 \text{ (кН)}.$$

2. Дія ваги Q урівноважується реакціями трьох стержнів. Ці реакції направлені вздовж стержнів, оскільки з'єднання стержнів шарнірні. Реакції стержнів N_1 , N_2 , N_3 направимо від вузла C , тобто будемо вважати всі стержні розтягнутими.

3. Розташуємо осі координат, як показано на рис. 4.5. Помічаючи, що віссю x прямий кут $\angle ACB$ розділено навпіл ($\beta = 45^\circ$), складаємо три рівняння рівноваги для просторової системи збіжних сил:

$$\sum F_{ix} = 0 \text{ або } \sum X = N_1 \cos \beta + N_2 \cos \beta + N_3 \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad \sum Y = N_1 \sin \beta - N_2 \sin \beta = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{iz} = 0, \quad \sum Z = -N_3 \sin \alpha - Q = 0. \quad (3)$$

4. Розв'язуємо одержану систему рівнянь. З рівняння (3) маємо

$$N_3 = -\frac{Q}{\sin \alpha} = -\frac{4,9}{\sin 40^\circ} = -7,62 \text{ (кН)}.$$

Знак «-» вказує на те, що реакція N_3 направлена в сторону, протилежну тій, яка зображена на рисунку. Це означає, що стержень 3 стиснутий зусиллям $7,62 \text{ кН}$.

З рівняння (2) маємо $N_1 = N_2$.

$$\text{З рівняння (1)} \quad N_1 = -\frac{N_3 \cos \alpha}{2 \cos \beta} = \frac{7,62 \cdot \cos 40^\circ}{2 \cos 45^\circ} = 4,13 \text{ (кН)}.$$

Числові значення реакцій N_1 , N_2 вийшли додатними. Це означає, що стержні 1 і 2 розтягнуті силами по $4,13 \text{ кН}$.

Завдання С5. Рівновага довільної просторової системи сил

Задача 1. До невагомої плити $ABCD$, вагою якої будемо нехтувати, прикладені сили P , Q , причому сила Q вертикальна, а сила P складає з осями x , y , z кути α , β , γ . Плита утримується в горизонтальній площині в рівновазі за допомогою шести невагомих стержнів, з'єднаних шарнірно з плитою і з опорами. Визначити реакції цих стержнів (рис. 5.1, табл. 5.1).

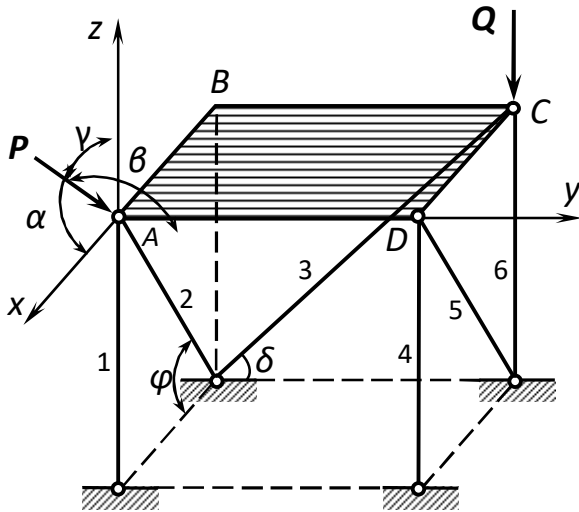


Рис. 5.1

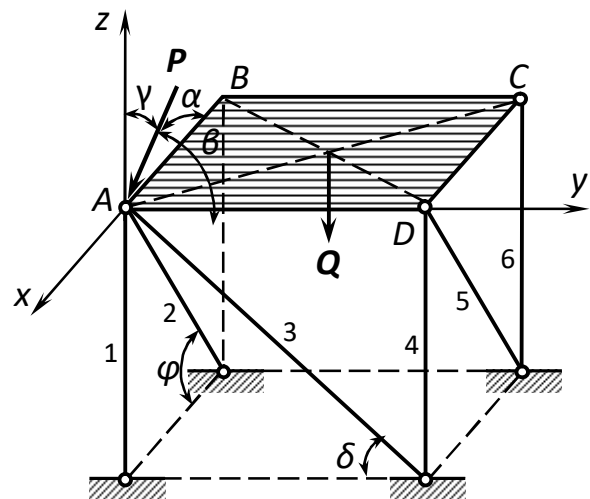


Рис. 5.2

Задача 2. Розв'язати задачу 1 для випадку, приведенного на рис. 5.2. Значення вихідних даних задачі надано в табл. 5.1.

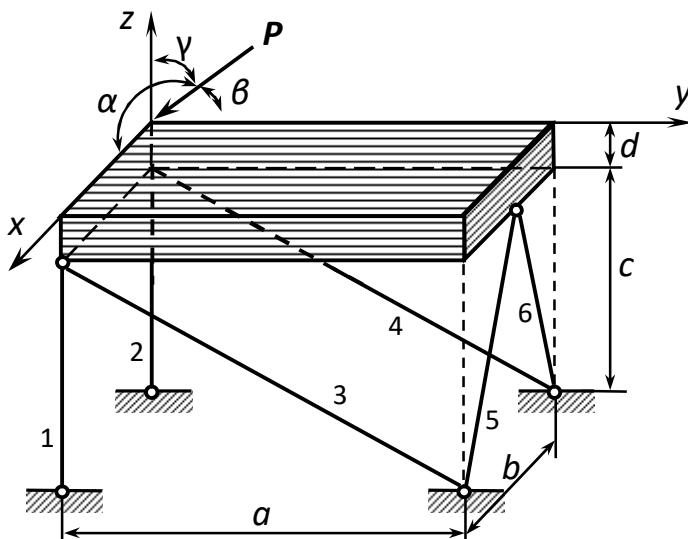


Рис. 5.3

Задача 3. Визначити реакції шести невагомих стержнів, які утримують в рівновазі плиту вагою Q . Плита має форму прямокутного паралелепіпеда з горизонтальною основою. До плити прикладена сила P , яка складає з осями координат кути α , β , γ . З'єднання стержнів з плитою і опорами шарнірні (рис. 5.3, табл. 5.1). Відомі співвідношення:

$$\frac{a}{b} = 1; \quad \frac{a}{c} = 2; \quad \frac{a}{d} = 10.$$

Задача 4. Барабан радіусом R закріплено на валу коловорота з горизонтальною віссю обертання AB , закріпленого за допомогою підшипників A і B . Підшипник B – радіально-упорний. Трос, до кінця якого підвішений вантаж вагою Q , сходить з барабана під кутом φ до вертикалі. До рукоятки KD , розташованої в площині, перпендикулярній до осі коловорота AB , прикладена сила P , яка утворює з осями x, y, z кути α, β, γ . За умови рівноваги вантажу визначити реакції підшипників A і B і силу P в той момент, коли рукоятка KD горизонтальна, якщо відома сила Q і відношення $\frac{AD}{AB} = 0,5$; $\frac{AC}{AB} = 0,4$; $\frac{KD}{R} = 3$ (рис. 5.4, табл. 5.1).

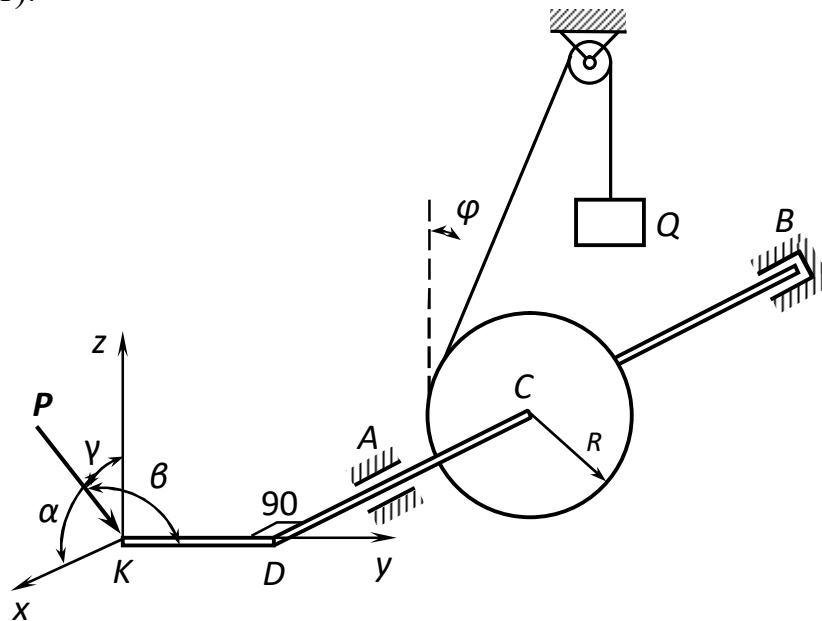


Рис. 5.4

Задача 5. Горизонтальний вал трансмісії, який несе два шківів C і D радіусів R і r , закріплено в циліндричних підшипниках A і B . Натяги t_1, T_1 паса, який охоплює шків C , утворюють з вертикаллю кути α і β , а натяги t_2, T_2 паса, який охоплює шків D , складають з вертикаллю кути γ, δ . Визначити натяги t_2, T_2 і реакції підшипників A і B (рис. 5.5, табл. 5.1), якщо відомий натяг $t_1 = Q$ і відношення $\frac{T_1}{t_1} = 2$; $\frac{T_2}{t_2} = 1,5$; $\frac{b}{a} = 1$; $\frac{c}{a} = 3$; $\frac{R}{r} = 2$.

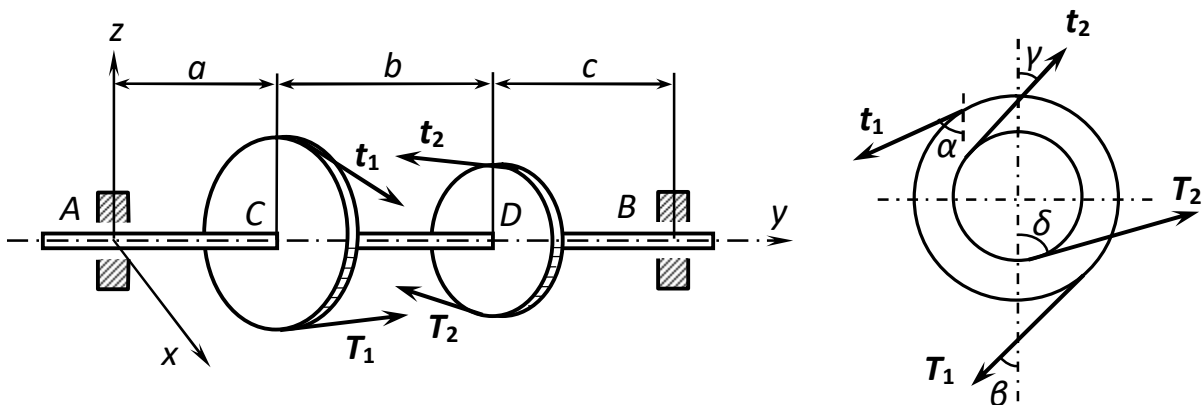


Рис. 5.5

Задача 6. Вантаж вагою Q рівномірно опускається за допомогою коловорота радіуса r , який приводиться до руху нескінченним ланцюгом, натяг якого передається на колесо радіуса R , причому вітки ланцюга нахилені до горизонту під кутами α і β .

Визначити реакції підшипників A і B і натяги t і T віток ланцюга, якщо відомі співвідношення $\frac{t}{T} = \frac{1}{2}$; $\frac{b}{a} = 1$; $\frac{c}{a} = 2$; $\frac{R}{r} = 2$ (рис. 5.6, табл. 5.1).

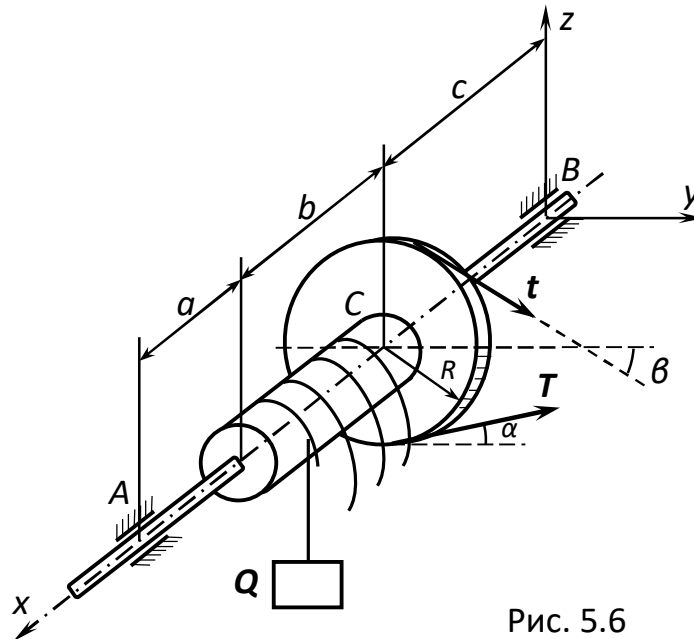


Рис. 5.6

Задача 7. Вантаж вагою Q піднімається рівномірно за допомогою коловорота. Рукоятка AE та прикладена до неї сила P лежать у площині, перпендикулярній до осі AB коловорота. Сила P складає з вертикаллю кут γ . Трос сходить з барабана під кутом β до горизонталі. До колеса D , жорстко з'єднаного з коловоротом, прикладена пара сил з моментом $m = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Визначити силу P і реакції підшипників A і B , якщо відстань $AE = a = 5R$, радіус барабана $R = 0,5 \text{ м}$ і відношення $\frac{AC}{AB} = 0,5$ (рис. 5.7, табл. 5.1).

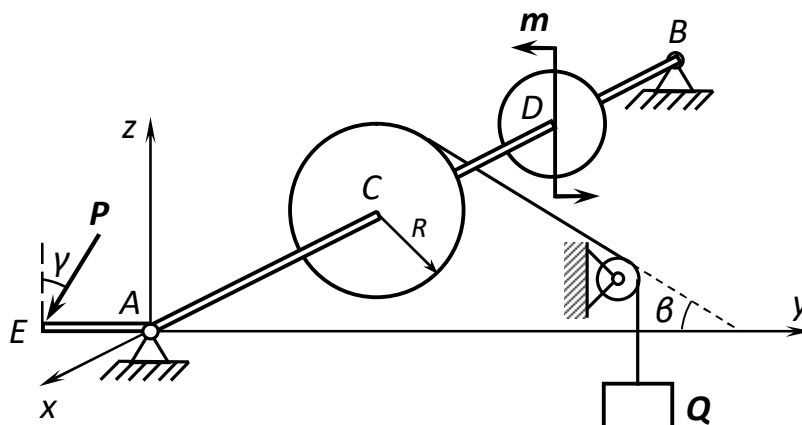


Рис. 5.7

Задача 8. Однорідна горизонтальна прямокутна полиця зі сторонами a і b та вагою P , яка може обертатись навколо горизонтальної осі AD , утримується в рівновазі за допомогою невагомому стержня CO , з'єданого шарнірно з полицею і з вертикальною стінкою. На відстанях $x = AC$ і $y = KD$ до полиці прикладена сила Q .

Визначити реакції петель D і E , які перпендикулярні до осі AK , і зусилля в стержні CO , якщо цей стержень складає з осями координат x, y, z кути α, β, γ . $AE = KD = 0,1a$; $b = 0,5a$; $BC = 0,1b$ (рис. 5.8, табл. 5.1).

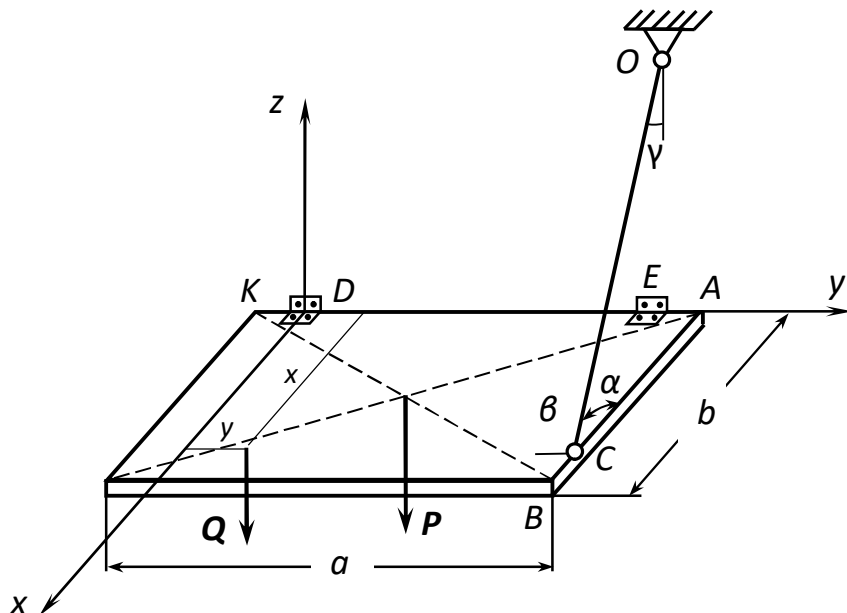


Рис. 5.8

Таблица 5.1

№	$P, \kappa H$	$Q, \kappa H$	$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	$\gamma, ^\circ$	$\varphi, ^\circ$	$\delta, ^\circ$
1	100	5	60	45	60	45	45
2	40	50	90	0	90	60	45
3	30	20	0	90	90	45	60
4	7	30	90	90	0	60	60
5	9	10	90	45	45	30	60
6	10	10	90	60	30	45	60
7	20	6	60	90	30	30	30
8	30	10	45	90	45	60	30
9	20	10	30	90	60	45	45
10	20	15	45	60	60	60	45
11	50	5	60	45	60	55	45
12	20	100	90	35	55	45	65
13	30	40	35	90	55	55	30
14	10	30	55	90	35	75	45
15	10	7	55	35	90	45	75
16	6	9	90	55	35	35	45
17	10	10	35	55	90	35	60
18	10	20	30	25	65	35	50
19	15	20	90	65	25	50	30
20	5	30	25	90	65	50	60
21	100	20	25	65	90	50	40
22	40	20	65	90	25	40	35
23	30	50	60	25	90	40	50
24	7	20	90	15	75	40	60
25	9	30	75	90	15	45	65

Приклад виконання завдання С5

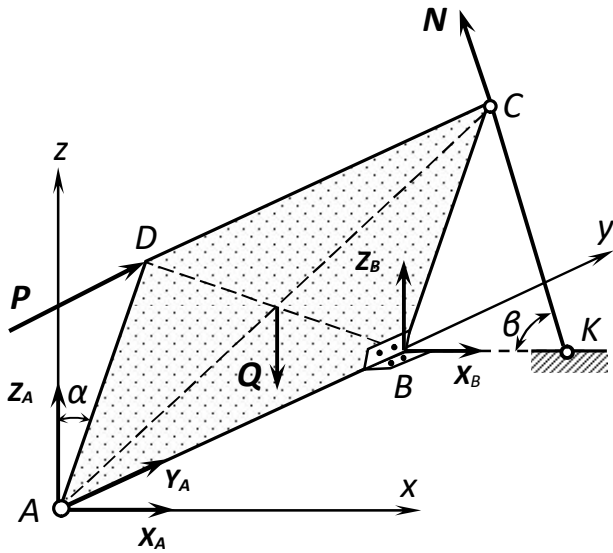


Рис. 5.9

Рама $ABCD$ вагою Q (рис. 5.9), яка кріпиться за допомогою сферичного шарніра у точці A і петлі B , утворює з площиною xy кут α і утримується у такому стані стержнем CK , який складає з площиною xy кут β . Знайти реакції опор R_A і R_B , якщо:

$$\begin{aligned} Q &= 1 \text{ кН}; \quad P = 2 \text{ кН}; \\ \alpha &= 30^\circ; \quad \beta = 60^\circ; \\ AB &= 1 \text{ м}; \quad AD = 0,6 \text{ м}. \end{aligned}$$

Розв'язок. Розглянемо рівновагу рами. Крім заданого навантаження (сила P і вага рами Q), користуючись принципом звільнення від в'язей, покажемо у точках A, B, C реакції в'язей: $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, N$ (рис. 5.9).

Рама знаходиться у рівновазі під дією довільної просторової системи сил, рівняння рівноваги якої мають вигляд:

$$\sum X = X_A + X_B - N \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y = Y_A + P = 0; \quad (2)$$

$$\sum Z = Z_A - Q + Z_B + N \cos 30^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum m_x = -P \cdot AD \cdot \cos 30^\circ - Q \cdot \frac{AB}{2} + N \cos 30^\circ \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0; \quad (4)$$

$$\sum m_y = Q \cdot \frac{BC}{2} \cdot \sin 30^\circ + N \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_z = P \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + N \cos 60^\circ \cdot AB - X_B \cdot AB = 0. \quad (6)$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь:

з рівняння (5)
$$N = \frac{Q \sin 30^\circ}{2 \sin 60^\circ} = \frac{1 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,866} = 0,289(\text{кН});$$

з рівняння (4)

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{P \cdot AD \cos 30^\circ + Q \cdot \frac{AB}{2} - N \cos 30^\circ \cdot AB}{AB} \\ &= \frac{2 \cdot 0,6 \cdot 0,806 + 1 \cdot 0,5 - 0,289 \cdot 0,866 \cdot 1}{1} = 1,29(\text{кН}); \end{aligned}$$

з рівняння (6)
$$X_B = \frac{P \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + N \cos 60^\circ \cdot AB}{AB} = \frac{2 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,289 \cdot 0,5 \cdot 1}{1} = 0,744(\text{кН});$$

з рівняння (1)
$$X_A = -X_B + N \cos 60^\circ = -0,744 + 0,289 \cdot 0,5 = -0,6(\text{кН});$$

з рівняння (2)
$$Y_A = -P = -2(\text{кН});$$

з рівняння (3)
$$Z_A = Q - Z_B - N \cos 30^\circ = 1 - 1,29 - 0,289 \cdot 0,866 = -0,54(\text{кН}).$$

Завдання С6. Визначення центра ваги однорідного тіла

Задача 1. З однорідного круга радіуса R вирізаний круглий отвір радіусом r , центр якого знаходиться у точці O_1 . Визначити координати центра ваги частини круга, яка залишилась, якщо відомі $\angle xOO_1 = \alpha$ і відношення $\frac{OO_1}{R} = m$; $\frac{r}{R} = m_1$ (рис. 6.1, табл. 6.1).

Задача 2. З однорідного кругового сектора радіуса R з центральним кутом α_1 вирізано півкруга радіуса r з центром у точці O_1 . Визначити координати центра ваги площі, яка залишалась, якщо відомі $\angle xOO_1 = \alpha$ і відношення $\frac{OO_1}{R} = m$; $\frac{r}{R} = m_1$ (рис. 6.2, табл. 6.1).

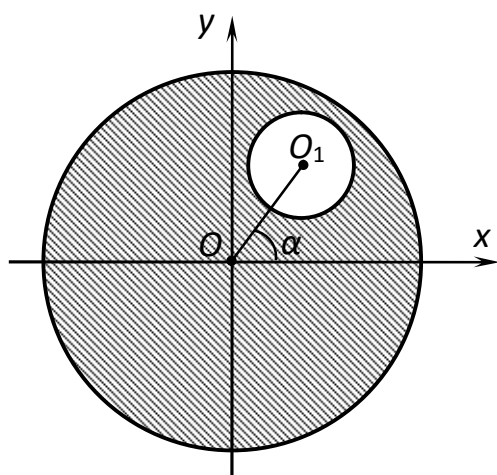


Рис. 6.1

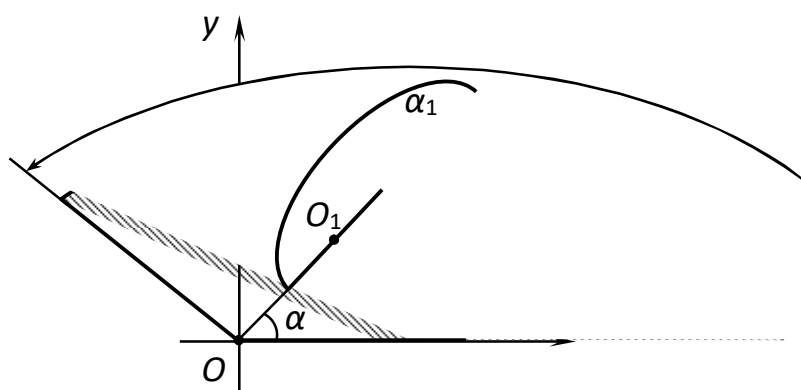


Рис. 6.2

Задача 3. Розв'язати задачу 1, припускаючи, що з круга радіуса R вирізаний квадрат з центром у точці O_1 , сторони якого дорівнюють радіусу r (рис. 6.1, табл. 6.1).

Задача 4. Розв'язати задачу 2, припускаючи, що з кругового сектора радіуса R вирізано не півкруга, а квадрат з центром у точці O_1 , сторони якого дорівнюють радіусу r (рис. 6.2, табл. 6.1).

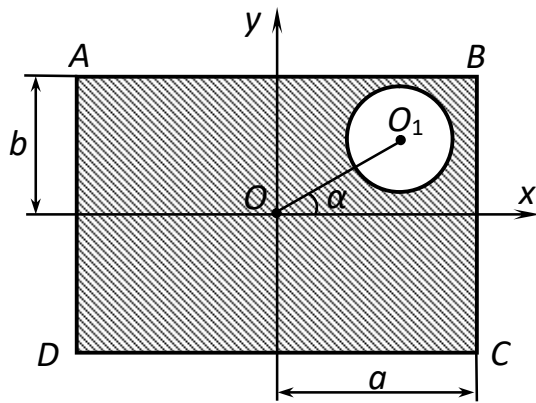


Рис. 6.3

Задача 5. З однорідного прямокутника $ABCD$ зі сторонами $2a$ і $2b$ вирізаний круг радіуса r з центром O_1 . Знайти координати центра ваги площі, яка залишилась, якщо відомо, що $b = 2R$; $a = 3R$; $\frac{OO_1}{R} = m$; $\frac{r}{R} = m_1$ (рис. 6.3, табл. 6.1).

Задача 6. З однорідного п'ятикутника $ABCDE$ вирізаний круглий отвір з радіусом r , центр якого знаходиться в точці O_1 . Знайти координати центра ваги площі, що залишилася, якщо $\angle EAO_1 = \alpha$; $b = 2R$; $a = R$; $\frac{AO_1}{R} = m$; $\frac{r}{R} = m_1$ (рис. 6.4, табл. 6.1).

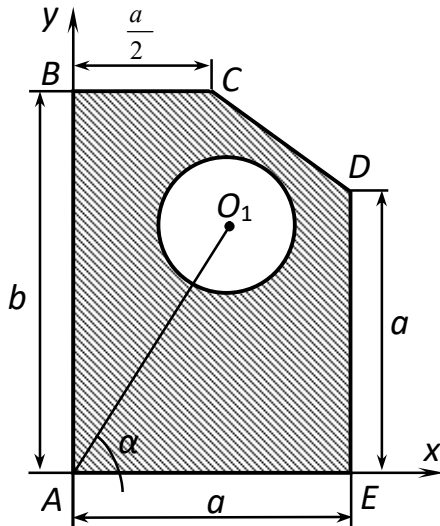


Рис. 6.4

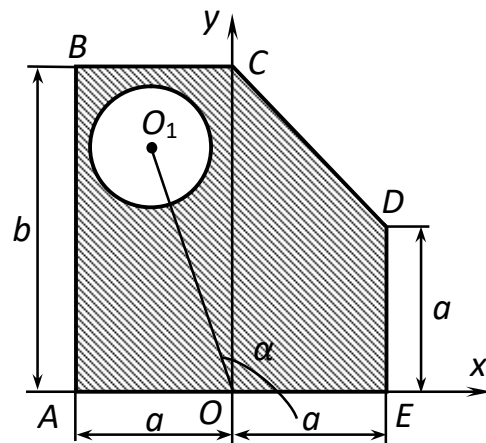


Рис. 6.5

Задача 7. З однорідного п'ятикутника $ABCDE$ вирізаний круглий отвір радіуса r , центр якого знаходиться в точці O_1 . Знайти координати центра ваги площі, що залишилася, якщо $\angle O_1OE = \alpha$; $a = R$; $b = 2R$; $\frac{OO_1}{R} = m$; $\frac{r}{R} = m_1$ (рис. 6.5, табл. 6.1).

Задача 8. Розв'язати задачу 7, припускаючи, що з п'ятикутника $ABCDE$ вирізано не круглий отвір, а квадрат з центром в точці O_1 , сторони якого дорівнюють радіусу r (рис. 6.5, табл. 6.1).

Таблица 6.1

№	$\alpha, ^\circ$	$\alpha_1, ^\circ$	m	m_1	$R, \text{см}$
1	30	300	0,3	0,1	20
2	20	270	0,4	0,3	30
3	25	240	0,5	0,3	40
4	35	210	0,6	0,3	50
5	40	180	0,7	0,2	55
6	45	150	0,8	0,1	60
7	60	120	0,7	0,1	70
8	90	180	0,7	0,2	80
9	100	245	0,6	0,3	90
10	120	285	0,5	0,2	100
11	110	300	0,5	0,3	90
12	135	225	0,5	0,4	80
13	120	210	0,4	0,4	70
14	90	240	0,4	0,4	60
15	60	270	0,4	0,3	50
16	75	180	0,5	0,2	40
17	50	120	0,5	0,3	70
18	45	135	0,5	0,2	24
19	35	240	0,6	0,3	44
20	0	300	0,6	0,2	54
21	20	235	0,6	0,1	64
22	30	225	0,7	0,2	74
23	60	210	0,7	0,1	36
24	45	200	0,4	0,3	52
25	90	160	0,5	0,3	60

Приклад виконання завдання С6

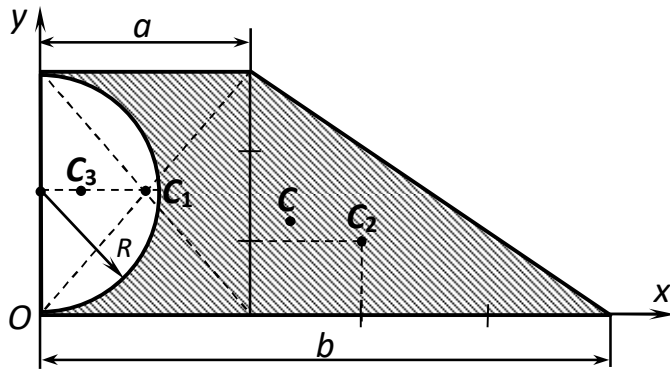


Рис. 6.6

Знайти координати центра ваги плоскої фігури, яка показана на рис. 6.6, якщо $R = 20\text{см}$, $a = 20\text{см}$, $b = 80\text{см}$.

Координати центра ваги пластинки визначаємо за формулами:

$$x_C = \frac{\sum S_i x_i}{S}; \quad y_C = \frac{\sum S_i y_i}{S}. \quad (1)$$

Щоб користуватися цими формулами, ділимо пластинку на окремі частини, положення центрів ваги яких відомі. У даному випадку такими частинами є: 1) прямокутник, 2) трикутник, 3) півкруг. Площу півкруга, якого вирізано з площі прямокутника, вважаємо від'ємною.

Маємо: площа прямокутника $S_1 = a \cdot 2R = 30 \cdot 2 \cdot 20 = 1200(\text{см}^2)$;

площа трикутника $S_2 = \frac{1}{2}(b - a) \cdot 2R = (80 - 30) \cdot 20 =$

$1000(\text{см}^2)$;

площа півкруга $S_3 = \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = 200\pi = 628(\text{см}^2)$.

Центри ваги досліджуваних частин мають такі координати:

для прямокутника $x_1 = \frac{a}{2} = 15\text{см}, \quad y_1 = R = 20\text{см};$

для трикутника $x_2 = a + \frac{1}{3}(b - a) = 30 + \frac{1}{3}(80 - 30) = 46,7(\text{см}),$

$$y_2 = \frac{2R}{3} = \frac{2 \cdot 20}{3} = 13,3\text{см};$$

для півкруга $x_3 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 20}{3\pi} = 6,5(\text{см}), \quad y_3 = R = 20\text{см}..$

Підставляючи отримані дані до формули (1), отримаємо:

$$x_C = \frac{1200 \cdot 15 + 1000 \cdot 46,7 - 628 \cdot 8,5}{1200 + 1000 - 628} = 37,8(\text{см});$$

$$y_C = \frac{1200 \cdot 20 + 1000 \cdot 13,3 - 628 \cdot 20}{1200 + 1000 - 628} = 15,7(\text{см}).$$

II. КІНЕМАТИКА

Теоретична частина

Розділ механіки, в якому вивчають геометричні властивості руху, без врахування причин, які його спричиняють, називається **кінематикою**.

Основними поняттями кінематики є матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, простір і час.

Рух будь-якого механічного об'єкта в кінематиці вивчають по відношенню до деякого тіла, з яким зв'язують систему відліку, що дозволяє визначити положення об'єкта, який рухається, в різні моменти часу відносно тіла відліку. Положення об'єкта відносно даної системи відліку визначається відповідними параметрами (координатами), а рух – кінематичними рівняннями, які зв'язують ці параметри з часом.

Основна задача кінематики полягає у тому, щоб за відомими кінематичними рівняннями руху механічного об'єкта знайти відповідні кінематичні характеристики цього руху (траєкторії, швидкості і прискорення рухомих точок, кутові швидкості і прискорення тіл, що обертаються навколо нерухомої осі та ін.)

Траєкторією точки називається неперервна лінія, вздовж якої рухається точка відносно деякої системи відліку.

В кінематиці розрізняють кінематику точки та кінематику твердого тіла.

Кінематика матеріальної точки

Визначення швидкості і прискорення точки за координатного способу задання руху

Рівняння руху точки в ортогональній системі декартових координат

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t).$$

Проекції швидкості точки на осі координат дорівнюють першим похідним від відповідних координат по часу

$$V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_z = \dot{z},$$

де $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – позначення похідних по часу, тобто

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}.$$

Тоді модуль вектора швидкості визначається за формулами:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Проекції прискорення точки на осі координат дорівнюють другим похідним від відповідних координат по часу або першим похідним від проекцій швидкості

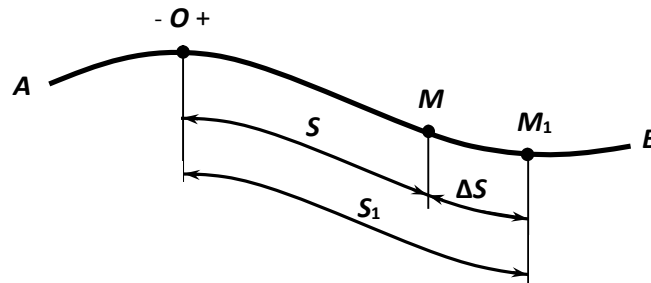
$$W_x = \ddot{x} = \dot{V}_x, \quad W_y = \ddot{y} = \dot{V}_y, \quad W_z = \ddot{z} = \dot{V}_z.$$

Модуль прискорення відповідно дорівнює:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Швидкість і прискорення точки за природного способу задання руху

Натуральний (природний) спосіб застосовують, коли попередньо відома траєкторія точки.



Нехай задана крива AB – траєкторія руху точки M , точка O – початок відліку дугової координати S з вказівкою напрямів додатних (+) і від’ємних (-) значень. Закон руху матеріальної точки вздовж траєкторії:

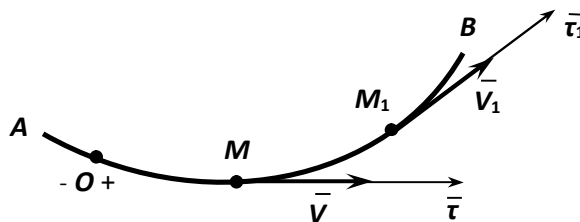
$$S = f(t).$$

Модуль **швидкості** точки за природного способу задання її руху дорівнює першій похідній за часом від дугової координати

$$V = \frac{dS}{dt} = \dot{S},$$

напрямок вектора швидкості – за дотичною $\vec{\tau}$ до траєкторії матеріальної точки в сторону руху.

Якщо $V_t = \dot{S} > 0$, то точка рухається в напрямі додатного відліку дугової координати, при $V_t = \dot{S} < 0$ – у від’ємному напрямі.



Вектор прискорення можна представити як векторну суму дотичного та нормального прискорень (рис.)

$$\vec{W}_n.$$

Дотичне прискорення W_τ є проекцією вектора повного прискорення $\vec{W}$ на вісь дотичної τ , характеризує зміну вектора швидкості за величиною і дорівнює першій похідній за часом від функції швидкості або другій похідній від дугової координати

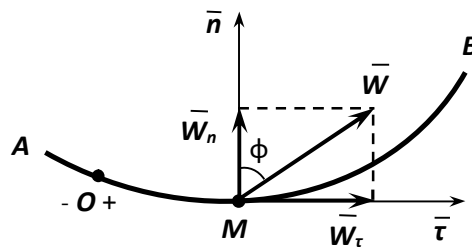
$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2},$$

при цьому, якщо $\frac{dv}{dt} > 0$, то вектор дотичного прискорення $\bar{W}_\tau$ направлений в додатному напрямі дотичної осі τ , а коли $\frac{dv}{dt} < 0$ – у від’ємному напрямі цієї осі.

Нормальне (доцентрове) прискорення W_n є проекцією вектора повного прискорення $\bar{W}$ на вісь головної нормалі n , характеризує зміну вектора швидкості за напрямом і дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривини траєкторії в даній точці

$$W_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Так як $W_n > 0$, то вектор нормального прискорення $\bar{W}_n$ завжди орієнтується в додатному напрямі осі головної нормалі (спрямований до центра кривини в даній точці). Таким чином, вектор повного прискорення $\bar{W}$ буде завжди розміщений в області увігнутості траєкторії.



В зв'язку з тим, що вектори $\bar{W}_\tau$ і $\bar{W}_n$ взаємно перпендикулярні, модуль повного прискорення $\bar{W}$ та його напрям визначаються такими співвідношеннями:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{W_\tau}{W_n}.$$

Враховуючи, що $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$, модуль дотичного прискорення можна визначити як

$$W_\tau = \left| \frac{d}{dt} \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \right| = \left| \frac{V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z}{V} \right|.$$

Тоді нормальне прискорення точки знаходимо згідно з формулою

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2},$$

а радіус кривини траєкторії

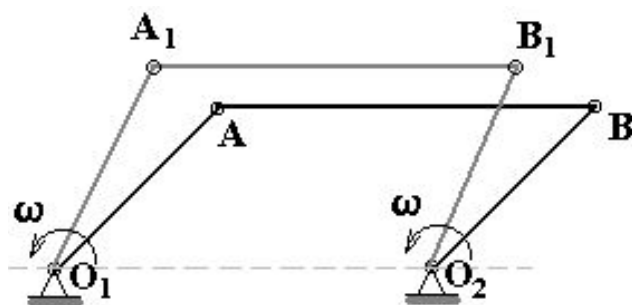
$$\rho = \frac{v^2}{W_n}.$$

Кінематика твердого тіла

Поступальний і обертальний рухи твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому довільна пряма, зв'язана з тілом, переміщується, залишаючись паралельною сама собі.

Наприклад, рух поршня двигуна відносно циліндра, рух педалі велосипеда відносно рами, рух кузова автомобіля на прямій горизонтальній ділянці шляху. Ланка AB триланкового механізму (рис.) також здійснює поступальний рух.



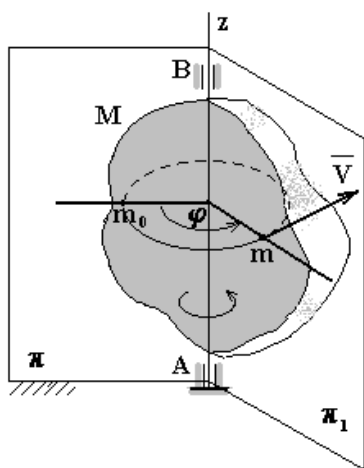
Поступальний рух не завжди є прямолінійним. При поступальному русі тіла траєкторії його точок можуть бути будь-якими кривими лініями.

Ознаки поступального руху тіла: при поступальному русі траєкторії усіх точок однакові (при накладанні співпадають) і в кожному момент часу окремі точки мають рівні між собою швидкості та прискорення.

Отже, для вивчення поступального руху твердого тіла достатньо використати кінематику однієї будь-якої його точки.

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, за якого пряма, проведена крізь дві довільні точки тіла, залишається нерухомою під час руху. Пряма, яка проведена через нерухомі точки A і B (рис.), називається віссю обертання.

Для визначення положення тіла, що обертається, проводимо через вісь обертання Az дві півплощини: нерухому π і π_1 , незмінно зв'язану з тілом M , яка обертається разом з ним. Тоді положення тіла в будь-який момент часу



буде однозначно визначатися взятим з відповідним знаком кутом φ між цими півплощинами, який називається кутом повороту тіла. Ми будемо вважати цей кут додатним, якщо він відкладений від нерухомої площини в напрямку проти руху стрілки годинника (для спостерігача, який слідкує за рухом з додатного кінця осі Az) і від'ємним, якщо за рухом стрілки годинника. Вимірюється кут φ завжди в радіанах.

Щоб знайти положення тіла в будь-який момент часу, треба знати залежність кута φ від часу, тобто закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

$$\varphi = f(t) .$$

Кут повороту часто виражають числом обертів n . Тоді кут φ в радіанах, відповідний n обертам, визначається як

$$\varphi = 2\pi n.$$

Величина, яка характеризує швидкість зміни кута повороту φ з часом, називається **кутовою швидкістю тіла**. Кутова швидкість ω в даний момент часу чисельно дорівнює першій похідній за часом від кута повороту

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Розмірність кутової швидкості $[rad/c]$ або $[c^{-1}]$.

Величина, яка характеризує швидкість зміни кутової швидкості з часом, називається **кутовим прискоренням тіла**.

Кутівим прискоренням ε в даний момент часу називають першу похідну від кутової швидкості, тобто

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \quad \text{або} \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Отже, кутове прискорення в даний момент часу чисельно дорівнює другій похідній від кута повороту тіла за часом.

Розмірність кутового прискорення $[rad/c^2]$ або $[c^{-2}]$.

Якщо модуль кутової швидкості з часом зростає, то обертання тіла називається прискореним, а якщо спадає – сповільненим. Обертання буде прискореним, коли величини ω і ε мають однакові знаки, і сповільненим, коли різні.

Окремі випадки обертання твердого тіла

1. Якщо кутова швидкість тіла залишається сталою під час руху ($\omega = const$), то обертання тіла називається рівномірним.

Рівняння рівномірного обертального руху має вигляд

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t,$$

де φ_0 – початкове значення кута.

У техніці кутову швидкість рівномірного обертання часто визначають кількістю обертів за хвилину n [об/хв]. Зв'язок між цими одиницями вимірювання задається формулою

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad \left(\frac{rad}{c}\right).$$

2. Якщо кутове прискорення тіла залишається сталим у весь час руху ($\varepsilon = const$), то обертання тіла називається рівнозмінним.

Рівняння рівнозмінного руху:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}.$$

Якщо величини ω і ε мають однакові знаки, то обертання буде рівноприскореним, а якщо різні знаки, то – рівносповільненим.

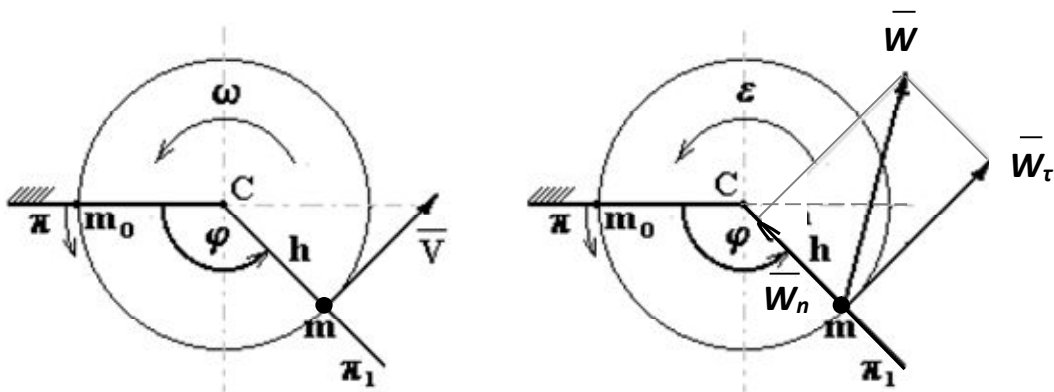
Вектори кутової швидкості та прискорення обертового тіла розміщуються на осі обертання і спрямовані так, що дивлячись з додатного кінця осі, можна побачити поворот тіла у напрямі проти ходу годинникової стрілки.

Лінійні швидкості та прискорення точок при обертанні тіла

Лінійна швидкість V точки при обертанні твердого тіла чисельно дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань від цієї точки до осі обертання (рис.)

$$V = \omega \cdot h.$$

Вектор лінійної швидкості направлений *по дотичній до кола*, яке описує точка m (тобто перпендикулярно радіусу обертання), і спрямований у напрямі обертання.



Лінійне прискорення $\bar{W}$ точки при обертанні твердого тіла є векторною сумою дотичного $\bar{W}_\tau$ та нормального $\bar{W}_n$ прискорень

$$\bar{W} = \bar{W}_\tau + \bar{W}_n,$$

де

$$W_\tau = \frac{d^2 S}{dt^2} = h \cdot \varepsilon,$$

$$W_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{h} = h \cdot \omega^2.$$

Дотичне прискорення $\bar{W}_\tau$ (*обертальне*) орієнтується по дотичній до траєкторії. Нормальне прискорення $\bar{W}_n$ направляється по радіусу h до осі обертання (рис. 7), тому його ще називають *доцентровим*.

Модуль повного прискорення дорівнює

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Позначивши через θ кут між вектором повного прискорення точки та її радіусом обертання, маємо

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

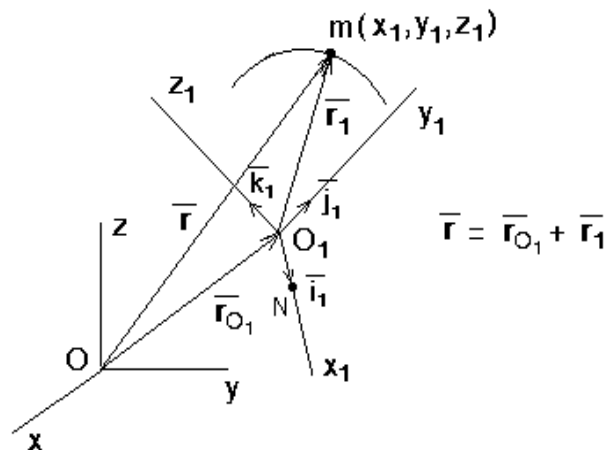
Кінематика складного руху точки

Спостерігачі, які зв'язані з різноманітними системами відліку, сприймають одне і теж об'єктивне механічне явище по різному, наприклад, для велосипедиста ніпель велосипедного колеса рухається по колу, у той час як для пішохода, цей рух відбувається по іншій траєкторії (циклоїда). Основною задачею кінематики складного руху точки є встановлення зв'язків між кінематичними характеристиками руху в різноманітних системах відліку, які мають взаємний відносний рух. Одну з цих систем координат будемо вважати умовно нерухомою. Розглянемо основні поняття кінематики складного руху точки.

Нехай матеріальна точка m рухається в деякій системі координат (x_1, y_1, z_1) (рис.), яка в свою чергу рухається щодо нерухомої системи відліку (x, y, z) . Тоді рух точки m у рухомій системі називають *відносним*, а в системі нерухомих осей складним або *абсолютним*. *Переносним* рухом точки m є рух тієї точки рухомої системи координат, через яку в даний момент проходить точка m .

Абсолютною швидкістю V_a (абсолютним прискоренням W_a) точки m називається швидкість (прискорення) цієї точки в її абсолютному русі, тобто щодо нерухомої системи координат. Таким чином, згідно з означенням

$$\overline{V}_a = \frac{d \overline{r}}{d t}, \quad \overline{W}_a = \frac{d^2 \overline{r}}{d t^2}.$$



Відповідно, відносною швидкістю V_r (відносним прискоренням W_r) точки m називається швидкість (прискорення) цієї точки в її відносному русі в рухомій системі відліку. Для спостерігача, пов'язаного з рухомою системою відліку, ця система координат буде нерухомою, а орти цієї системи відліку будуть сталими. Тому

$$\overline{V}_r = \frac{d \overline{r}_1}{d t}, \quad \overline{W}_r = \frac{d^2 \overline{r}_1}{d t^2}.$$

Переносною швидкістю V_e (переносним прискоренням W_e) називають швидкість (прискорення) тієї точки рухомої системи координат, з якою в дану мить збігається точка m . Для такої точки (вона як би вмерожена в систему) координати $x_1, y_1, z_1 = \text{const}$. Тобто

$$\overline{V}_e = \frac{d \vec{r}}{d t}, \quad \overline{W}_e = \frac{d^2 \vec{r}}{d t^2}.$$

Метод призупинення: щоб одержати відносний рух точки, достатньо зупинити її переносний рух і, навпаки, щоб одержати переносний рух даної точки, достатньо зупинити її відносний рух.

Теорема про додавання швидкостей

Зв'язок між швидкостями в різноманітних системах відліку встановлює теорема про додавання швидкостей.

Швидкість точки в абсолютному русі дорівнює векторній сумі переносної і відносної швидкостей даної точки.

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Теорема Коріоліса (про додавання прискорень)

Прискорення абсолютного руху точки дорівнює векторній сумі трьох прискорень - переносного, відносного і прискорення Коріоліса

$$\overline{W}_a = \overline{W}_e + \overline{W}_r + \overline{W}_c,$$

де прискорення Коріоліса дорівнює подвійному векторному добутку переносної кутової швидкості (кутової швидкості рухомої системи координат) на відносну швидкість точки

$$\overline{W}_c = 2[\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r].$$

Модуль прискорення Коріоліса визначається як

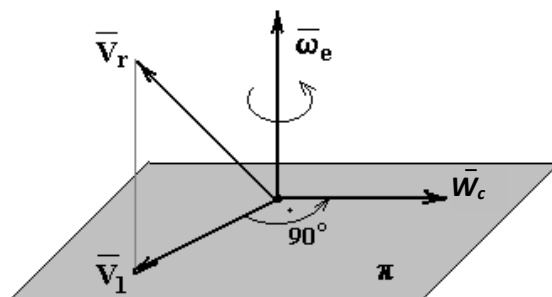
$$W_c = 2 \omega_e \cdot V_r \cdot \sin(\overline{\omega}_e; \overline{V}_r).$$

Аналізуючи останню формулу, легко бачити, що прискорення Коріоліса дорівнює нулю в таких випадках:

- 1) коли переносний рух є поступальним (або якщо переносна кутова швидкість в даний момент часу обертається в нуль). В такому випадку $\omega_e = 0$ і, відповідно $W_c = 0$.
- 2) коли $V_r = 0$, тобто відносна швидкість в даний момент часу обертається в нуль.
- 3) коли $\sin(\overline{\omega}_e; \overline{V}_r) = 0$, тобто $\alpha = 0$ або $\alpha = 180^\circ$.

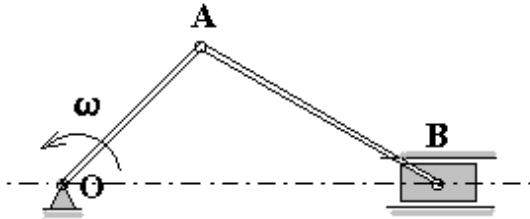
Отже, прискорення Коріоліса виникає тільки під час обертального переносного руху. З цієї причини його називають ще й *поворотним* прискоренням.

Правило Жуковського: щоб знайти напрям прискорення Коріоліса необхідно спроектувати вектор відносної швидкості точки на площину, перпендикулярну осі переносного обертання, і повернути цю проекцію в цій же площині на кут 90° в сторону переносного обертання (рис.).



Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельним (або **плоским**) **рухом** твердого тіла називається такий рух, при якому кожна точка тіла рухається в площині, паралельній деякій нерухомій площині. Наприклад, колесо, що котиться по прямолінійній ділянці шляху.



Прикладом плоского механізму може служити кривошипно-шатунний механізм (рис.). Кривошип OA цього механізму здійснює обертальний рух навколо осі O . Повзун B рухається поступально. Шатун AB здійснює плоскопаралельний рух. Однак, рух всіх цих тіл відбувається в площині механізму.

Якщо перетнути тіло площиною xOy , яка паралельна нерухомій площині π , то у перерізі отримаємо плоску фігуру S (рис.), яка під часу руху тіла буде довільно переміщуватися, але залишатися весь час у площині xOy . Відомо, що рух плоскої фігури у площині визначається рухом відрізка AB , проведеного на цій фігурі.

Таким чином, плоскопаралельний рух тіла фактично зводиться до розглядання руху відрізка AB на площині. В свою чергу, положення відрізка AB можна визначити, якщо відомі координати x_A, y_A деякої точки A , яку будемо називати *полюсом*, та кут φ , що утворює відрізок AB з віссю x .

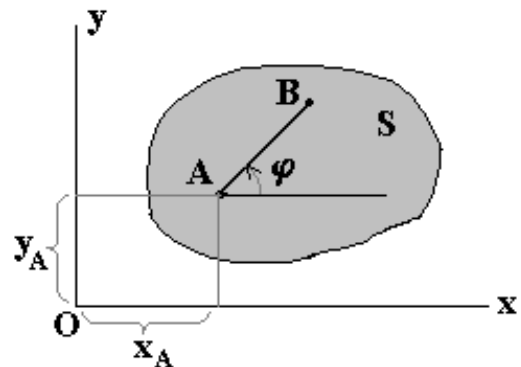
Плоскопаралельний рух твердого тіла складається з поступального руху, при якому всі точки тіла рухаються так, як і полюс A , і з обертального руху навколо цього полюса.

Щоб знати закон руху тіла, тобто знати його положення в просторі в будь-який момент часу, треба знати залежності

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

де перші два рівняннями описують поступальну частину плоскопаралельного руху, а третє – обертання навколо полюса.

Зауважимо, що при вивченні руху в якості полюса можна брати будь-яку точку фігури, тобто обертальна частина руху від вибору полюса не залежить.



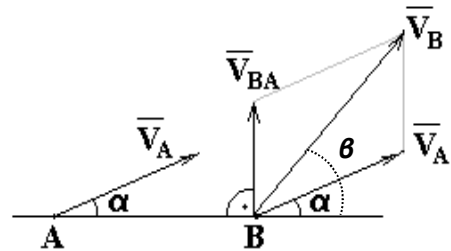
Розподіл швидкостей плоскої фігури (теорема Ейлера)

Швидкість будь-якої точки фігури при її плоскому русі дорівнює векторній сумі швидкості полюса і відносній швидкості цієї точки від обертання фігури навколо полюса (формула Ейлера)

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

де $V_{BA} = \omega \cdot AB.$

Вектор $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярний до відрізка AB і напрямлений в сторону обертання плоскої фігури. Кутова швидкість ω плоскої фігури не залежить від вибору полюса.



Теорема. Проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на вісь, яка проходить через ці точки, дорівнюють одна одній (рис.)

$$\text{Пр}_{AB} \vec{V}_B = \text{Пр}_{AB} \vec{V}_A$$

або $V_B \cdot \cos \beta = V_A \cdot \cos \alpha.$

Миттєвим центром швидкостей (МЦШ) називається точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Якщо в формулі Ейлера в якості полюса вибрати миттєвий центр швидкостей, то

$$\vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP} = \vec{V}_{BP},$$

тому що $V_P = 0$. Аналогічний результат можна одержати для будь-якої іншої точки фігури. При цьому

$$V_B = \omega \cdot BP, \quad \vec{V}_B \perp BP.$$

Отже, в даний момент часу рух плоскої фігури є обертанням навколо осі, яка проходить через МЦШ перпендикулярно площині фігури. Швидкості усіх точок знаходяться як швидкості при обертальному русі навколо МЦШ. Всі точки фігури в даний момент часу мають однакову кутову швидкість ω , яка дорівнює відношенню швидкості будь-якої точки фігури до її відстані від МЦШ

$$\omega = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A}{AP}.$$

Способи знаходження миттєвого центра швидкостей:

1. Якщо ми знаємо вектор швидкості $\vec{V}_A$ деякої точки A плоскої фігури та кутову швидкість ω , то миттєвий центр швидкостей P знаходиться на перпендикулярі до $\vec{V}_A$, який проводиться з точки A , на відстані

$$AP = V_A / \omega.$$

2. Якщо відомі напрями швидкостей $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$ яких-небудь двох точок A і B плоскої фігури, то миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених з точок A і B до швидкостей цих точок (рис., а).

3. Якщо швидкості точок A і B паралельні одна одній $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$, причому лінія AB перпендикулярна $\vec{V}_A$ і $V_A \neq V_B$, то миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці P , яка визначається побудовами, вказаними на рис. 13, б і в. Якщо $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$ і $V_A = V_B$, тоді маємо миттєво поступальний рух плоскої фігури і миттєвого центру швидкостей не існує (знаходиться в нескінченності), а $\omega = 0$.

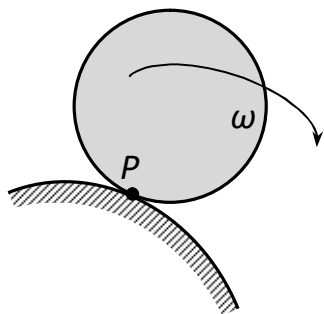
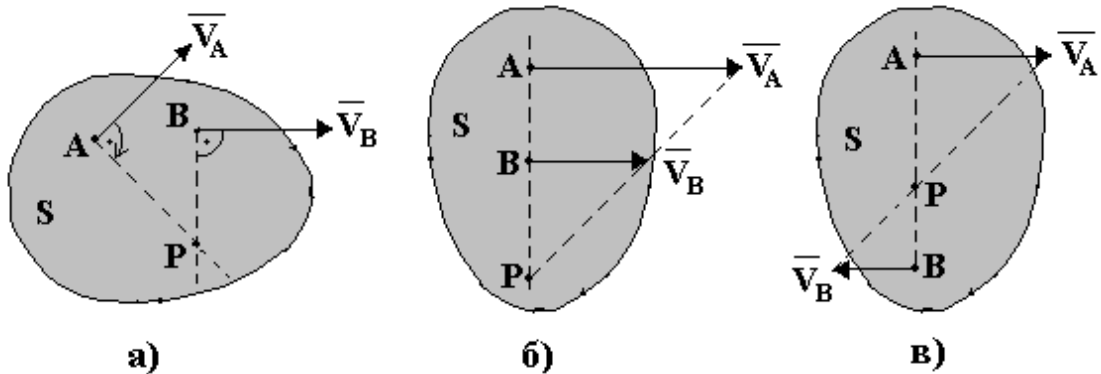


рис. 14

4. Якщо плоскопаралельний рух здійснюється шляхом кочення без ковзання одного циліндричного тіла по поверхні іншого, то миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці P дотику тіл. $V_P = 0$, тому що точки дотику обох тіл при відсутності ковзання повинні мати однакові швидкості, і оскільки друге тіло нерухоме (рис.).

Розподіл прискорень плоскої фігури

Теорема. Прискорення будь-якої точки плоскої фігури при плоскому русі дорівнює векторній сумі прискорення полюса і прискорення цієї точки від обертального руху плоскої фігури навколо полюса.

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA},$$

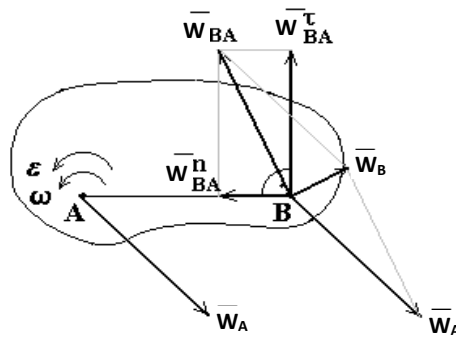
де

$$\vec{W}_{BA}^n,$$

причому

$$W_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB, \quad W_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB,$$

$$W_{BA} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$



Завдання К1. *Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху*

За заданими рівняннями руху точки встановити вигляд її траєкторії і для моменту часу $t = t_1$ (с) знайти положення точки на траєкторії, її швидкість, прискорення (повне, дотичне та нормальне), а також радіус кривизни траєкторії у відповідній точці. Рівняння руху вибираються з табл. 1, де число n набуває значення номера академічної групи.

Вказівки. Задача К1 відноситься до кінематики точки і розв'язується за допомогою формул, якими визначаються швидкість та прискорення точки в декартових координатах, а також формул для дотичного та нормального прискорення точки.

В даній задачі всі величини, що визначаються, треба визначити тільки для моменту часу $t_1 = n$ (с). В деяких варіантах задачі при встановленні траєкторії слід мати на увазі відомі тригонометричні залежності:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1, \\ \sin 2\alpha &= 2\cos \alpha \sin \alpha.\end{aligned}$$

Траєкторію точки або ту її ділянку, де знаходиться точка в заданий момент часу, бажано будувати, використовуючи ПЕОМ, наприклад, програму Ms. Excel.

Таблиця 1

№	Рівняння руху		t_1 , с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$12n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$2 + 3n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n
2	$-4 - 6n \cos\left(\frac{\pi n}{3} \cdot t\right)$	$6n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right) - 3$	$0,5n$
3	$-3n \sin^2\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$4n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$0,5n$
4	$9n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right) - 4$	$3 + 6n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n
5	$3n \cos\left(\frac{\pi n}{3} \cdot t\right) - 2$	$6n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right) - 2$	$0,5n$
6	$-10n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$5n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n
7	$2 - 6n \sin^2\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$2 - 6n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n

8	$2 n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right) - 2$	$3 n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right) - 1$	n
9	$9 n \cos\left(\frac{\pi n}{3} \cdot t\right) + 5$	$3 n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$0,5n$
10	$3 - 8 n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$-4 \cos^2\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n
11	$2 n t^2 + 2$	$2 n - t$	1
12	$(2 n + t)^2$	$2 n t$	1
13	$2 n t^3$	$n t - 4$	1
14	$2 - 3 n t^2$	$4 n - 2 t$	$0,5$
15	$9 n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$12 n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n
16	$(t + n)^2$	$2 - n t$	1
17	$6 - 8 n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$4 - 6 n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$0,5n$
18	$3 - 2 n t^2$	$2 - n t$	1
19	$3 n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$8 n \sin^2\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n
20	$(2 n - t)^3$	$3 n t$	1
21	$4 n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right) - 2 n$	$12 n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n
22	$16 - 14 n \cos^2\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$4 - 6 n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n
23	$4 n \cos\left(\frac{\pi n}{3} \cdot t\right)$	$8 n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$0,5n$
24	$(n - t)^2$	$3 n t$	1
25	$-10 n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$5 - 4 n \sin^2\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n
26	$-4 n \cos^2\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$8 n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n
27	$2 - n t^2$	$3 n t$	1
28	$8 - 20 n \cos\left(\frac{\pi n}{3} \cdot t\right)$	$4 - 6 n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n
29	$5 + n \cos\left(\frac{\pi n}{3} \cdot t\right)$	$n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n
30	$10 - 2 n \cos\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	$-5 n \sin\left(\frac{\pi n}{6} \cdot t\right)$	n

Приклад виконання завдання К1

Палець кривошипу дизеля рухається відповідно до заданих параметрично рівнянь:

$$\begin{aligned}x &= b \sin \omega t ; \\ y &= b \cos \omega t ,\end{aligned}$$

де координати x і y задаються в метрах; t – в секундах; b і ω – сталі величини.

Визначити рівняння траєкторії, швидкість і прискорення пальця.

Розв'язування. Для визначення рівняння траєкторії пальця кривошипа треба виключити з заданих рівнянь руху параметр часу t . Спочатку визначимо із заданих рівнянь тригонометричні функції:

$$\sin \omega t = \frac{x}{b}, \cos \omega t = \frac{y}{b}.$$

Оскільки тригонометричні функції є функціями одного аргументу, то піднесемо до квадрату ліві та праві частини цих виразів і додамо.

Маючи на увазі, що $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$,
отримаємо:
$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$
$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Таким чином, з останнього виразу легко побачити, що траєкторією руху пальця кривошипа є коло радіуса b з центром у початку координат.

Для визначення швидкості знайдемо спочатку проекції швидкості пальця на координатні осі:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = b\omega \cdot \cos \omega t, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = -b\omega \cdot \sin \omega t.$$

Модуль швидкості:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(b\omega \cdot \cos \omega t)^2 + (-b\omega \cdot \sin \omega t)^2} = b\omega.$$

З останнього виразу легко побачити, що палець рухається зі сталою швидкістю, яка дорівнює $b\omega$.

Знайдемо прискорення пальця кривошипу через проекції на осі координат. Для цього візьмемо другі похідні за часом від заданих координат:

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt} = -b\omega^2 \cdot \sin \omega t, W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt} = -b\omega^2 \cdot \cos \omega t.$$

Повне прискорення:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{(-b\omega^2 \cdot \sin \omega t)^2 + (-b\omega^2 \cdot \cos \omega t)^2} = b\omega^2.$$

Оскільки палець кривошипу рухається по колу, тобто за криволінійною траєкторією сталого радіуса b , то його прискорення можна визначити за формулами натурального способу задання руху матеріальної точки.

Дотичне прискорення пальця кривошипу буде дорівнювати нулю, оскільки його швидкість є сталою величиною:

$$V = \text{const},$$

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(b\omega)}{dt} = 0.$$

Нормальне прискорення:

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(b\omega)^2}{b} = b\omega^2.$$

Оскільки дотичного прискорення немає, то повне прискорення дорівнює нормальному:

$$W = W_n = b\omega^2.$$

Таким чином, величина прискорення пальця кривошипу, визначена різними способами, збігається.

Примітка. У випадку, коли точка рухається за криволінійною траєкторією зі змінним радіусом кривизни ρ , то її нормальне прискорення знаходимо за формулою

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2},$$

де повне прискорення W визначається за координатним способом. Тоді радіус кривизни траєкторії знаходимо як

$$\rho = \frac{V^2}{W_n}.$$

**Завдання К2. Визначення швидкостей та прискорень
точок твердого тіла при поступальному
та обертальному рухах**

Вантаж масою m піднімається зі стану спокою або спускається на тросі за допомогою механічного пристрою згідно закону $x = f(t)$, де x – відстань вантажу від початкового положення, вимірюється у метрах, t – час, вимірюється у секундах.

У момент часу, коли вантаж пройде шлях S , визначити його швидкість і прискорення, а також кутову швидкість і кутове прискорення валів барабана і привода, швидкість і прискорення точки M та натяг троса.

Схеми механізмів показані на рис. 16, а необхідні для розрахунку дані наведені в табл. 2.

Вказівки. Задача К2 – на дослідження обертального руху навколо нерухомої осі. При розв’язуванні задачі слід враховувати, що коли два колеса знаходяться в зачепленні, то швидкості контактних точок рівні між собою. У випадку пасової передачі всі точки, що лежать на ободах шківів, мають чисельно рівні швидкості, якщо пас не ковзає по ободу. Блок не змінює величину сили, а тільки її напрямок.

Таблиця 2.

Дано	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x = f(t)$	$0,1t^2$	$0,2t^2$	$0,3t^2$	$0,4t^2$	$0,5t^2$	$0,4t^2$	$0,3t^2$	$0,2t^2$	$0,1t^2$	$0,6t^2$
$S, м$	2,0	2,4	2,7	3,0	3,2	3,6	3,9	4,0	4,9	4,2
$r_1, м$	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,48	0,36
$r_2, м$	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,20	0,18	0,16	0,20	0,12
$r_3, м$	0,08	0,09	0,10	0,12	0,14	0,12	0,10	0,08	0,07	0,06
$m, кг$	200	250	300	350	400	350	300	250	200	180

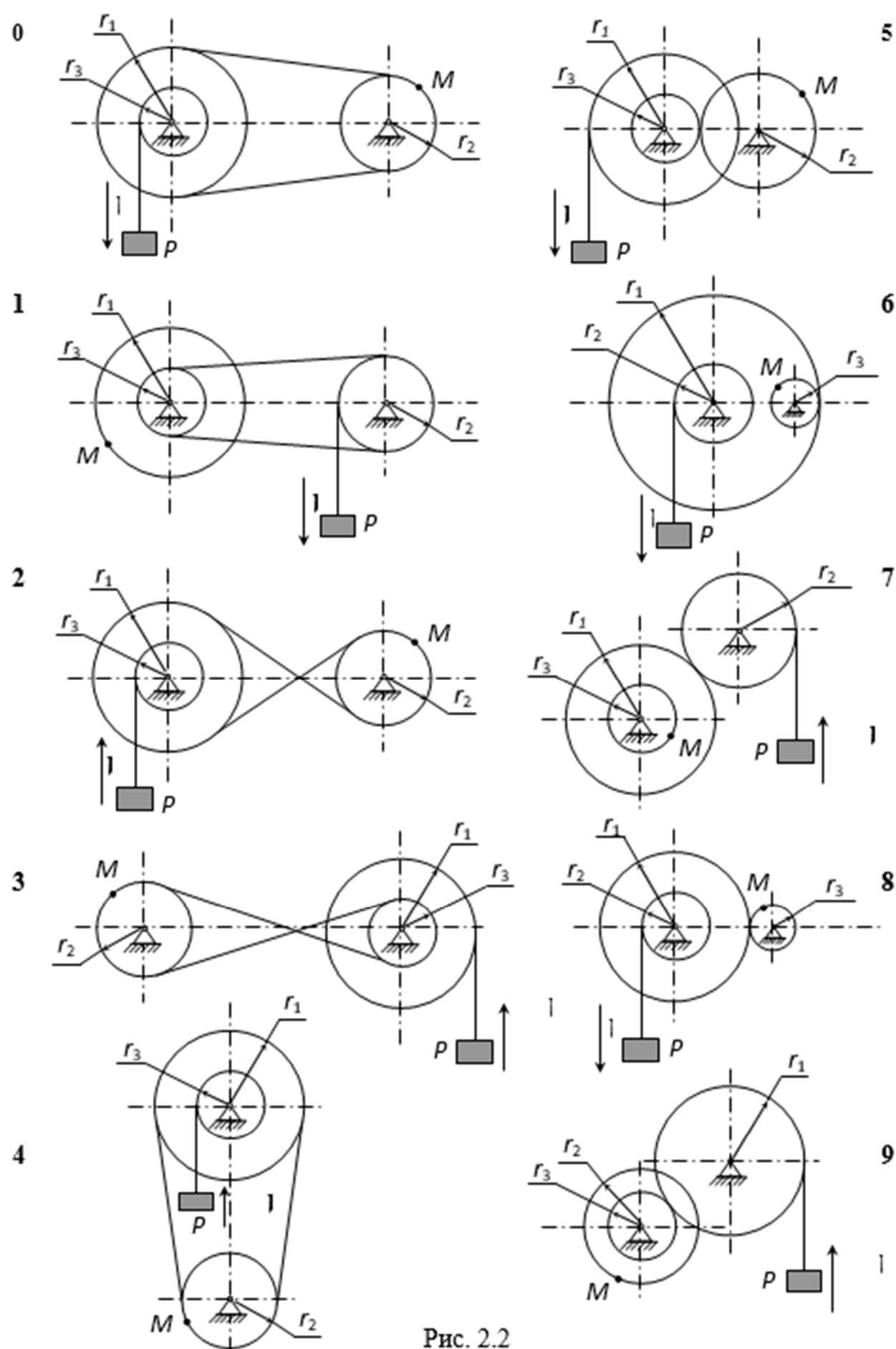


Рис. 2.2

Приклад виконання завдання К2

Дано:

$$\begin{aligned} x &= 0,7 t^2 \text{ (м)}, \\ S &= 4,9 \text{ м}, \\ r_1 &= 0,35 \text{ м}, \\ r_2 &= 0,24 \text{ м}, \\ r_3 &= 0,08 \text{ м}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{P1} - ? & \quad W_{P1} - ? \\ \omega_{B1} - ? & \quad \varepsilon_{B1} - ? \\ \omega_{PP1} - ? & \quad \varepsilon_{PP1} - ? \\ V_{M1} - ? & \quad W_{M1} - ? \end{aligned}$$

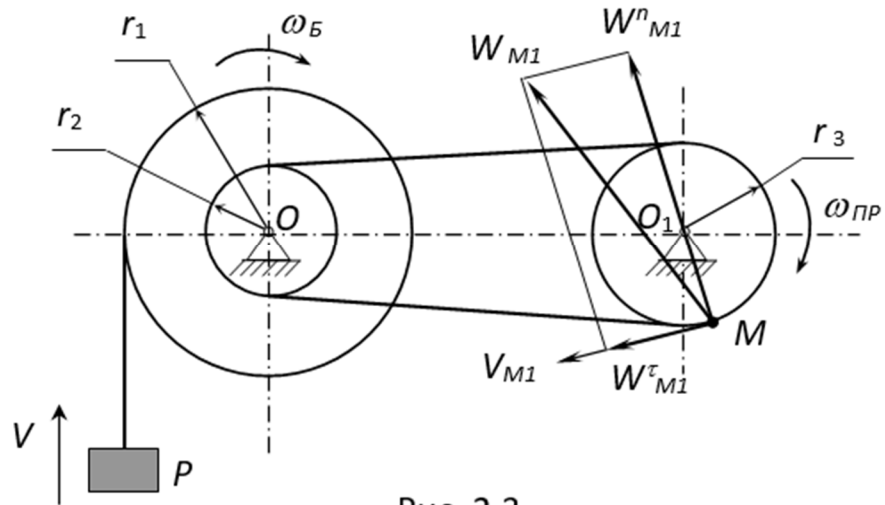


Рис. 2.3

Розв'язування. Визначаємо час, коли вантаж пройде шлях $S = 4,9 \text{ м}$:

$$\begin{aligned} S &= 0,7 t_1^2, & 4,9 &= 0,7 t_1^2, \\ t_1^2 &= 7, & t_1 &= \sqrt{7} = 2,65 \text{ с}. \end{aligned}$$

Швидкість вантажу обчислюється за виразом:

$$V_P = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (0,7 t^2) = 1,4 t.$$

Швидкість вантажу в момент часу $t_1 = 2,65 \text{ с}$ буде:

$$V_{P1} = 1,4 t_1 = 1,4 \cdot 2,65 = 3,71 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Прискорення вантажу:

$$W_P = \frac{dV_P}{dt} = \frac{d}{dt} (1,4 t) = 1,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Прискорення вантажу не залежить від часу, тому $W_{P1} = 1,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Вал барабана буде обертатись при підйомі вантажу за годинниковою стрілкою. Так само (згідно зі схемою) буде обертатись і вал приводу з колесом радіуса r_3 .

Всі наступні величини знайдемо для моменту часу $t_1 = 2,65 \text{ с}$.

Кутова швидкість вала барабана радіуса r_1 дорівнює:

$$\omega_{B1} = \frac{V_{P1}}{r_1} = \frac{3,71}{0,35} = 10,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Така сама буде і кутова швидкість колеса радіусом r_2 .

Кутове прискорення вала барабана:

$$\varepsilon_{B1} = \frac{W_{P1}}{r_1} = \frac{1,4}{0,35} = 4 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} - \text{від часу не залежить.}$$

Передачне число передачі згідно схеми (будь то ланцюгова, або пасова передача):

$$i = \frac{r_2}{r_3} = \frac{0,24}{0,08} = 3.$$

Це означає, що колесо радіусом r_3 (привід) буде обертатися в три рази швидше, ніж колесо радіуса r_2 .

Кутова швидкість вала приводу радіуса r_3 :

$$\omega_{PP1} = \omega_{B1} \cdot i = 10,6 \cdot 3 = 31,8 \frac{rad}{c}.$$

Кутове прискорення вала приводу:

$$\varepsilon_{PP1} = \varepsilon_{B1} \cdot i = 4 \cdot 3 = 12 \frac{rad}{c^2}.$$

Швидкість точки M в момент часу $t_1 = 2,65c$ буде дорівнювати:

$$V_{M1} = \omega_{PP1} \cdot r_3 = 31,8 \cdot 0,08 = 2,54 \frac{m}{c}.$$

Визначимо прискорення точки M . Воно складається з тангенційного і нормального прискорень:

$$W_{M1}^t = \varepsilon_{PP1} \cdot r_3 = 12 \cdot 0,08 = 0,96 \frac{m}{c^2}, \text{ спрямовано по дотичній, в бік швидкості};$$

$$W_{M1}^n = \omega_{PP1}^2 \cdot r_3 = 31,8^2 \cdot 0,08 = 80,9 \frac{m}{c^2}, \text{ спрямовано по радіусу до центра.}$$

Повне прискорення точки M буде дорівнювати:

$$W_{M1} = \sqrt{(W_{M1}^t)^2 + (W_{M1}^n)^2} = \sqrt{0,96^2 + 80,9^2} = 80,91 \frac{m}{c^2}.$$

Завдання К3. *Визначення швидкостей та прискорень точок твердого тіла при плоско-паралельному русі*

Плоский механізм складається з двох стержнів та повзуна B , з'єднаних між собою та з нерухомою опорою O шарнірами (рис. 3.0 – 3.9). На схемах вказано напрямки ω_1, ε_1 – кутової швидкості та кутового прискорення кривошипа OA при заданому положенні механізму. Необхідні для розрахунку дані наведені в табл. 3.

Знайти для заданого положення механізму швидкості й прискорення точок B і C .

Вказівки. Завдання К3 – на дослідження плоско-паралельного руху твердого тіла. При її розв'язуванні для визначення швидкостей точок механізму та кутових швидкостей його ланок необхідно користуватись теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла або поняттям про миттєвий центр швидкостей, застосовуючи їх до кожної ланки механізму окремо. Для знаходження прискорень точок механізму застосовують теорему про прискорення точок плоскої фігури. Отриманий векторний вираз розв'язують графічно, будуючи або векторний багатокутник прискорень (у масштабі), або за методом проєкцій, проєктуючи його на координатні вісі.

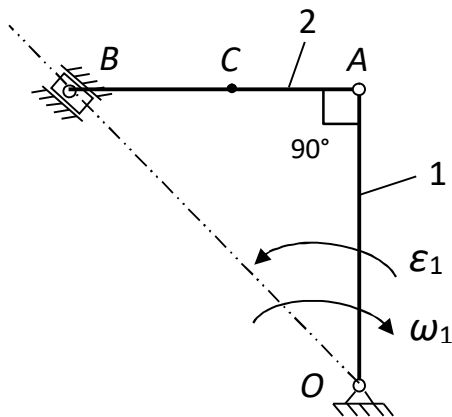


Рис. 3.0

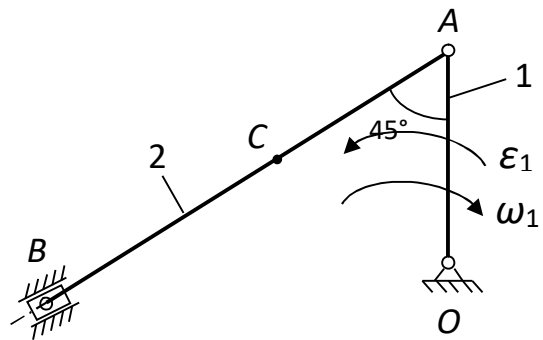


Рис.3.1

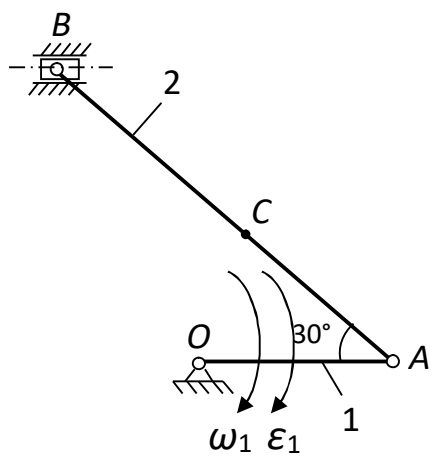


Рис. 3.2

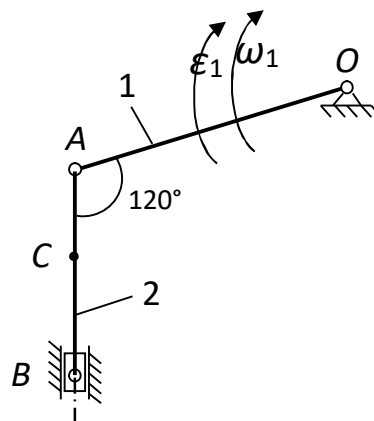


Рис. 3.3

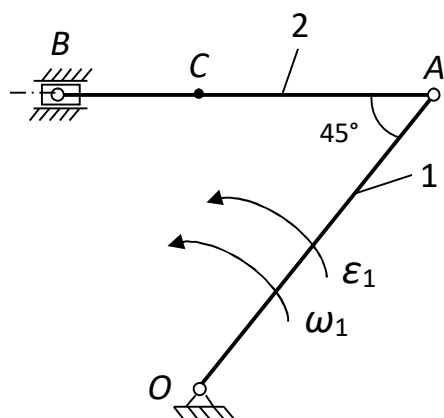


Рис. 3.4

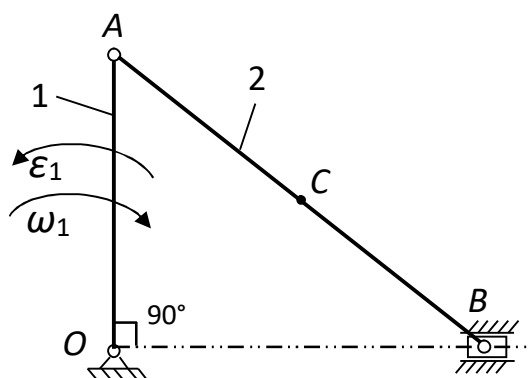


Рис. 3.5

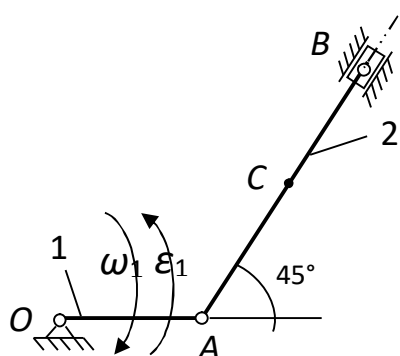


Рис. 3.6

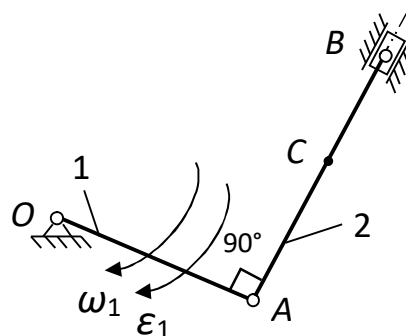


Рис. 3.7

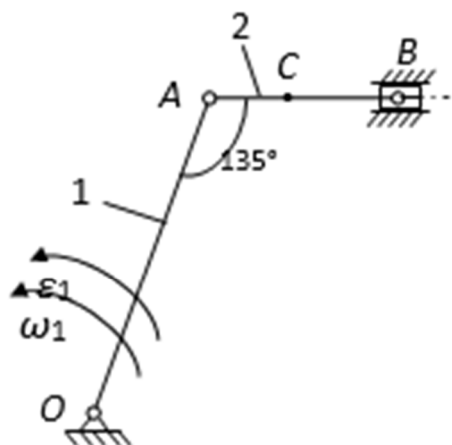


Рис. 3.8

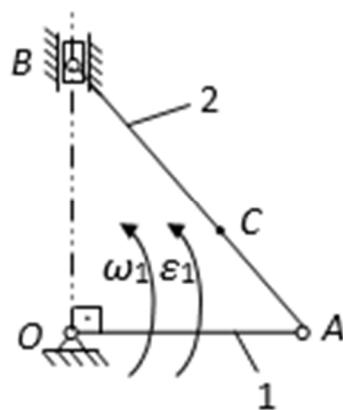


Рис. 3.9

Таблица 3

№	Довжини, м			ω_1, c^{-1}	ε_1, c^{-2}
	$l_1 = l_{OA}$	$l_2 = l_{AB}$	l_{AC}		
0	0.35	0.75	0.60	5	10
1	0.40	0.80	0.40	4	8
2	0.55	0.80	0.50	1	4
3	0.60	0.80	0.30	3	2
4	0.30	0.50	0.25	5	3
5	0.30	0.60	0.30	5	10
6	0.70	0.80	0.40	4	4
7	0.40	0.50	0.25	6	9
8	0.50	0.60	0.40	5	8
9	0.60	0.70	0.30	2	4

Приклад виконання завдання КЗ

Дано: початкові дані для схеми механізму в заданому положенні (рис. 3.10) наведені в табл. 3.1.

Знайти для заданого положення механізму швидкості й прискорення точок **B** і **C**.

Таблиця 3.1

Розміри, м			$\omega_{OA},$ c^{-1}	$\varepsilon_{OA},$ c^{-2}
OA	AB	AC		
0,1	0,6	0,2	1,5	2

Розв'язування

1. Визначаємо швидкості точок механізму (рис. 3.11).

Обчислюємо швидкість пальця **A** кривошипа **OA** при заданому положенні механізму:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1,5 \cdot 0,1 = 0,15 \frac{м}{с}.$$

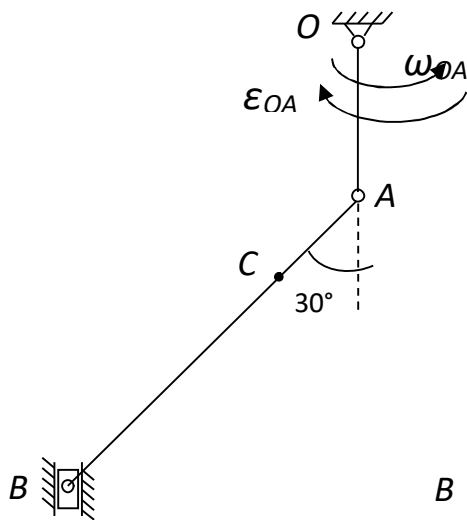


Рис. 3.10

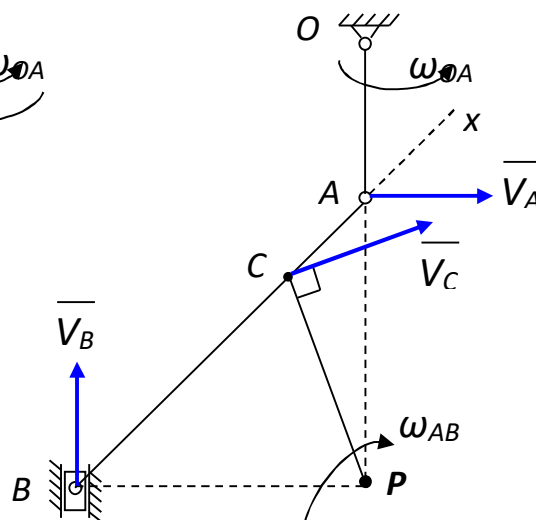


Рис. 3.11

Кривошип **OA** виконує обертальний рух навколо нерухомого центру **O**, траєкторією руху точки **A** є коло. Її швидкість $\overline{V}_A$ направлена по дотичній до цього кола, тобто перпендикулярна до ланки **OA**. Швидкість $\overline{V}_B$ повзуна **B**, який рухається поступально вздовж вертикальних напрямляючих, направлена по вертикалі. Шатун **AB** виконує плоско-паралельний рух, його миттєвий центр швидкостей **P** знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених з точок **A** і **B** до їх швидкостей. Кутова швидкість ланки **AB**:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{0,15}{0,6 \cdot \cos 30^\circ} = 0,29 \text{ c}^{-1}.$$

Швидкості точок B і C :

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP; V_C = \omega_{AB} \cdot CP,$$

де

$$BP = AB \cdot \sin 30^\circ = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 \text{ м};$$

$$CP = \sqrt{BC^2 + BP^2 - 2 \cdot BC \cdot BP \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{0,4^2 + 0,3^2 - 2 \cdot 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,5} = 0,361 \text{ м}.$$

Отже

$$V_B = 0,29 \cdot 0,3 = 0,087 \frac{\text{м}}{\text{с}}; V_C = 0,29 \cdot 0,361 = 0,105 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Вектор $\overline{V_C}$ направлений перпендикулярно до відрізка CP відповідно напрямку обертання ланки AB .

Для перевірки визначимо швидкість повзуна V_B іншим методом. Вісь x спрямуємо вздовж шатуна AB в напрямку від B до A (рис. 3.11). За теоремою про рівність проєкцій швидкостей точок на вісь, яка проведена через ці точки, маємо

$$V_A \cdot \cos 60^\circ = V_B \cdot \cos 30^\circ,$$

звідки
$$V_B = \frac{V_A \cdot \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{0,15 \cdot 0,5}{0,866} = 0,087 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

що співпадає з раніше знайденим значенням.

2. Визначаємо прискорення точок механізму (рис. 3.12).

Прискорення точки A складається з дотичного (обертального) і нормального (доцентрового) прискорень:

$$\overline{W_A} = \overline{W_A^t} + \overline{W_A^n};$$

де величини (модулі) цих прискорень визначаються як:

$$W_A^t = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,1 = 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$W_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1,5^2 \cdot 0,1 = 0,225 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Вектор $\overline{W_A^n}$ направлений до центра обертання кривошипа від A до O . Вектор $\overline{W_A^t}$ перпендикулярний до вектора $\overline{W_A^n}$ і направлений відповідно до напрямку кутового прискорення ε_{OA} (обертання кривошипа є сповільненням, бо ω_{OA} , ε_{OA} – протилежно направлені).

Згідно з теоремою про прискорення точок плоскої фігури, для шатуна AB можемо записати:

$$\overline{W_B} = \overline{W_A} + \overline{W_{BA}^\tau} + \overline{W_{BA}^n}$$

або
(*)

$$\overline{W_B} = \overline{W_A^\tau} + \overline{W_A^n} + \overline{W_{BA}^\tau} + \overline{W_{BA}^n}.$$

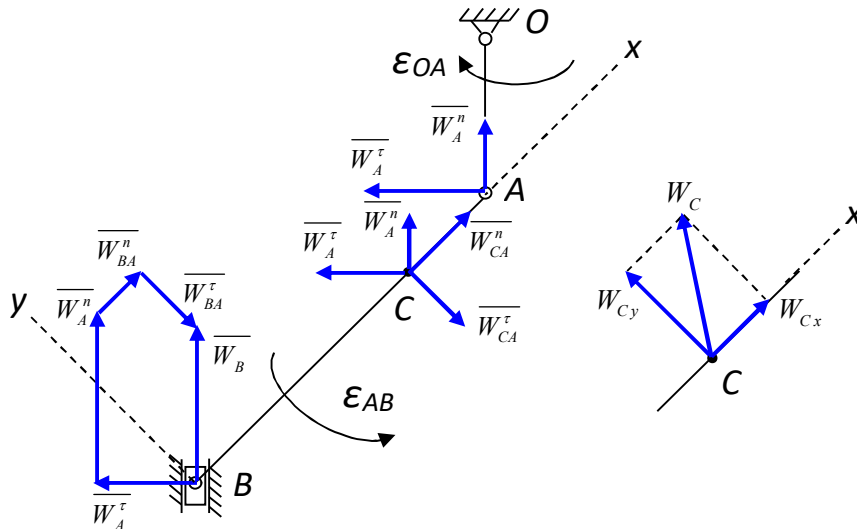


Рис. 3.12

Нормальне прискорення точки B в обертальному русі шатуна AB навколо полюса A :

$$W_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0,29^2 \cdot 0,6 = 0,05 \frac{m}{c^2}.$$

Вектор $\overline{W_{BA}^n}$ направлений від B до A , а прискорення $\overline{W_{BA}^\tau}$ перпендикулярно до нього. Будуємо багатокутник прискорень. Скористаємось тим, що пряма, по якій направлено прискорення $\overline{W_B}$, відома. Повзун B рухається по вертикальній прямій, уздовж якої направлено і прискорення точки B . Згідно з (*) відкладаємо з точки B послідовно (ланцюгом) у певному масштабі вектори прискорення полюса A $\overline{W_A^\tau}$ і $\overline{W_A^n}$, і нормальне прискорення $\overline{W_{BA}^n}$ (паралельно ланці AB). Через кінець вектора $\overline{W_{BA}^n}$ проводимо пряму, паралельну дотичному прискоренню $\overline{W_{BA}^\tau}$ (тобто перпендикулярну до AB), до перетину її з прямою, по якій направлено прискорення $\overline{W_B}$. Прискорення $\overline{W_B}$ визначається як замикаючий вектор багатокутника прискорень. Таким чином з'ясовується дійсний напрямок векторів $\overline{W_B}$ та $\overline{W_{BA}^\tau}$, а їх модулі визначаються графічно – замірами на кресленні.

За аналітичним розрахунком, спроектувавши векторну рівність (*) на осі x і y , отримуємо:

$$\begin{cases} W_B \cdot \cos 30^\circ = -W_A^\tau \cdot \cos 60^\circ + W_A^n \cdot \cos 30^\circ + W_{BA}^n; \\ W_B \cdot \cos 60^\circ = W_A^\tau \cdot \cos 30^\circ + W_A^n \cdot \cos 60^\circ - W_{BA}^\tau. \end{cases}$$

З першого рівняння системи:

$$W_B = \frac{-W_A^\tau \cdot \cos 60^\circ + W_A^n \cdot \cos 30^\circ + W_{BA}^n}{\cos 30^\circ} = \frac{-0,2 \cdot 0,5 + 0,225 \cdot 0,866 + 0,05}{0,866} = 0,167 \frac{M}{c^2}.$$

З другого рівняння системи:

$$\begin{aligned} W_{BA}^\tau &= W_A^\tau \cdot \cos 30^\circ + W_A^n \cdot \cos 60^\circ - W_B \cdot \cos 60^\circ = \\ &= 0,2 \cdot 0,866 + 0,225 \cdot 0,5 - 0,167 \cdot 0,5 = 0,202 \frac{M}{c^2}. \end{aligned}$$

Так як $W_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$, то кутове прискорення шатуна AB

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^\tau}{AB} = \frac{0,202}{0,6} = 0,34 c^{-2}.$$

Напрямок прискорення $\overline{W_{BA}^\tau}$ щодо полюса A визначає напрямку кутового прискорення ε_{AB} . В даному випадку воно протилежне кутовій швидкості ω_{AB} (шатун рухається сповільнено).

Аналогічно визначаємо прискорення точки C :

$$\overline{W_C} = \overline{W_A^\tau} + \overline{W_A^n} + \overline{W_{CA}^\tau} + \overline{W_{CA}^n}. \quad (**)$$

Дотичне і нормальне прискорення точки C в обертальному русі шатуна AB навколо полюса A :

$$\begin{aligned} W_{CA}^\tau &= \varepsilon_{AB} \cdot AC = 0,34 \cdot 0,2 = 0,068 \frac{M}{c^2}; \\ W_{CA}^n &= \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0,29^2 \cdot 0,2 = 0,017 \frac{M}{c^2}. \end{aligned}$$

Вектор $\overline{W_{CA}^\tau}$ перпендикулярний до вектора $\overline{W_{CA}^n}$ і направлений відповідно до кутового прискорення ε_{AB} .

Прискорення точки C знаходимо за методом проєкцій, проєктуючи векторну рівність (**) на осі x і y :

$$\begin{cases} W_{Cx} = -W_A^\tau \cdot \cos 60^\circ + W_A^n \cdot \cos 30^\circ + W_{CA}^n; \\ W_{Cy} = W_A^\tau \cdot \cos 30^\circ + W_A^n \cdot \cos 60^\circ - W_{CA}^\tau. \end{cases}$$

Обчислюємо проєкції:

$$W_{Cx} = -0,2 \cdot 0,5 + 0,225 \cdot 0,866 + 0,017 = 0,112 \frac{M}{c^2};$$

$$W_{Cy} = 0,2 \cdot 0,866 + 0,225 \cdot 0,5 - 0,068 = 0,218 \frac{M}{c^2}.$$

Модуль прискорення:

$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = \sqrt{0,112^2 + 0,218^2} = 0,245 \frac{M}{c^2}.$$

Завдання К4. *Визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки у випадку поступального переносного руху*

По заданих рівняннях відносного руху точки M і переносного руху тіла визначити для моменту часу $t = t_1$ абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M .

Схеми механізмів показані на рис. 4.0-4.9, а необхідні (залежно від схеми) для розрахунку дані приведені в табл. 4.

Вказівки. Завдання К4 – на дослідження складного руху точки для випадку, коли її переносний рух є поступальним. Вважати рух точки по пластинці відносним, а рух самої пластинки – переносним. При розв’язуванні задачі слід користуватись теоремами про додавання швидкостей та додавання прискорень. На початку розрахунку необхідно зобразити точку M на пластинці в тому положенні, для якого необхідно визначити її абсолютну швидкість та абсолютне прискорення.

Таблиця 4

N_0	$x_e = f_1(t),$ см	$\varphi = f_2(t),$ рад	$OM = S_r = f_3(t),$ см	$R,$ см	$t_1,$ с
0	$t^3 + 4t$	$0,17\pi t^2$	$4\pi t^2$	50	2
1	$60t^2$	$0,1\pi t^2$	$2t^2 + 3t$	20	2
2	$2t + 0,2t^2$	$2\pi t^3$	$20\pi t^2$	30	1
3	$7t + 4t^2$	$0,3\pi t^3$	$\pi(2t^2 + 3t)$	30	2
4	$20t + 3t^2$	$3\pi t^2$	$9t^2 + 5t$	25	3
5	$250t^2$	πt^3	$16t^2 - 2t + 2$	50	1
6	$-8t + 3t^2$	$1 + 0,01\pi t^2$	$14 \sin(\pi t/6)$	10	1
7	$4(t + 4t^2)$	$0,5 + 0,01\pi t^2$	$2t^2$	40	2
8	$10t^2 + 0,6t^3$	$0,5 + 0,1\pi t^2$	$10\pi \cos(\pi t/6)$	30	2
9	$20t^2 + 15t$	$0,1 + 0,1\pi t^2$	$6\pi t^2$	40	2

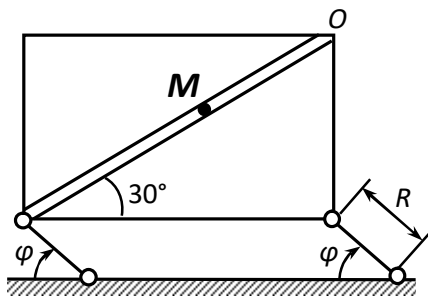


Рис. 4.0

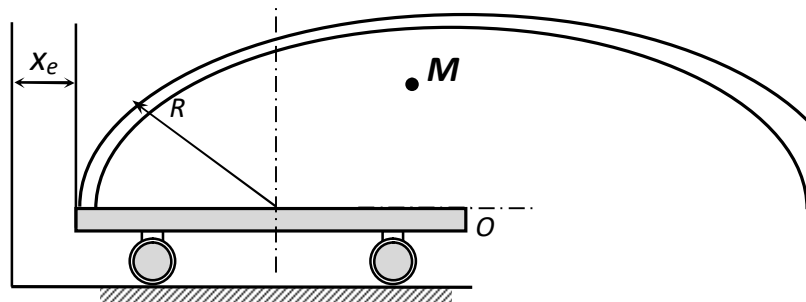


Рис. 4.1

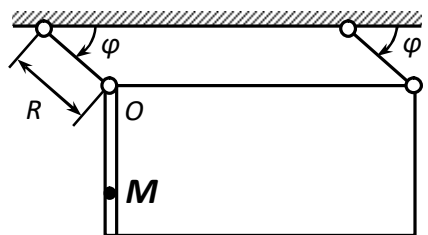


Рис. 4.2

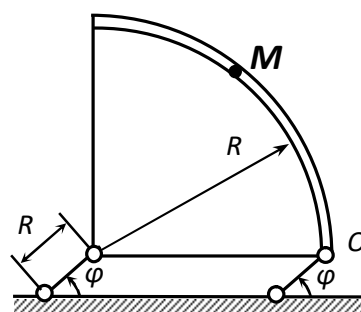


Рис. 4.3

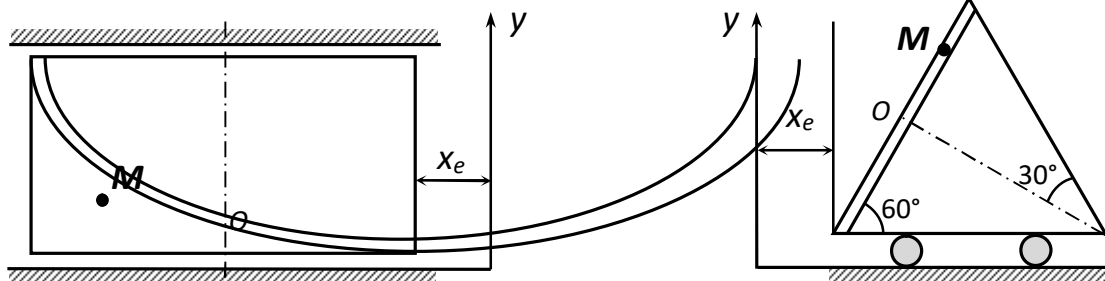


Рис. 4.4

Рис. 4.5

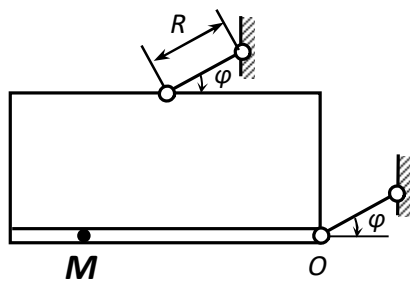


Рис. 4.6

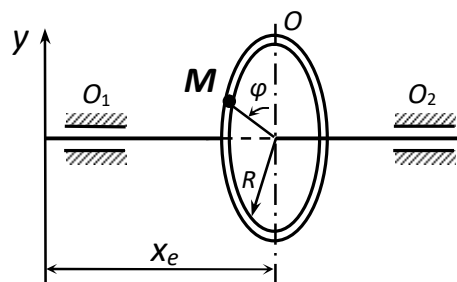


Рис. 4.7

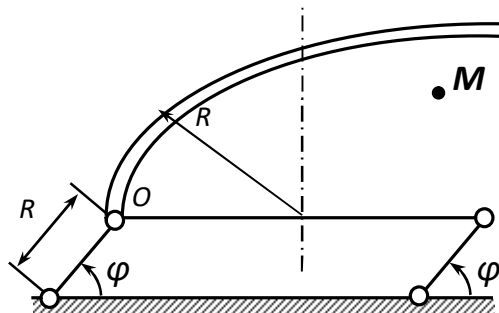


Рис. 4.8

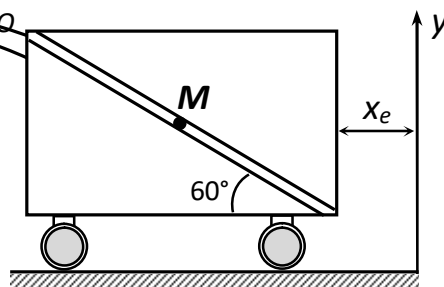


Рис. 4.9

Приклад виконання завдання К4

На платформі, що рухається по горизонтальній ділянці шляху з прискоренням $W_e = 0,5 \frac{M}{c^2}$, встановлений електромотор, ротор якого обертається згідно з рівнянням $\varphi = 2t^2$ (φ – в радіанах, t – в секундах). Радіус ротора $r = 30$ см. Для моменту часу $t_1 = 2$ с визначити швидкість та прискорення точки M , що лежить на ободі ротора, якщо в цей момент точка M знаходиться в положенні, вказаному на рис. 4.10 (кут $\alpha = 30^\circ$).

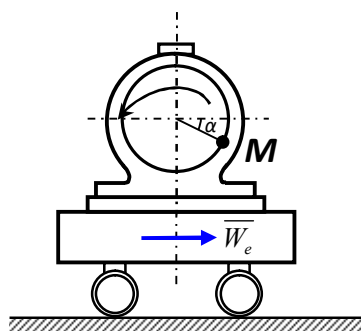


Рис. 4.10

Розв'язування

Точка M приймає участь в двох рухах одночасно: відносному – обертанні навколо осі ротора і переносному – поступальному русі разом з платформою.

Так як переносний рух точки – поступальний, то абсолютне прискорення точки M дорівнює геометричній сумі відносного та переносного прискорень:

$$\overline{W} = \overline{W}_r + \overline{W}_e.$$

Знаходимо кутову швидкість та кутове прискорення відносного обертання ротора:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2) = 4tc^{-1}; \\ \varepsilon &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(4t) = 4c^{-2} = \text{const.}\end{aligned}$$

В момент часу $t_1 = 2$ с:

$$\omega = 4t = 4 \cdot 2 = 8c^{-1}; \varepsilon = 4c^{-2}.$$

Відносне прискорення точки M складається з дотичного та нормального прискорень:

$$\overline{W_r} = \overline{W_r^t} + \overline{W_r^n},$$

де
$$W_r^t = \varepsilon_r \cdot R = 4 \cdot 0,3 = 1,2 \frac{M}{c^2};$$

$$W_r^n = \omega_r^2 \cdot R = 8^2 \cdot 0,3 = 19,2 \frac{M}{c^2}.$$

Так як кутове прискорення ε додатне, то вектор дотичного прискорення $\overline{W_r^t}$ в точці M буде направлений по дотичній до кола – обода ротора в бік обертання. Нормальне прискорення $\overline{W_r^n}$ направлено з точки M до центра ротора.

Таким чином, абсолютне прискорення точки M визначиться як:

$$\overline{W} = \overline{W_r^t} + \overline{W_r^n} + \overline{W_e}.$$

Покажемо окремо схематично точку M і вектори її прискорень (рис. 4.11). За методом проекцій, спроектуємо векторне рівняння на дві взаємно перпендикулярні осі x і y :

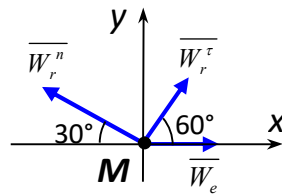


Рис. 4.11

$$W_x = W_r^t \cdot \cos 60^\circ - W_r^n \cdot \cos 30^\circ + W_e = 1,2 \cdot 0,5 - 19,2 \cdot 0,866 + 0,5 = -15,5 \frac{M}{c^2};$$

$$W_y = W_r^t \cdot \sin 60^\circ + W_r^n \cdot \sin 30^\circ = 1,2 \cdot 0,866 + 19,2 \cdot 0,5 = 10,6 \frac{M}{c^2}.$$

Модуль абсолютного прискорення точки M дорівнює:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{(-15,5)^2 + (10,6)^2} = 11,3 \frac{M}{c^2}.$$

Завдання К5. Визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки у випадку обертального переносного руху

По заданих рівняннях відносного руху точки M та переносного руху тіла D визначити для моменту часу $t = t_1$ абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M .

Схеми механізмів показані на рис. 5.0-5.9, а необхідні (залежно від схеми) для розрахунку дані наведені в табл. 5.1.

Вказівки. Завдання К5 – на складний рух точки для випадку, коли її переносний рух обертальний. Рух точки по поверхні тіла слід вважати відносним, а рух самого тіла – переносним. При розв’язуванні задачі необхідно скористатися теоремою Коріоліса. На початку розв’язку необхідно знайти положення точки M на траєкторії відносного руху в заданий момент часу.

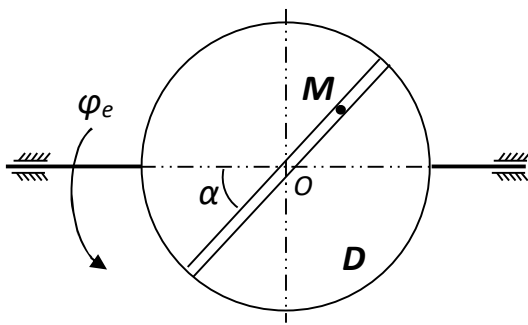


Рис. 5.0

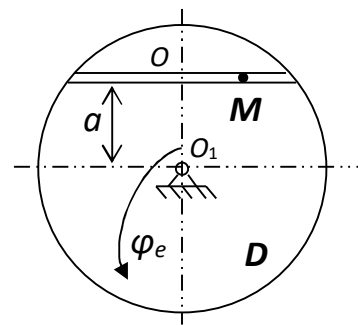


Рис. 5.1

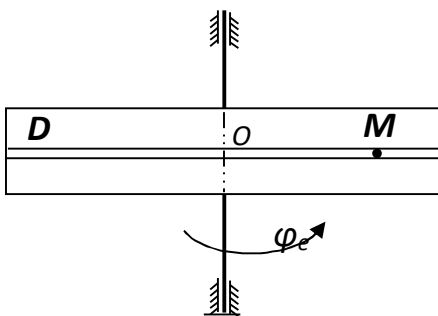


Рис. 5.2

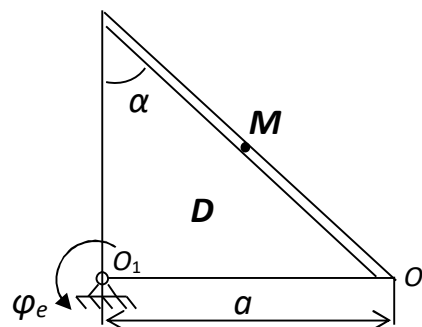


Рис. 5.3

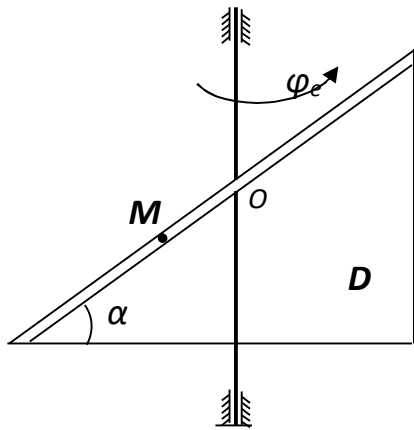


Рис. 5.4

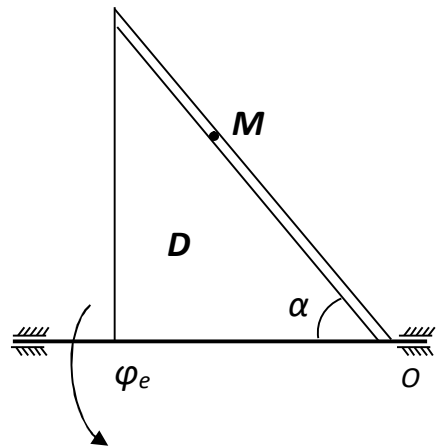


Рис. 5.5

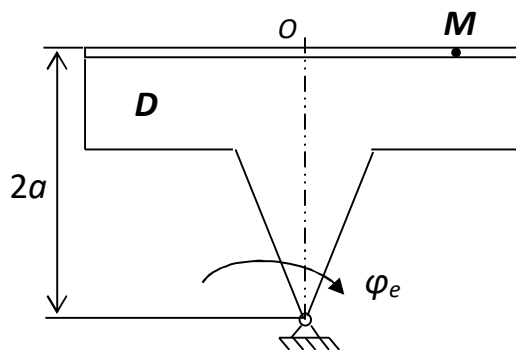


Рис. 5.6

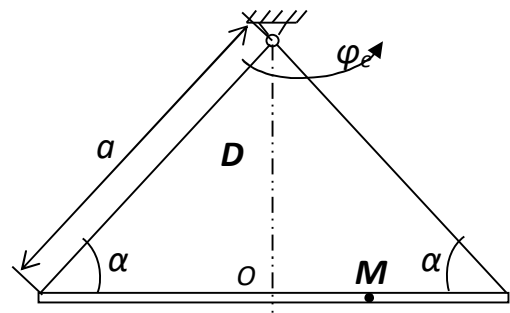


Рис. 5.7

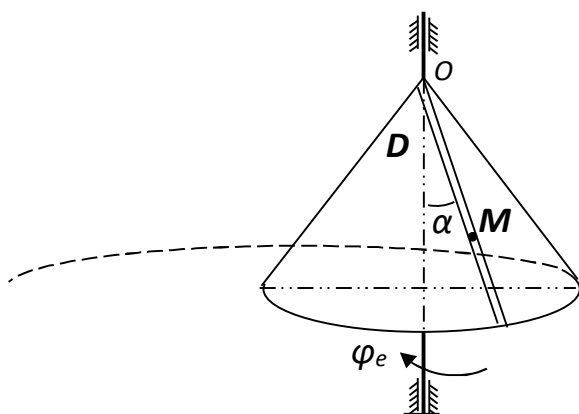


Рис. 5.8

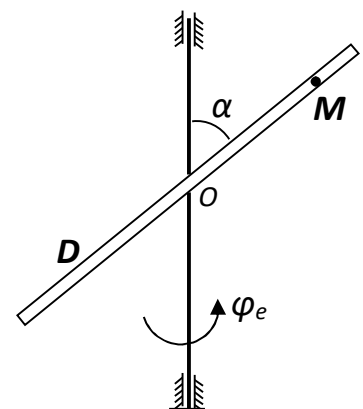


Рис. 5.9

Таблиця 5.1

№	Рівняння обертального руху тіла D $\varphi_e = f_1(t)$, рад	a , м	Рівняння відносного руху точки M $OM = S_r = f_2(t)$, м	t_1 , с	α , град
0	$0,6 t^2$	0,3	$0,5 a \cdot \sin(\pi \cdot t / 6)$	2	60
1	$4 t - 2 t^2$	0,6	$0,4 a \cdot \sin(\pi \cdot t / 9)$	3	30
2	$0,75 t + 1,5 t^2$	0,5	$0,6 a \cdot \cos(\pi \cdot t / 4)$	1	45
3	$t^3 - 0,5 t$	0,6	$0,4 a \cdot \sin(\pi \cdot t / 6)$	2	60
4	$3 t - 0,5 t^2$	0,3	$0,5 a \cdot \sin(\pi \cdot t / 9)$	3	30
5	$t^3 + 1,5 t^2$	0,5	$0,6 a \cdot \cos(\pi \cdot t / 3)$	1	45
6	$2 t - t^2$	0,6	$0,4 a \cdot \cos(\pi \cdot t / 6)$	1	30
7	$t^3 + 0,5 t$	0,6	$0,5 a \cdot \sin(\pi \cdot t / 6)$	2	60
8	$t + t^2$	0,5	$0,5 a \cdot \cos(\pi \cdot t / 4)$	1	45
9	$3 t - t^2$	0,4	$0,4 a \cdot \sin(\pi \cdot t / 4)$	2	30

Приклад виконання завдання К5

Дано: початкові дані для схеми механізму в заданому положенні (рис. 5.10) наведені в табл. 5.2.

Знайти абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки M .

Таблиця 5.2

Рівняння обертального руху тіла D $\varphi_e = f_1(t)$, рад	Рівняння відносного руху точки M $OM = S_r = f_2(t)$, м	t_1 , с
$0,9 \cdot t^2 - 9 \cdot t^3$	$0,16 - 0,08 \cdot \cos(3 \cdot \pi \cdot t)$	2 / 9

Розв'язування

Вважатимемо, що в розрахунковий момент часу площа креслення (рис. 5.10) співпадає з площиною трикутника D . Положення точки M на тілі D визначається відстанню $S_r = OM$.

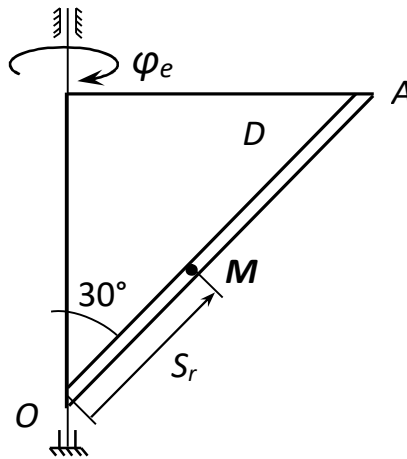


Рис. 5.10

В момент часу $t_1 = \frac{2}{9}c$:

$$S_r(t_1) = 0,16 - 0,08 \cdot \cos(3\pi \cdot 2/9) = 0,16 + 0,4 = 0,2м.$$

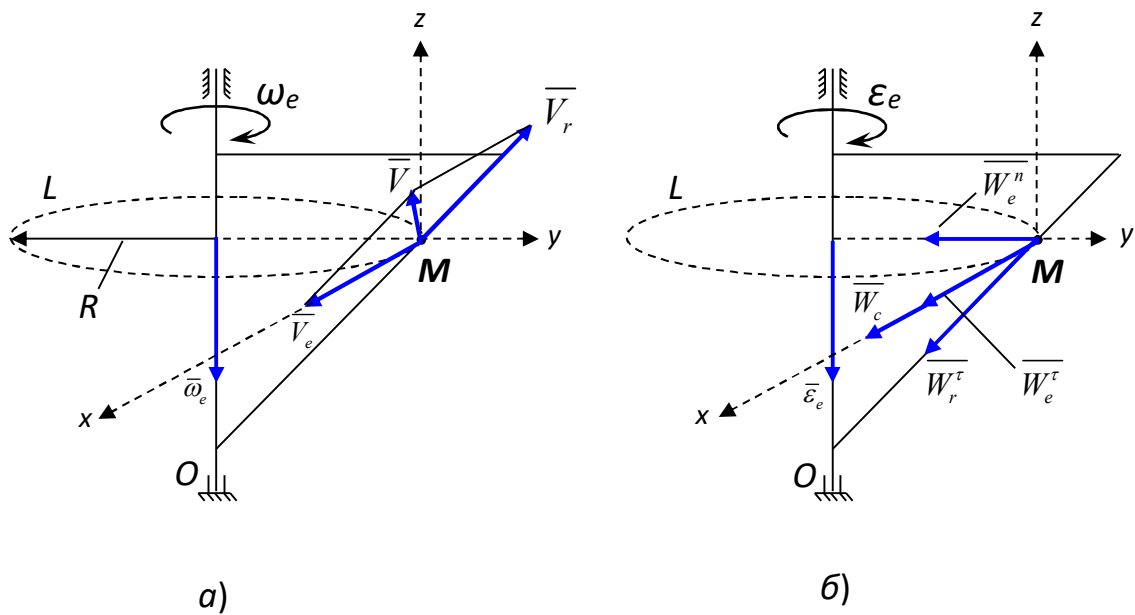


Рис. 5.11

Абсолютну швидкість точки M знайдемо як геометричну суму відносної і переносної швидкостей

$$\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_e.$$

Модуль відносної швидкості

$$V_r = \frac{ds_r}{dt} = 0,24\pi \cdot \sin(3\pi t).$$

При $t_1 = \frac{2}{9}c$:

$$V_r(t_1) = 0,24\pi \cdot 0,866 = 0,652 \frac{M}{c}.$$

Додатний знак величини V_r вказує на те, що вектор $\overline{V_r}$ направлений у бік зростання S_r .

Модуль переносної швидкості

$$V_e = \omega_e \cdot R,$$

де R – радіус кола L , що описується тією точкою тіла, з якою в даний момент співпадає точка M ; ω_e – модуль кутової швидкості тіла.

$$R = S_r \cdot \sin 30^\circ = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1m;$$

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 1,8t - 27t^2.$$

При $t_1 = \frac{2}{9} c$:

$$\omega_e(t_1) = 1,8 \cdot \frac{2}{9} - 27 \cdot \frac{4}{81} = -0,93c^{-1}.$$

Від'ємний знак величини ω_e вказує на те, що обертання трикутника відбувається навколо осі Oz у бік, протилежний напрямку відліку кута φ . Тому вектор $\overline{\omega_e}$ направлений по осі Oz вниз (рис. 5.11, а).

Тут і надалі знак "-" буде лише показником напрямку векторної величини. У розрахункові формули підставляємо відповідні значення за модулем.

Таким чином, модуль переносної швидкості:

$$V_e = 0,93 \cdot 0,1 = 0,093 \frac{M}{c}.$$

Вектор $\overline{V_e}$ направлений по дотичній до кола у бік обертання тіла. Оскільки вектори $\overline{V_e}$ і $\overline{V_r}$ взаємно перпендикулярні, модуль абсолютної швидкості точки M визначимо за формулою:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{0,093^2 + 0,652^2} = 0,659 \frac{M}{c}.$$

Абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного, переносного і коріолісового прискорень:

$$\overline{W} = \overline{W_r} + \overline{W_e} + \overline{W_c}$$

або в розгорненому вигляді:

$$\overline{W} = \overline{W_r^\tau} + \overline{W_r^n} + \overline{W_e^\tau} + \overline{W_e^n} + \overline{W_c}.$$

Модуль відносного дотичного прискорення

$$W_r^\tau = \frac{d^2 S_r}{dt^2} = 0,72\pi^2 \cdot \cos(3\pi t).$$

При $t_1 = \frac{2}{9}c$:

$$W_r^\tau(t_1) = 0,72\pi^2 \cdot (-0,5) = -3,55 \frac{M}{c^2}.$$

Від'ємний знак W_r^τ показує, що вектор $\overline{W_r^\tau}$ направлений у бік від'ємних значень S_r . Знаки величин V_r і W_r^τ однакові, тобто відносний рух точки M є прискореним.

Відносне нормальне прискорення

$$W_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = 0,$$

оскільки траєкторія відносного руху – пряма, у якої радіус кривизни $\rho = \infty$.

Модуль переносного дотичного прискорення:

$$W_e^\tau = \varepsilon_e \cdot R,$$

де ε_e – модуль кутового прискорення тіла D ;

$$\varepsilon_e = \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} = 1,8 - 54t.$$

При $t_1 = \frac{2}{9}c$:

$$\varepsilon_e(t_1) = 1,8 - 54 \cdot \frac{2}{9} = -10,2c^{-2}.$$

Однакові знаки величин ε_e і ω_e вказують на те, що обертання трикутника D є прискореним; напрямки векторів $\overline{\varepsilon_e}$ і $\overline{\omega_e}$ співпадають (рис. 5.11, а, б).

Таким чином

$$W_e^\tau = 10,2 \cdot 0,1 = 1,02 \frac{M}{c^2}.$$

Вектор $\overline{W_e^\tau}$ направлений в ту ж сторону, що і $\overline{V_e^\tau}$.

Модуль переносного нормального прискорення

$$W_e^n = \omega_e^2 \cdot R = 0,93^2 \cdot 0,1 = 0,09 \frac{M}{c^2}.$$

Вектор $\overline{W_e^n}$ направлений до центру кола L .

Прискорення Коріоліса

$$\overline{W_c} = 2\overline{\omega_e} \times \overline{V_r}.$$

Модуль прискорення Коріоліса

$$W_c = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin(\overline{\omega_e}; \overline{V_r}).$$

Оскільки

$$\sin(\overline{\omega_e}; \overline{V_r}) = \sin 150^\circ = 0,5,$$

то

$$W_c = 2 \cdot 0,93 \cdot 0,652 \cdot 0,5 = 0,61 \frac{M}{c^2}.$$

Відповідно до правила векторного добутку, вектор $\overline{W_c}$ направлений перпендикулярно до площини трикутника в ту ж сторону, що і вектори $\overline{V_e}$ і $\overline{W_e^r}$ (рис. 5.11, б).

Модуль абсолютного прискорення точки M знаходимо способом проєкцій:

$$W_x = W_e^r + W_c = 1,02 + 0,61 = 1,63 \frac{M}{c^2};$$

$$W_y = -W_e^n - W_r^r \cdot \cos 60^\circ = -0,09 - 3,55 \cdot 0,5 = -1,86 \frac{M}{c^2};$$

$$W_z = -W_r^r \cdot \cos 30^\circ = -3,55 \cdot 0,866 = -3,08 \frac{M}{c^2};$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{1,63^2 + (-1,86)^2 + (-3,08)^2} = 3,95 \frac{M}{c^2}.$$

ІІІ. ДИНАМІКА

Теоретична частина

Елементи динаміки матеріальної точки і твердого тіла

Динамікою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються закони руху матеріальних тіл як результат їх силової взаємодії. При цьому приймається до уваги інертність самих тіл, тобто їх властивість швидше або повільніше змінювати швидкість свого руху під дією прикладених до них сил. У загальному випадку діючі на тіло сили змінні і залежать від часу, швидкості, радіуса-вектора рухомої точки; у ряді випадків – тільки від однієї змінної. Якщо зміною сили можна нехтувати, її вважають сталою.

Розділ "Динаміка" містить динаміку *матеріальної точки (МТ)*, під якою розуміється тіло, розмірами якого при вивченні його руху можна нехтувати; *системи матеріальних точок (СМТ)*, під якою розуміється така сукупність матеріальних тіл, в якій положення і рух кожного залежить від положення і руху решти інших тіл; *абсолютно твердого тіла (АТТ)*, яке являється незмінною системою матеріальних точок, відстань між якими не змінюється.

Найпростішим об'єктом, що вивчають в динаміці, є *матеріальна точка*, під якою розуміють тіло, що має кінцеву масу і настільки малі розміри, що розходженням в русі його частинок можна знехтувати, тобто *матеріальна точка – це точка, яка має масу*.

Будь-яке тіло може бути подане як сукупність матеріальних точок. Воно має властивість інертності, яка проявляється в збереженні руху тіла при відсутності діючих на нього сил, і в поступовій зміні цього руху з зміною часу, якщо на тіло починають діяти сили.

Мірою інертності матеріальної точки є її *маса*, яку в класичній механіці вважають величиною скалярною і сталою.

В класичній механіці Ньютона використовується "абсолютний час", єдиний в усіх системах відліку, які рухаються одна відносно другої, і "абсолютний простір", який має однакові властивості в усіх точках і усіх напрямках.

Закони Ньютона

Перший закон або *принцип інерції* був сформульований Галілеєм в 1638 році.

Ізольована від зовнішніх впливів матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямиолінійного руху.

Систему відліку, в якій виконується принцип інерції, називають *інерціальною*. Таким чином, принцип інерції стверджує, що існує така система відліку (інерціальна), в якій матеріальна точка знаходиться в стані спокою або рівномірного і прямиолінійного руху, якщо на неї не діють сили.

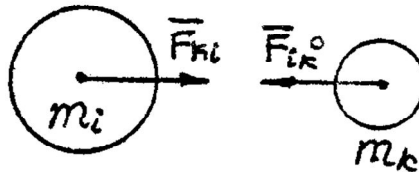
Другий закон (основний закон динаміки).

В інерціальній системі відліку добуток маси матеріальної точки на прискорення, яке вона отримує під дією сили, дорівнює цій силі:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k, \quad m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}_k, \quad m \vec{a} = \sum \vec{F}_k$$

Третій закон (закон рівності дії і протидії).

Сили взаємодії двох матеріальних точок рівні за модулем і напрямлені по одній прямій в протилежні боки. Цей закон справедливий як для задач статички, так і для задач динаміки.



Принцип незалежності дії сил.

Система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, що діє на матеріальну точку, еквівалентна одній силі, яка дорівнює геометричній сумі всіх сил системи.

Прискорення, яке надається матеріальній точці деякою силою, не залежить від того діють на цю матеріальну точку інші сили чи не діють (результати дії сил додаються). Таким чином, діюча на матеріальну точку система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ еквівалентна $\vec{R}$, де

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$$

звідки, використовуючи, отримаємо

$$m \vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$$

Дане рівняння називають **основним рівнянням динаміки матеріальної точки**.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Розглянемо радіус-вектор, що визначає положення матеріальної точки в інерціальній системі відліку, і знайдемо прискорення точки

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2},$$

тоді рівняння набирає вигляду:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$$

Вираз являє собою **диференціальне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі**. Воно еквівалентне трьом скалярним рівнянням, залежним від вибору координатних осей, на які проектується основне рівняння динаміки.

Спроектуємо це рівняння на осі нерухомої декартової системи координат, враховуючи, що проекції прискорення $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$ і отримаємо:

$$m \ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m \ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad m \ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz},$$

де x, y, z – декартові координати точки.

При використанні натуральної форми опису руху точки спроектуємо рівняння на осі натурального тригранника. З кінематики відомі вирази для проекцій прискорення точки на дотичну τ , нормаль n і бінормаль b :

$$a_{\tau} = \ddot{S}; \quad a_n = \frac{\dot{S}^2}{\rho}; \quad a_b = 0,$$

$$m\ddot{S} = \sum_{k=1}^n F_{k\tau}; \quad m \frac{\dot{S}^2}{\rho} = \sum_{k=1}^n F_{kn}; \quad 0 = \sum_{k=1}^n F_{kb},$$

враховуючи які, отримаємо:

де $S = S(t)$ – закон руху точки по траєкторії; ρ – радіус кривизни траєкторії в поточній точці.

Дві основні задачі динаміки і методи їх розв'язання

Використання диференціальних рівнянь руху МТ дозволяє вирішувати **дві основні задачі динаміки точки**.

1. Перша задача: за законом руху матеріальної точки і її масі визначити сили, які діють на цю точку. При розв'язанні першої задачі динаміки, коли закон руху точки відомий, беручи похідні, можна визначити ліві частини рівнянь руху. У цьому випадку одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих сил.

Оскільки кінематичні рівняння руху $x(t), y(t), z(t)$ відомі або можуть бути знайдені методами кінематики, то з рівнянь диференціюванням знаходять прискорення, а потім діючи на точку сили.

Наприклад: $R_x = \sum F_{kx} = m\ddot{x}(t), R_y = \sum F_{ky} = m\ddot{y}(t), R_z = \sum F_{kz} = m\ddot{z}(t),$

звідси $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$. Напрямок сили знаходиться за направляючими косинусами $\cos(R, x) = R_x / R, \quad \cos(R, y) = R_y / R, \quad \cos(R, z) = R_z / R.$

2. Друга задача: **за діючими на МТ силами і її масі визначити закон руху точки у просторі**.

При розв'язанні **другої задачі динаміки** відомі сили, що діють на матеріальну точку, тобто праві частини рівнянь, які в даному випадку є диференціальними рівняннями відносно декартових або натуральної координат точки. Інтегрування цих рівнянь дозволяє визначити закон руху точки.

Для однозначного розв'язання цієї задачі, окрім диференціальних рівнянь руху точки, *необхідно враховувати початкові умови її руху*.

Наприклад, при $t = 0$ необхідно знати положення точки в просторі та її швидкість: $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0; v_x(0) = v_{0x}, v_y(0) = v_{0y}, v_z(0) = v_{0z}.$

Використання цих початкових умов при інтегруванні диференціальних рівнянь дозволяє визначити довільні сталі інтегрування $C_1, C_2, \dots, C_6$.

Загальні теореми динаміки

При розв'язуванні задач динаміки матеріальної точки та динаміки матеріальної системи широко застосовуються загальні теореми динаміки, до яких належать: **теорема про зміну кількості руху**, **теорема про момент кількості руху** і **теорема про зміну кінетичної енергії**, які випливають з основного закону динаміки матеріальної точки.

Загальні теореми динаміки дозволяють уникнути складних операцій інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і матеріальної системи, що значно спрощує розв'язування ряду задач динаміки.

До основних мір руху належать кількість руху і кінетична енергія. До мір дії сил належать імпульс сили і робота сили.

Із диференціальних рівнянь руху випливають співвідношення між зміною протягом часу сумарних мір руху системи і мір дії сил – загальні теореми динаміки, які називають загальними інтегралами диференціальних рівнянь руху. Міри руху є основою для встановлення загальних теорем динаміки.

Кількість руху або кінетична енергія – визначає динамічні властивості тіл. Обидві міри руху мають право на існування одночасно в кожному тілі.

Перша міра, **кількість руху**, характеризує здатність механічного руху тіла переходити до другого тіла в формі самого механічного руху.

Друга міра, **кінетична енергія**, характеризує здатність механічного руху тіла перетворюватись в еквівалентну кількість потенціальної, теплової і інших видів енергії.

Теорема про зміну кількості руху механічної системи

Кількість руху матеріальної точки – це векторна міра механічного руху, що дорівнює добутку маси точки на її швидкість: $m\vec{V}$.

Одиниця виміру кількості руху в системі СІ – 1 кг·м/с. Кількість руху механічної системи дорівнює сумі кількостей руху всіх матеріальних точок, що утворюють систему:

$$\vec{K} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j .$$

Для характеристики дії сили за деякий проміжок часу використовують величину, звану **імпульсом сили**. Елементарний імпульс сили – це векторна міра дії сили, що дорівнює добутку сили на елементарний проміжок часу її дії:

$$d\vec{S} = \vec{F}dt .$$

Одиниця виміру імпульсу сили в системі СІ дорівнює 1 Нс тобто розмірності імпульсу сили і кількості руху однакові.

Імпульс сили за кінцевий проміжок часу $[t_1, t_2]$ дорівнює визначеному інтегралу від елементарного імпульсу:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt .$$

Імпульс сталої сили дорівнює добутку сили на час її дії:

$$\vec{S} = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F}\tau .$$

Зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів діючих на точку сил за той же проміжок часу.

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k.$$

Теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Кінетична енергія матеріальної точки – це скалярна міра механічного руху, що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$T = mV^2/2$$

Одиниця виміру кінетичної енергії в системі СІ – 1 Дж.

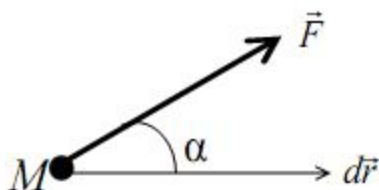
Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому її переміщенні дорівнює сумі робіт всіх діючих на точку сил на тому ж переміщенні.

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A_k,$$

де – T_2 , T_1 – значення кінетичної енергії в кінцевому і початковому положеннях точки.

Елементарна робота сили – це скалярна міра її дії, що дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення точки її прикладення:

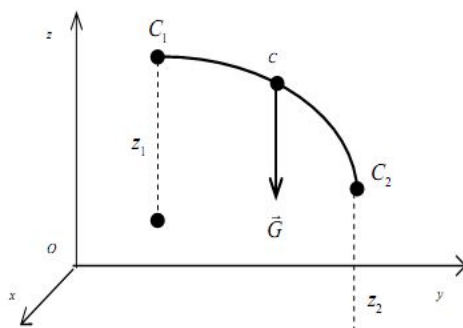
$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Робота сили сталого значення: $A = Frcos\alpha$

Робота сили ваги не залежить від виду траєкторії центру ваги тіла і визначається тільки його вертикальним переміщенням.

$$A = mgh, \text{ де } h = z_2 - z_1$$



Закон збереження механічної енергії

В силовому потенціальному полі повна механічна енергія матеріальної точки залишається незмінною, якщо на матеріальну точку ніякі сили крім сил поля не діють.

$$T + \Pi = \text{const}$$

де T і Π відповідно кінетична і потенціальна енергії матеріальної точки.

Метод кінетостатики (принцип Даламбера) для матеріальної точки

Матеріальна точка, рух якої обмежений іншими тілами (в'язями), називається **невільною матеріальною точкою**.

Використовуючи аксіому про звільнення від в'язей, відкидаємо в'язь і замінюємо дію на точку реакцією в'язі, тобто маємо вільну точку, на яку діють дві сили: $\vec{F}^r$ і $\vec{F}^a$. Силу $\vec{F}^a = \sum \vec{F}_k$ назовемо активною силою.

Тоді закон Ньютона для вільної точки буде мати вигляд:

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{F}^r$$

Д'Аламбером введено поняття "сила інерції".

Сила інерції дорівнює добуткові маси на вектор прискорення точки і направлена в бік, протилежний прискоренню, тобто:

$$\vec{F}^{in} = -m\vec{a}$$

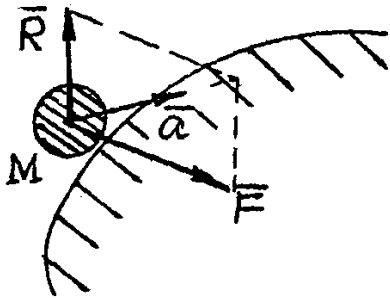
Рівняння (14) можна записати у формі: $\vec{F}^a + \vec{F}^r + (-m\vec{a}) = 0$

Використовуючи (14), перепишемо:

$$\vec{F}^a + \vec{F}^r + \vec{F}^{in} = 0$$

Рівняння висловлює **принцип Даламбера для точки**, який дає можливість формально розглядати рівняння динаміки, як рівняння статички. Активні сили і реакції в'язей, які прикладені до матеріальної точки, врівноважуються приєднаною силою інерції точки.

На підставі III закону Ньютона сила інерції прикладена не до самої точки, а до тих тіл, що надають цій точці прискорення $\vec{a}$. Таким чином, можна стверджувати, що сила інерції $\vec{F}^{in}$ є головний вектор цілком реальних сил, але рівновага, визначена рівнянням, є фіктивною, бо точка прикладання сили інерції умовно перенесена на матеріальну точку.



Розрахунково-графічна робота №2

Завдання Д1. Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, що знаходиться під дією сталих сил

Тіло масою $m = 20 \text{ кг}$ під дією рушійної сили F сталого значення переміщується з точки A по ділянці AB (довжиною l) похилої площини, що складає кут α з горизонтом, протягом часу τ . Його початкова швидкість V_A . Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює f .

В точці B тіло покидає площину зі швидкістю V_B і, знаходячись в польоті протягом часу T , потрапляє в точку C іншої площини, яка є горизонтальною (рис. 1.3, 1.5, 1.6) чи вертикальною (рис. 1.4), або складає деякий кут β з горизонтом (рис. 1.1, 1.2, 1.7, 1.8).

Знайти значення величин, замість яких в таблиці вихідних даних до задачі (табл. 1) проставлено знак питання.

При розв'язуванні задачі тіло вважати матеріальною точкою, опором повітря нехтувати.

Вказівки. Розв'язок задачі розбивають на дві частини. Спочатку складають диференціальне рівняння руху тіла на прямолінійній ділянці AB і інтегрують його методом відокремлювання змінних, враховуючи початкові умови. Після цього складають два диференціальні рівняння руху на криволінійній ділянці траєкторії BC в координатній формі та розв'язують ці рівняння, враховуючи початкові умови для руху по ділянці BC . В деяких варіантах вихідних даних для розв'язування задачі на ділянці AB не вистачає. В таких випадках спочатку розв'язують задачу на ділянці BC , а потім досліджують перший етап руху.

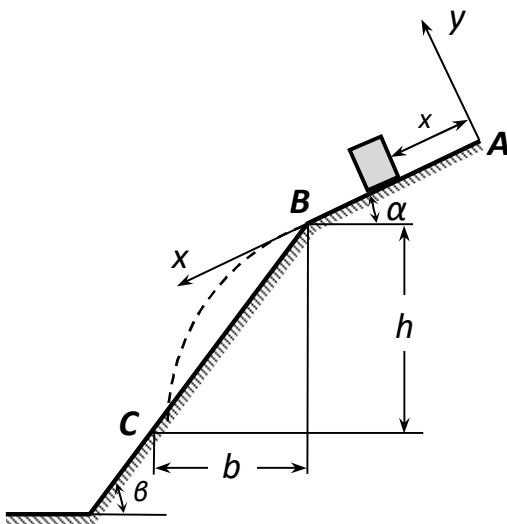


Рис. 1.1

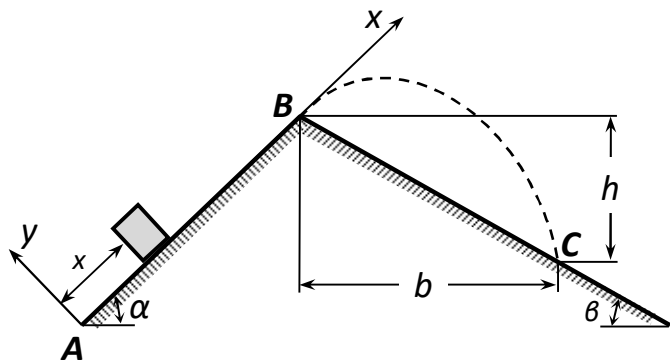


Рис. 1.2

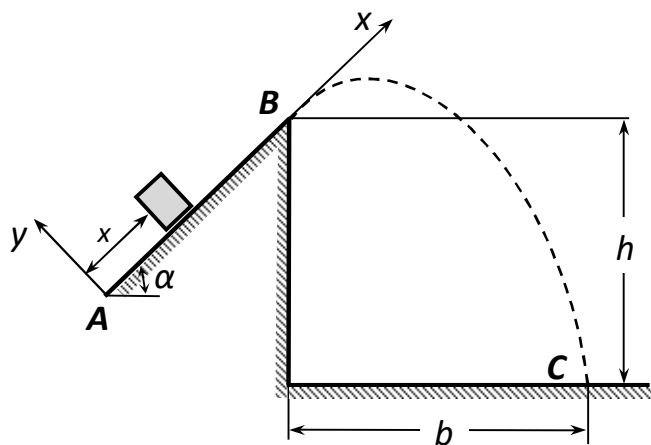


Рис. 1.3

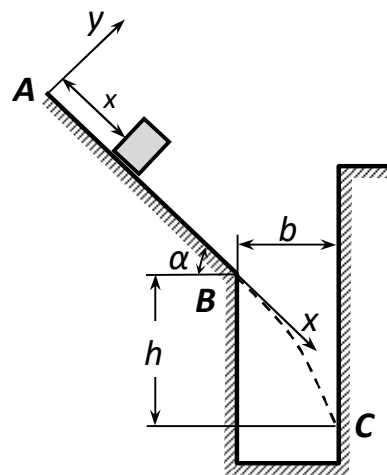


Рис. 1.4

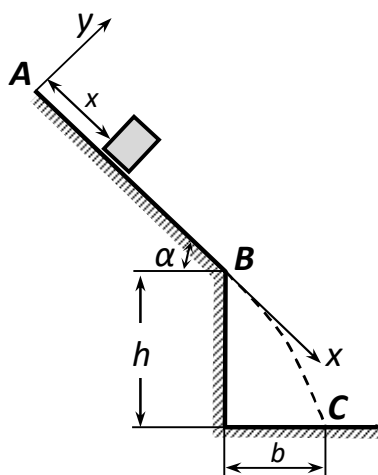


Рис. 1.5

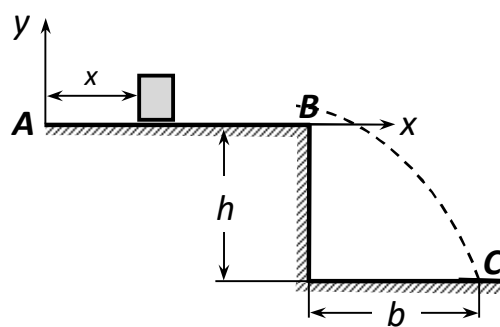


Рис. 1.6

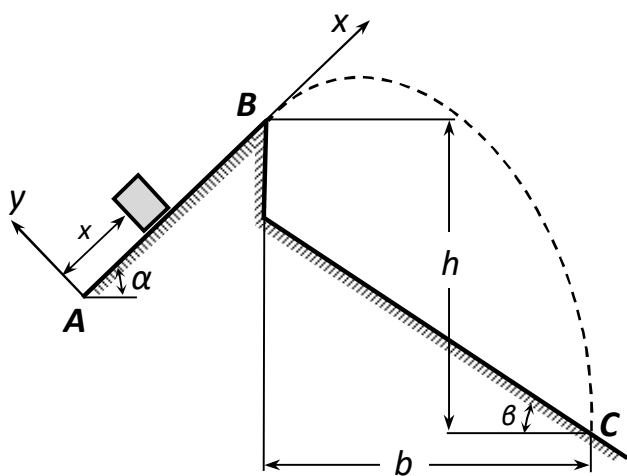


Рис. 1.7

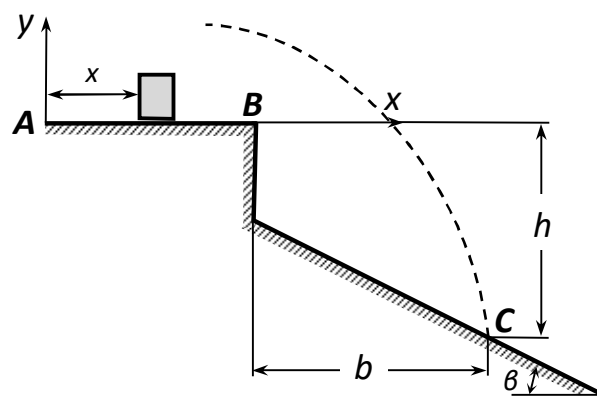


Рис. 1.8

Таблица 1

№	$V_A, \text{ м/с}$	f	$\alpha, ^\circ$	$l, \text{ м}$	$\tau, \text{ с}$	$F, \text{ Н}$	$V_B, \text{ м/с}$	$\beta, ^\circ$	$h, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$T, \text{ с}$
1	0	0,1	10	10	?	200	?	45	2	?	?
2	2	0,2	15	?	?	200	?	45	1	2	?
3	1	0,1	20	2	?	150	?	50	0,5	?	?
4	2	0,2	25	3	?	?	4	55	1,5	?	?
5	3	0,1	30	5	?	50	?	60	2,5	?	?
6	?	0,1	35	5	?	60	5	65	3	?	?
7	?	0,2	40	?	3	75	5	70	2,5	?	?
8	5	0,1	45	?	5	75	?	75	2	?	?
9	10	0,2	40	?	?	60	?	80	1,5	10	?
10	5	0,1	35	3	?	60	?	75	1	?	?
11	3	0,1	30	?	?	75	?	70	0,5	3	3
12	0	0,1	25	?	5	80	?	65	1,5	?	?
13	0	0,2	20	?	2	90	3	60	2	?	?
14	0	0,1	15	5	?	?	5	55	2,5	?	?
15	5	0,1	10	8	?	?	2	40	3	?	?
16	?	0,2	15	3	?	150	?	40	3,5	?	5
17	?	0,1	20	2	?	175	?	15	4	5	?
18	0	0,2	25	5	?	?	5	50	3,5	?	?
19	10	0,1	30	5	?	?	3	55	3	?	?
20	10	0,2	35	10	?	?	20	60	2,5	?	?
21	10	0,1	40	5	?	200	?	65	2	?	?
22	15	0,2	45	?	?	350	?	70	1,5	4	?
23	2	0,1	50	3	?	200	?	75	1	?	?
24	3	0,2	45	?	?	250	?	75	0,5	10	?
25	?	0,1	40	1	?	200	5	65	1	?	?
26	0	0,2	35	10	?	?	10	60	1,5	?	?
27	10	0,1	30	3	?	200	?	55	2	5	?
28	10	0,2	25	4	?	200	?	50	2,5	?	3
29	10	0,1	20	5	?	?	20	45	3	?	?
30	20	0,2	15	1	?	300	?	40	3,5	?	?

Приклад виконання завдання Д1

В гірській місцевості для захисту залізничних шляхів від попадання на них кам'яних осипів з укосин проектується полиця DC . Враховуючи можливість руху каменя з найвищої точки A укосу та приймаючи при цьому його початкову швидкість $V_0 = 0$, визначити найменшу ширину полиці b та швидкість V_C , з якою камінь падає на неї. По ділянці AB укосу, яка складає кут α з горизонтом та має довжину l , камінь рухається протягом часу τ .

При розв'язуванні задачі вважати коефіцієнт тертя ковзання f каменя на ділянці AB сталим, а опором повітря нехтувати.

Дано:

$$V_A = 0$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$l = 4\mathcal{M}$$

$$\tau = 1c$$

$f \neq 0$

$$h = 5\mathcal{M}$$

$$\beta = 75^\circ$$

$$b - ?$$

$V_C - ?$

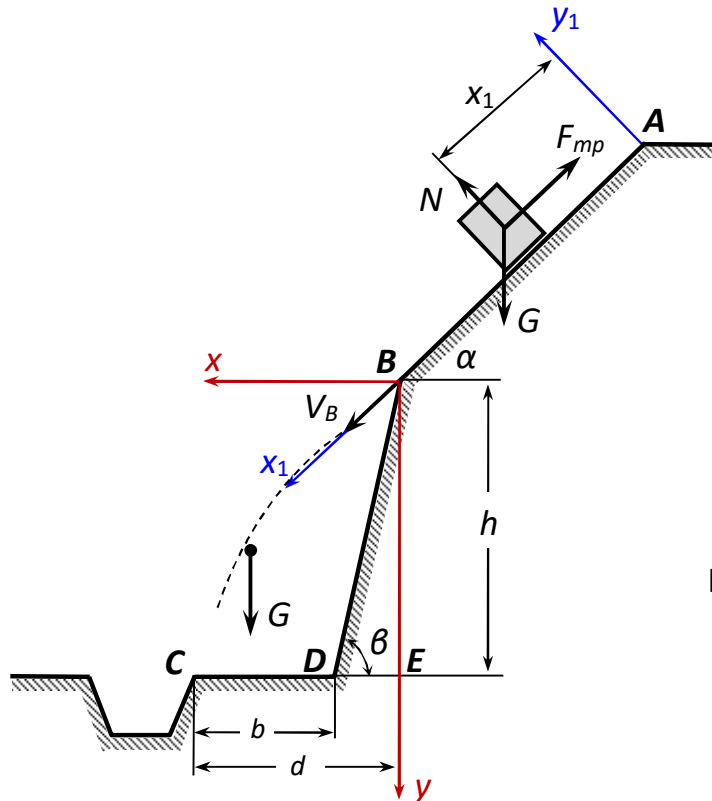


Рис. 1.9

Розв'язування. Розіб'ємо рух каменя на дві ділянки: рух по укосі AB (по похилій ділянці) та вільний політ на ділянці BC .

1. Розглянемо спочатку рух каменя по похилій ділянці AB .

Рух каменя є прямолінійним. Введемо декартову систему координат Ax_1y_1 з початком в точці A . Нехай камінь (як матеріальна точка M) займає поточне положення з координатою x_1 .

На камінь діють такі сили: сила ваги $\vec{G} = m\vec{g}$, нормальна реакція поверхні $\vec{N}$ і сила тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тр}}$.

Основний закон динаміки матеріальної точки в загальному випадку має вигляд

$$m\bar{W} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i,$$

$$m\bar{W} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i,$$

ТОБТО

$$m\bar{W} = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{mp}. \quad (1)$$

Тоді диференціальні рівняння руху запишуться як

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = \sum X_1; \\ m\ddot{y}_1 = \sum Y_1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - F_{mp}; \\ m\ddot{y}_1 = N - G \cos \alpha. \end{cases}$$

Вздовж осі y_1 руху немає, тому прискорення $W_{y_1} = \ddot{y}_1 = 0$ і нормальна реакція поверхні

$$N = G \cos \alpha.$$

Сила тертя

$$F_{mp} = fN = fG \cos \alpha.$$

Таким чином

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha$$

або

$$\ddot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Введемо позначення

$$K = g(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Тоді

$$\ddot{x}_1 = K. \quad (2)$$

Проінтегруємо диференціальне рівняння (2) двічі:

$$1) \frac{d\dot{x}_1}{dt} = K, \quad \text{звідки} \quad d\dot{x}_1 = K dt; \quad \text{тоді} \quad \int d\dot{x}_1 = K \int dt, \quad \text{звідки}$$

$$\dot{x}_1 = Kt + C_1. \quad (3)$$

$$2) \frac{dx_1}{dt} = Kt + C_1, \quad \text{звідки} \quad dx_1 = (Kt + C_1)dt; \quad \text{тоді} \quad \int dx_1 = K \int t dt + C_1 \int dt, \quad \text{звідки}$$

$$x_1 = \frac{Kt^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (4)$$

Для визначення сталих інтегрування використаємо початкові умови:

$$\text{при } t = 0 \quad x_1 = 0, \quad \dot{x}_1 = V_A = 0. \quad (5)$$

Підставивши початкові умови (5) у вирази (3), (4), маємо

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0.$$

Тоді

$$\dot{x}_1 = Kt; \quad x_1 = \frac{Kt^2}{2}. \quad (6)$$

Для моменту τ , коли камінь вилітає з ділянки AB ,

$$x_1 = l; \quad \dot{x}_1 = V_B,$$

тобто

$$V_B = K\tau; \quad l = \frac{K\tau^2}{2},$$

$$\text{звідки, виключивши } K, \text{ маємо} \quad V_B = \frac{2l}{\tau},$$

$$V_B = 2 \cdot 4/1 = 8 \text{ м/с}.$$

2. Розглянемо рух каменя на ділянці BC .

Камінь рухається по криволінійній траєкторії у вільному польоті. Введемо декартову систему Bx_1y_1 з початком в точці B .

На камінь діє тільки сила ваги $\vec{G} = m\vec{g}$, тому основний закон руху буде мати вигляд

$$m\vec{W} = \vec{G}. \quad (7)$$

Спроекуємо вираз (7) на координатні осі:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = G. \quad (8)$$

Двічі інтегруючи диференціальні рівняння (8), отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_3, \\ x &= C_3 t + C_4, \quad \dot{y} = gt + C_5, \end{aligned}$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + C_5 t + C_6.$$

Використовуючи початкові умови

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0 \quad x_0 &= 0, \\ y_0 &= 0, \quad \dot{x}_0 = V_B \cos \alpha, \\ \dot{y}_0 &= V_B \sin \alpha, \end{aligned}$$

знайдемо сталі інтегрування

$$\begin{aligned} C_3 &= V_B \cos \alpha; \\ C_4 &= 0; \quad C_5 = V_B \sin \alpha; \\ C_6 &= 0. \end{aligned}$$

Остаточно маємо такі рівняння проекцій швидкостей каменя:

$$\begin{aligned} V_x &= \dot{x} = V_B \cos \alpha = \text{const}; \\ V_y &= \dot{y} = gt + V_B \sin \alpha, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{та рівняння його руху} \quad x = V_B \cos \alpha \cdot t; y = \frac{gt^2}{2} + V_B \sin \alpha \cdot t. \quad (10)$$

Траєкторію руху каменя можна знайти, якщо з рівнянь (10) виключити параметр – час t .

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{V_B \cos \alpha}, \\ y &= \frac{g}{2V_B^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \cdot x. \end{aligned} \quad (11)$$

Отримуємо рівняння параболи.

У момент падіння $y = h$; $x = d$.

З рівняння траєкторії (11) знайдемо дальність польоту d .

$$\begin{aligned} h &= \frac{9,81}{2 \cdot 8^2 \cdot 0,5^2} d^2 + 1,732d, \quad 0,3066d^2 + 1,732d - 5 = 0, \\ d_{1,2} &= \frac{-1,732 \pm \sqrt{1,732^2 - 4 \cdot 0,3066 \cdot (-5)}}{2 \cdot 0,3066}, \quad d_1 = 2,11\text{м}, d_2 = -7,75\text{м}. \end{aligned}$$

Так як траєкторією руху є частина параболи з додатними абсцисами її точок, обираємо $d = 2,11\text{м}$.

Мінімальна ширина полиці $b = d - ED = d - h/\tan \beta = 0,77\text{м}$.

Знайдемо час руху каменя на ділянці BC :

$$T = \frac{d}{V_B \cos \alpha} = \frac{2,11}{8 \cdot 0,5} = 0,53\text{с}.$$

Кінцеву швидкість каменя при падінні знайдемо за її проекціями (9):

$$\begin{aligned} V_C &= \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(V_B \cos \alpha)^2 + (gT + V_B \sin \alpha)^2}, \\ V_C &= \sqrt{(8 \cdot 0,5)^2 + (9,81 \cdot 0,53 + 8 \cdot 0,866)^2} = 12,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Завдання Д2._ Дослідження коливань матеріальної точки

Вантаж масою m_1 починає рухатись під дією сили ваги по гладкій похилій площині і, приєднавшись в момент контакту до набору пружин з коефіцієнтами жорсткості c_1, c_2, c_3 (рис. 2.1, 2.2, 2.3, 2.4), починає здійснювати коливання. У випадках, показаних на рис. 2.5, 2.6, маса m_1 здійснює коливання після того, як в стані спокою від неї відокремлюється маса m_2 , а у випадках, наведених на рис. 2.7, 2.8, коливання здійснюються після того, як до зрівноваженої маси m_1 приєднується без початкової швидкості маса m_2 . Під час коливань на маси діє збурна сила $Q = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$ (Q – в ньютонах, t – в секундах) та сила опору середовища $R = \mu V$ (R – в ньютонах, V – в метрах за секунду).

Знайти рівняння коливань і визначити положення маси m_1 або m_1 та m_2 разом (рис. 2.7, 2.8) в момент часу 1с , вибравши необхідні вихідні дані в табл. 2. Масами пружин нехтувати. У всіх варіантах $m_1 = 1\text{ кг}$, $m_2 = 2\text{ кг}$.

Вказівки. Варіанти завдання Д2 охоплюють усі можливі випадки прямолінійних коливань матеріальної точки. При розв'язуванні слід, показавши діючі сили на матеріальну точку, зміщену з положення статичної рівноваги в напрямку осі x , скласти диференціальне рівняння її руху. При цьому набір пружин замінюють однією з жорсткістю, яка еквівалентна жорсткості набору. Потім розв'язують отримане диференціальне рівняння другого порядку, враховуючи початкові умови.

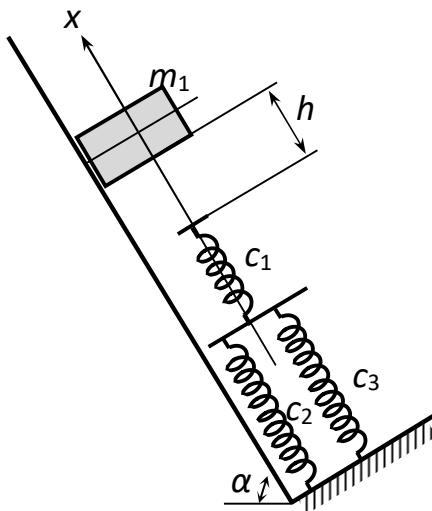


Рис. 2.1

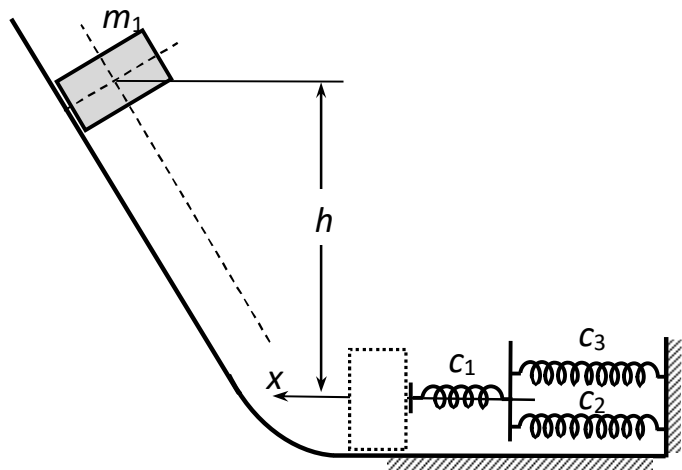


Рис. 2.2

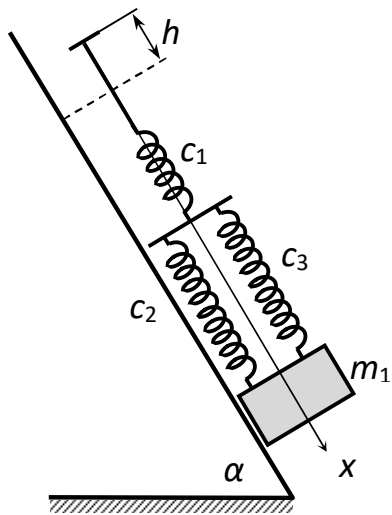


Рис. 2.3

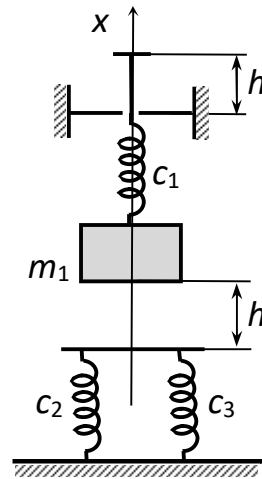


Рис. 2.4

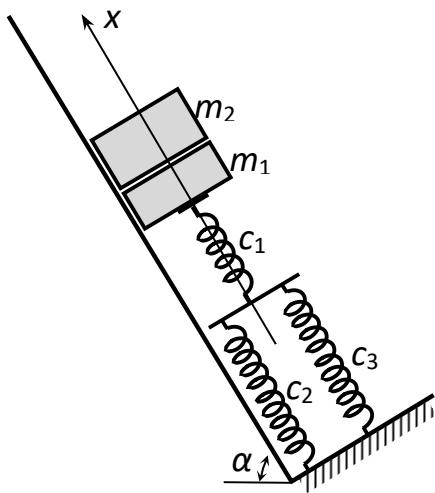


Рис. 2.5

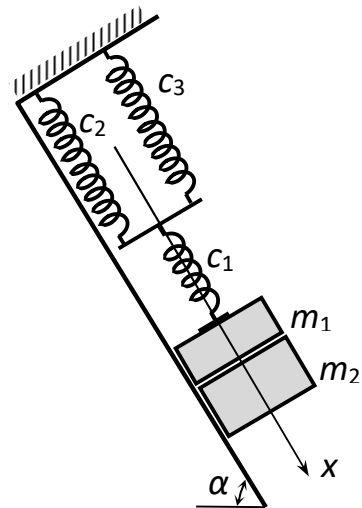


Рис. 2.6

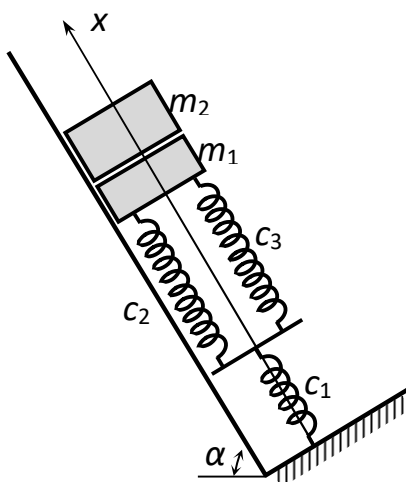


Рис. 2.7

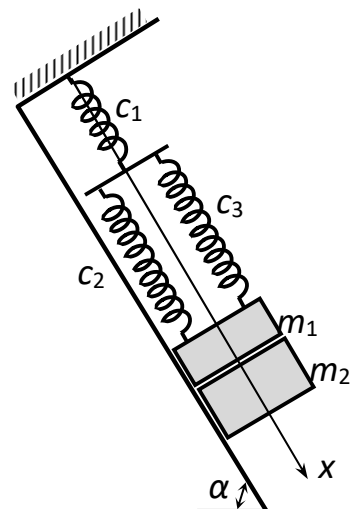


Рис. 2.8

Таблица 2

№	$c_1,$ $H/м$	$c_2,$ $H/м$	$c_3,$ $H/м$	$a,$ H	$b,$ H	$\omega_1,$ c^{-1}	$\mu,$ $H \cdot c/м$	$h,$ $м$	$\alpha, ^\circ$
1	300	150	-	1	-	5	-	0,2	30
2	-	240	120	-	2	6	-	0,3	40
3	-	100	150	-	-	7	2	0,4	35
4	200	-	300	-	-	8	4	0,5	45
5	150	200	-	-	3	9	-	0,6	50
6	120	-	180	4	-	10	-	0,7	55
7	80	-	120	-	5	11	-	0,8	60
8	-	400	400	-	-	12	6	0,9	65
9	80	120	-	-	-	13	8	1,0	70
10	240	-	160	-	6	14	-	1,1	75
11	190	160	-	7	-	15	-	1,2	80
12	-	110	160	-	8	16	-	1,3	20
13	120	-	180	-	-	17	10	1,4	25
14	140	200	-	-	-	18	12	1,5	30
15	-	160	210	-	9	19	-	1,6	35
16	180	-	100	10	-	20	-	1,0	40
17	-	160	110	-	9	15	-	0,3	45
18	140	120	-	-	-	10	14	0,8	50
19	30	-	120	-	-	5	16	0,7	55
20	-	60	100	-	8	5	-	0,6	60
21	-	140	200	7	-	10	-	0,5	65
22	120	-	80	-	6	15	-	0,4	70
23	140	160	-	-	-	20	18	0,3	75
24	160	-	100	-	-	25	20	0,5	80
25	-	140	120	-	5	5	-	0,4	75
26	180	-	200	4	-	7	-	0,6	60
27	200	150	-	-	3	9	-	0,6	50
28	120	160	-	-	-	11	5	0,7	40
29	140	-	80	-	-	13	15	0,6	30
30	-	160	120	5	-	15	5	0,5	20

Приклад виконання завдання Д2

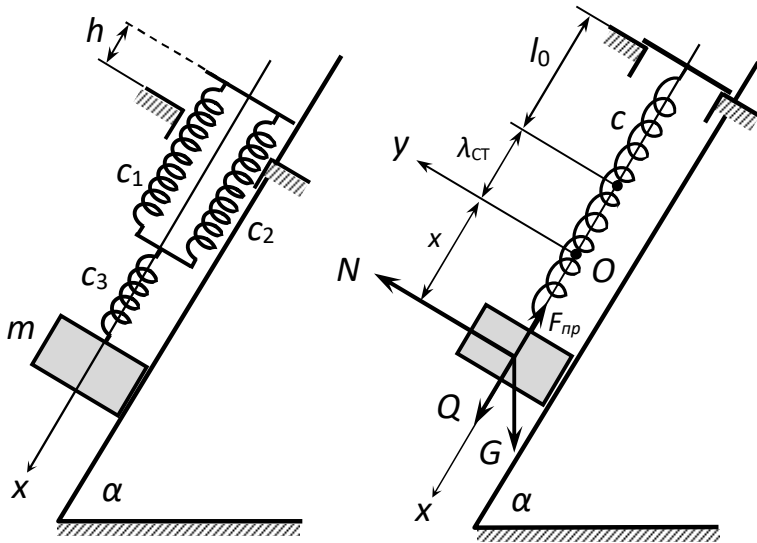


Рис. 2.9

Вантаж масою $m = 1 \text{ кг}$, прикріплений до набору недеформованих пружин з коефіцієнтами жорсткості $c_1 = 100 \text{ Н/м}$, $c_2 = 200 \text{ Н/м}$, $c_3 = 300 \text{ Н/м}$ (рис. 2.9), починає рухатись без початкової швидкості під дією сили ваги по гладкій похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^\circ$. Пройшовши шлях $h = 0,2 \text{ м}$, верхній кінець пружини заклинюється і вантаж починає здійснювати коливання. Під час коливань

на вантаж діє збурна сила $Q = 2 \sin 10t \text{ (Н)}$, яка направлена вздовж осі пружини в напрямку руху вантажу.

Знайти рівняння коливань і визначити положення вантажа в момент часу 1 с . Масами пружин нехтувати.

Розв'язок. 1) Набір пружин, прикріплений до вантажу, замінимо однією еквівалентною пружиною з коефіцієнтом жорсткості $c_{\text{екв}} = c$.

Пружини з жорсткістю c_1 і c_2 з'єднані паралельно. Тому їх еквівалентна жорсткість

$$c_{12} = c_1 + c_2.$$

Пружини з жорсткістю c_{12} і c_3 з'єднані послідовно. Тому

$$c = \frac{c_{12} \cdot c_3}{c_{12} + c_3} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot c_3}{c_1 + c_2 + c_3} = \frac{(100 + 200) \cdot 300}{100 + 200 + 300} = 150 \text{ (Н/м)}.$$

2) Розглянемо рух системи «вантаж – пружини» до моменту заклинювання. Так як система рухається як єдине ціле, пружини не деформуються, то на вантаж діє тільки сила ваги $G = mg$ та нормальна реакція поверхні N . Направимо вісь x вздовж поверхні в сторону руху вантажу. Складаємо диференціальне рівняння руху вантажу в проекціях на вісь x

$$m\ddot{W} = \vec{G} + \vec{N},$$

$$m\ddot{x} = G \sin \alpha = mg \sin \alpha, \quad \ddot{x} = g \sin \alpha.$$

Після інтегрування отримаємо

$$\dot{x} = g \sin \alpha \cdot t + C_1, \quad x = g \sin \alpha \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2.$$

Використовуючи початкові умови

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = V_0 = 0,$$

знаходимо сталі інтегрування $C_1 = C_2 = 0$.

Остаточно маємо рівняння руху та швидкості

$$x = g \sin \alpha \cdot \frac{t^2}{2}, \quad V = \dot{x} = g \sin \alpha \cdot t.$$

Коли вантаж пройшов шлях $x = h$, час його руху

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2}{9,81 \cdot 0,5}} = 0,29(c),$$

а швидкість в цей момент $V(0,29c) = 9,81 \cdot 0,5 \cdot 0,29 = 1,42(m/c)$.

3) Після заклинювання верхнього кінця пружини, вантаж розпочинає коливання.

На початку коливань ($t = 0$), еквівалентна пружина ще не деформована, її довжина дорівнює l_0 . В положенні статичної рівноваги вантажу (точка O) пружина розтягнута на величину λ_{CT} . В цьому положенні сила пружності пружини $F_{np} = c\lambda_{CT}$ зрівноважується вагою вантажа G , тобто $G \sin \alpha = c\lambda_{CT}$, звідки

$$\lambda_{CT} = \frac{G \sin \alpha}{c} = \frac{1 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{150} = 0,03m.$$

Початок системи координат візьмемо в положенні статичної рівноваги вантажу, а вісь x направимо вздовж поверхні в бік, що відповідає розтягу пружини.

На рисунку наведено вантаж, який зміщений від точки O на відстань x . На нього діють: $G = mg$ – сила ваги вантажу, $F_{np} = c(\lambda_{CT} + x)$ – сила пружності пружини, N – реакція похилої поверхні, збурна сила $F = 2 \sin 10t$ (H).

Диференціальне рівняння руху вантажу має вигляд

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= G \sin \alpha - F_{np} + Q, \\ m\ddot{x} &= G \sin \alpha - c(\lambda_{CT} + x) + 2 \sin 10t = G \sin \alpha - c \left(\frac{G \sin \alpha}{c} + x \right) + 2 \sin 10t, \\ m\ddot{x} + cx &= 2 \sin 10t, \\ \ddot{x} + \frac{c}{m}x &= \frac{2}{m} \sin 10t \end{aligned}$$

$$\text{або в канонічному вигляді} \quad \ddot{x} + k^2x = h \sin 10t, \quad (1)$$

де $k^2 = \frac{c}{m} = \frac{150}{1} = 150(c^{-2}), h = \frac{2}{m} = 2(m/c^2)$.

Рівняння (1) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок цього рівняння, як відомо з курсу диференціальних рівнянь, складається з загального розв'язку x_1 однорідного рівняння $\ddot{x} + k^2x = 0$, який характеризує вільні коливання вантажу, та часткового розв'язку x_2 , який описує вимушені коливання

$$x = x_1 + x_2.$$

$$x_1 = C_3 \sin kt + C_4 \cos kt,$$

$$x_2 = A \sin 10t + B \cos 10t. \quad (2)$$

$$\text{Загальний розв'язок } x = C_3 \sin kt + C_4 \cos kt + A \sin 10t + B \cos 10t, \quad (3)$$

Для визначення коефіцієнтів A і B , знайдемо похідні від розв'язку (2)

$$\dot{x}_2 = 10A \cos 10t - 10B \sin 10t, \quad \ddot{x}_2 = -100A \sin 10t - 100B \cos 10t,$$

підставимо їх у рівняння (1) та прирівняємо відповідні коефіцієнти

$$-100A \sin 10t - 100B \cos 10t + k^2(A \sin 10t + B \cos 10t) = h \sin 10t,$$

$$A(k^2 - 100) \sin 10t + B(k^2 - 100) \cos 10t = h \sin 10t,$$

$$A(k^2 - 100) = h, \quad B(k^2 - 100) = 0,$$

$$A = \frac{h}{k^2 - 100} = \frac{2}{50} = 0,04, \quad B = 0.$$

Тоді для рівняння руху вантажу і його швидкості отримаємо

$$x = C_3 \sin kt + C_4 \cos kt + 0,04 \sin 10t, \quad (4)$$

$$\dot{x} = C_3 k \cos kt - C_4 k \sin kt + 0,4 \cos 10t. \quad (5)$$

За умовою, в початковий момент при $t = 0$ пружина ще недеформована, тобто вантаж знаходиться вище за положення рівноваги на величину статичної деформації пружини $x = -\lambda_{\text{СТ}}$, його швидкість в цей час, як ми знайшли, дорівнювала $\dot{x} = V = 1,42 \text{ м/с}$.

$$\text{Тоді з формул (4), (5) витікає } -\lambda_{\text{СТ}} = C_4; \quad 1,42 = C_3 k + 0,4;$$

$$\text{тобто} \quad C_4 = -0,03; \quad C_3 = \frac{1,42 - 0,4}{\sqrt{150}} = 0,08.$$

Остаточно загальний розв'язок диференціального рівняння (1) має вигляд

$$x = 0,08 \sin 12,25t - 0,03 \cos 12,25t + 0,04 \sin 10t.$$

В момент часу $t = 1 \text{ с}$, вантаж мав координату

$$x = 0,08 \sin 12,25 - 0,03 \cos 12,25 + 0,04 \sin 10 = -0,005 \text{ м}.$$

Примітка. При складанні диференціального рівняння руху вантажу можливі такі випадки:

1) Вільні коливання

а) диференціальне рівняння $\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$ або $\ddot{x} + k^2x = 0$,
характеристичне рівняння $\lambda^2 + k^2 = 0$ має комплексні корені $\lambda = \pm ik$.

Розв'язок $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ або $x = A \sin(kt + \alpha)$,

де невідомі сталі інтегрування C_1 , C_2 або A (амплітуда), α (початкова фаза коливань) знаходяться з початкових умов задачі.

б) диференціальне рівняння $\ddot{x} - \frac{c}{m}x = 0$ або $\ddot{x} - k^2x = 0$,
характеристичне рівняння $\lambda^2 - k^2 = 0$ має дійсні корені $\lambda = \pm k$.

Розв'язок $x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}$.

2) Загасаючі коливання (вільні коливання при в'язкому опорі)

Диференціальне рівняння $\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0$ або $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$.

У випадку малого опору ($n < k$) отримуємо розв'язок

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t) \quad \text{або} \quad x = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha).$$

3) Вимушені коливання

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m} \sin p t \quad \text{або} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin p t.$$

Розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, як показано в прикладі, наведеному вище, складається з загального розв'язку x_1 однорідного рівняння $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$, який характеризує вільні коливання вантажу, та часткового розв'язку x_2 , який описує вимушені коливання

$$x = x_1 + x_2.$$

Завдання ДЗ. Застосування основних теорем динаміки для дослідження руху матеріальної точки

Тонкий стержень, розміщений у вертикальній площині, складається з двох прямолінійних ділянок та двох дуг кіл радіусів $R = 0,5\text{ м}$, $r = 0,6R$, сполучених в точках A , C , D (рис. 3.1 – 3.8). На стержень нанизано кулю вагою $P = 10\text{ Н}$, прикріплену до пружини з коефіцієнтом жорсткості c , другий кінець пружини закріплено в точці O . Довжина пружини в недеформованому стані дорівнює l_0 . Стержень гладкий на всіх ділянках, крім DE , на якій відомий коефіцієнт тертя f .

Куля починає рухатись без початкової швидкості з положення A_0 , що визначається кутом α , а в точці A вона звільняється від дії пружини, рухаючись далі.

Вважаючи кулю матеріальною точкою, визначити її швидкість у точках B , D , E , а також з якою силою N вона буде тиснути на стержень в точці B , якщо відомі кути α , β , γ та час руху τ на ділянці DE . Необхідні для розв'язку дані наведені в таблиці 3.

Вказівки. Завдання ДЗ – на застосування теорем про зміну кінетичної енергії та про зміну кількості руху матеріальної точки. Розв'язуючи задачу, першу теорему застосовують на ділянках A_0B та BD , а другу – на ділянці DE . Для визначення сили взаємодії кулі та стержня необхідно окремо показати кулю в точці B разом із силами, що діють на неї, та скласти диференціальне рівняння її руху в проекції на нормаль до траєкторії, яка направлена до центра кола радіуса R , тобто рівняння $\frac{mV^2}{\rho} = \sum_k F_{kn}$.

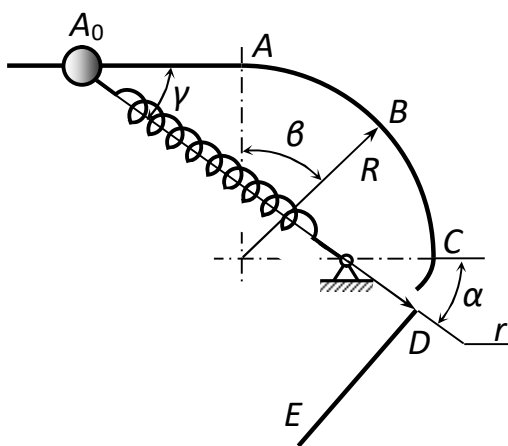


Рис. 3.1

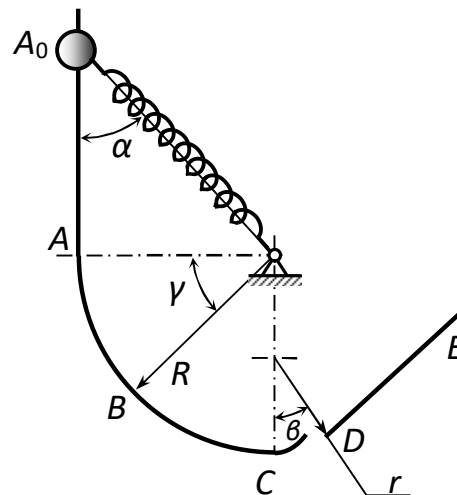


Рис. 3.2

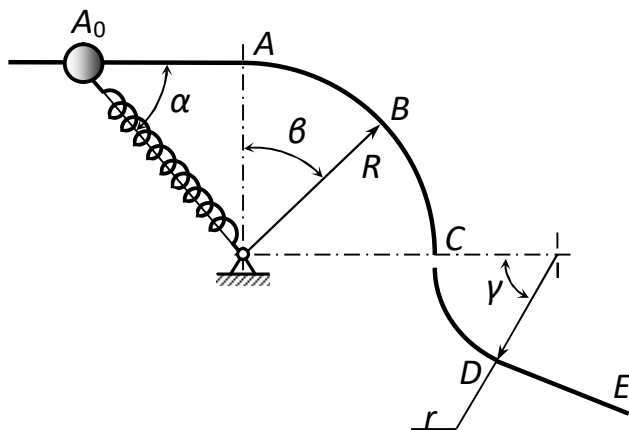


Рис. 3.3

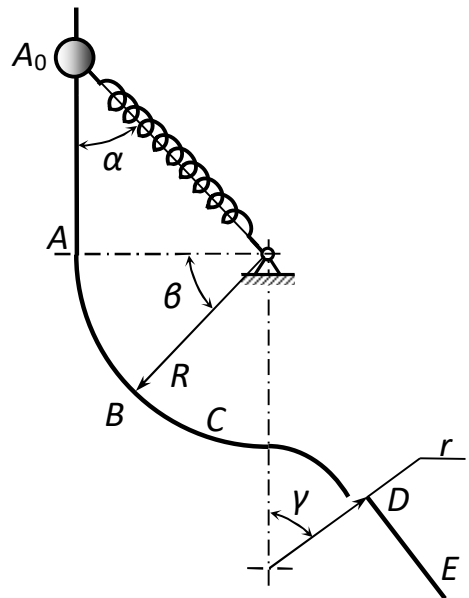


Рис. 3.4

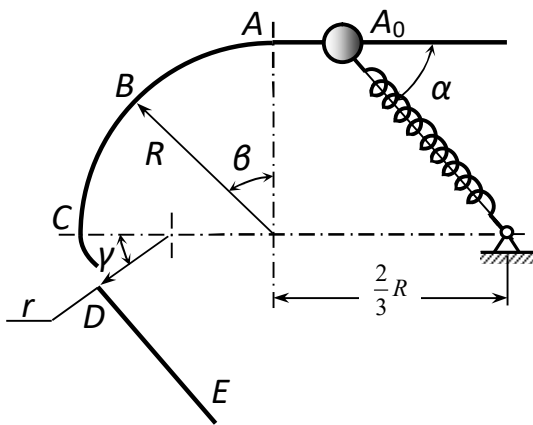


Рис. 3.5

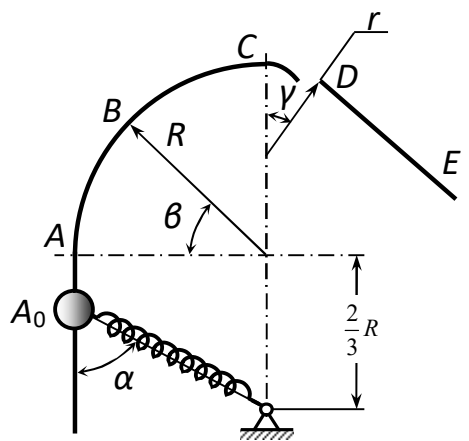


Рис. 3.6

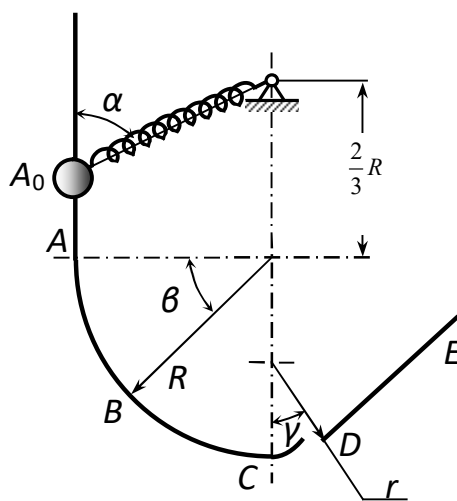


Рис. 3.7

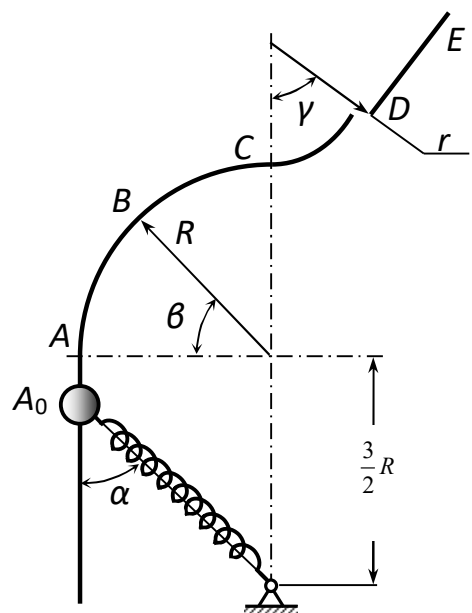


Рис. 3.8

Таблица 3

№	f	τ , c	c , H/m	β , $град$	γ , $град$	Для рис. 1-4		Для рис. 5-8	
						α , $град$	l_0 , m	α , $град$	l_0 , m
1	0,1	0,1	50	15	20	30	0,5 R	45	3,0 R
2	0,2	0,3	55	20	25	35	0,6 R	50	2,9 R
3	0,2	0,4	60	25	30	40	0,7 R	55	2,8 R
4	0,2	0,5	65	30	35	45	0,8 R	60	2,7 R
5	0,2	0,6	70	35	40	50	0,9 R	65	2,6 R
6	0,2	0,7	75	40	45	55	0,8 R	70	2,5 R
7	0,1	0,8	80	45	50	60	0,7 R	75	2,4 R
8	0,1	0,7	85	50	55	55	0,6 R	80	2,3 R
9	0,1	0,6	30	55	60	50	0,5 R	85	2,2 R
10	0,1	0,5	35	60	65	45	0,4 R	87	2,1 R
11	0,1	0,4	100	65	70	40	0,5 R	82	2,0 R
12	0,1	0,3	105	70	75	35	0,6 R	77	2,1 R
13	0,1	0,2	110	75	70	30	0,7 R	72	2,2 R
14	0,1	0,1	115	80	65	35	0,8 R	67	2,3 R
15	0,1	0,2	120	20	60	40	0,9 R	62	2,4 R
16	0,1	0,1	125	25	55	45	0,8 R	57	2,5 R
17	0,1	0,1	130	30	50	50	0,7 R	52	2,6 R
18	0,1	0,1	135	35	45	55	0,6 R	47	2,7 R
19	0,2	0,1	140	40	40	60	0,5 R	45	2,8 R
20	0,2	0,2	145	45	35	55	0,4 R	50	2,9 R
21	0,2	0,2	150	50	30	50	0,5 R	55	3,0 R
22	0,2	0,2	155	55	25	45	0,6 R	60	2,9 R
23	0,2	0,2	160	60	20	40	0,7 R	65	2,8 R
24	0,2	0,2	165	65	30	35	0,8 R	70	2,7 R
25	0,1	0,1	170	70	40	30	0,9 R	75	2,6 R
26	0,1	0,1	175	75	50	35	0,8 R	80	2,5 R
27	0,1	0,1	180	30	60	40	0,7 R	85	2,4 R
28	0,1	0,1	185	35	35	45	0,6 R	60	2,3 R
29	0,2	0,1	190	40	40	50	0,5 R	75	2,2 R
30	0,1	0,1	200	45	45	55	0,4 R	80	2,1 R

Приклад виконання завдання ДЗ

Кулька, що приймається за матеріальну точку, рухається з положення A всередині трубки, вісь якої розташована у вертикальній площині (рис. 3.9). Знайти швидкість кульки в положеннях B і C , а також тиск кульки на стінку трубки в положенні C та найбільшу деформацію пружини при гальмуванні кульки на ділянці KD . Тертям на криволінійних ділянках траєкторії знехтувати.

У завданні прийняті такі позначення: τ – час руху кульки на ділянці AB , f – коефіцієнт тертя ковзання кульки по стінці каналу, c – коефіцієнт жорсткості пружини, h_0 – початкова деформація пружини, h – найбільша деформація (стиск) пружини.

Дано:

$$m = 0,2 \text{ кг}$$

$$V_A = 10 \text{ м/с}$$

$$\tau = 1 \text{ с}$$

$$f = 0,1$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$R = 0,5 \text{ м}$$

$$h_0 = 0$$

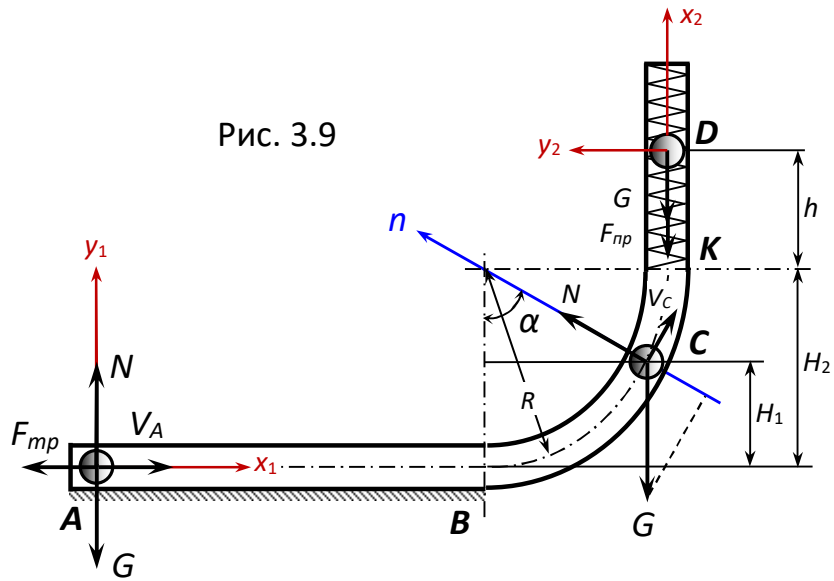
$$c = 1,2 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$$

$$= 120 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$V_B = ? \quad V_C = ?$$

$$N_C = ? \quad h = ?$$

Рис. 3.9



Розв'язування. Розглядаємо рух кульки окремо по ділянкам.

1. **Ділянка AB.** Під час руху по прямолінійній ділянці AB на кульку діють сила ваги $\vec{G} = m\vec{g}$, сила тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тр}}$ і нормальна реакція стінки трубки $\vec{N}$.

Вздовж осі y_1 руху немає, тому за рівнянням статики $\sum F_{y_1} = N - G = 0$, звідки

$$N = G = mg.$$

Сила тертя

$$F_{\text{тр}} = fN = fG = fmg.$$

Так як на ділянці відомий час руху τ , для визначення швидкості кульки в точці B застосуємо теорему про зміну кількості руху

$$m\vec{V}_B - m\vec{V}_A = \sum \vec{S}_i = \vec{S}_G + \vec{S}_{F_{\text{тр}}} + \vec{S}_N.$$

В скалярному вигляді для осі x_1 маємо

$$mV_B - mV_A = 0 - F_{\text{тр}} \cdot \tau + 0,$$

$$mV_B = mV_A - fmg \cdot \tau,$$

звідки

$$V_B = V_A - fg \cdot \tau,$$

або

$$V_B = 10 - 0,1 \cdot 9,81 \cdot 1 = 9,02(\text{м/с})$$

2. Ділянка BK . На криволінійній ділянці на кульку діють сила ваги $\vec{G} = m\vec{g}$ та нормальна реакції стінки трубки $\vec{N}$.

Для визначення швидкості кульки в точці C застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = \sum A_i = A_{\vec{G}} + A_{\vec{N}},$$

Враховуючи, що робота сили ваги $A_{\vec{G}} = G \cdot \Delta h = -G \cdot H_1$,

де висота підйому кульки $H_1 = R - R \cdot \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha)$,

а робота нормальної реакції $A_{\vec{N}} = 0$, так як реакція $\vec{N}$ залишається перпендикулярною до малого переміщення кульки на всій криволінійній ділянці руху, отримаємо

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -mg \cdot H_1 + 0,$$

$$V_C^2 = V_B^2 - 2g \cdot H_1,$$

звідки

$$V_C = \sqrt{V_B^2 - 2g \cdot H_1} = \sqrt{V_B^2 - 2gR(1 - \cos \alpha)}$$

або

$$V_C = \sqrt{9,02^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot 0,5(1 - \cos 60)} = 8,74(\text{м/с}).$$

Аналогічно знайдемо швидкість кульки наприкінці ділянки в точці K

$$V_K = \sqrt{V_B^2 - 2g \cdot H_2}.$$

Враховуючи, що при $\alpha = 90^\circ, H_2 = R$, маємо

$$V_K = \sqrt{V_B^2 - 2gR} = \sqrt{9,02^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot 0,5} = 8,46(\text{м/с}).$$

Для визначення тиску кульки на стінку каналу в положенні C запишемо основний закон динаміки

$$m\vec{W} = \sum \vec{F}_i = \vec{N} + \vec{G}$$

та спроекуємо його на нормаль до траєкторії, враховуючи, що доцентрове прискорення $W_n = \frac{V^2}{\rho}$, де, в нашому випадку, радіус кривизни $\rho = R$

$$\frac{mv_C^2}{R} = N_C - G \cos \alpha,$$

звідки

$$N_C = \frac{mv_C^2}{R} + mg \cos \alpha = m \left(\frac{V_C^2}{R} + g \cos \alpha \right)$$

або

$$N_C = 0,2 \left(\frac{8,74^2}{0,5} + 9,81 \cdot \cos 60 \right) = 31,5(\text{Н}).$$

Тиск кульки N'_C на стінку трубки дорівнює по модулю знайдений реакції N_C і направлений в протилежну сторону.

3. Ділянка KD . Прямолінійний рух кульки вздовж вертикальної осі x_2 відбувається під дією сили ваги $\vec{G} = m\vec{g}$ та сили пружності пружини $\vec{F}_{np}$.

Складаючи рівняння статички по осі y_2 , з'ясовуємо, що нормальна реакція стінки трубки $N = 0$ і, відповідно, сила тертя $F_{mp} = f \cdot N = 0$.

Максимальний стиск пружини відбудеться тоді, коли кулька, пройшовши шлях h , зупиниться, тобто при $V_D = 0$.

Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії

$$\frac{mv_D^2}{2} - \frac{mv_K^2}{2} = \sum A_i = A_{\bar{G}} + A_{\bar{F}_{np}}.$$

Враховуючи, що робота сили пружності $A_{\bar{F}_{np}} = -\frac{c \cdot h^2}{2}$, отримаємо

$$0 - \frac{mv_K^2}{2} = -G \cdot h - \frac{c \cdot h^2}{2}, \quad \text{звідки} \quad \frac{c \cdot h^2}{2} + G \cdot h - \frac{mv_K^2}{2} = 0,$$

$$60h^2 + 1,96h - 7,16 = 0 \quad \text{або} \quad h^2 + 0,03h - 0,12 = 0.$$

Розв'язуючи отримане квадратне рівняння відносно h , знайдемо

$$h = \frac{-0,03 \pm \sqrt{0,03^2 + 4 \cdot 0,12}}{2} = \frac{-0,03 \pm 0,69}{2}.$$

За відповідь приймаємо додатний корінь рівняння

$$h = 0,33 \text{ м}.$$

Завдання Д4. Дослідження відносного руху матеріальної точки

Кулька M , що приймається за матеріальну точку, рухається по циліндричному каналу в тілі A , яке рівномірно обертається навколо нерухомої осі. Знайти рівняння відносного руху кульки, а також тиск кульки на стінку каналу в заданий момент часу τ .

Необхідні дані вибрати з таблиці 4, в якій позначено: m – маса кульки; ω – стала кутова швидкість тіла A (рис. 4.1 – 4.7) або стержнів O_1B та O_2C (рис. 4.8); x_0 – початкова координата; $\dot{x}_0 = V_0$ – початкова швидкість кульки; l_0 – довжина недеформованої пружини; c – жорсткість пружини; α та r – геометричні розміри тіла.

Вказівки. Завдання Д4 – на відносний рух точки. При розв’язуванні задачі рекомендується вісь x рухомої системи координат зорієнтувати в напрямку траєкторії відносного руху. Далі, навантаживши матеріальну точку діючими на неї силами, реакціями в’язей та силами інерції, слід скласти основне рівняння в векторній формі. Проектуючи це рівняння на вісь Ox , отримують диференціальне рівняння відносного руху, яке розв’язують враховуючи початкові умови. Для знаходження складових тиску кульки на трубку основне рівняння проектують на осі Oy та Oz , після чого знаходиться повна реакція каналу.

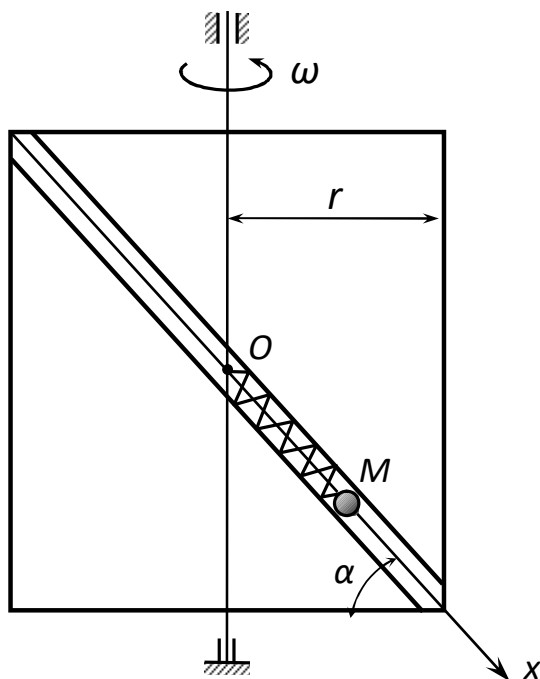


Рис. 4.1

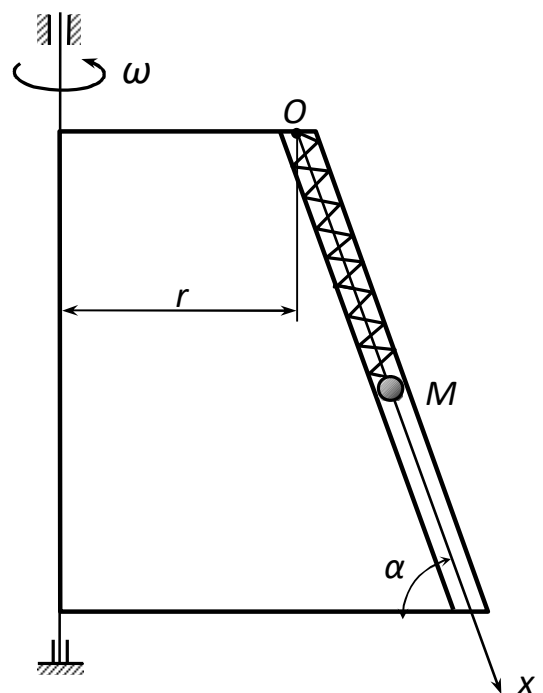


Рис. 4.2

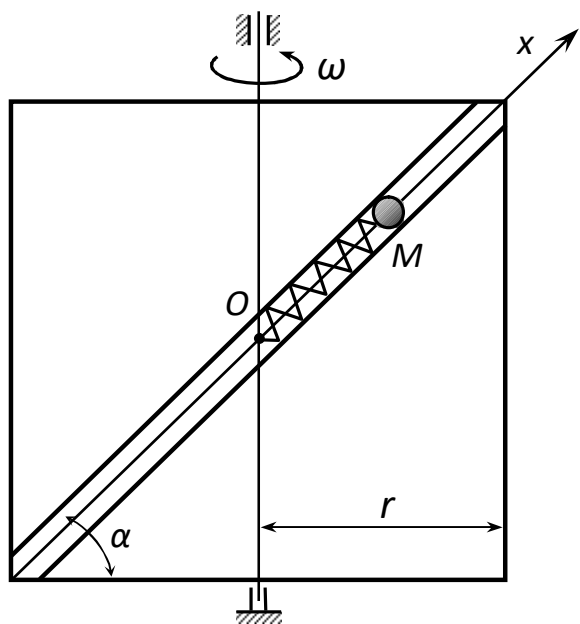


Рис. 4.3

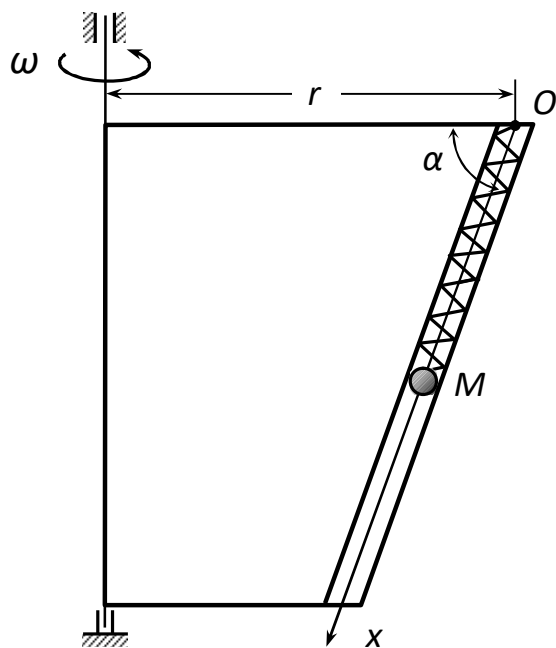


Рис. 4.4

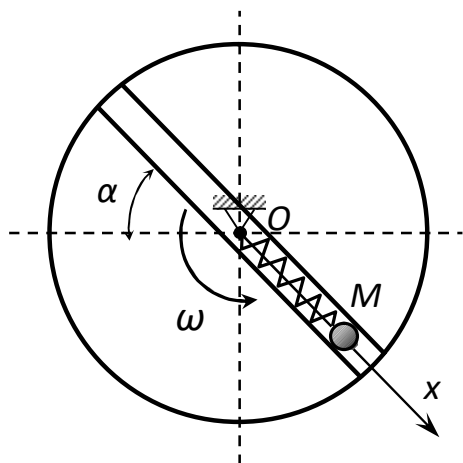


Рис. 4.5

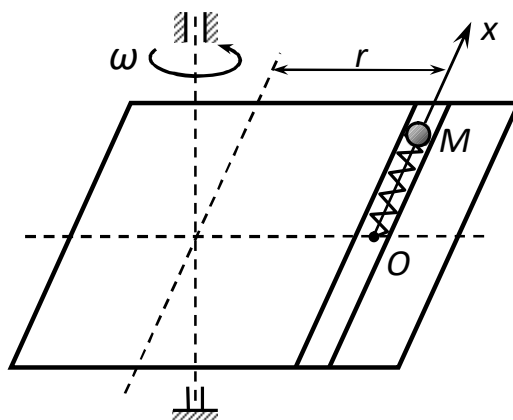


Рис. 4.6

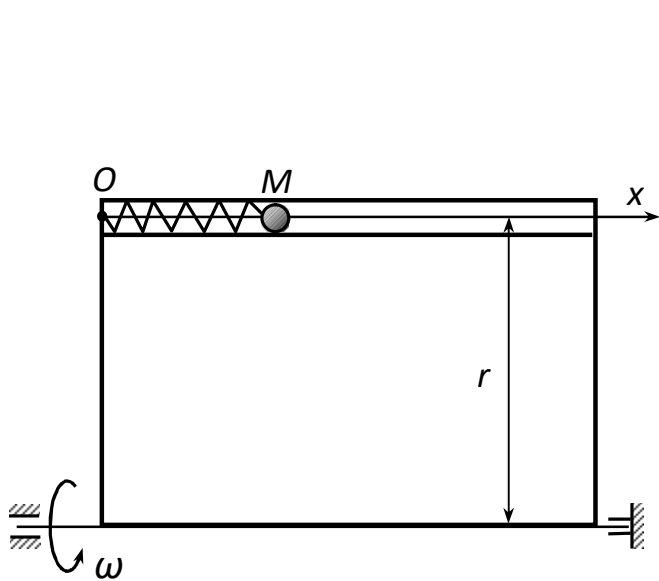


Рис. 4.7

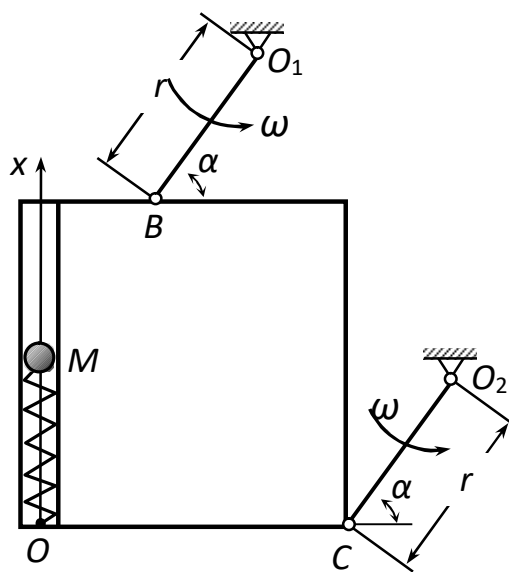


Рис. 4.8

Таблиця 4

№	$m,$ $кг$	$\omega,$ $с^{-1}$	$x_0,$ $м$	$\dot{x}_0,$ $м/с$	$\tau,$ $с$	$c,$ $Н/см$	$l_0,$ $м$	$\alpha,$ $град$	$r,$ $см$
1	0,01	1	0	1,0	0,4	0	0	20	50
2	0,02	2	0	0,1	0,2	0,1	0,3	30	60
3	0,03	3	0,1	0,5	0,3	0,2	0,2	40	70
4	0,04	4	0,1	0	0,1	0,3	0,3	45	80
5	0,05	5	0,2	0,1	0,15	0,4	0,4	50	90
6	0,06	6	0,3	0	0,1	0,5	0,5	60	100
7	0,07	7	0,4	0,2	0,3	0	0	70	110
8	0,08	8	0	0,5	0,2	0,4	0,6	75	120
9	0,09	9	0,5	0	0,1	0,3	0,7	60	130
10	0,10	10	0,6	0,3	1,0	0,2	0,8	50	140
11	0,11	11	0,1	0	0,1	0,1	0,2	45	150
12	0,12	12	0	0,1	0,1	0	0	40	140
13	0,13	13	0,2	1,0	0,1	0,1	0,4	30	130
14	0,14	10	0,3	0,5	0,5	0,2	0,6	20	120
15	0,15	9	0,4	0	0,6	0,3	0,7	30	110
16	0,16	8	0,5	0,5	0,4	0,4	0,8	40	100
17	0,17	7	0	1,0	0,3	0,5	0,2	45	90
18	0,18	6	0,4	1,5	0,2	0	0	50	80
19	0,19	5	0,3	1,0	0,1	0,4	0,6	60	70
20	0,20	4	0,2	0,5	0,1	0,3	0,6	70	60
21	0,21	3	0,1	0	0,2	0,2	0,4	60	50
22	0,22	2	0	0,1	0,3	0,1	0,2	50	40
23	0,23	3	0,5	0,2	0,4	0	0	45	30
24	0,24	4	0,1	0,3	0,1	0,1	0,4	30	40
25	0,25	5	0	0,5	0,2	0,2	0,3	40	50
26	0,26	6	0,2	1,0	0,3	0,3	0,6	20	60
27	0,27	7	0,3	1,0	0,1	0,4	0,7	30	70
28	0,28	5	0	0,5	0,3	0,5	0,2	45	80
29	0,29	4	0,1	0,1	1,0	0	0	60	90
30	0,30	2	0	0	1,0	0	0	30	100

Приклад виконання завдання 4

Знайти рівняння $x = x(t)$ відносного руху кульки M , а також тиск кульки на стінку каналу в заданий момент часу τ (рис. 4.9).

Дано:
 $\omega = 3 \text{ рад/с}$
 $m = 0,01 \text{ кг}$
 $\tau = 0,1 \text{ с}$
 $x_0 = 0,3 \text{ м}$
 $V_0 = 1 \text{ м/с}$
 $c = 0,05 \text{ Н/м}$
 $l_0 = 0,1 \text{ м}$
 $x = x(t) - ?$

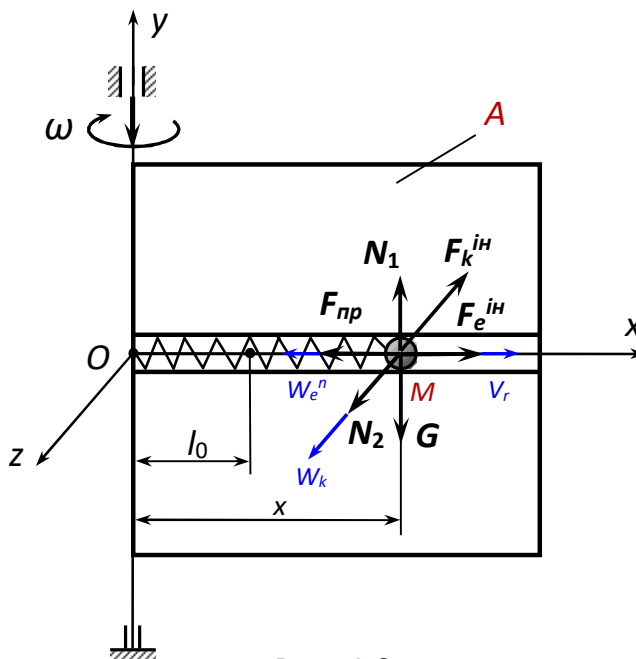


Рис. 4.9

Розв'язок. Кулька здійснює складний рух. Відносний рух кульки – прямолінійний рух вздовж трубки. Переносний рух кульки – обертання її разом із тілом A як єдиної системи навколо осі y .

Абсолютний рух описується основним законом динаміки $m\bar{W} = \sum \bar{F}_i$.

Як відомо, при складному русі точки її прискорення дорівнює геометричній сумі відносного, переносного та коріолісового прискорень

$$\bar{W} = \bar{W}_r + \bar{W}_e + \bar{W}_k.$$

Тоді

$$m(\bar{W}_r + \bar{W}_e + \bar{W}_k) = \sum \bar{F},$$

$$m\bar{W}_r = \sum \bar{F} - m\bar{W}_e - m\bar{W}_k$$

або

$$m\bar{W}_r = \sum \bar{F} + \bar{F}_e^{ih} + \bar{F}_k^{ih}.$$

Зв'яжемо рухому систему координат $Oxyz$ із каналом (трубкою), зорієнтувавши вісь x в напрямку траєкторії відносного руху кульки M .

До кульки M прикладені сили: вага $G = mg$, реакція пружини $F_{пр} = c(x - l_0)$ і нормальна реакція стінки трубки, яка представлена на рис. 4.9 двома взаємно перпендикулярними складовими N_1 і N_2 , паралельними осям y та z . Крім того, на кульку діють переносна (відцентрова) сила інерції $\bar{F}_e^{ih}$ та коріолісова сила інерції $\bar{F}_k^{ih}$, які направлені протилежно до відповідних прискорень $\bar{W}_e^n$ та $\bar{W}_k$.

Так як $\omega = \text{const}$, то переносне прискорення $W_e = W_e^n = \omega^2 \cdot OM = \omega^2 \cdot x$ і направлене до центра обертання (т. O). Вважаючи, що відносна швидкість $\vec{V}_r$ направлена в напрямку осі x , знайдемо напрям $\vec{W}_k$. Повертаємо вектор $\vec{V}_r$ на 90° у бік переносного обертання – в даному випадку за годинниковою стрілкою. Вектор $\vec{W}_k$ перпендикулярний площині xOy і направлений «до нас».

Коріолісове прискорення $W_k = 2\omega_e V_r \sin 90^\circ = 2\omega \dot{x}$.

Основне рівняння відносного руху точки

$$m\vec{W}_r = \vec{G} + \vec{F}_{np} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_e^{in} + \vec{F}_k^{in} \quad (1)$$

в проекціях на вісь x має вигляд $m\ddot{x} = -c(x - l_0) + m\omega^2 x$.

або

$$\ddot{x} - \left(\omega^2 - \frac{c}{m}\right)x = \frac{c}{m}l_0,$$

$$\ddot{x} - k^2 x = h, \quad (2)$$

де $k = \sqrt{\omega^2 - \frac{c}{m}} = \sqrt{3^2 - \frac{0,05}{0,01}} = \sqrt{4} = 2c^{-1}$, $h = \frac{c}{m} \cdot l_0 = \frac{0,05}{0,01} \cdot 0,1 = 0,5 \frac{m}{c^2}$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (2) має вигляд

$$x = x_1 + x_2,$$

де $x_1 = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння,

$x_2 = B$ – частковий розв'язок.

Візьмемо похідні від часткового розв'язку та підставимо їх у (2):

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_2 = 0, \quad 0 - k^2 B = h, \quad \text{звідки} \quad B = -\frac{h}{k^2} = -\frac{0,5}{4} = -0,125 \text{ м.}$$

Розв'язок диференціального рівняння (2) відносного руху кульки M набуває вигляду

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - 0,125. \quad (3)$$

Швидкість відносного руху кульки M

$$\dot{x} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}. \quad (4)$$

Сталі інтегрування C_1, C_2 визначаємо з початкових умов

$$\text{при } t = 0 \quad x_0 = 0,3 \text{ м}, \quad V_0 = 1 \text{ м/с.}$$

Складаємо рівняння (3), (4) для моменту часу $t = 0$:

$$0,3 = C_1 + C_2 - 0,125; \quad 1 = 2C_1 - 2C_2,$$

звідки

$$C_1 = 0,779; C_2 = -0,354.$$

Остаточно рівняння відносного руху кульки M має вигляд

$$x = 0,779e^{2t} - 0,354e^{-2t} - 0,125.$$

Швидкість відносного руху кульки M

$$\dot{x} = 0,558e^{2t} - 0,708e^{-2t}.$$

Для визначення складових реакції стінки трубки N_1 та N_2 , векторне рівняння (1) споектуємо на осі Oy та Oz

$$0 = -G + N_1; 0 = N_2 - F_k^{ih}.$$

З цих рівнянь знаходимо

$$N_1 = G = mg = 0,01 \cdot 9,81 = 0,0981H;$$

$$N_2 = F_k^{ih} = mW_k = 2m\omega\dot{x} = 2 \cdot 0,01 \cdot 3\dot{x} = 0,06\dot{x}.$$

В момент часу $\tau = 0,1$ с швидкість відносного рух кульки має значення

$$\dot{x}(0,1c) = V(0,1c) = 0,558e^{0,2} - 0,708e^{-0,2} = 1,323м/с.$$

$$N_2(0,1c) = 0,06 \cdot 1,323 = 0,079H.$$

Реакція стінки трубки $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{0,0981^2 + 0,079^2} = 0,126H.$

Тиск кульки M на стінки трубки по числовому значенню дорівнює знайдений реакції N і направлено в протилежну сторону.

Завдання Д5. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до аналізу руху механічної системи

Механічна система починає рухатись із стану спокою під дією сили $F = f(s)$, що залежить від переміщення s точки її прикладання. Враховуючи тертя ковзання та опір коченню відповідних тіл системи, нехтуючи іншими силами опору та масами ниток, що вважаються нерозтяжними, визначити величину, указану в таблиці 5, на той момент часу, коли переміщення $s_1 = 0,5 \text{ м}$. Радіуси ступінчатого шківів 3 $R_3 = 0,4 \text{ м}$, $r_3 = 0,2 \text{ м}$, його радіус інерції $\rho_3 = 0,3 \text{ м}$; блок 4 радіуса $R_4 = 0,1 \text{ м}$, коток або рухомий блок 5 вважати однорідними циліндрами; коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$; коефіцієнт тертя кочення $\delta = 0,1 \text{ см}$.

Вказівки. Завдання Д5 – на застосування теореми про зміну кінетичної енергії системи. При розв'язуванні задачі кінетичну енергію кожного тіла необхідно виразити через ту швидкість, яку необхідно знайти в задачі. При обчисленні кінетичної енергії T_5 для знаходження залежності між кутовою швидкістю та швидкістю центра мас слід скористатися поняттям про миттєвий центр швидкості. При обчисленні роботи слід усі переміщення виразити через відоме переміщення s_1 , враховуючи, що залежності між переміщеннями будуть такі ж самі, як і між відповідними швидкостями. Деформацію пружини в момент початку руху вважати рівною нулю.

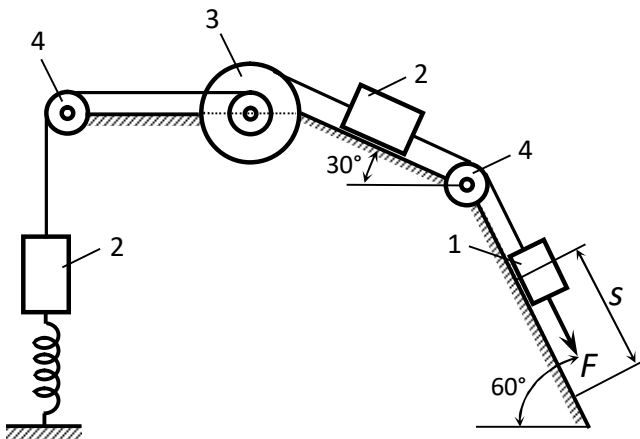


Рис. 5.1

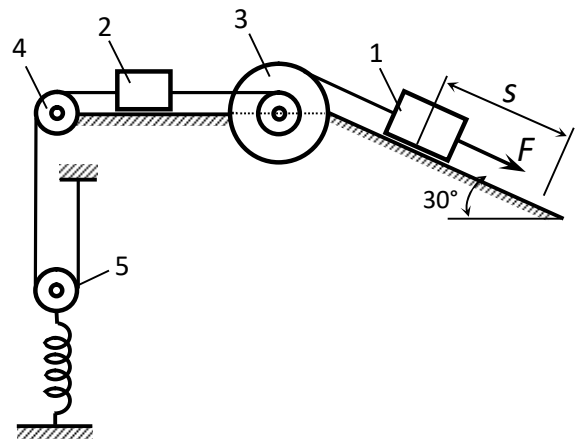


Рис. 5.2

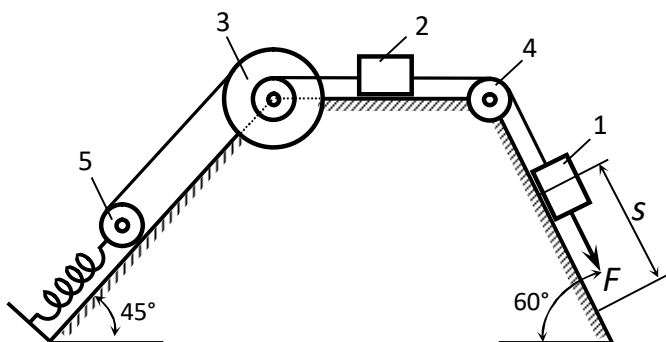


Рис. 5.3

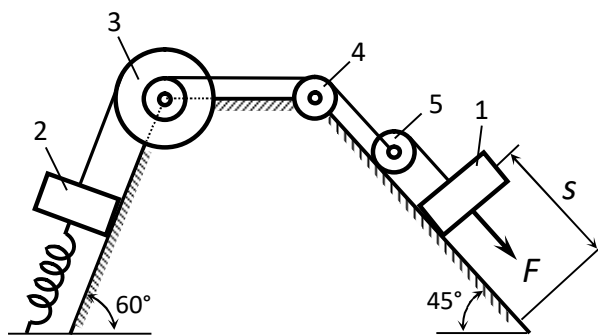


Рис. 5.4

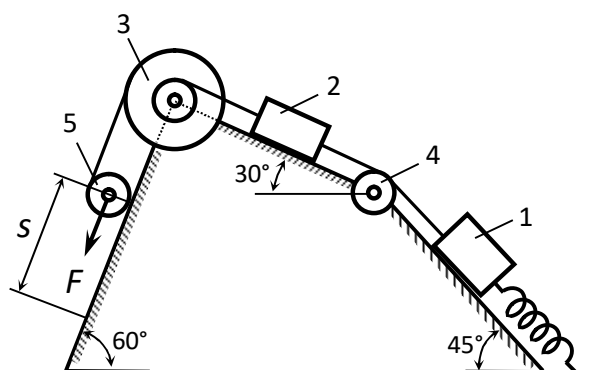


Рис. 5.5

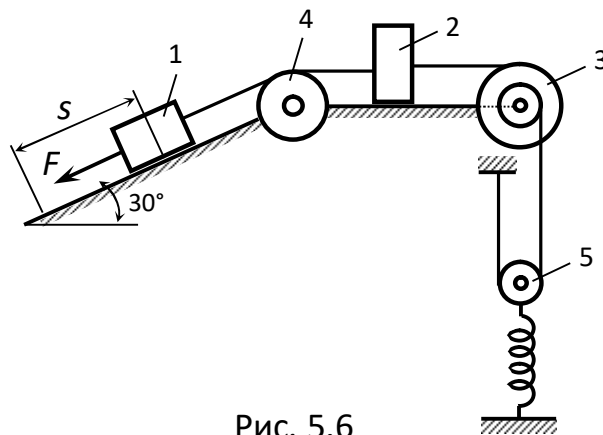


Рис. 5.6

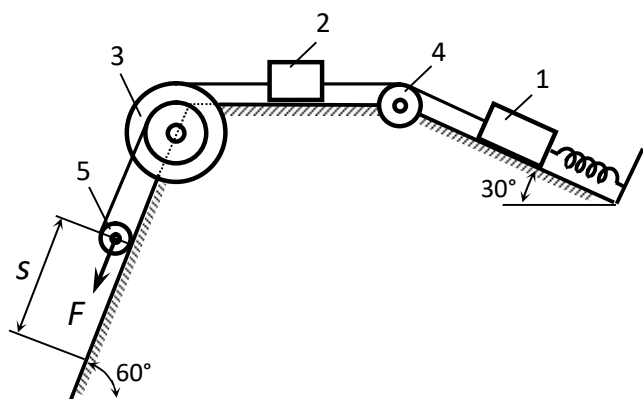


Рис. 5.7

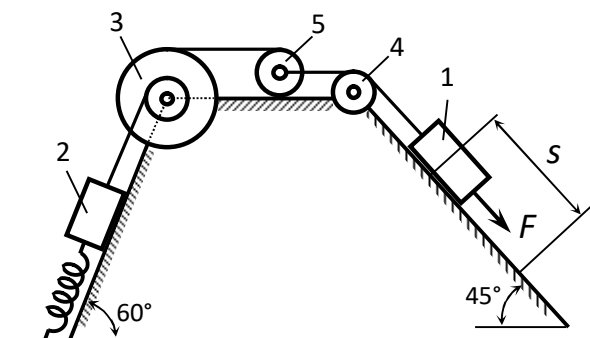


Рис. 5.8

Таблица 5

№	$m_1,$ кг	$m_2,$ кг	$m_3,$ кг	$m_4,$ кг	$m_5,$ кг	$c,$ Н/см	$F = f(s),$ Н	Знайти
1	0	5	6	0	4	200	20 (10+2s)	V_1
2	4	0	5	6	5	210	25 (9+3s)	V_2
3	3	4	0	5	6	220	30 (8+4s)	ω_1
4	5	3	4	0	7	230	35 (7+5s)	ω_1
5	4	5	3	0	8	240	40 (6+6s)	V_{C5}
6	6	4	0	3	9	250	45 (5+7s)	V_{C5}
7	4	0	5	6	3	260	50 (4+8s)	ω_1
8	0	6	4	5	4	270	55 (3+9s)	ω_1
9	0	5	6	4	5	280	60 (9+3s)	V_2
10	4	0	5	6	6	290	65 (8+4s)	V_1
11	5	4	0	5	7	300	70 (7+5s)	ω_1
12	6	5	4	0	8	310	75 (6+6s)	ω_1
13	7	6	5	0	9	320	80 (5+7s)	V_{C5}
14	8	7	0	5	10	330	90 (4+8s)	V_{C5}
15	9	0	7	6	11	340	95 (3+9s)	V_1
16	0	9	8	7	12	350	90 (9+2s)	V_2
17	0	5	9	8	13	360	85 (8+3s)	ω_1
18	4	0	5	9	14	370	80 (7+4s)	ω_1
19	6	4	0	5	15	380	75 (6+5s)	V_{C5}
20	5	6	4	0	10	390	70 (5+6s)	V_1
21	4	5	6	0	9	400	60 (4+7s)	V_2
22	5	4	0	6	8	380	65 (3+8s)	ω_1
23	6	0	4	5	7	360	50 (2+9s)	ω_1
24	0	6	5	4	6	340	55 (3+8s)	V_1
25	4	0	5	6	5	320	60 (4+7s)	V_2
26	6	6	0	5	4	300	65 (5+6s)	V_{C5}
27	6	5	4	0	5	240	70 (6+6s)	ω_1
28	3	5	0	4	6	220	75 (7+4s)	ω_1
29	5	0	5	6	4	200	80 (8+3s)	V_1
30	0	5	6	6	5	180	90 (5+5s)	V_2

Приклад виконання завдання 5

Механічна система (рис. 5.9) складається з суцільного циліндричного котка 1, ступінчатого шківів 2 з радіусами R_2 і r_2 (маса шківів рівномірно розподілена по його зовнішньому ободу) і вантажа 3 (f – коефіцієнт тертя ковзання по поверхні). Тіла системи з'єднані між собою нитками, які намотані на шків 2.

Під дією сили $F=f(s)$, яка залежить від переміщення s точки її прикладання, система починає рухатись із стану спокою. Під час руху на шків 2 діє момент сил опору M_2 . Визначити швидкість центра мас котка 1, коли $s = s_1$.

Дано:

$$m_1 = 4 \text{ кг}$$

$$m_2 = 10 \text{ кг}$$

$$m_3 = 8 \text{ кг}$$

$$R_2 = 0,2 \text{ м}$$

$$r_2 = 0,1 \text{ м}$$

$$f = 0,2$$

$$M_2 = 0,6 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$F = 2(1+2s) \text{ Н}$$

$$s_1 = 2 \text{ м}$$

$$V_{C1} = ?$$

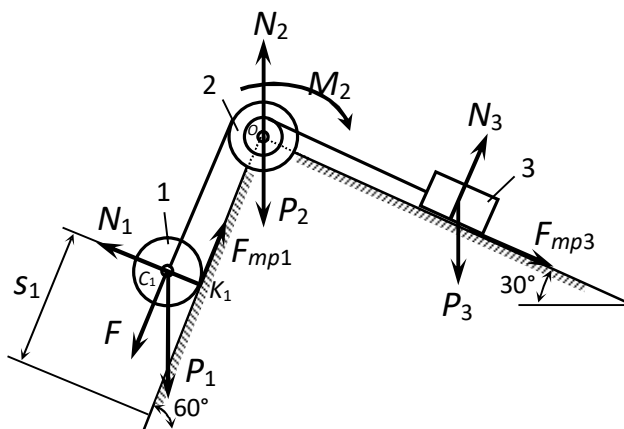


Рис. 5.9

Розв'язок. 1) Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії системи:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i, \quad (1)$$

де T_0 і T – кінетична енергія системи в початковому та кінцевому положеннях; $\sum A_k^e$ – сума робіт зовнішніх сил, які прикладені до системи на її переміщенні із початкового положення в кінцеве; $\sum A_k^i$ – сума робіт внутрішніх сил системи на тому ж переміщенні.

Для даної системи, яка складається з абсолютно твердих тіл, з'єднаних нерозтяжними нитками, $\sum A_k^i = 0$.

Так як в початковому положенні система знаходилася в стані спокою, то

$$T_0 = 0.$$

Таким чином, рівняння (1) приймає вигляд

$$T = \sum A_k^e. \quad (2)$$

2) Знайдемо кінематичні співвідношення між швидкостями та переміщеннями точок системи, виразивши їх через швидкість та переміщення центра мас котка 1 (рис. 5.10).

Кутова швидкість котка 1, миттєвий центр швидкостей якого знаходиться в точці K_1 ,

$$\omega_1 = \frac{V_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{V_{C1}}{r_1}. \quad (3)$$

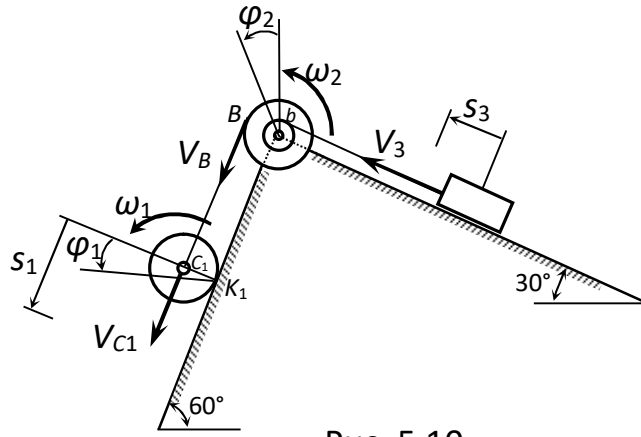


Рис. 5.10

Точка B шківів 2 має швидкість $V_B = V_{C_1}$ і, відповідно, кутова швидкість шківів

(4)

$$\omega_2 = \frac{V_B}{R_2} = \frac{V_{C_1}}{R_2}.$$

Лінійна швидкість точки b шківів $V_b = \omega_2 R_2$.

Швидкість вантажа 3 $V_3 = V_b = \omega_2 R_2 = \frac{r_2}{R_2} V_{C_1}$. (5)

Покажемо, що залежності між переміщеннями будуть такими ж самими, як і між відповідними швидкостями.

Враховуючи, що $\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$, $V_3 = \frac{ds_3}{dt}$, $V_{C_1} = \frac{ds_1}{dt}$, з формул (4), (5) отримаємо

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{1}{R_2} \frac{ds_1}{dt}, \quad \frac{ds_3}{dt} = \frac{r_2}{R_2} \frac{ds_1}{dt}$$

або, домноживши на dt , $d\varphi_2 = \frac{1}{R_2} ds_1$, $ds_3 = \frac{r_2}{R_2} ds_1$.

Інтегруємо (при нульових початкових умовах):

$$\varphi_2 = \frac{s_1}{R_2}, \quad s_3 = \frac{r_2}{R_2} s_1. \quad (6)$$

3) Кінетична енергія системи в кінцевому положенні дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Кінетична енергія котка 1, який здійснює плоскопаралельний рух,

$$T_1 = \frac{m_1 V_{C_1}^2}{2} + \frac{I_{C_1} \omega_1^2}{2},$$

де $I_{C_1} = \frac{m_1 r_1^2}{2}$ – момент інерції котка 1 (однорідний суцільний циліндр) відносно його центральної осі.

Кінетична енергія шківів 2, який обертається навколо своєї центральної нерухомої осі,

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2},$$

де $I_2 = m_2 R_2^2$ – момент інерції шківів відносно центральної осі.

Кінетична енергія вантажа 3, який рухається поступально,

$$T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

Таким чином,

$$T = \left(\frac{m_1 V_{C_1}^2}{2} + \frac{I_{C_1} \omega_1^2}{2} \right) + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

Враховуючи залежності (3)–(5), маємо

$$T = \frac{m_1 V_{C_1}^2}{2} + \frac{m_1 r_1^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{V_{C_1}}{r_1} \right)^2 + \frac{m_2 R_2^2}{2} \left(\frac{V_{C_1}}{R_2} \right)^2 + \frac{m_3}{2} \left(\frac{r_2 \cdot V_{C_1}}{R_2} \right)^2,$$

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{r_2}{R_2} \right)^2 \right) V_{C_1}^2,$$

$$T = \left(\frac{3}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 8 \left(\frac{0,1}{0,2} \right)^2 \right) V_{C_1}^2 = 9V_{C_1}^2. \quad (7)$$

4) Враховуючи залежності (6), знайдемо суму робіт всіх діючих зовнішніх сил (рис. 5.9) на заданому переміщенні, яке буде мати система, коли точка C_1 пройде шлях s_1 .

Робота сили F $A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} 2(1 + 2s)ds = 2(s_1 + s_1^2).$

Робота сил ваги $A(\bar{P}_1) = P_1 h_1 = m_1 g \cdot s_1 \sin 60^\circ,$
 $A(\bar{P}_3) = P_3 h_3 = -P_3 s_3 \sin 30^\circ = -m_3 g \cdot s_1 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ.$

Робота моменту сил опору $A(M_2) = -M_2 \varphi_2 = -M_2 \cdot \frac{s_1}{R_2}.$

Робота сили тертя ковзання $A(\bar{F}_{mp3}) = -F_{mp3} s_3.$

Так як $F_{mp3} = f N_3 = f P_3 \cos 30^\circ$, то

$$A(\bar{F}_{mp3}) = -f P_3 \cos 30^\circ s_3 = -f m_3 g \cdot s_1 \frac{r_2}{R_2} \cos 30^\circ.$$

Робота всіх інших сил дорівнює нулю, так як сили N_1 та F_{mp1} прикладені у точці K_1 – миттєвому центрі швидкостей; точка O , в якій прикладені сили N_2 і P_2 , нерухома; реакція N_3 перпендикулярна переміщенню вантажа 3.

Таким чином,

$$\sum A_k^e = 2(s_1 + s_1^2) + m_1 g \cdot s_1 \sin 60^\circ - M_2 \frac{s_1}{R_2} - m_3 g \cdot s_1 \frac{r_2}{R_2} (\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ),$$

$$\sum A_k^e = 2(2 + 2^2) + 4 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 0,866 - 0,6 \cdot \frac{2}{0,2} - 8 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot \frac{0,1}{0,2} (0,5 + 0,2 \cdot 0,866) = 21,1. \quad (8)$$

Підставляючи вирази (7) і (8) у рівняння (2), отримаємо

$$9V_{C_1}^2 = 21,1,$$

$$V_{C_1} = 1,53 \text{ м/с}.$$

Завдання Д6. Застосування загального рівняння динаміки до дослідження руху механічної системи

Для механічної системи, наведеної в завданні Д5, визначити прискорення мас m_1 чи m_2 та натяг ниток, приєднаних до обраної маси, вважаючи силу сталою для усіх варіантів $F = 100 \text{ Н}$. Поверхні, по яких рухаються тіла, вважати гладкими, а пружину – відсутньою.

Вказівки. Завдання Д6 – на застосування загального рівняння динаміки (принципа Даламбера–Лагранжа). При розв’язуванні задачі слід надати системі можливе переміщення і обчислити суму елементарних робіт сил, діючих на систему, та сил інерції, якими навантажується кожна маса системи на даному переміщенні, прирівнюючи суму робіт нулю. При навантаженні силами інерції необхідно врахувати, що для однорідного тіла, яке обертається навколо своєї осі симетрії (шківа), сили інерції приводяться до пари з моментом $M^{\text{ін}} = I_z \varepsilon$, де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання, ε – кутове прискорення тіла. Напрямок $\vec{M}^{\text{ін}}$ протилежний напрямку $\vec{\varepsilon}$. Розв’язуючи задачу, необхідно можливі переміщення кожного тіла виразити через яке-небудь одне, а прискорення кожного тіла через прискорення, яке необхідно визначити.

При розрахунку натягу ниток, приєднаних до одного з тіл системи, треба виділити його з системи і застосувати загальне рівняння динаміки до нього окремо.

Приклад виконання завдання 6

Механічна система (рис. 6.1) починає рухатися із стану спокою. Блок 3 – суцільний однорідний циліндр. Масою ниток знехтувати.

Визначити прискорення вантажів 1 і 4 та натяг нитки між першим і другим та третім і четвертим тілами.

Дано:

$$G_1 = G_2 = 2G$$

$$G_3 = G_4 = G$$

$$R = 2r$$

$$f = 0,2$$

$$i_2 = r\sqrt{2}$$

$$W_1 - ? \quad W_4 - ?$$

$$T - ?$$

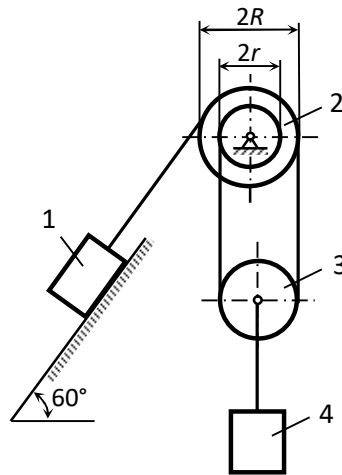


Рис. 6.1

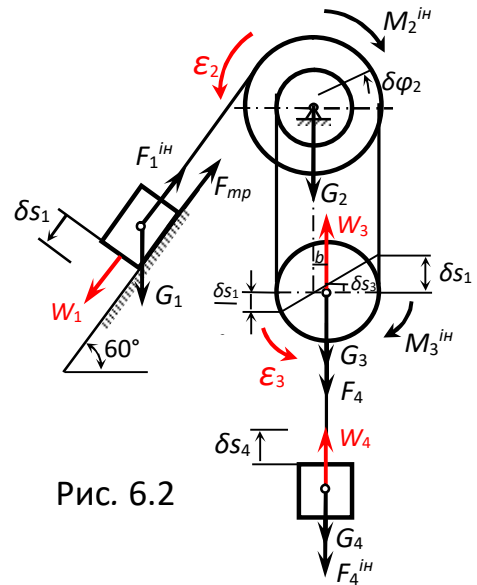


Рис. 6.2

Розв'язок. 1) Застосуємо загальне рівняння динаміки:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{in} = 0,$$

де $\sum \delta A_k^a$ – сума елементарних робіт активних сил; $\sum \delta A_k^{in}$ – сума елементарних робіт сил інерції.

Так як система починає рухатись із стану спокою, то напрямки прискорень тіл збігаються з напрямками їх руху.

В зв'язку з тим, що серед сил, що діють на тіла системи, є сила тертя, за вихідними даними краще за все знайти реальний напрямок руху системи, щоб вірно показати напрямок сили тертя. Якщо напрямок руху системи обрано помилково, то у розв'язку отримаємо прискорення зі знаком «–». В цьому випадку необхідно змінити напрямок сили тертя та сил інерції та внести відповідні поправки в загальне рівняння динаміки.

В даному прикладі вантаж 1 опускається, що задає напрямок руху всієї системи. Система має одну ступінь вільності.

Покажемо всі активні сили: сили ваги вантажів G_1, G_4 , сили ваги блоків G_2, G_3 , а також F_{mp} – силу тертя ковзання вантажа 1 по похилій площині (рис. 6.2).

В протилежних напрямках до відповідних прискорень покажемо сили та моменти інерції.

Величини сил інерції вантажів 1, 4, що рухаються поступально з прискореннями W_1, W_4 , дорівнюють

$$F_1^{in} = m_1 W_1, \quad F_4^{in} = m_4 W_4.$$

Сили інерції блока 2, який обертається навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням ε_2 , зводяться до пари, момент якої $M_2^{in} = I_2 \varepsilon_2$.

У блоці 3, який здійснює плоский рух, виникає сила інерції $F_3^{in} = m_3 W_3$, де W_3 – прискорення центра мас блока 3, і пара сил, момент якої $M_3^{in} = I_3 \varepsilon_3$, де ε_3 – кутове прискорення блока.

Надамо системі можливе переміщення в напрямку її дійсного руху (рис. 6.2) та запишемо загальне рівняння динаміки:

$$G_1 \delta s_1 \sin 60^\circ - F_{mp} \delta s_1 - F_1^{in} \delta s_1 - M_2^{in} \delta \varphi_2 - G_3 \delta s_3 - F_3^{in} \delta s_3 - M_3^{in} \delta \varphi_3 - G_4 \delta s_4 - F_4^{in} \delta s_4 = 0,$$

де $\delta \varphi_2, \delta \varphi_3$ – кути поворотів блоків 2 і 3.

$$(G_1 \sin 60^\circ - F_{mp} - F_1^{in}) \delta s_1 - M_2^{in} \delta \varphi_2 - (G_3 + F_3^{in}) \delta s_3 - M_3^{in} \delta \varphi_3 - (G_4 + F_4^{in}) \delta s_4 = 0. \quad (1)$$

Залежності між можливими переміщеннями такі ж, як і між відповідними швидкостями. Виразимо швидкості центрів мас і кутові швидкості тіл системи через швидкість тіла 1.

Як показано на рис. 6.2, миттєвий центр швидкостей блока 3 знаходиться на одній вертикалі з центром блока 2. Відстань між миттєвим центром швидкостей і центром блока 3 $b = \frac{3r}{2} - r = \frac{r}{2}$.

Тепер знаходимо залежності між швидкостями:

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 = \omega_3 = \frac{V_1}{R} = \frac{V_1}{2r}; \\ V_3 = V_4 = \omega_3 b = \frac{V_1}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Такі ж залежності і між можливими переміщеннями:

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = \frac{\delta s_1}{2r}; \\ \delta s_3 = \delta s_4 = \frac{\delta s_1}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Враховуючи (3), рівняння (1) після скорочення на δs_1 приймає вигляд:

$$G_1 \sin 60^\circ - F_{mp} - F_1^{iH} - \frac{M_2^{iH}}{2r} - \frac{G_3}{4} - \frac{F_3^{iH}}{4} - \frac{M_3^{iH}}{2r} - \frac{G_4}{4} - \frac{F_4^{iH}}{4} = 0.$$

Так як

$$G_1 = G_2 = 2G = 2mg; G_3 = G_4 = G = mg, \quad (4)$$

маємо

$$\left. \begin{aligned} F_{mp} &= fG_1 \cos 60^\circ = fmg; \\ F_1^{iH} &= m_1 W_1 = 2mW_1; \\ M_2^{iH} &= I_2 \varepsilon_2 = m_2 i_2^2 \varepsilon_2 = 4mr^2 \varepsilon_2; \\ F_3^{iH} &= m_3 W_3 = mW_3; \\ M_3^{iH} &= I_3 \varepsilon_2 = \frac{m_3 (1,5r)^2}{2} \cdot \varepsilon_3 = \frac{9mr^2 \varepsilon_3}{8}; \\ F_4^{iH} &= m_4 W_4 = mW_4. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Залежності між прискореннями у відповідності з (2)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{W_1}{2r}; \\ W_3 = W_4 = \frac{W_1}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Підставляючи (5) і (6) у (4), отримаємо

$$g\sqrt{3} - fg - 2W_1 - W_1 - \frac{g}{4} - \frac{W_1}{16} - \frac{9W_1}{32} - \frac{g}{4} - \frac{W_1}{16} = 0.$$

звідки
$$W_1 = \frac{g(\sqrt{3}-f-0,5)}{3,41} = 2,96m/c^2; W_4 = \frac{W_1}{4} = 0,74m/c^2.$$

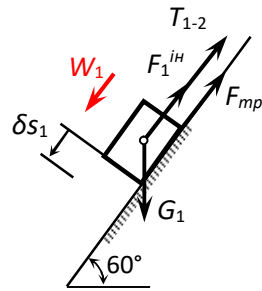


Рис. 6.3

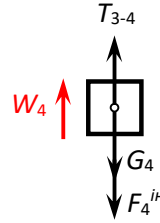


Рис. 6.4

Для визначення сили натягу нитки на ділянці 1–2, умовно переріжемо нитку та замінимо її дію на вантаж 2 реакцією T_{1-2} (рис. 6.3).

Загальне рівняння динаміки

$$G_1 \delta s_1 \sin 60^\circ - F_{mp} \delta s_1 - F_1^{ин} \delta s_1 - T_{1-2} \delta s_1 = 0,$$

звідки $T_{1-2} = G_1 \sin 60^\circ - F_{mp} - F_1^{ин} = 2G \sin 60^\circ - 2Gf \cos 60^\circ - \frac{2G}{g} \cdot W_1 = 0,93G$.

Для визначення сили натягу нитки на ділянці 3–4, умовно переріжемо цю нитку та замінимо її дію на вантаж 4 реакцією T_{3-4} (рис. 6.4).

Не записуючи загального рівняння динаміки, на основі принципу Даламбера маємо

$$T_{3-4} = G_4 + F_4^{ин} = G + \frac{G}{g} W_4 = 1,08G.$$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Іванов І. І. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Вид-во КНЕУ, 2019. – 352 с.
2. Петров П. П. Основи механіки: Навчальний посібник. – Харків: Вид-во ХНУ, 2021. – 298 с.
3. Смирнов С. С. Статика та динаміка твердих тіл: Методичні рекомендації для практичних занять. – Львів: Вид-во ЛНУ, 2020. – 220 с.
4. Кузнецов В. В. Теоретична механіка для інженерів: Підручник. – Дніпро: ДНУ, 2018. – 410 с.
5. Кравченко О. О. Механіка матеріальних точок та твердих тіл. – Одеса: Вид-во ОНУ, 2022. – 275 с.
6. Чернявський М. М. Динаміка механічних систем: Методичні вказівки для самостійного вивчення. – Харків: Видавничий дім ХНЕУ, 2017. – 185 с.
7. Савченко Ю. Ю. Теоретична та прикладна механіка. – Полтава: ПНТУ, 2020. – 360 с.
8. Гончаренко Л. Л., Тарасов В. А. Основи статичних розрахунків: Підручник для технічних спеціальностей. – Київ: Видавництво КПІ, 2019. – 290 с.
9. Григор'єв А. С. Розв'язування задач з механіки: Навчальний посібник. – Тернопіль: ТДТУ, 2021. – 310 с.
10. Мельник Т. Т., Лозовий А. В. Теоретична механіка: Вправи та задачі для практичних занять. – Вінниця: ВНТУ, 2018. – 250 с.

Навчальне видання
(українською мовою)

Онопрієнко Олег Дмитрович
Товт Богдан Миколайович

Теоретична механіка
Навчальний посібник

Друкується в авторській редакції
Відповідальний за випуск І. І. Іванов
Комп'ютерна верстка І. І. Іванов
Оформлення згідно зі стандартами книговидання
Підписано до друку _____.2025 р. Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Друк цифровий. Ум.-друк. арк. 18,00. Обл.-вид. арк. _____.
Наклад 50 прим. Зам. № ____
Видавництво
м. Дніпро, вул. Уральська, 17
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру виготовлювачів і
розповсюджачів видавничої продукції
ДК №_____ від _____._____._____ рр.
Віддруковано
49008, м. Дніпро, вул. Уральська, 17