

Определение эффективных характеристик волокнистого вязкоупругого композита с трансверсально-изотропными составляющими

А.Ф. Булат^а, В.И. Дырда^а, С.Н. Гребенюк^б, М.И. Клименко^б

^а Институт геотехнической механики НАН Украины, Днепр, Украина

^б Запорожский национальный университет, Запорожье, Украина

Пропонується методика визначення параметрів інтегрального оператора ефективного поздовжнього модуля пружності першого роду для композиційного матеріалу. Об'єкт дослідження – в'язкопружний трансверсально-ізоотропний композит з періодичною структурою. Елементи його комірки – трансверсально-ізоотропні в'язкопружна матриця та пружне волокно. Вони апроксимуються відповідно порожнистим та суцільним циліндрами. Реологічні характеристики матриці описуються згідно спадкової теорії Больцмана – Вольтерра. Розглядається вісесиметричне поздовжнє розтягнення комірки. Вважається, що радіальні переміщення та напруження на межі поділу матриці та волокна є неперервними, бічна поверхня комірки вільна від напружень, осеві деформації матриці та волокна співпадають. Для розв'язання отриманої крайової задачі застосовується перетворення Лапласа. Аналогічна задача у просторі зображень розв'язується для однорідного трансверсально-ізоотропного в'язкопружного композита. Ефективний миттєвий поздовжній модуль пружності та ядро релаксації визначаються з умови узгодженості деформування композита та його складових – рівності їх осевих деформацій. Запропонована методика дозволяє визначити в'язкопружні характеристики композита через відповідні характеристики його елементів і об'ємні частки матриці та волокна у композиційному матеріалі.

Ключові слова: композиційний матеріал, матриця, волокно, поздовжнє розтягнення, в'язкопружність, ефективні характеристики, миттєвий модуль пружності, ядро релаксації

Предлагается методика определения параметров интегрального оператора эффективного продольного модуля упругости первого рода для композиционного материала. Объект исследования – вязкоупругий трансверсально-изотропный композит с периодической структурой. Элементы его ячейки – трансверсально-изотропные вязкоупругая матрица и упругое волокно. Они соответственно аппроксимируются полым и сплошным цилиндрами. Реологические характеристики матрицы описываются согласно наследственной теории Больцмана – Вольтерра. Рассматривается осесимметричное продольное растяжение ячейки. Предполагается, что радиальные перемещения и напряжения на границе раздела матрицы и волокна непрерывны, боковая поверхность ячейки свободна от напряжений, осевые деформации матрицы и волокна совпадают. Для решения полученной краевой задачи применяется

преобразование Лапласа. Аналогичная задача в пространстве изображений решается для однородного трансверсально-изотропного вязкоупругого композита. Эффективный мгновенный продольный модуль упругости и ядро релаксации определяются из условия согласованности деформирования композита и его составляющих – равенства их осевых деформаций. Предложенная методика позволяет определить вязкоупругие характеристики композита через соответствующие характеристики его элементов и объемные доли матрицы и волокна в композиционном материале.

Ключевые слова: композиционный материал, матрица, волокно, продольное растяжение, вязкоупругость, эффективные характеристики, мгновенный модуль упругости, ядро релаксации

Введение. В современных конструкциях широко применяются композиционные материалы, состоящие из связующего материала – матрицы, армированной высокопрочными волокнами, и проявляющие в процессе эксплуатации вязкоупругие свойства и наличие анизотропии. Для построения практически пригодных моделей композитных элементов конструкций возникает необходимость определения физико-механических свойств композитов по свойствам их структурных элементов, что является важной задачей современной механики композиционных материалов. Для ее решения используют аналитические, численные и экспериментальные методы. Можно отметить большое количество научных исследований, посвященных определению эффективных механических характеристик вязкоупругих композитов.

Анализ исследований. В работах [1–3] исследуются проблемы прогнозирования вязкоупругих свойств композитов при наличии вязкоупругой матрицы или вязкоупругого волокна. В [1] отмечено, что существенными вязкоупругими свойствами обладают органические волокна. В [3] рассмотрены композиты с изотропной вязкоупругой матрицей, при этом рассматривается их продольное деформирование. Продольная вязкоупругость композитов с органическими волокнами изучается в [4]. В статье Куимовой Е.В., Труфанова Н.А. [5] метод квазиконстантных операторов применяется совместно с методом конечных элементов для численного определения эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленных армированных полимерных композитов. При этом композит рассматривался как однородный вязкоупругий трансверсально-изотропный материал. Для композита с изотропной матрицей и трансверсально-изотропным волокном результаты расчета вязкоупругих характеристик сравнивались с результатами эксперимента.

Определение характеристик вязкоупругого деформирования композитов с применением теории наследственной вязкоупругости Больцмана – Вольтерра рассмотрено в [6]. Здесь предложена методика определения эффективных вязкоупругих характеристик композитов, основанная на аппроксимации функции деформирования цепной дробью и дальнейшем

применении метода операторных цепных дробей. Квазистатистические задачи линейной теории вязкоупругости для композитов рассмотрены в [7].

В [8] исследованы эффективные характеристики полимерного однонаправленного волокнистого вязкоупругого композита при наличии симметричной трещины в зоне контакта волокна и матрицы, для чего использовался энергетический подход в сочетании с методом конечных элементов. В работе Gosz M., Moran B., Achenbach J.D. [9] для определения эффективных вязкоупругих характеристик волокнистого композита предложена линейная вязкоупругая модель поверхности раздела волокна и матрицы, для исследования которой применяется метод конечных элементов. Эффективные характеристики композита с вязкоупругими составляющими определяются в [10] путем решения предложенного здесь интегрального уравнения.

Постановка задачи. В данной статье предлагается методика определения эффективных характеристик вязкоупругого волокнистого однонаправленного трансверсально-изотропного композита с трансверсально-изотропными составляющими, где вязкоупругой является матрица. Аналогичная задача для композита с трансверсально-изотропным волокном и вязкоупругой изотропной матрицей рассмотрена в [11].

Рассмотрим осесимметричное напряженно-деформированное состояние ячейки композиционного материала, возникающее при ее равномерном продольном растяжении. Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z) , причем ось Oz совпадает с направлением армирования композита волокном. Моделью матрицы является вязкоупругий изотропный полый цилиндр $(a \leq r \leq b)$, моделью волокна – трансверсально-изотропный сплошной цилиндр $(0 \leq r \leq a)$. Предполагается, что радиальные перемещения и напряжения на границе раздела матрицы и волокна $(r = a)$ непрерывны. Далее будем использовать символ $*$ для компонент напряжений, перемещений и деформаций матрицы, символ $^\circ$ – для волокна. В точках матрицы действует растягивающее осевое напряжение $\sigma^*(t)$, волокна – $\sigma^\circ(t)$, причем величины этих напряжений подобраны так, что осевые перемещения в любом сечении $z = h$ совпадают. Радиальное и тангенциальное напряжения $\sigma_r^\circ = \sigma_r^*(r, t), \sigma_\theta^\circ = \sigma_\theta^*(r, t)$, где t – время, касательные напряжения здесь равны нулю.

Краевые условия при совместном деформировании матрицы и волокна имеют вид:

$$\begin{cases} u_r^\circ(a) = u_r^*(a), \\ \sigma_r^\circ(a) = \sigma_r^*(a), \\ \sigma_r^*(b) = 0, \\ \varepsilon_z^\circ = \varepsilon_z^*. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $u_r(r, t)$ – радиальное перемещение, ε_z – осевая деформация. Сначала определим напряжения и деформации матрицы и волокна при их совместном растяжении, потом найдем компоненты напряженно-деформированного состояния однородного композита. Из условия равенства осевых деформаций в обоих случаях определим эффективный продольный модуль упругости первого рода для вязкоупругого трансверсально-изотропного композитного материала.

Решение задачи о совместном деформировании матрицы и волокна в пространстве изображений. Найдем радиальные перемещения точек волокна. Из уравнений равновесия остается только одно, остальные выполняются тождественно. Это уравнение принимает вид:

$$\frac{d\sigma_r^\circ}{dr} + \frac{\sigma_r^\circ - \sigma_\theta^\circ}{r} = 0.$$

Выражая напряжения через перемещения, из последнего уравнения получим уравнение относительно радиального перемещения $u_r^\circ(r, t)$ точек волокна:

$$\frac{d^2 u_r^\circ}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r^\circ}{dr} - \frac{u_r^\circ}{r^2} = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$u_r^\circ(r, t) = C(t)r + \frac{D(t)}{r}.$$

Так как оно должно быть ограниченным при $r = 0$, то $D(t) \equiv 0$. Выражение для радиального перемещения волокна принимает вид:

$$u_r^\circ(r, t) = C(t)r, \quad (2)$$

Выражения для осевой деформации и радиального напряжения трансверсально-изотропного материала волокна находим, используя формулы Коши и закон Гука:

$$\varepsilon_z^\circ(z, t) = \frac{1}{1 - \nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma^\circ(t)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C(t)\nu_{21}^\circ \right), \quad (3)$$

$$\sigma_r^\circ(t) = \frac{E_2^\circ}{1 - \nu_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma^\circ(t)\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C(t) \right). \quad (4)$$

Здесь E_1° и E_2° – соответственно продольный и поперечный модули упругости, ν_{12}° , ν_{21}° и ν_{23}° – коэффициенты Пуассона, индекс 1 соответствует оси z , перпендикулярной плоскости изотропии. Далее перейдем к продольному модулю упругости E_1 для матрицы и для волокна, используя

соотношение $\frac{E_1}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{\nu_{21}}$.

Нормальные напряжения в матрице для рассматриваемой задачи имеют вид: $\sigma_z^* = \sigma_0^*(t)$, $\sigma_r^* = \sigma_r^*(r, t)$, $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta^*(r, t)$, касательные напряжения равны нулю. Аналогично рассмотренному выше случаю волокна получаем радиальные перемещения точек матрицы в виде:

$$u_r^*(r, t) = A(t)r + \frac{B(t)}{r}. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение линейный интегральный оператор:

$$\bar{E}[y(t)] = E \cdot \left(y(t) - \int_0^t R(t-\tau)y(\tau)d\tau \right). \quad (6)$$

Здесь $E = \text{const}$ – мгновенный модуль упругости (значение модуля упругости вязкоупругого материала в начальный момент времени $t = 0$), $R(t)$ – ядро релаксации. Оператор, обратный (2), имеет вид:

$$\bar{E}^{-1}[y(t)] = \frac{1}{E} \cdot \left(y(t) + \int_0^t Q(t-\tau)y(\tau)d\tau \right),$$

где $Q(t)$ – ядро ползучести.

Найдем деформации ε_r^* и ε_θ^* матрицы:

$$\varepsilon_r^* = \frac{du_r^*}{dr} = A(t) - \frac{B(t)}{r^2},$$

$$\varepsilon_\theta^* = \frac{u_r^*}{r} = A(t) + \frac{B(t)}{r^2}.$$

Используя закон Гука, находим:

$$\varepsilon_z^* = \frac{1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*}{1 - \nu_{23}^*} (\bar{E}_1^*)^{-1} [\sigma^*(t)] - \frac{2\nu_{21}^*}{1 - \nu_{23}^*} A(t),$$

$$\sigma_r^* = \frac{\nu_{21}^*}{1 - \nu_{23}^*} \sigma^*(t) + \frac{\nu_{21}^*}{\nu_{12}^*(1 - \nu_{23}^*)} \bar{E}_1^* [A(t)] - \frac{\nu_{21}^*}{\nu_{12}^*(1 + \nu_{23}^*)} \cdot \frac{\bar{E}_1^* [B(t)]}{r^2}.$$

Из условий (1) получим систему уравнений относительно неизвестных функций $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и соотношения между $\sigma^*(t)$ и $\sigma^\circ(t)$. Применим

к ней преобразование Лапласа $X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt$. $A(t) \leftrightarrow \tilde{A}(p)$,

$B(t) \leftrightarrow \tilde{B}(p)$, $C(t) \leftrightarrow \tilde{C}(p)$, $\sigma^*(t) \leftrightarrow \tilde{\sigma}^*(p)$, $\sigma^\circ(t) \leftrightarrow \tilde{\sigma}^\circ(p)$. Изображение

интегрального оператора типа свертки

$\bar{E}_1^* [y(t)] = E_1^* \cdot \left(y(t) - \int_0^t R(t-\tau)y(\tau)d\tau \right)$ имеет вид:

$$\tilde{E}_1^* = E_1^* [\tilde{Y}(p)(1 - \tilde{R}(p))],$$

где $\tilde{R}(p)$ – изображение ядра $R(t)$.

Введем следующие обозначения: $\alpha^\circ = \frac{v_{21}^\circ}{1 - v_{23}^\circ}$, $\alpha^* = \frac{v_{21}^*}{1 - v_{23}^*}$, $\beta^\circ = \frac{\alpha^\circ}{v_{12}^\circ}$,

$$\beta^* = \frac{\alpha^*}{v_{12}^*}, \quad \gamma^* = \frac{v_{21}^*}{v_{12}^*(1 + v_{23}^*)}, \quad \delta^\circ = \frac{1 - v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ}{1 - v_{23}^\circ}, \quad \delta^* = \frac{1 - v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^*}{1 - v_{23}^*},$$

$$y^* = E_1^* (1 - \tilde{R}(p)).$$

В изображениях система уравнений, получающаяся из (1), имеет вид:

$$\begin{cases} (\beta^\circ E_1^\circ - \beta^* y^*) \tilde{A} + (\beta^\circ E_1^\circ + \gamma^* y^*) \frac{\tilde{B}}{a^2} = \alpha^* \tilde{\sigma}^* - \alpha^\circ \tilde{\sigma}^\circ, \\ \alpha^* \tilde{\sigma}^* + \beta^* y^* \tilde{A} - \gamma^* y^* \frac{\tilde{B}}{b^2} = 0, \\ 2(\alpha^\circ - \alpha^*) y^* \tilde{A} + 2\alpha^\circ y^* \frac{\tilde{B}}{a^2} = -\delta^* \tilde{\sigma}^* + \frac{\delta^\circ}{E_1^\circ} y^* \tilde{\sigma}^\circ. \end{cases} \quad (7)$$

Из полученной системы находим неизвестные \tilde{A} , $\frac{\tilde{B}}{a^2}$ и отношение $\frac{\tilde{\sigma}^*}{\tilde{\sigma}^\circ}$.

Введем вспомогательные величины:

$$k_1 = 2((\alpha^* - \alpha^\circ)\gamma^* - \alpha^\circ\beta^*), \quad k_2 = 2\alpha^*\beta^\circ E_1^\circ, \quad k_3 = 2\alpha^\circ\alpha^* + \delta^*\gamma^*, \quad k_4 = \delta^*\beta^\circ E_1^\circ,$$

$$k_5 = \frac{\gamma^*\delta^\circ}{E_1^\circ}, \quad k_6 = 2(\alpha^\circ)^2 + \beta^\circ\delta^\circ, \quad k_7 = \beta^*\delta^* + 2(\alpha^* - \alpha^\circ)\alpha^*, \quad k_8 = -\beta^\circ E_1^\circ\delta^*,$$

$$k_9 = \frac{\beta^*\delta^\circ}{E_1^\circ}, \quad k_{10} = 2\alpha^\circ(\alpha^* - \alpha^\circ) - \beta^\circ\delta^\circ.$$

Выражения для \tilde{A} , $\frac{\tilde{B}}{a^2}$ и $\frac{\tilde{\sigma}^*}{\tilde{\sigma}^\circ}$ принимают вид:

$$\tilde{A} = \frac{(k_3 y^* + k_4) \tilde{\sigma}^* - (k_5 (y^*)^2 + k_6 y^*) \tilde{\sigma}^\circ}{k_1 (y^*)^2 + k_2 y^*}, \quad (8)$$

$$\frac{\tilde{B}}{a^2} = \frac{(k_7 y^* + k_8) \tilde{\sigma}^* - (k_9 (y^*)^2 + k_{10} y^*) \tilde{\sigma}^\circ}{k_1 (y^*)^2 + k_2 y^*}, \quad (9)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}^*}{\tilde{\sigma}^\circ} = \frac{(\beta^* k_5 - \gamma^* f k_9)(y^*)^2 + (\beta^* k_6 - \gamma^* f k_{10})y^*}{(\alpha^* k_1 + \beta^* k_3 - \gamma^* f k_7)y^* + \alpha^* k_2 + \beta^* k_4 - \gamma^* f k_8}, \quad (10)$$

где $f = \frac{a^2}{b^2}$. Для изображения \tilde{C} получим: $\tilde{C} = \tilde{A} + \frac{\tilde{B}}{a^2}$.

Продольное растяжение композита. Рассмотрим продольное растяжение для трансверсально-изотропного вязкоупругого материала, моделирующего поведение композита. Поле напряжений для него описывается соотношениями:

$$\sigma_z = \sigma(t), \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0. \quad (11)$$

Вязкоупругие свойства композита моделируются при помощи интегрального оператора

$$\tilde{E}_1[x(t)] = E_1 \cdot \left(x(t) - \int_0^t R(t-\tau)x(\tau)d\tau \right), \quad (12)$$

где $E_1 = \text{const}$ – мгновенный модуль упругости, $R(t)$ – ядро релаксации.

Осевая деформация композита:

$$\varepsilon_z = \tilde{E}_1^{-1}[\sigma(t)]. \quad (13)$$

Значения $\sigma^*(t)$, $\sigma^\circ(t)$ и $\sigma(t)$ должны удовлетворять условию равновесия:

$$f \cdot \sigma^\circ(t) + (1-f)\sigma^*(t) = \sigma(t).$$

Аналогичное равенство выполняется и для изображений.

Определение эффективного продольного модуля упругости. В качестве условия согласования продольного растяжения модели композита и композитной ячейки «матрица – волокно» примем равенство осевых деформаций матрицы, волокна и материала композита в целом. Изображение осевой деформации волокна имеет вид:

$$\tilde{\varepsilon}_z^\circ = \frac{\tilde{\sigma}^\circ (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) - 2\nu_{21}^\circ E_1^\circ \tilde{C}}{E_1^\circ (1 - \nu_{23}^\circ)}. \quad (14)$$

Изображение осевой деформации модели композита имеет вид:

$$\tilde{\varepsilon}_z = \frac{\tilde{\sigma}}{E_1(1-\tilde{R})} = \frac{f\tilde{\sigma}^\circ + (1-f)\tilde{\sigma}^*}{E_1(1-\tilde{R})}. \quad (15)$$

Условие согласования осевых деформаций матрицы, волокна и композита обеспечивается равенством $\tilde{\varepsilon}_z = \tilde{\varepsilon}_z^\circ$. Подставим в это равенство соотношения (3) и (15):

$$\frac{f\tilde{\sigma}^\circ + (1-f)\tilde{\sigma}^*}{E_1(1-\tilde{R})} = \frac{1}{1-\nu_{23}^\circ} \left(\frac{\tilde{\sigma}^\circ (1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2\tilde{C}\nu_{21}^\circ \right). \quad (16)$$

Выражения для изображений $\tilde{\sigma}^\circ$, $\tilde{\sigma}^*$ и \tilde{C} содержат $y^* = E_1^*(1 - \tilde{R}^*)$.
 Перейдем в равенстве (17) к пределу при $p \rightarrow \infty$. Так как \tilde{R}^* и \tilde{R} являются изображениями, то $\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{R}(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{R}^*(p) = 0$ и из (16) получим выражение для мгновенного модуля упругости E_1 .

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{-(v_{21}^*)^2 v_{12}^\circ (f-1)^3 (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ)(1-v_{23}^\circ)}{E_1^\circ v_{12}^*}, \\
 d_2 &= v_{21}^* (1-f)^2 \left(v_{21}^\circ (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^*) + 1 + v_{23}^*) (1-v_{23}^\circ) + \frac{v_{21}^* v_{12}^\circ}{v_{12}^*} \times \right. \\
 &\quad \left. \times f(1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) \times (1-v_{23}^\circ) - (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) v_{21}^\circ (v_{23}^* (f-1) - 1 - f) \right), \\
 d_3 &= v_{21}^* (f-1) f (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) v_{21}^\circ E_1^\circ (v_{23}^* (f-1) - 1 - f) - (v_{21}^\circ)^2 \times \\
 &\quad \times \frac{v_{12}^*}{v_{12}^\circ} E_1^\circ (v_{23}^* (f-1) - 1 - f) \times (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^*) + 1 + v_{23}^*) (1-f) - \\
 &\quad - f v_{21}^\circ E_1^\circ (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^*) v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ), \\
 d_4 &= f (v_{21}^\circ)^2 (E_1^\circ)^2 v_{12}^* (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^*) (v_{23}^* (f-1) - 1 - f), \\
 d_5 &= \frac{(v_{21}^*)^2 v_{12}^\circ (f-1)^2 (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ)(1-v_{23}^\circ)}{E_1^\circ v_{12}^*}, \\
 d_6 &= v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ) v_{21}^\circ (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^*) + v_{21}^\circ \times \\
 &\quad \times (1 + v_{23}^* + f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ)) \times v_{21}^* (f-1) (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) + \\
 &\quad + 2f (v_{21}^*)^2 v_{21}^\circ v_{12}^\circ (f-1) (1-v_{23}^\circ - 2v_{12}^* v_{21}^\circ), \\
 d_7 &= \frac{(v_{21}^\circ)^2 v_{12}^* E_1^\circ}{v_{12}^\circ} (1 + v_{23}^* + f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ)) (f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^\circ v_{21}^\circ) + 1 + v_{23}^*) + \\
 &\quad + 2(v_{21}^\circ)^2 E_1^\circ v_{12}^* v_{21}^* (1 + v_{23}^* + f(1-v_{23}^* - 2v_{12}^* v_{21}^\circ)).
 \end{aligned}$$

Выражение для мгновенного модуля упругости принимает вид:

$$E_1 = \frac{d_1 (E_1^*)^3 + d_2 (E_1^*)^2 + d_3 E_1^* - d_4}{d_5 (E_1^*)^2 - d_6 E_1^* + d_7}, \quad (17)$$

где E_1^* – мгновенный модуль упругости матрицы.

Изображение ядра релаксации $\tilde{R}(p)$ находим из (16):

$$\tilde{R} = 1 - \frac{(f\tilde{\sigma}^\circ + (1-f)\tilde{\sigma}^*)(1-\nu_{23}^\circ)E_1^\circ}{E_1(\tilde{\sigma}^\circ(1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ) - 2E_1^\circ\nu_{21}^\circ\tilde{C})}.$$

Его выражение через параметры ячейки композита имеет вид:

$$\tilde{R}(p) = \frac{1}{E_1} \frac{E_1 \left[d_5 (y^*)^2 - d_6 y^* + d_7 \right] - d_1 (y^*)^3 - d_2 (y^*)^2 - d_3 y^* + d_4}{d_5 (y^*)^2 - d_6 y^* + d_7} \quad (18)$$

По найденному изображению, используя теорему обращения для преобразования Лапласа, находим оригинал $R(t)$. Эта задача решается достаточно просто, если интегральные операторы, описывающие реологические характеристики матрицы и волокна, имеют ядра релаксации экспоненциального типа. В этом случае изображение ядра релаксации для композита представляет собой отношение двух многочленов, имеющее конечное число особых точек (полюсов) и оригинал можно получить, используя для обращения преобразования Лапласа теорему разложения.

Пусть ядро релаксации для матрицы $R^*(t) = be^{at} \leftrightarrow \tilde{R}(p) = \frac{b}{p-a}$. В этом случае изображение (18) принимает вид:

$$\tilde{R}(p) = \frac{1}{E_1} \frac{Q(p)}{(p-a)(s_1 p^2 - s_2 p + s_3)}, \quad (19)$$

$$Q(p) = -d_1 (E_1^*)^3 (p-a-b)^3 + (E_1 d_5 - d_2) (E_1^*)^2 (p-a-b)^2 (p-a) - (E_1 d_6 + d_3) E_1^* (p-a-b) (p-a)^2 + (E_1 d_7 + d_4) (p-a)^3,$$

$$s_1 = d_5 (E_1^*)^2 - d_6 E_1^* + d_7, \quad s_2 = 2(a+b) d_5 (E_1^*)^2 - (2a+b) d_6 E_1^* + 2ad_7,$$

$$s_3 = d_5 (E_1^*)^2 (a+b)^2 - d_6 E_1^* a (a+b) + d_7 a^2.$$

Оригинал ядра релаксации для композита имеет вид:

$$R(t) = \alpha_0 e^{at} + \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t},$$

где p_1 и p_2 – корни квадратного трехчлена в знаменателе (19), коэффициенты α_0 , α_1 и α_2 находим по формулам:

$$\alpha_0 = \frac{Q(a)}{E_1 s_1 (a-p_1)(a-p_2)}, \quad \alpha_1 = \frac{Q(p_1)}{E_1 s_1 (p_1-a)(p_1-p_2)},$$

$$\alpha_2 = \frac{Q(p_2)}{E_1 s_1 (p_2-a)(p_2-p_1)}.$$

Численный результат. Воспользуемся формулами (17) и (18) для определения вязкоупругих характеристик композита, материал трансверсально-изотропного упругого волокна которого – полиэтилен VHDPE Tenfor SNIA с параметрами $E_1^\circ = 60,4$ ГПа, $\nu_{12}^\circ = 0,38$,

$\nu_{21}^{\circ} = 0,03$ $\nu_{23}^{\circ} = 0,55$. Вязкоупругим изотропным связующим является эпоксидная смола Ciba-Geigy 913 ($E_1^* = E^* = 5,55$ ГПа, $\nu^* = 0,37$), вязкоупругие характеристики которой описываются следующим интегральным оператором $\bar{E}_1^*[\varepsilon(t)] = E^* \left(\varepsilon(t) - \int_0^t e^{-(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \right)$.

Полученные значения эффективного мгновенного модуля упругости E_1 композита при различных значениях объемного содержания f волокна в нем свидетельствуют о наличии между этими показателями возрастающей зависимости, близкой к линейной. Значения характеристик интегрального оператора \bar{E}_1 (мгновенный модуль упругости E_1 и коэффициенты ядра релаксации $R(t) = \alpha_0 e^{-t} + \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t}$) для рассматриваемого композита при некоторых значениях f приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения характеристик оператора \bar{E}_1 при различных значениях объемного содержания f волокна в композите

f	0,2	0,4	0,6	0,8
E_1 , ГПа	15,69	26,87	38,06	40,23
p_1	-0,784	-0,838	-0,893	-0,947
p_2	-0,781	-0,835	-0,888	-0,943
α_0	0,269	0,121	0,057	0,022
α_1	$0,26 \cdot 10^{-5}$	$-0,99 \cdot 10^{-5}$	$-0,43 \cdot 10^{-5}$	$0,54 \cdot 10^{-5}$
α_2	$0,19 \cdot 10^{-5}$	$1,43 \cdot 10^{-5}$	$0,75 \cdot 10^{-5}$	$-0,31 \cdot 10^{-5}$

На рис.1 приведены кривые

$$h(t) = \bar{E}_1[1] = E_1 \left(1 - \alpha_0 (1 - e^{-t}) + \frac{\alpha_1}{p_1} (1 - e^{p_1 t}) + \frac{\alpha_2}{p_2} (1 - e^{p_2 t}) \right),$$

описывающие действие интегрального оператора на единичную функцию при $f = 0,2$, $f = 0,4$ и $f = 0,6$. Отметим, что при любых f наибольший вклад в реологические характеристики композита вносит слагаемое, содержащее e^{-t} . Коэффициент α_0 является максимальным по абсолютной величине среди коэффициентов при экспонентах в формуле для ядра релаксации композита $R(t) = \alpha_0 e^{at} + \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t}$

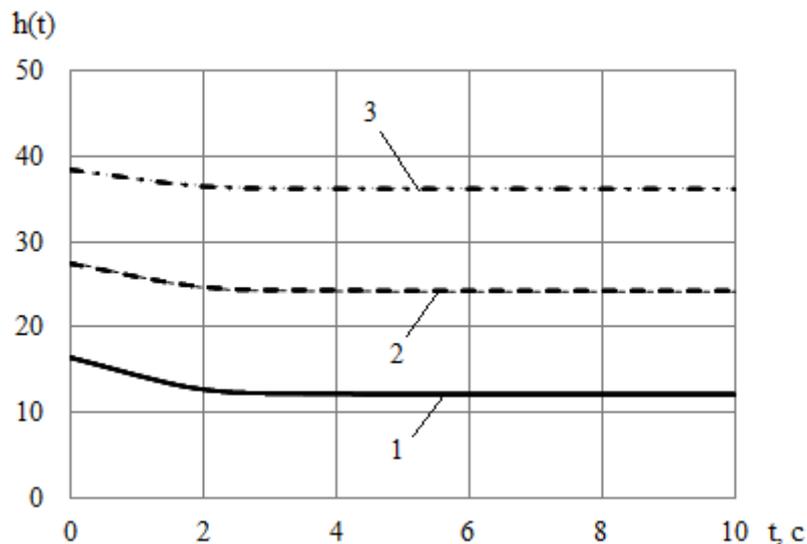


Рис. 1. Зависимость реологических характеристик композита от времени:
1, 2, 3 – зависимости при $f=0,2$; $0,4$; $0,6$, соответственно.

Применение в качестве ядра релаксации для вязкоупругой матрицы такой затухающей экспоненты не вполне соответствует экспериментальным данным, так это ядро конечно при $t = \tau$. При больших значениях t оно хорошо отражает качественные стороны линейного деформирования вязкоупругого материала, что оправдывает выбор такого ядра. Использование экспоненциального ядра релаксации соответствует выбору для описания вязкоупругого состояния матрицы модели типа Максвелла [12]. Ее материал представляется в виде сочетания вязких и упругих элементов, соединенных последовательно. При постоянной во времени линейной единичной деформации напряжение в матрице $\sigma = \bar{E}_1^* [1] = 5,5 \cdot e^{-t}$. При $t \rightarrow \infty$ оно стремится к нулю. Имеются материалы, в которых эта зависимость адекватно отражает изменение напряжения во времени при постоянстве деформации [12]. Такая зависимость для композита получается при $f = 0$, когда материал композита совпадает с материалом матрицы. При значениях относительного объемного содержания волокна f в композите, отличных от нуля, напряжения с течением времени стремятся к ненулевой постоянной величине. Это подтверждается зависимостями, показанными на рисунке 1. В этом случае получаем модель композита типа Кельвина.

Выводы. Таким образом, предлагаемая в данной работе методика позволяет находить реологические параметры эффективного продольного модуля упругости вязкоупругого трансверсально-изотропного материала, моделирующего композитную систему «матрица – волокно» с трансверсально-изотропными компонентами. Она может быть применена для различных типов ядер релаксации, описывающих вязкоупругие свойства матрицы. Перспективы дальнейших исследований в данном направлении связаны с построением аналитических зависимостей для системы

эффективных показателей, полностью отражающей механические свойства волокнистого вязкоупругого трансверсально-изотропного композита, а также исследованием влияния воздействия на них температурных полей.

1. Плумен Э. З. Сравнительный анализ ползучести однонаправленных композитов, армированных волокнами различного типа // *Механика композитных материалов*. 1992. № 4. С. 557–566.
2. Кочетков В. А. Прогнозирование термического деформирования слоистых гибридных композитов с учетом термовязкоупругих свойств связующего и волокон // *Механика композитных материалов*. 1993. № 3. С. 317–323.
3. Зелин В. И. Янсон Ю. О. Определение ядер ползучести по результатам кратковременных испытаний // *Механика полимеров*. 1977. № 6. С. 972–975.
4. Труфанов И. А., Сметанников О. Ю. Приближенное определение трансверсальных вязкоупругих свойств органоволокна в составе однонаправленного органопластика // *Численное моделирование статического и динамического деформирования конструкций*. Свердловск: УрО АН СССР. 1990. С. 114–118.
5. Куимова Е. В., Труфанов И. А. Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами // *Вестник Самарского государственного университета*. 2009. № 4(70). С. 129–148.
6. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов // *Прикладная механика*. 2005. Т. 41. № 5. С. 9–21.
7. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
8. Горбатко О. О. Эффективні характеристики в'язкопружного композиційного матеріалу з міжфазною тріщиною // *Вісник Чернігівського державного технологічного університету. Серія «Технічні науки»*. 2012. № 4(53). С. 144–150.
9. Gosz M., Moran B., Achenbach J. D. Effect of a viscoelastic interface on the transverse behavior of fiber-reinforced composites // *International Journal of Solids and Structures*. 1991. Vol. 27. P. 1757–1771.
10. Фильштинський Л. А., Загряжська П. І. Моделювання композитного матеріалу з в'язкопружними компонентами // *Вісник Запорізького національного університету*. 2010. № 2. С. 141–144.
11. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O., Boguslavskaya A. Effective longitudinal elastic modulus of the composite with viscoelastic matrix and transtropic fiber // *Mechanika 2015. Proceedings of the 20th international scientific conference*. Kaunas: University of Technology. 2015. P. 96–100.
12. Ржаницин А. Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1967. 411 с.