

УДК 514.144
© 2016

О.Б. ШАВРОВА,
кандидат фізико-математичних наук

Л.В. КУЗЬМІНОВА,
старший викладач

Дніпропетровський державний
аграрно-економічний університет,
Україна
E-mail: _oxana_13@mail.ru
м. Дніпропетровськ, вул. Ворошилова, 25

ОСНОВНІ ЗАДАЧІ
ВІДОБРАЖЕННЯ
ТА МОДЕЛЮВАННЯ
ПРОСТОРУ НА ПЛОЩИНІ

Розглядається загальна задача геометричного моделювання простору на площині з використанням методу зйомки зі збіжними осями для різних проєціюючих конгруенцій. Одержано рівняння відповідностей точкових рядів, утворених проєкціями пар точок простору на площині проєкцій. Рівняння містять інформацію про вид проєціюючого апарата, метрику простору та проєкційної системи. Сформульований принцип єдинності для систем проєкцій зі збіжними осями, в якому кожному виду проєціювання на площині проєкцій відповідають ознаки, притаманні тільки цьому виду.

Ключові слова: моделювання, конгруенція, метрика, центральні проєкції, двосередовищна зйомка, принцип єдинності.

Постановка проблеми. У теорії відображення та моделювання простору на площині розрізняють три елементи:

- геометричний проєціюючий апарат, до якого входять площина проєкцій Π та проєціююча конгруенція K_2 -двопараметрична множина прямих або кривих ліній;
- просторовий об'єкт;
- проєкції об'єкта на площині Π , виконані даним апаратом.

На площині, за теорією відображення та моделювання простору, розв'язують три задачі, в яких за двома елементами визначають третій. Незважаючи на явний зв'язок цих задач, у загальному вигляді, як єдина задача, вони не розглядалися, оскільки вид проєціюючого апарата визначався за проєкціями лінійчастого простору.

Прикладом такого розв'язання може бути відома теорема єдинності центральних та паралельних проєкцій Єгера [1], сутність

якої в тому, що тільки за цих видів проєціювання пряма загального положення відображається в пряму на площині проєкцій. Для такого розв'язання достатньо однієї проєкції. Але одна проєкція без додаткових умов не відображає ані позиційних, ані метричних властивостей простору, що унеможливило розв'язання задачі в загальному вигляді.

Мета даної роботи полягає в розв'язанні цієї задачі за декількома проєкціями точкового простору. З огляду на загальність задачі, накладено значні обмеження на метод її розв'язання, види проєціюючих апаратів і їх конгруенцій та їх взаємне положення в просторі. У дослідженнях використаний окремий метод проєціювання, відомий у фотографічній метрії, як зйомка зі збіжними осями [3].

Результати дослідження та їх обговорення. Проєціюючий апарат рухається по прямій s (рис.1), займаючи на ній ряд положень, з яких виконується проєціювання

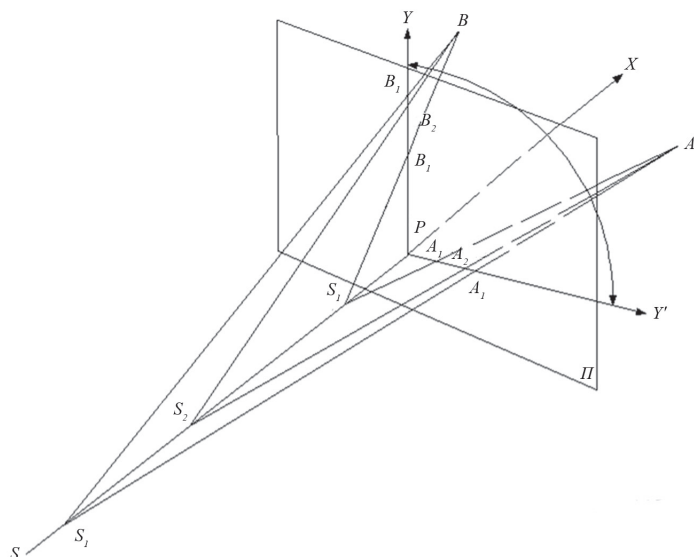


Рис. 1. Схе­ма відображення апаратом центрального проєктування

точок простору на одну площину Π , або зв'язану з конгруенцією площину за подальшого перепроєціювання в останньому випадку на спільну площину.

Розглядалися апарати, що володіють обертальною симетрією навколо осі s руху. При цьому носієм проєкцій точок був пучок прямих з центром в точці P перетину осі s з площиною Π . Проєкції пар точок A, B простору утворюють на прямих y, y' пучки проєктивні ((1-1) – значні) або багатозначні відповідності точкових рядів, де проєкції з однаковими нижніми індексами відповідають одному положенню апарата [2].

Рівняння цих відповідностей містять в собі інформацію про метрику точкового простору (координати точок), вид проєціюючого апарата, його конгруенцію та проєкційну систему. Визначальним при цьому буде знаходження подвійних (або кратних) точок для всіх відповідностей, що можливо тільки за спільного носія точкових рядів. Для цього, використовуючи метод циліндричних координат, суміщаємо обертанням навколо осі s всі площини пучка s проєкційної системи в одну площину. Тоді проєкції точок розташуються на одній прямій y (рис. 1).

Після знаходження кратних точок для всіх відповідностей повертаємо систему в початкове положення. Ці точки, залежно від

проєціюючого апарата, можуть співпадати з точкою P системи або утворювати на площині Π коло кратних точок. Таким чином, просторова задача зводиться до плоскої на одній із площин пучка s .

Для центральних проєкцій сформульовано твердження: якщо три проєкції точкового простору деяким апаратом проєціювання в системі зі збіжними осями s (рис.1) утворюють на площині Π пучок $P = \Pi \cap s$ прямих – носія проєкцій так, що проєкції пар точок A, B простору знаходяться в проєктивних відповідностях з подвійною точкою P для всіх відповідностей, то таке неперервне відображення простору на площину виконано апаратом центрального проєціювання.

Це твердження для точкового простору можна вважати деяким аналогом теореми Єгера для лінійчастого простору. Одержано рівняння (1) проєктивної відповідності, утвореного проєкціями пар точок $A(a;e), B(c;d)$ – рис. 2:

$$y_i - Cy_i y'_i - Dy'_i = 0 \dots, \quad (1)$$

де y_i і y'_i – координати проєкцій та цих точок від початку P , де $i = 1, 2, 3$;

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{a-c}{ad} \\ D &= \frac{cb}{ad} \end{aligned} \right\}, \dots \quad (2)$$

якому знаходяться центри S_1 проєціювання.

Оскільки це рівняння має п'ять невідомих a, b, c, d, n , то за відомими змінними x_i і x'_i потрібно скласти і розв'язати систему з п'яти нелінійних рівнянь виду ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) (3). Для вибору необхідного рішення треба обмежитися простором R_{11} , а обертанням навколо осі у сумістити його в нижню ліву чверть координатних осей x, y . Тоді в дані для вибору рішення входять тільки від'ємні значення координат a, b, c, d , при цьому $n > 1$.

Зазначимо, що в цій системі проєкцій точка $P = O \cap Y$ – двократна для всіх відповідей, утворених проєкціями пар точок простору на прямих пучка $P \supset \Pi$.

Як і теорема Єгера, системи проєкцій зі збіжними осями володіють принципом єдиності, тобто для кожного виду проєціювання на спільній площині проєкцій утворюються ознаки, притаманні тільки цьому виду. Наприклад, дві конгруенції, що задані колом і фокальною сферою за ортогонального перепроєціювання зображень з площин, що з ними зв'язані, утворюють на своїх площинах кола подвійних точок для усіх відповідей. Ці кола є ортогональними проєкціями фокальних елементів цих конгруенцій, але відповідності точкових рядів будуть різними. У першому випадку – проєктивна, у другому – (2, 2)-значна.

Висновки

Розглянута загальна задача геометричного моделювання простору на площині, яка об'єднує в собі три елементи: геометричний апарат проєціювання, просторовий об'єкт та його проєкції, яка може бути використана у фотограмметрії при проектуванні сільськогосподарських агрегатів машинобудування, а також для точного висіву синхронного копіювання рельєфу ґрунту і розвитку нарисної

геометрії, розпізнавання геометричних образів.

Використаний метод зйомки зі збіжними осями для різних проєціюючих конгруенцій. Одержані рівняння відповідностей точкових рядів, утворених проєкціями пар точок простору на площині проєкцій, які містять інформацію про метрику простору, вид проєціюючого апарата та проєкційної системи є дослідницькою частиною наукового напрямку роботи.

Бібліографія

1. Jeger M. Das axonometrische Prinzip in Lichte moderner Begriffsbildungen // Elem. math. – Wien, 1958, – 13, № 1. – P. 112–120.

2. Улановский В.П. Принцип Шаля и его приложения в геометрии и механике / В.П. Улановский // Сб. статей по алгебраической геометрии. – Л.: Изд-во военно-транспорт. акад. РККА, 1938. – С. 156–168.

3. Слюсаренко В.И. Двусредная съемка

при движении фотоаппарата перпендикулярно плоскости раздела сред / В.И. Слюсаренко // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1978. – Вип. 27. – С. 64–71.

4. Быков А.В. Геодезическое обеспечение археологических исследований / А.В. Быков, А.А. Быков, М.В. Лаиов. – Омск: Геоиздат, 2012. – С. 96–102.

Рецензент – доктор технічних наук,
професор **В.І. Слюсаренко**