МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Васильєва Н. К.

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В СІЛЬСЬКОМУ ГОСПОДАРСТВІ

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством аграрної політики
та продовольства України

Дніпропетровськ

Видавець Біла К. О.

2015

УДК 519.6 : 338.43
ББК 65в641 + 65.9(4Укр)32
В 19

Рекомендовано Міністерством аграрної політики та продовольства України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III-IV рівнів акредитації з напрямів підготовки 6.030508 "Фінанси і кредит", 6.030509 "Облік і аудит", 6.030507 "Маркетинг", 6.030601 "Менеджмент" (№ 37-128-13/19220 від 19.12.2014 р.)

Рекомендовано до друку вченою радою Дніпропетровського державного аграрно-економічного університету (протокол № 1 від 30.10.2014)

Рецензенти:
Вініченко І. І., *доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економічної теорії та економіки сільського господарства Дніпропетровського державного аграрно-економічного університету*

Правдюк Н. Л., *доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри організації обліку та звітності Вінницького національного аграрного університету*

Сергеєва Л. Н., *доктор економічних наук, професор, Проректор-директор Інституту моделювання структури та процесів економічних систем Східноєвропейського університету економіки та менеджменту*

Васильєва Н. К.
В 19 Економіко-математичне моделювання в сільському господарстві : навч. посібник / Н. К. Васильєва . – Дніпропетровськ : Біла К. О., 2015. – 155 с.

ISBN 978-617-645-196-9

Розглянуто методи вирішення задач лінійного програмування із застосуванням комп'ютерного інструментарію ОО Calc та MS Excel. Наведено приклади створення моделей цілочислового, нелінійного, стохастичного, динамічного програмування і багатокритеріальної оптимізації. Презентовано основні теоретичні принципи та практичні підходи вирішення задач аграрної економіки, що зводяться до моделей оптимального планування на мережах, управління запасами, матричних ігор, систем масового обслуговування, штучних нейронних мереж. Запропоновано запитання і завдання для контролю засвоєння викладеного матеріалу.

Для студентів вищих закладів освіти, аспірантів з економічних спеціальностей та фахівців, що цікавляться проблемами економіко-математичного моделювання в сільському господарстві.

УДК 519.6 : 338.43
ББК 65в641 + 65.9(4Укр)32

ISBN 978-617-645-196-9

ЗМІСТ

ВСТУП

Економіко-математичне моделювання презентує сучасний апарат обґрунтованого прийняття управлінських рішень, що є необхідним для оптимального планування та пошуку резервів підвищення ефективності економічної діяльності суб'єктів господарювання в умовах динамічних змін зовнішнього середовища та глобальних ринкових викликів.

Розділи посібнику охоплюють питання створення моделей лінійного, цілочислового, стохастичного та нелінійного програмування та знаходження їх оптимальних рішень. Розглянуто елементи теорії оптимізації на мережах, матричних ігор, управління запасами, систем масового обслуговування, динамічного програмування, штучних нейронних мереж.

Практичні аспекти застосування апарату математичного програмування та дослідження операцій проілюстровано на прикладах вирішення задач аграрної економіки інструментами найпоширеніших електронних таблиць MS Excel та OO Calc. Для перевірки засвоєння матеріалу в посібнику наводяться завдання для самостійної роботи та контрольні запитання, що надає можливості пересвідчитися в розумінні розглянутих методів та в якості здобутих знань майбутніх фахівців економічного профілю в галузях знань 0305 "Економіка та підприємництво"та 0306 "Менеджмент і адміністрування".

Автор висловлює щиру вдячність рецензентам – І. І. Вініченку, Н. Л. Правдюк та Л. Н. Сергеєвій – за корисні поради та цінні зауваження науково-методичного характеру під час рецензування рукопису.

Автор сподівається, що презентований навчальний посібник буде корисним всім, хто цікавиться питаннями економіко-математичного моделювання та його застосуванням в аграрній економіці.

РОЗДІЛ 1 ●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●● ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ В АГРАРНІЙ СФЕРІ ●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

1.1. Основні поняття математичного програмування

Задачі математичного програмування відносяться до оптимізаційних задач, де необхідно обрати найкраще рішення згідно з визначеним критерієм якості та обмежувальними умовами. Назва “математичне програмування” вказує на мету вирішення задачі як пошук оптимальної, кількісно формалізованої програми дій.

Загальна постановка задачі математичного програмування має вигляд: знайти такі значення змінних $x_1, ..., x_n$, що задовольняють умови-обмеження

$$g_j(x_1, ..., x_n) \le 0, \; j = \overline{1, k_1}, \tag{1.1}$$

$$g_j(x_1, ..., x_n) = 0, \; j = \overline{k_1 + 1, k_2}, \tag{1.2}$$

$$(x_1, ..., x_n) \in X \tag{1.3}$$

та надають цільовій функції (критерію оптимальності) мінімальне значення:

$$F(x_1, ..., x_n) \to min. \tag{1.4}$$

. Зазначимо, що перетворення обмежень (1.1) на нерівності зі знаком “$\ge$”, а максимізованої цільової функції – на мінімізований критерій оптимальності здійснюється їх помноженням на -1.

Припустимим рішенням (планом) задачі математичного програмування є така сукупність значень змінних $x_1, ..., x_n$, що задовольняє всі її обмеження (1.1)–(1.3).

Оптимальним рішенням (планом) задачі математичного програмування є таке її припустиме рішення $x_1, ..., x_n$, що надає цільовій функції (1.4) шукане мінімальне чи максимальне значення.

Задачі математичного програмування припускають класифікацію:

– за кількістю змінних як задачі одновимірної оптимізації (при $n = 1$) та задачі багатовимірної оптимізації (при $n > 1$);

– за складністю функцій обмежень та критерію оптимальності як задачі лінійного програмування (коли умови (1.1), (1.2) та цільова функція (1.4) описуються лінійними функціями й обмеження типу (1.3) відсутні) та задачі нелінійного програмування (коли серед функцій $g_j(x_1, ..., x_n)$, $j = \overline{1, k_2}$, $F(x_1, ..., x_n)$ є нелінійні);

– за наявністю обмежень як задачі умовної оптимізації (коли обмеження (1.1)–(1.3) звужують множину припустимих значень змінних $x_1, ..., x_n$) та задачі безумовної оптимізації (коли змінні $x_1, ..., x_n$ можуть приймати довільні значення);

– за припустимими значеннями змінних як дискретні задачі (коли множина припустимих рішень складається з дискретних точок, наприклад, з цілими або булевими (нульовими чи одиничними) значеннями змінних) та неперервні задачі (коли невідомі можуть приймати значення з неперервних інтервалів);

– за визначеністю всіх параметрів як детерміновані задачі (коли всі коефіцієнти в обмеженнях і в цільовій функції приймають заздалегідь відомі значення) та стохастичні задачі (коли деякі коефіцієнти в обмеженнях чи в цільовій функції є випадковими величинами).

Узагальненням задач математичного програмування виступають багатокритеріальні оптимізаційні задачі, де необхідно шукати оптимальні рішення одночасно за декількома цільовими функціями (1.4).

1.2. Створення економіко-математичних моделей: постановка та обчислення

Для вирішення багатьох економічних проблем здійснюють їх формалізацію в термінах моделей математичного програмування. Створення подібної математичної моделі виконується за три кроки:

1. Визначають шукані змінні моделі;
2. Описують обмеження у формі рівностей та нерівностей;
3. Задають критерій оптимальності.

Приклад 1.1. В господарстві вирощується пшениця, кукурудза на зерно та соняшник на однорідній посівній площі. Відомі середня врожайність, ціна реалізації та обсяг контрактної угоди по кожній культурі (табл. 1.1). Посівна площа господарства складає *1500* га, причому соняшник може займати не більше *400* га. Треба оптимізувати структуру посівних площ з метою забезпечення максимального загального доходу від реалізації зібраного врожаю.

Таблиця 1.1

Вхідні дані до *прикладу 1.1*

Показники	Сільськогосподарська культура		
	Пшениця	Кукурудза	Соняшник
Врожайність, ц/га	*37*	*47*	*18*
Ціна, грн./т	*1620*	*1330*	*3780*
Обсяг контрактної угоди, т	*800*	*1000*	*200*

Рішення. Нехай x_1 – посівна площа під пшеницю, га; x_2 – посівна площа під кукурудзу на зерно, га; x_3 – посівна площа під соняшник, га. Дотримуючись економічного змісту, всі введені змінні прийматимуть тільки невід’ємні значення: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Обмеження щодо виконання умов за контрактними угодами (в ц) набувають вигляду

$$37x_1 + 0x_2 + 0x_3 \geq 8000, \qquad (1.5)$$

$$0x_1 + 47x_2 + 0x_3 \geq 10000, \qquad (1.6)$$

$$0x_1 + 0x_2 + 18x_3 \geq 2000. \qquad (1.7)$$

Обмеження за земельними ресурсами опишемо як

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 1500, \qquad (1.8)$$

$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \leq 400. \qquad (1.9)$$

Критерій оптимальності, що визначає загальний дохід від реалізації урожаю, підлягає максимізації

$$37 \cdot 162x_1 + 47 \cdot 133x_2 + 18 \cdot 378x_3 \to max \text{ або}$$

$$5994x_1 + 6251x_2 + 6804x_3 \to max. \qquad (1.10)$$

Таким чином, за моделлю розподілу посівних площ треба знайти такі невід'ємні значення змінних x_1, x_2, x_3, що задовольняють обмеження-нерівності (1.5)–(1.9) та надають цільовій функції (1.10) максимальне значення.

Для визначення оптимального плану розподілу посівних площ засобами програми OO Calc необхідно оформити вхідні дані так, як показано на рис. 1.1.

E13 =SUMPRODUCT($B$3:$D$3;B13:D13)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Площі посіву					
2		X1	X2	X3			
3	Значення						
4	Обмеження						
5	Назва	Коефіцієнти			Ліва частина	Знак	Права частина
6	Контракт за пшеницею	37	0	0	0	>=	8000
7	Контракт за кукурудзою	0	47	0	0	>=	10000
8	Контракт за соняшником	0	0	18	0	>=	2000
9	Загальна площа посіву	1	1	1	0	<=	1500
10	Межа посівної площі соняшнику	0	0	1	0	<=	400
11	Критерій оптимальності						
12	Назва	Коефіцієнти			Розрахункове значення		
13	Загальний дохід	5994	6251	6804	0	→	max
14							

Рис. 1.1. Вхідні дані до ***прикладу 1.1***
в електронній таблиці OO Calc

Для виконання обчислень засобами інструментарію “Решатель” слід оформити розрахункові дані згідно з рис. 1.2.

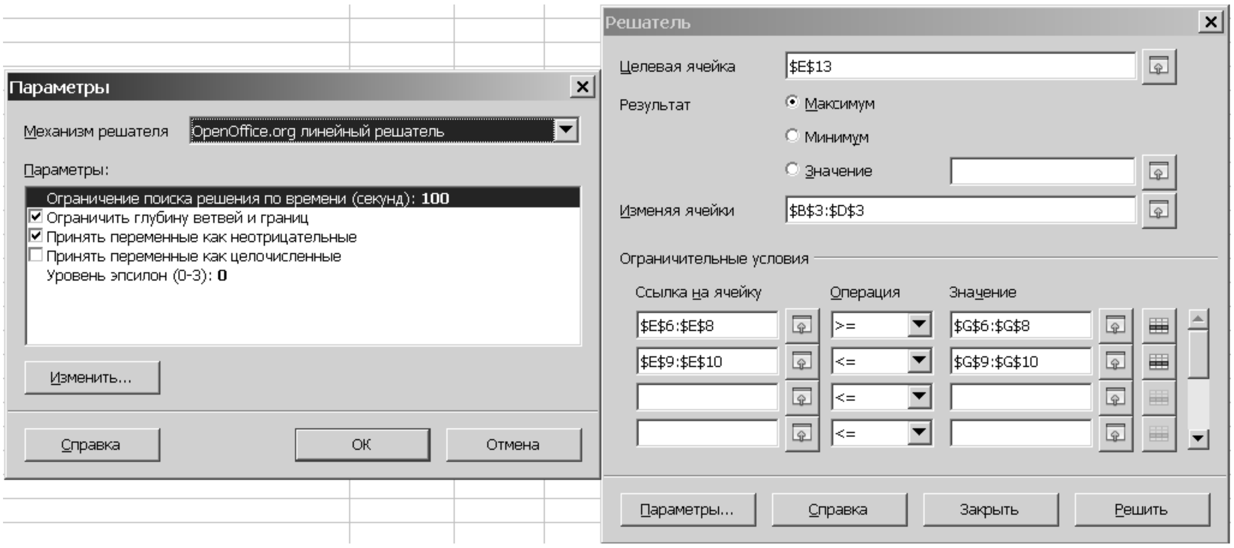


Рис. 1.2. Розрахункові дані до ***прикладу 1.1***
в інструментарії “Решатель”

Одержаний оптимальний план розподілу посівних площ із максимальним загальним доходом від реалізації зібраного врожаю наведено на рис. 1.3.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Площі посіву					
2		X1	X2	X3			
3	Значення	216,22	883,78	400			
4	Обмеження						
5	Назва	Коефіцієнти			Ліва частина	Знак	Права частина
6	Контракт за пшеницею	37	0	0	8000	>=	8000
7	Контракт за кукурудзою	0	47	0	41 537,84	>=	10000
8	Контракт за соняшником	0	0	18	7200	>=	2000
9	Загальна площа посіву	1	1	1	1500	<=	1500
10	Межа посівної площі соняшнику	0	0	1	400	<=	400
11	Критерій оптимальності						
12	Назва	Коефіцієнти			Розрахункове значення		
13	Загальний дохід	5994	6251	6804	9542132,43	→	max

Рис. 1.3. Оптимальне рішення до ***прикладу 1.1***

Відповідь: загальний дохід складатиме *9542132,43* грн., площі посіву пшениці, кукурудзи на зерно та соняшнику становитимуть, відповідно, *216,22; 883,78* та *400* га.

Приклад 1.2 *(для самостійного виконання).* Площа земельних угідь господарства становить *500* га. Укладено контракт на *1500* т пшениці. Для одержання *36* ц/га озимої пшениці треба внести *0,6* ц суміші добрив на га, а для одержання *24* ц/га ярової пшениці треба внести *40* кг суміші добрив на га. Скласти план розподілу посівних площ із мінімальними загальними витратами добрив.

Приклад 1.3 *(для самостійного виконання).* На годівлю свиней ідуть пшеничні висівки (вартість *1* кг – *1* грн., вміст в *1* кг: кормових одиниць – *0,97*, перетравного протеїну – *0,16*) та рибне борошно (вартість *1* кг – *8* грн., вміст в *1* кг: кормових одиниць – *0,33*, перетравного протеїну – *0,21*). Скласти найдешевший раціон годівлі свиней, якщо в ньому має бути не менше *3* кормових одиниць та *0,7* одиниці перетравного протеїну.

Приклад 1.4 *(для самостійного виконання).* Господарству необхідно виростити понад *3800* ц пшениці та *1200* т цукрового буряка. Середня врожайність пшениці – *3,2* т/га, а цукрового буряка – *230* ц/га. Під ці культури виділено *300* га угідь. Скласти план розподілу посівних площ з максимальною виручкою від реалізації врожаю, якщо ціна пшениці дорівнює *276* грн./ц, а цукрового буряка – *520* грн./т.

Приклад 1.5 *(для самостійного виконання).* Площа земельних угідь, відведених у господарстві під пшеницю, дорівнює *300* га. Внесення на *1* га угідь *85* кг мінеральних добрив підвищує врожайність пшениці на *9* ц, а внесення на *1* га угідь *12* т органічних добрив – на *5* ц. Скласти план розподілу добрив, що дозволяє одержати максимальний додатковий урожай пшениці, якщо в господарстві є *120* ц мінеральних та *1500* т органічних добрив.

Приклад 1.6 *(для самостійного виконання).* На молокозаводі виготовляють глазуровані сирки "Вінні", на *100* кг яких витрачається *78* кг сиру, *10* кг шоколаду і *12* кг цукру, а також глазуровані сирки “Сніговичок”, на *100* кг яких іде *80* кг сиру, *9* кг цукру та *11* кг шоколаду. На молокозаводі є *1* т сиру, *0,2* т цукру та *0,15* т шоколаду. Треба знайти план виготовлення сирків з максимальною загальною виручкою, якщо ціна реалізації *100* кг сирків “Вінні” дорівнює *4500* грн., а сирків “Сніговичок” – *4200* грн.

Приклад 1.7 *(для самостійного виконання).* На годівлю корів зі щоденним удоєм *21* кг молока і живою масою *0,72* т щодобово потрібно *13,2* кормових одиниць, а на годівлю корів зі щоденним удоєм *19* кг молока і живою масою *0,65* т щодобово необхідно *10,5* кормових одиниць. На годівлю корів кожен день виділяється до *6400* кормових одиниць. Передбачається, що жива маса стада має бути не менша за *280* т. Визначити оптимальну структуру стада за породами корів із максимальними загальними щодобовими удоями молока.

Приклад 1.8 *(для самостійного виконання).* На період жнив із щодобовою площею збирання понад *150* га господарством кожен день виділяється до *1500* л пального. В цей час до машинно-тракторного парку господарства можуть залучатися комбайни “Massey Ferguson” нової та старої модифікації. Витрати пального комбайну нової модифікації складають *490* л за зміну, а комбайну старої модифікації – *440* л. За зміну новий комбайн може зібрати врожай на *55* га, а старий – на *44* га. Визначити мінімальну кількість додатково залучених комбайнів, якщо в господарстві є власний комбайн “Massey Ferguson” старої модифікації.

1.3. Параметричний аналіз оптимальних рішень комп‘ютерними засобами •

За знайденим рішенням оптимізаційної задачі в середовищі MS Excel генеруються три звіти: за результатами, за стійкістю та за границями.

У звіті за результатами подаються вихідні та остаточні значення для цільової функції, а також для шуканих змінних. Крім того вказується, яким чином на знайденому оптимальному рішенні виконуються обмеження. Якщо нерівність перетворюється в рівність, то вона називається зв'язаною: відповідний ресурс витрачається повністю, є дефіцитним, контрактні зобов'язання виконуються лише в замовленому обсязі. Якщо в нерівності ліва та права частини відрізняються, то вона набуває статусу не зв'язаної, тобто відповідні ресурси не дефіцитні, а контрактні угоди не мають обмежувального характеру.

У звіті за стійкістю перша таблиця містить інформацію про припустиме збільшення та припустиме зменшення коефіцієнтів цільової функції. При варіюванні кожного з коефіцієнтів у вказаному діапазоні знайдені значення шуканих змінних залишаються оптимальними і в трансформованій задачі, хоча оптимальне значення цільової функції в загальному випадку буде іншим.

Друга таблиця звіту за стійкістю вміщує тіньові ціни до правих частин обмежень. Тіньові ціни вимірюються в тих одиницях, що й цільова функція задачі. Тіньова ціна вказує, на скільки зміниться значення критерію оптимальності при збільшенні (зменшенні) на одиницю правої частини відповідного обмеження. Діапазони змін правих частин до не зв'язаних нерівностей дозволяють зберігати поточний оптимальний розв'язок (шукані змінні та значення цільової функції) як такий і для трансформованої задачі. Діапазони змін правих частин обмежень до зв'язаних нерівностей призводять в загальному випадку до іншого оптимального розв'язку в трансформованій задачі, але статус виконання обмежень зберігатиметься з вихідних умов.

У звіті за границями вказано, якими є нижні та верхні межі по кожній змінній, тобто в якому діапазоні може варіюватись значення цієї невідомої, щоб виконувалися всі обмеження задачі при фіксованих одержаних значеннях решти змінних.

Проілюструємо зазначені звіти на ***прикладі 1.1***.

За звітом за результатами (рис. 1.4) виявляються дефіцитними загальні земельні ресурси, посівні площі під соняшник та невигідним – контракт на пшеницю: відповідні обмеження зв'язані. Виробництво кукурудзи на зерно та соняшнику розвивається поза контрактом: відповідні обмеження не зв'язані.

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$E$6	Контракт за пшеницею Ліва частина	8000	$E$6>=$G$6	связанное	0
$E$7	Контракт за кукурудзою Ліва частина	41 537,84	$E$7>=$G$7	не связан.	31 537,84
$E$8	Контракт за соняшником Ліва частина	7200	$E$8>=$G$8	не связан.	5200
$E$9	Загальна площа посіву Ліва частина	1500	$E$9<=$G$9	связанное	0
$E$10	Межа посівної площі соняшнику Ліва частин	400	$E$10<=$G$10	связанное	0

Рис. 1.4. Фрагмент звіту за результатами до ***прикладу 1.1***

За першою таблицею звіту за стійкістю (рис. 1.5) при змінах коефіцієнтів цільової функції в діапазонах

$$c_1 \in (5994-\infty;\ 5994+257] = (-\infty; 6251],$$

$$c_2 \in [6251-257; 6251+553] = [5994; 6804],$$

$$c_3 \in [6804-553;\ 6804+\infty) = [6251; \infty)$$

знайдений розподіл посівних площ *216,22; 883,75;* та *400* га залишатиметься оптимальним, хоча загальний дохід зміниться.

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	Значення X1	216,22	0,00	5994	257	1E+30
$C$3	Значення X2	883,78	0,00	6251	553	257
$D$3	Значення X3	400	0	6804	1E+30	553

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$E$6	Контракт за пшеницею Ліва частина	8000	-6,95	8000	24827,66	8000
$E$7	Контракт за кукурудзою Ліва частина	41 537,84	0,00	10000	31537,84	1E+30
$E$8	Контракт за соняшником Ліва частина	7200	0	2000	5200	1E+30
$E$9	Загальна площа посіву Ліва частина	1500	6251	1500	1E+30	671,02
$E$10	Межа посівної площі соняшнику Ліва частин	400	553	400	671,02	288,89

Рис. 1.5. Дані звіту за стійкістю до ***прикладу 1.1***

За другою таблицею звіту за стійкістю (рис. 1.5) зміни обсягу контракту за кукурудзою на зерно та за соняшником (описані за ними обмеження виконуються як не зв'язані) у діапазонах

$$(10000-\infty;10000+31537{,}84]=(-\infty;41537{,}84],$$
$$(2000-\infty;\ 2000+5200]=\ (-\infty;7200]$$

не змінять оптимальності знайденого плану розподілу посівних площ та одержаного загального доходу. Натомість, зміни контракту за пшеницею, загального обсягу посівних площ та припустимої величини посівів соняшнику (описані за ними обмеження зв'язані) у діапазонах

$$[8000-8000;\ 8000+24827{,}66]=[0;32827{,}66],$$
$$[1500-671{,}02;1500+\infty)=[828{,}98;\infty),$$
$$[400-288{,}89;400+671{,}02]=[111{,}11;1071{,}02]$$

призведуть до змін плану посівів та одержаного доходу, але характер виконання обмежень (зв'язані чи не зв'язані) залишиться сталим. У вказаних діапазонах, згідно зі знайденими тіньовими цінами, кожний віднятий від *8000* центнер контракту за пшеницею, кожний доданий до *1500* гектар загальних посівних площ або кожний доданий до *400* гектар посівних площ під соняшник збільшуватиме, а кожний доданий до *8000* центнер контракту за пшеницею, кожний віднятий від *1500* гектар загальних посівних площ або кожний віднятий від *400* гектар посівних площ під соняшник зменшуватиме загальний дохід від реалізації зібраного врожаю, відповідно, на *6,95*; *6251* або *553* грн.

За звітом за границями (рис. 1.6) при фіксованих знайдених значеннях $x_2=883{,}78$ та $x_3=400$ для виконання всіх обмежень ***прикладу 1.1*** $x_1=216{,}22$ (менші значення не припускаються за контрактним зобов'язанням, а більші – за обмеженням про загальну посівну площу). При фіксованих знайдених значеннях $x_1=216{,}22$ та $x_3=400$ для виконання всіх обмежень ***прикладу 1.1*** $x_2\in[212{,}77;883{,}78]$ (менші значення не припускаються за контрактним зобов'язанням, а більші – за обмеженням про загальну посівну площу). При фіксованих знайдених значеннях $x_1=216{,}22$ та $x_2=883{,}78$ для виконання всіх обмежень ***прикладу 1.1***

$x_3 \in [111{,}11;400]$ (менші значення не припускаються за контрактним зобов'язанням, а більші – за обмеженнями про загальну посівну площу та площу посіву соняшнику).

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$3	Значення X1	216,22	216,22	9 542 132,43	216,22	9 542 132,43
$C$3	Значення X2	883,78	212,77	5 347 600,00	883,78	9 542 132,43
$D$3	Значення X3	400	111,1111111	7576532,432	400	9542132,432

Рис. 1.6. Фрагмент звіту за границями до ***прикладу 1.1***

1.4. Елементи теорії двоїстості •

Розглянемо задачу лінійного програмування в загальній постановці:

$$c_1x_1 + ... + c_nx_n \to max \tag{1.11}$$

при обмеженнях
$$a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n \le b_j,\ j = \overline{1,s}, \tag{1.12}$$

$$a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n = b_j,\ j = \overline{s+1,m}, \tag{1.13}$$

$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,k},\ k \le n. \tag{1.14}$$

Побудування її двоїстої задачі підпорядковується наступним правилам.

1. Кількість двоїстих змінних дорівнює числу обмежень типу "≤" (1.12) та "=" (1.13).

2. Цільова функція двоїстої задачі підлягає мінімізації. За її коефіцієнти обирають праві частини обмежень типу "≤" (1.12) та "=" (1.13).

3. Двоїсті змінні, що відповідають обмеженням типу "≤" (1.12), приймають невід'ємні значення, тоді як двоїсті змінні, що відповідають обмеженням типу "=" (1.13), приймають довільні значення.

4. За кожною невід'ємною змінною прямої задачі лінійного програмування (1.14) розбудовується двоїсте обмеження типу "≥",

а за кожною змінною довільного знаку утворюється двоїсте обмеження типу “=”.

5. Правими частинами зазначених двоїстих обмежень виступатимуть відповідні коефіцієнти цільової функції прямої задачі лінійного програмування (1.11). Матрицю коефіцієнтів лівих частин зазначених обмежень двоїстої задачі одержують транспонуванням матриці коефіцієнтів лівих частин обмежень типу “≤” (1.12) та “=” (1.13) прямої задачі лінійного програмування.

Таким чином, двоїста задача до лінійної моделі (1.11)–(1.14) набуває вигляду:

$$b_1 y_1 + ... + b_m y_m \to min$$

при обмеженнях $a_{1i} y_1 + ... + a_{mi} y_m \geq c_i, i = \overline{1,k},$

$$a_{1i} y_1 + ... + a_{mi} y_m = c_i, i = \overline{k+1,n},$$

$$y_j \geq 0,\ j = \overline{1,s}.$$

Опишемо зв’язок між розв’язністю прямої та двоїстої задач на прикладі задачі лінійного програмування в канонічній формі:

$$c_1 x_1 + ... + c_n x_n \to max \tag{1.15}$$

при обмеженнях $a_{j1} x_1 + ... + a_{jn} x_n = b_j,\ j = \overline{1,m},$ (1.16)

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}. \tag{1.17}$$

та двоїстої до неї задачі вигляду

$$b_1 y_1 + ... + b_m y_m \to min \tag{1.18}$$

при обмеженнях $a_{1i} y_1 + ... + a_{mi} y_m \geq c_i, i = \overline{1,n}.$ (1.19)

Перша теорема двоїстості. Значення цільової функції задачі (1.15)–(1.17) на будь-якому її припустимому рішенні $\bar{x} = (\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$ не перевищує значення цільової функції задачі (1.18), (1.19) на будь-якому її припустимому плані $\bar{y} = (\bar{y}_1,...,\bar{y}_m)$.

Якщо для деяких $\bar{x} = (\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$ та $\bar{y} = (\bar{y}_1,...,\bar{y}_m)$ значення цільових функцій співпадають, то $\bar{x} = (\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$ − оптимальне рішення задачі (1.15)–(1.17), а $\bar{y} = (\bar{y}_1, ..., \bar{y}_m)$ − оптимальний план задачі (1.18), (1.19).

Друга теорема двоїстості. Якщо пряма чи двоїста задача має оптимальне рішення, то і друга з цієї пари задач має оптимальний план, причому оптимальні значення цільових функцій прямої та двоїстої задач співпадають.

Якщо цільова функція прямої чи двоїстої задачі не обмежена на множині припустимих рішень, то друга з цієї пари задач не має ані оптимальних, ані припустимих планів.

Третя теорема двоїстості. Припустимі рішення задач (1.15)–(1.17) та (1.18), (1.19) − $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ та $\bar{y} = (\bar{y}_1, ..., \bar{y}_m)$ − є оптимальними тоді й тільки тоді, коли справедливі рівності

$$(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\bar{y}_j - c_i) \cdot \bar{x}_i = 0, i = \overline{1,n}.$$

Розглянемо економічну інтерпретацію прямої та двоїстої задач лінійного програмування на прикладі з прямою моделлю

$$c_1 x_1 + ... + c_n x_n \to max$$

при обмеженнях $\quad a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n \le b_j,\ j = \overline{1,m},$

$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n},$$

що описує планування виробництва за n технологіями (видами продукції) з урахуванням m виробничих факторів (інгредієнтів).

Додатний коефіцієнт a_{ji} вказує витрати j-го інгредієнта на виробництво одиниці продукції i-го виду. Від’ємний коефіцієнт a_{ji} визначає, що j-ий інгредієнт виступає кінцевим (побічним) продуктом за i-им напрямом виробництва. Нульовий коефіцієнт a_{ji} вказує, що j-ий інгредієнт не залучається для виробництва продукції i-го виду, $j = \overline{1,m}$ $i = \overline{1,n}$.

Додатне значення b_j описує наявний запас j-го інгредієнту до початку виробничого процесу. Від'ємне значення b_j характеризує борг за j-им інгредієнтом, що має бути ліквідованим в процесі виробництва. При нульовому значенні b_j необхідно збалансовувати виробництво та споживання j-го інгредієнту за різними видами продукції. Обмеження у формі нерівностей типу "≤" означають, що при $b_j > 0$ j-ий інгредієнт не можна витратити понад наявний обсяг. При $b_j \le 0$ в процесі виробництва необхідно забезпечити виготовлення не менше, ніж $|b_j|$ одиниць j-го інгредієнту, $j = \overline{1,m}$.

Додатний цільовий коефіцієнт c_i задає прибуток від виробництва одиниці продукції i-го виду. Від'ємний цільовий коефіцієнт c_i задає збиток від виробництва одиниці продукції i-го виду. Нульовий коефіцієнт c_i означає, що продукція i-го виду реалізується за собівартістю, $i = \overline{1,n}$.

Отже, в розглядуваній моделі лінійного програмування треба визначити такі невід'ємні обсяги виробництва x_i, $i = \overline{1,n}$, за кожним видом продукції, щоб сумарний прибуток був максимальним і виконувались обмеження за всіма виробничими факторами.

Відповідна двоїста задача у вигляді

$$b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m \to min$$

при обмеженнях $\quad a_{1i} y_1 + \ldots + a_{mi} y_m \ge c_i, i = \overline{1,n},$

$$y_j \ge 0,\ j = \overline{1,m},$$

виступатиме математичною моделлю планування придбання описаного виробництва. А саме, невід'ємні двоїсті змінні задаватимуть купівельні ціни розглядуваних виробничих інгредієнтів. Обмеження типу "≥" вказують, що покупець має запропонувати ціни, що забезпечують за кожним видом продукції більше грошове надходження від продажу, аніж прибутки від виробництва. Мінімізована цільова функція відображає мету придбання виробництва за найменшу можливу суму.

Таким чином, у двоїстій моделі лінійного програмування треба визначити такі невід’ємні ціни y_j, $j=\overline{1,m}$, за кожним виробничим інгредієнтом, щоб виплатити за них мінімальну загальну суму та продавцю було вигідно піти на запропоновану угоду.

Приклад 1.9 *(для самостійного виконання).* Трансформувати задачі лінійного програмування до вигляду (1.11)–(1.14) і побудувати їх двоїсті задачі:

а) $$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to min$$

при обмеженнях
$$2x_1 + 7x_3 - 8x_4 \geq 2,$$
$$7x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 4,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0;$$

б) $$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \to max$$

при обмеженнях
$$5x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \geq 7,$$
$$-x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq -5,$$
$$2x_1 + 7x_3 + 8x_4 = 6,$$
$$3x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 \leq -2,$$
$$8x_1 - x_4 = 5,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$

в) $$x_1 + x_3 + 7x_5 \to min$$

при обмеженнях
$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \leq 6,$$
$$x_2 + 4x_4 - x_5 = 7,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 4,$$
$$x_1 + x_3 - x_5 = 2,$$
$$x_3 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

Питання для самоконтролю •
засвоєння матеріалу РОЗДІЛУ 1 •

1. Дайте загальну постановку задачі математичного програмування.
2. Що таке “припустимий план задачі математичного програмування”?
3. Сформулюйте визначення оптимального рішення задачі математичного програмування.
4. Наведіть класифікацію задач математичного програмування.
5. Опишіть послідовність створення моделі математичного програмування.
6. Яким чином оформлюються вхідні дані моделей математичного програмування в електронній таблиці OO Calc?
7. Наведіть послідовність оформлення розрахункових даних в інструментарії “Решатель” програми OO Calc?
8. Яка інформація подається в звіті за результатами інструментарію “Поиск решения” програми MS Excel?
9. Що містить звіт за границями, згенерований засобами інструментарію “Поиск решения” в електронній таблиці MS Excel?
10. Яка інформація подається у першій таблиці звіту за стійкістю інструментарію “Поиск решения” програми MS Excel?
11. Що містить друга таблиця звіту за стійкістю інструментарію “Поиск решения” в електронній таблиці MS Excel?
12. В чому полягають правила побудування двоїстої задачі лінійного програмування?
13. Сформулюйте першу, другу та третю теореми двоїстості.
14. Надайте економічну інтерпретацію прямої задачі лінійного програмування як моделі визначення оптимального плану виробництва.
15. Розшифруйте економічний сенс двоїстої задачі лінійного програмування як моделі оптимального придбання виробництва.

Матеріали розділу підготовлено з використанням джерел [2; 3; 5; 15; 18].

РОЗДІЛ 2 ●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●● ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ ●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

2.1. Геометричний метод вирішення • задач лінійного програмування •

Найбільш загальну постановку задачі лінійного програмування можна подати у вигляді:

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to max(min)$$

при обмеженнях $\quad a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \le b_j,\ j = \overline{1,k_1},$

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j,\ j = \overline{k_1+1,k_2},$$

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \ge b_j,\ j = \overline{k_2+1,k_3},$$

$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,k},$$

де $a_{ji},\ j = \overline{1,k_3},\ c_i,\ i = \overline{1,n}$ – задані числові коефіцієнти та $k \le n$.

Стосовно розв’язності задач лінійного програмування можна виділити наступні чотири випадки:

– існує єдине оптимальне рішення;

– існує безліч оптимальних рішень;

– не існує оптимальних рішень внаслідок відсутності припустимих планів;

– не існує оптимальних рішень внаслідок необмеженості цільової функції на множині припустимих планів.

При $n = 2$ задачу лінійного програмування можна вирішити геометричним (графічним) методом, що ґрунтується на поняттях градієнту та лінії рівня.

Градієнт – це вектор, що вказує напрям найшвидшого зростання функції в даній точці. У випадку лінійної функції $f = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ градієнт для всіх точок набуває вигляду

$grad = (c_1, ..., c_n)$. Лінія рівня – це множина точок, у яких функція приймає однакові значення. У випадку лінійної функції лінії рівня мають вигляд прямих, що розташовуються під прямим кутом до градієнта.

Вирішення задачі лінійного програмування за геометричним методом передбачає виконання наступної послідовності кроків.

1. Зображуємо множину припустимих рішень задачі в декартовій прямокутній системі координат. Якщо множина порожня, то задача не має оптимальних рішень внаслідок суперечності її обмежень. Інакше переходимо до кроку 2.

2. Розбудовуємо вектор градієнту цільової функції та її лінію рівня. Пересуваємо лінію рівня в напрямку градієнта (для задачі на максимум) або в протилежному до градієнту напрямку (для задачі на мінімум) до останнього перетину з множиною припустимих рішень. В результаті знаходимо або єдине оптимальне рішення, коли перетин відбувається в єдиній точці, або безліч оптимальних рішень, коли перетин відбувається на відрізку, півпрямій чи прямій, або встановлюємо, що пересування лінії рівня можна продовжувати до нескінченності, тобто оптимальних рішень у даної задачі лінійного програмування взагалі не існує через необмеженість цільової функції.

Приклад 2.1. Вирішити геометричним методом задачу лінійного програмування

$$2x_1 + 3x_2 \to max$$

при обмеженнях

$$-x_1 + x_2 \geq 1,$$
$$-x_1 + x_2 \leq -2,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Рішення. Зобразимо в декартовій прямокутній системі координат множину припустимих рішень задачі, почергово відштриховуючи півплощини, що містять точки, координати яких не задовольняють обмеження прикладу (рис. 2.1).

$$-x_1 + x_2 = 1: \text{ при } x_1 = 0 \;\; x_2 = 1; \text{ при } x_2 = 0 \;\; x_1 = -1.$$

$$-x_1 + x_2 = -2: \text{ при } x_1 = 0 \;\; x_2 = -2; \text{ при } x_2 = 0 \;\; x_1 = 2.$$

Через те, що множина припустимих рішень порожня, ***приклад 2.1*** не має оптимальних рішень.

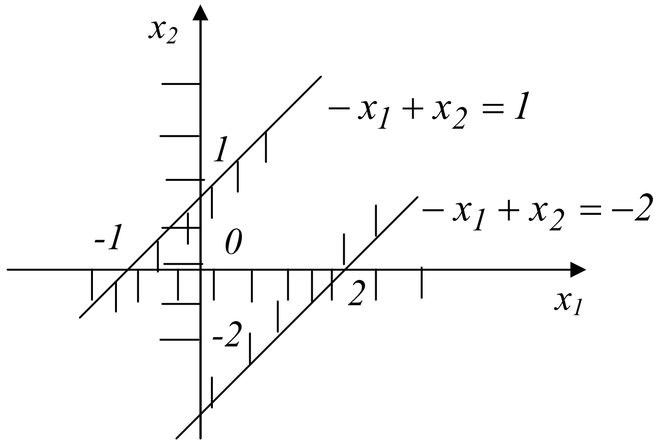


Рис. 2.1. Графічна ілюстрація до вирішення ***прикладу 2.1***

Відповідь: оптимальних рішень не існує.

Приклад 2.2. Вирішити геометричним методом задачу лінійного програмування

$$x_1 + 2x_2 \to max$$

при обмеженнях $\quad x_1 + x_2 \le 1,$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Рішення. Зобразимо в декартовій прямокутній системі координат множину припустимих рішень задачі, почергово відштриховуючи півплощини, що містять точки, координати яких не задовольняють обмеження прикладу (рис. 2.2).

$$x_1 + x_2 = 1: \text{ при } x_1 = 0 \;\; x_2 = 1; \text{ при } x_2 = 0 \;\; x_1 = 1.$$

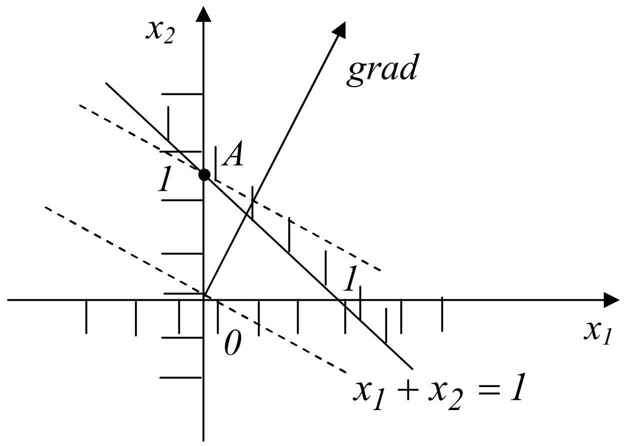


Рис. 2.2. Графічна ілюстрація до вирішення ***прикладу 2.2***

Через те, що множина припустимих рішень не порожня, зображаємо на рисунку градієнт: $grad = (1;2)$ та під прямим кутом до нього – пунктирну лінію рівня. Граничний перетин ліній рівня з множиною припустимих рішень задачі надає єдине оптимальне рішення – точку A. Таким чином, оптимальне рішення ***прикладу 2.2*** $(x_1, x_2) = (0;1)$, а відповідне максимальне значення цільової функції складає $0 + 2 \cdot 1 = 2$.

Відповідь: задача має єдине оптимальне рішення $(x_1, x_2) = (0;1)$, максимальне значення її цільової функції 2.

Приклад 2.3. Вирішити геометричним методом задачу лінійного програмування

$$2x_1 + x_2 \to max$$

при обмеженнях $\quad 2x_1 + x_2 \le 2,$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Рішення. Зобразимо в декартовій прямокутній системі координат множину припустимих рішень задачі, почергово відштриховуючи півплощини, що містять точки, координати яких не задовольняють обмеження прикладу (рис. 2.3).

$$2x_1 + x_2 = 2: \text{ при } x_1 = 0 \;\; x_2 = 2; \text{ при } x_2 = 0 \;\; x_1 = 1.$$

Через те, що множина припустимих рішень не порожня, зображаємо на рисунку градієнт: $grad = (2;1)$ та під прямим кутом до нього – пунктирну лінію рівня. Граничний перетин ліній рівня з множиною припустимих рішень задачі надає безліч оптимальних рішень, розташованих на відрізку *AB*. Таким чином, оптимальні рішення ***прикладу 2.3*** – це $(x_1, x_2) \in [(0;2);(1;0)]$. Максимальне значення цільової функції, розраховане, наприклад, в точці *A*, дорівнює $0 + 2 = 2$.

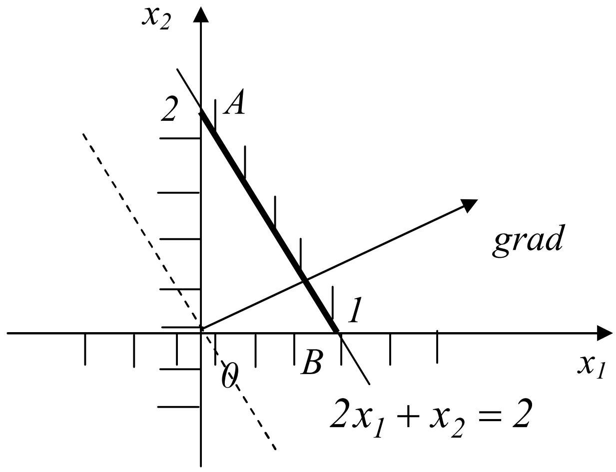


Рис. 2.3. Графічна ілюстрація до вирішення ***прикладу 2.3***

Відповідь: задача має безліч оптимальних рішень $(x_1, x_2) \in$ $\in [(0;2);(1;0)]$, максимальне значення її цільової функції 2.

Приклад 2.4. Вирішити геометричним методом задачу лінійного програмування

$$x_1 + x_2 \to max$$

при обмеженнях

$$-x_1 + x_2 \le 1,$$
$$-x_1 + x_2 \ge -2,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Рішення. Зобразимо в декартовій прямокутній системі координат множину припустимих рішень задачі, почергово відштриховуючи півплощини, що містять точки, координати яких не задовольняють обмеження прикладу (рис. 2.4).

$$-x_1 + x_2 = 1: \text{ при } x_1 = 0 \;\; x_2 = 1; \text{ при } x_2 = 0 \;\; x_1 = -1.$$

$$-x_1 + x_2 = -2: \text{ при } x_1 = 0 \;\; x_2 = -2; \text{ при } x_2 = 0 \;\; x_1 = 2.$$

Через те, що множина припустимих рішень не порожня, зображаємо на рисунку градієнт: $grad = (1;1)$ та під прямим кутом до нього – пунктирну лінію рівня. Пересування лінії рівня в напрямку градієнту може тривати до нескінченності, тому задача не має оптимальних рішень внаслідок необмеженості цільової функції на множині припустимих рішень.

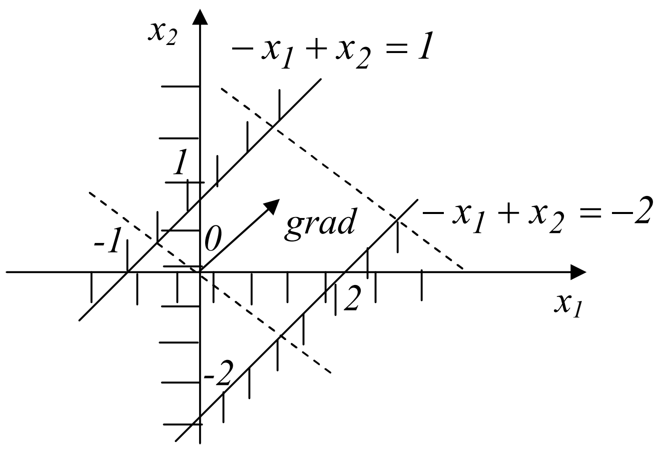


Рис. 2.4. Графічна ілюстрація до вирішення ***прикладу 2.4***

Відповідь: оптимальних рішень не існує.

Приклад 2.5 *(для самостійного виконання).* Вирішити геометричним методом задачі лінійного програмування:

а) $$-2x_1 + 3x_2 \to min$$

при обмеженнях
$$4x_1 + 5x_2 \le 20,$$
$$-2x_1 + 4x_2 \le 4,$$
$$x_2 \ge 0;$$

б) $$2x_1 + x_2 \to max$$

при обмеженнях
$$5x_1 - x_2 \ge 0,$$

$$x_1 - 2x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0;$$

в) $$4x_1 - 2x_2 \to max$$

при обмеженнях
$$x_1 + 3x_2 \le 3,$$
$$2x_1 + 4x_2 \ge 12,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

г) $$x_1 + x_2 \to min$$

при обмеженнях
$$2x_1 + x_2 \le 8,$$
$$x_1 + x_2 \ge 3,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2.2. Симплексний метод вирішення задач лінійного програмування

Універсальним засобом вирішення задач лінійного програмування є симплексний метод. Для його застосування задачу лінійного програмування необхідно представити в канонічній формі, а саме:

$$c_1x_1 + ... + c_nx_n \to max$$

при обмеженнях $$a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n = b_j,\ j = \overline{1,m},$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Для перетворення загальної постановки задачі лінійного програмування до канонічної форми застосовують наступні правила.

1. Мінімізована цільова функція перетворюється в максимізовану помноженням на *-1*.

2. Замість кожної змінної довільного знаку до обмежень та критерію оптимальності вводять різницю двох нових невід’ємних змінних.

3. Для перетворення обмежень-нерівностей типу “≤” на рівності до лівої частини кожного такого обмеження додають нову

невід’ємну змінну. Для перетворення обмежень-нерівностей типу “≥” на рівності від лівої частини кожного такого обмеження віднімають нову невід’ємну змінну.

Надалі будемо вважати, що $n > m$.

Ненульове припустиме рішення $(x_1, ..., x_n)$ називається опорним рішенням задачі лінійного програмування, якщо вектор-стовпці з коефіцієнтів обмежень-рівностей, що відповідають додатним компонентам рішення $(x_1, ..., x_n)$, складають лінійно незалежну систему. Нульове припустиме рішення завжди опорне.

Опорне рішення $(x_1, ..., x_n)$ задачі лінійного програмування називається не виродженим, якщо воно має рівно m додатних компонентів. У протилежному випадку воно є виродженим.

Базисом опорного рішення $(x_1, ..., x_n)$ задачі лінійного програмування називають впорядкований набір з m лінійно незалежних вектор-стовпців з коефіцієнтів обмежень-рівностей, до числа яких входять всі вектор-стовпці, що відповідають додатним компонентам опорного рішення. Якщо опорне рішення невироджене, то його базис визначається однозначно. Якщо опорне рішення вироджене, то базисів може бути декілька.

В геометричному сенсі опорні рішення відповідають вершинам множини припустимих рішень задачі лінійного програмування.

Алгоритм симплекс-методу має наступний вигляд.

1. Обираємо одну з вершин не порожньої множини припустимих рішень задачі лінійного програмування.

2. Перевіряємо поточне рішення за умовою оптимальності. Якщо вона виконується, то оптимальне рішення знайдено, алгоритм припиняє роботу. В протилежному випадку йдемо до пункту 3.

3. Для поточного рішення перевіряємо цільову функцію на необмеженість. Якщо це так, то оптимального рішення не існує, алгоритм припиняє роботу. В протилежному випадку йдемо до пункту 4.

4. Переходимо в множині припустимих рішень з поточної до сусідньої вершини із не меншим значенням цільової функції. Повертаємось до пункту 2.

В такий спосіб за симплекс-методом здійснюється обхід усіх опорних рішень розглядуваної задачі лінійного програмування та, якщо це можливо, розшукується її оптимальне рішення.

Деталізуємо алгоритм симплексного методу на наступному прикладі.

Приклад 2.6. Вирішити симплекс-методом задачу лінійного програмування

$$-2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \to min$$

при обмеженнях

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 \le 8,$$

$$-7x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 \ge -1,$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \le 10,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Рішення. Трансформуємо умови прикладу до канонічної форми. Для цього помножимо цільову функцію на *-1*, а до лівих частин обмежень-нерівностей додамо чи віднімемо нові невід'ємні змінні x_5, x_6, x_7. В результаті отримаємо

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 1x_4 \to max$$

при обмеженнях

$$2x_1 + 4x_2 - 1x_3 + 5x_4 + 1x_5 = 8,$$

$$-7x_1 + 1x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 1x_6 = -1,$$

$$1x_1 + 3x_2 - 1x_3 + 2x_4 + 1x_7 = 10,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0.$$

До початку розрахунків за класичним симплексним методом необхідно знайти початковий опорний план або з'ясувати, що його нема. Для цього шляхом лінійних перетворень обмежень-рівностей слід переписати їх у вигляді, де всі праві частини невід'ємні та в кожній рівності існує змінна з одиничним коефіцієнтом, яка не присутня в решті обмежень-рівностей задачі. Вказані змінні обиратимуться в якості базисних. Через це для розглядуваного прикладу одержимо

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 1x_4 \to max$$

при обмеженнях $2x_1 + 4x_2 - 1x_3 + 5x_4 + 1x_5 = 8$,

$$7x_1 - 1x_2 + 5x_3 - 6x_4 + 1x_6 = 1,$$

$$1x_1 + 3x_2 - 1x_3 + 2x_4 + 1x_7 = 10,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0.$$

Небазисні змінні прийматимуть нульові значення, а значення базисних змінних визначатимуться згідно з обмеженнями-рівностями задачі. Таким чином, у розглядуваному прикладі початковий опорний план матиме вигляд

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, x_5 = 8, x_6 = 1, x_7 = 10.$$

Розмір симплексних таблиць у класичному симплекс-методі залишається незмінним. Кількість рядків співпадає з числом обмежень-рівностей задачі. У стовпчику $C_б$ містяться коефіцієнти цільової функції до базисних змінних. Над стовпцями $A_1, A_2, ...$ розташовуються відповідні коефіцієнти цільової функції. У першій симплексній таблиці в стовпчику A_0 розміщуються праві частини обмежень-рівностей. Решта стовпчиків містить відповідні коефіцієнти з лівих частин обмежень-рівностей задачі (рис. 2.5).

Оцінка Δ_0 до стовпця A_0 обчислюється як скалярний добуток відповідних елементів стовпців $C_б$ та A_0. Решта оцінок $\Delta_1, \Delta_2, ...$ обчислюється як різниця між скалярними добутками $C_б$ на відповідні стовпчики $A_1, A_2, ...$ та коефіцієнтами цільової функції $c_1, c_2, ...$. Зокрема, в розглядуваному прикладі маємо

$$\Delta_0 = 0 \cdot 8 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 10 = 0,$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 1 - 2 = -2,$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 - (-3) = 3 \text{ тощо.}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	**Перша симплекс-таблиця**											
2				2	-3	5	-1	0	0	0		
3	**Б**	**Сб**	**А0**	**А1**	**А2**	**А3**	**А4**	**А5**	**А6**	**А7**	**симпл. віднош.**	
4	**А5**	0	8	2	4	-1	5	1	0	0	-	
5	**А6** ←	0	1	7	-1	5	-6	0	1	0	1/5	(min)
6	**А7**	0	10	1	3	-1	2	0	0	1	-	
7		**Оцінки**	0	-2	3	-5	1	0	0	0		
8												
9	**Друга симплекс-таблиця**											
10				2	-3	5	-1	0	0	0		
11	**Б**	**Сб**	**А0**	**А1**	**А2**	**А3**	**А4**	**А5**	**А6**	**А7**	**симпл. віднош.**	
12	**А5** ←	0	41/5	17/5	19/5	0	19/5	1	1/5	0	41/19	(min)
13	**А3**	5	1/5	7/5	-1/5	1	-6/5	0	1/5	0	-	
14	**А7**	0	51/5	12/5	14/5	0	4/5	0	1/5	1	51/4	
15		**Оцінки**	1	5	2	0	-5	0	1	0		
16												
17	**Третя симплекс-таблиця**											
18				2	-3	5	-1	0	0	0		
19	**Б**	**Сб**	**А0**	**А1**	**А2**	**А3**	**А4**	**А5**	**А6**	**А7**	**симпл. віднош.**	
20	**А4**	-1	41/19	17/19	1	0	1	5/19	1/19	0		
21	**А3**	5	53/19	47/19	1	1	0	6/19	5/19	0		
22	**А7**	0	161/19	32/19	2	0	0	-4/19	3/19	1		
23		**Оцінки**	224/19	180/19	7	0	0	25/19	24/19	0		
24												

Рис. 2.5. Симплексні таблиці для ***прикладу 2.6***

Зауважимо, що оцінка Δ_0 презентує значення цільової функції на поточному опорному рішенні. При переході до наступної симплексної таблиці її значення повинно не зменшуватись.

За критерієм оптимальності поточного опорного плану необхідно перевірити наявність від'ємних оцінок серед $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$. Якщо їх нема, то поточне опорне рішення оптимальне. Для розглядуваного прикладу в першій симплекс-таблиці умова оптимальності порушується: $\Delta_1 = -2$, $\Delta_3 = -5$.

За критерієм необмеженості цільової функції необхідно впевнитися в наявності хоча б одного стовпця $A_1, A_2, \ldots$ з від'ємною оцінкою, що не містить додатних елементів. Для розглядуваного прикладу за першою симплекс-таблицею ця умова не виконується: і стовпець A_1, і стовпець A_3 містять додатні елементи.

Таким чином, треба перейти до наступного опорного плану з більшим (хоча б не меншим) значенням цільової функції. Сусіднє опорне рішення відрізняється від поточного лише однією базисною змінною. Для введення до базису обирається відповідний стовпчик з найбільшою за модулем від'ємною оцінкою. В розглядуваному прикладі це A_3. Для визначення змінної, що втрачатиме статус базисної, для додатних компонентів стовпця, обраного для введення до базису, обчислюються симплексні відношення відповідних елементів A_0 та стовпця, що вводиться до базису. Мінімальне симплексне відношення задає змінну, що втрачає статус базисної. Елемент, що розташовується на перетині обраних рядка та стовпця, називається провідним. Значення єдиного симплексного відношення за першою симплекс-таблицею для розглядуваного прикладу наведено на рис. 2.5. З базису виводиться A_6, провідний елемент дорівнює 5.

Переходимо до створення другої симплекс-таблиці. Спочатку заповнюємо стовпці *Б* та $C_б$. Над стовпцями $A_1, A_2, \ldots$ надписуємо відповідні коефіцієнти цільової функції. Новий базисний стовпець містить нулі, крім одиниці замість провідного елемента. Рядок, де помінялась базисна компонента, заповнюється елементами відповідного рядка з попередньої симплекс-таблиці, поділеними на провідний елемент. Решта компонентів стовпців $A_0, A_1, A_2,...$ заповнюється за правилом прямокутника, а саме, елемент зі стовпця A_j та рядка A_i для нової симплекс-таблиці обчислюється за елементами попередньої симплекс-таблиці як

$$\bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}},$$

де a_{rs} – провідний елемент попередньої симплекс-таблиці.

Зокрема, для другої симплексної таблиці розглядуваного прикладу одержуємо

$$\bar{a}_{50} = (8 \cdot 5 - 1 \cdot (-1)) / 5 = 41/5,$$

$$\bar{a}_{70} = (10 \cdot 5 - 1 \cdot (-1)) / 5 = 51/5,$$

$$\bar{a}_{51} = (2 \cdot 5 - 7 \cdot (-1)) / 5 = 17/5,$$

$$\bar{a}_{71} = (1 \cdot 5 - 7 \cdot (-1)) / 5 = 12/5 \text{ тощо.}$$

Зауважимо, що базисні стовпці містять єдину одиницю, розташовану на перетині з однойменним рядком, а решту їх компонентів складають нулі. Зауважимо також, що серед елементів стовпця A_0 не можуть з’являтися від’ємні компоненти, тоді як наявність нулів означатиме, що одержане опорне рішення є виродженим.

Отже, в розглядуваному прикладі нове опорне рішення має вигляд

$$x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = 0, x_3 = 1/5, x_5 = 41/5, x_7 = 51/5.$$

Далі повторюємо дії, виконані за першою симплексною таблицею розглядуваного прикладу. А саме, обчислюємо оцінки до стовпців $A_0, A_1, A_2,...$ (рис. 2.5). Значення цільової функції на новому опорному рішенні складає $\Delta_0 = 1$. Перевіряємо умову оптимальності. Вона не виконується внаслідок наявності від’ємної оцінки $\Delta_4 = -5$. Через те, що стовпчик A_4 містить додатні компоненти, ознака необмеженості цільової функції на множині припустимих рішень задачі порушується. Тому є можливість збільшити значення критерію оптимальності, перейшовши до нового опорного рішення.

До наступного базису увійде стовпчик A_4. Згідно з розрахованими симплексними відношеннями (рис. 2.5), з базису виводиться A_5, адже у відповідному рядку симплексне відношення набуває мінімального значення. Провідний елемент дорівнюватиме *19/5*.

Переходимо до створення третьої симплекс-таблиці. Спочатку заповнюємо стовпці *Б* та *С_б*. Над стовпцями $A_1, A_2,...$ надписуємо відповідні коефіцієнти цільової функції. Новий базисний стовпець A_4 містить нулі, крім одиниці замість провідного елемента. Рядок, де помінялась базисна компонента, заповнюється елементами відповідного рядка з другої симплекс-таблиці, діленими на провідний елемент. Решта компонентів стовпців $A_0, A_1, A_2,...$ заповнюється за правилом прямокутника.

Обчислюємо оцінки до стовпців $A_0, A_1, A_2,...$. Серед них нема від’ємних. Тому новий опорний план

$$x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0, x_3 = 53/19, x_4 = 41/19, x_7 = 161/19$$

є оптимальним та надає цільовій функції максимальне значення $\Delta_0 = 224/19$.

Відповідь: для початкових умов задачі маємо $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 53/19, x_4 = 41/19$, мінімальне значення критерію оптимальності $-224/19$.

Зауважимо, що задача лінійного програмування має нескінченну кількість оптимальних рішень, якщо в її останній симплекс-таблиці існує не базисний стовпець з нульовою оцінкою та додатними компонентами, що відповідають не нульовим базисним змінним (компонентам стовпця A_0). Введення зазначеного стовпця до базису дозволить перейти до наступного опорного рішення без зміни значення цільової функції. Нескінченна кількість оптимальних рішень геометрично розташовуватиметься на ребрі між знайденими опорними планами – вершинами множини припустимих рішень задачі.

Приклад 2.7 *(для самостійного виконання).* Вирішити симплексним методом задачі лінійного програмування:

а) $$-1x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to min$$

при обмеженнях
$$1x_1 + 4x_2 - 3x_3 \le 4,$$
$$4x_1 - 1x_2 + 2x_3 \le 2,$$
$$-2x_1 - 3x_2 + 1x_3 \ge -7,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

б) $$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 1x_4 \to max$$

при обмеженнях
$$1x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \le 2,$$
$$-4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 \ge -6,$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Питання для самоконтролю •
засвоєння матеріалу РОЗДІЛУ 2 •

1. Яку функцію називають лінійною?
2. В чому полягає загальна постановка задачі лінійного програмування?
3. Скільки оптимальних планів може мати задача лінійного програмування?
4. Що таке “градієнт” та “лінія рівня функції”?
5. Для вирішення яких задач лінійного програмування можна застосовувати геометричний метод?
6. В чому полягає геометричний метод вирішення задач лінійного програмування?
7. Сформулюйте правила перетворення постановки задачі лінійного програмування до канонічної форми.

8. Що таке “опорне рішення задачі лінійного програмування”?
9. Надайте визначення базису опорного рішення задачі лінійного програмування.
10. Опишіть загальну схему симплекс-методу.
11. Яким чином формується перша симплекс-таблиця для вирішення задачі лінійного програмування?
12. Сформулюйте умову оптимальності рішення задачі лінійного програмування в симплекс-методі.
13. В чому полягає умова необмеженості цільової функції на множині припустимих рішень задачі лінійного програмування в симплекс-методі?
14. Яким чином здійснюється перехід до наступної симплекс-таблиці з покращенням поточного опорного рішення?
15. Який вигляд останньої симплекс-таблиці є ознакою нескінченної кількості оптимальних рішень задачі лінійного програмування?

Матеріали розділу підготовлено з використанням джерел [3; 5; 8; 13; 15; 19; 20].

РОЗДІЛ 3 ●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●
ТРАНСПОРТНІ МОДЕЛІ
●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

3.1. Транспортні задачі в матричній постановці. • • • • • • • • • • • • • Комп'ютерний пошук оптимального перевезення • • • • • • • • • • •

Нехай є m виробників та n споживачів певного виду продукції із заданими обсягами виробництва та споживання, відповідно рівними a_i, $i=\overline{1,m}$, та b_j, $j=\overline{1,n}$. Відомі вартості перевезення одиниці продукції від i-го виробника до j-го споживача – величини c_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Треба визначити план поставок продукції, котрий мінімізує сумарні витрати на її перевезення та максимально враховує попит і пропозицію.

Транспортні задачі бувають закритого та відкритого типу. В першому випадку загальний обсяг виробництва продукції співпадає з сумарним обсягом її замовлення:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Натомість у транспортних задачах відкритого типу ці обсяги не однакові, причому якщо попит переважає над пропозицією, то частина споживачів не одержить потрібної кількості продукції. Якщо ж загальний обсяг виробництва є більшим, ніж сумарні потреби споживачів, то частина продукції залишатиметься невивезеною.

Математична модель для транспортної задачі закритого типу матиме наступний вигляд.

Позначимо через x_{ij} обсяг перевезеної продукції від i-го виробника до j-го споживача, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Дотримуючись економічного змісту, всі введені змінні прийматимуть тільки невід'ємні значення.

З погляду на необхідність вивезення всієї виробленої продукції введемо блок обмежень-рівностей

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m}. \qquad (3.1)$$

Для визначення плану постачання продукції, що цілком задовольняє попит споживачів, введемо блок обмежень-рівностей

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,n}. \qquad (3.2)$$

Критерій оптимальності визначатиме сумарні витрати на транспортування продукції за поточним планом перевезень і підлягатиме мінімізації

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min. \qquad (3.3)$$

Таким чином, за моделлю транспортної задачі необхідно знайти такі невід'ємні значення змінних x_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, що задовольняють обмеження-рівності (3.1), (3.2) та мінімізують критерій оптимальності (3.3).

Транспортні задачі завжди мають оптимальні плани постачання продукції.

Деталізуємо вирішення транспортної задачі засобами програми OO Calc на наступному прикладі.

Приклад 3.1. Зерно з *5* господарств слід перевезти на *3* елеватори із питомими витратами за *1* т зерна, наведеними в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Вхідні дані до *прикладу 3.1*

Номер господарства	Номер елеватора		
	1	*2*	*3*
1	*90*	*92*	*74*
2	*60*	*70*	*88*
3	*110*	*80*	*96*
4	*80*	*78*	*96*
5	*84*	*96*	*100*

Обсяг зібраного зерна в господарствах дорівнює, відповідно, *2000, 1500, 800, 1700, 1400* т. Вільні потужності елеваторів складають *3100, 2000* та *2300* т. Треба побудувати план перевезень з мінімальними сукупними витратами на транспортування зерна.

Рішення. У математичній моделі до наведеної задачі позначимо через x_{ij} обсяг зерна (в т), що буде перевозитись від i-го господарства на j-ий елеватор, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,3}$. Дотримуючись економічного змісту, всі введені змінні прийматимуть тільки невід'ємні значення.

Оскільки сумарний обсяг зібраного зерна

$$2000 + 1500 + 800 + 1700 + 1400 = 7400$$

співпадає з сумарним обсягом вільних потужностей елеваторів

$$3100 + 2000 + 2300 = 7400,$$

приклад відноситься до закритого типу. Всі обмеження набуватимуть вигляду рівностей. Зауважимо, що в моделі відкритого типу блок обмежень до надлишкового попиту чи пропозиції складатимуть нерівності типу "≤".

Блок обмежень стосовно вивезення всього зерна від господарств подаватимуть співвідношення вигляду

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 2000, \tag{3.4}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1500, \tag{3.5}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 800, \tag{3.6}$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1700, \tag{3.7}$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} = 1400. \tag{3.8}$$

Блок обмежень стосовно завантаження всіх вільних потужностей елеваторів подаватимуть співвідношення вигляду

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 3100, \tag{3.9}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 2000, \tag{3.10}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 2300. \tag{3.11}$$

Цільова функція визначатиме загальні транспортні витрати і підлягатиме мінімізації:

$$90x_{11} + 92x_{12} + ... + 96x_{52} + 100x_{53} \to min\,. \qquad (3.12)$$

Таким чином, в одержаній математичній моделі необхідно знайти такі невід’ємні значення змінних x_{ij}, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,3}$, що задовольняють обмеження (3.4)–(3.11) та мінімізують критерій оптимальності (3.12).

Для визначення оптимального плану перевезень засобами програми OO Calc необхідно оформити вхідні дані так, як показано на рис. 3.1. Зокрема, значення комірки E3 визначимо за формулою =SUM(B3:D3) та скопіюємо її до комірок E4–E7. Аналогічно, значення комірки B8 визначимо за формулою =SUM(B3:B7) та скопіюємо її до комірок C8, D8. Значення комірки I9 задамо за формулою

=SUMPRODUCT(B3:D7;H3:J7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Господарства	Елеватори			Вивезені обсяги зерна		Зібрані обсяги зерна	Витрати на транспортування одиниці продукції		
2		1	2	3						
3	1				0	=	2000	90	92	74
4	2				0	=	1500	60	70	88
5	3				0	=	800	110	80	96
6	4				0	=	1700	80	78	96
7	5				0	=	1400	84	96	100
8	Завантажені потужності елеватору	0	0	0				Загальні витрати на перевезення		
9		=	=	=					0	
10	Вільні потужності елеватору	3100	2000	2300						

Рис. 3.1. Вхідні дані до ***прикладу 3.1***
в електронній таблиці OO Calc

Для виконання обчислень засобами інструментарію “Решатель” слід оформити розрахункові дані згідно з рис. 3.2.

Одержаний оптимальний план перевезення зерна на елеватори наведено на рис. 3.3.

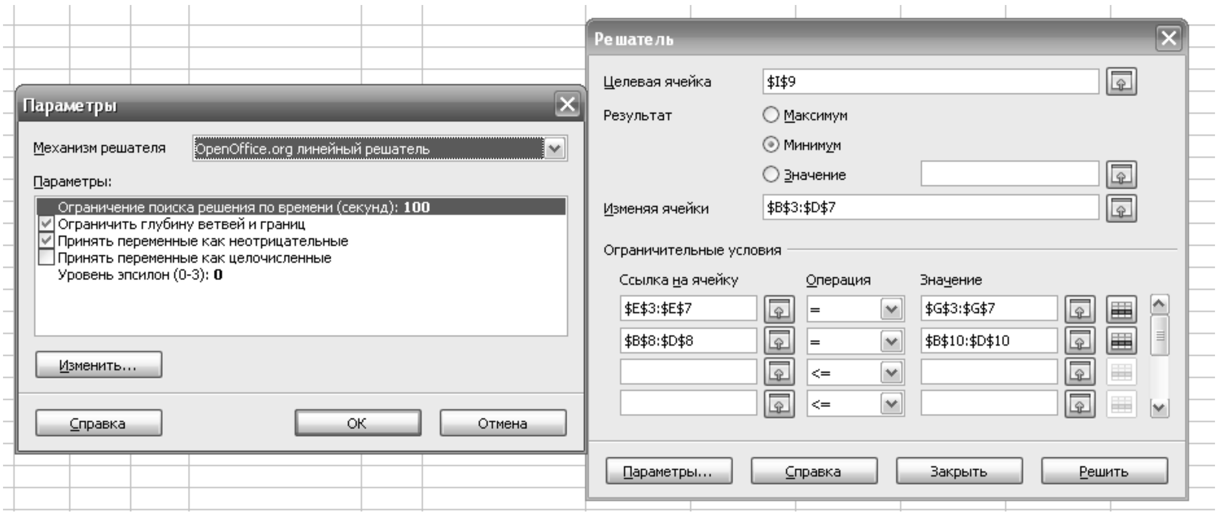


Рис. 3.2. Розрахункові дані ***прикладу 3.1***
в інструментарії “Решатель”

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Господарства	Елеватори			Вивезені обсяги зерна		Зібрані обсяги зерна	Витрати на транспортування одиниці продукції		
2		1	2	3						
3	1	0	0	2000	2000	=	2000	90	92	74
4	2	1500	0	0	1500	=	1500	60	70	88
5	3	0	500	300	800	=	800	110	80	96
6	4	200	1500	0	1700	=	1700	80	78	96
7	5	1400	0	0	1400	=	1400	84	96	100
8	Завантажені потужності елеватору	3100	2000	2300				Загальні витрати на перевезення		
9		=	=	=					557400	
10	Вільні потужності елеватору	3100	2000	2300						
11										

Рис. 3.3. Оптимальне рішення до ***прикладу 3.1***

Відповідь: перше господарство все зерно (*2000* т) надсилає на третій елеватор, друге і п’яте господарства все зібране зерно (відповідно, *1500* та *1400* т) відправляють на перший елеватор. Третє господарство надсилає *500* т на другий, а *300* т – на третій елеватор. Четверте господарство відправляє *200* т на перший, а *1500* т – на другий елеватор. Перший елеватор завантажується зерном від другого (*1500* т), четвертого (*200* т) та п’ятого (*1400* т) господарств. Другий елеватор одержує зерно від третього (*500* т) і четвертого (*1500* т) господарств. Третій елеватор завантажується зерном від першого (*2000* т) та третього (*300* т) господарств. Загальні транспортні витрати складатимуть *557400* грн.

3.2. Методи північно-західного кута, Фогеля та потенціалів для визначення оптимального плану транспортування

За математичною постановкою транспортні задачі належать до задач лінійного програмування. Тому їх вирішення можна здійснювати симплексним методом. Проте, враховуючи співвідношення між кількістю невідомих та обмежень, а також те, що коефіцієнти обмежень приймають лише нульові чи одиничні значення, розроблено спеціалізовані методи вирішення транспортних задач. А саме, для пошуку початкового плану перевезень найчастіше застосовують метод північно-західного кута або метод Фогеля. Для здійснення перевірки поточного плану на оптимальність та його покращення розроблено метод потенціалів. Зауважимо, що до застосування вказаних методів необхідно зробити перетворення транспортних задач з відкритого до закритого типу шляхом введення фіктивного виробника чи додаткового споживача продукції із достатньо великими витратами на транспортування.

За методом північно-західного кута на кожному кроці визначають значення змінної, що відповідає лівому верхньому куту ще не розглянутої частини матриці початкового плану перевезень, з метою отримання в такий спосіб $(m+n-1)$-ої базисної компоненти початкового опорного рішення. А саме, для чергової змінної задаємо $x_{ij}=\min\{\bar{a}_i,\bar{b}_j\}$, де $\bar{a}_i$ та $\bar{b}_j$ – поточні залишки відповідних обсягів пропозиції та попиту на продукцію. Якщо $x_{ij}=\bar{a}_i$, то викреслюємо з матриці початкового плану перевезень i-ий рядок та зменшуємо $\bar{b}_j$ на величину $\bar{a}_i$. Якщо $x_{ij}=\bar{b}_j$, то викреслюємо з матриці плану перевезень j-ий стовпчик та зменшуємо $\bar{a}_i$ на величину $\bar{b}_j$. Якщо $\bar{a}_i=\bar{b}_j$, то викреслюємо з матриці початкового плану перевезень або i-ий рядок, або j-ий стовпчик. Продовжуємо описаний процес, поки не закреслимо всі рядки та стовпці матриці початкового плану перевезень.

Наведений метод північно-західного кута є досить простим у реалізації, проте він не враховує вартості перевезення одиниці продукції. Одержати ближчі до оптимальних, тобто дешевші початкові плани перевезень дозволяє метод Фогеля.

Значення чергової змінної x_{ij} визначається як і в методі північно-західного кута. Проте вибір розглядуваної змінної здійснюють в інший спосіб. А саме, для кожного не закресленого рядка та стовпця матриці вартостей перевезення обчислюємо модуль різниці між двома найменшими елементами. Серед одержаних різниць обираємо максимальну. Якщо вона розташована в i-му рядку, то визначатиметься змінна x_{ij}, котра відповідає мінімальному з не закреслених елементів c_{ij} i-го рядка. Якщо максимальна різниця розташована в j-му стовпці, то визначатиметься змінна x_{ij}, котра відповідає мінімальному з не закреслених елементів c_{ij} j-го стовпця.

За методом потенціалів для перевірки оптимальності поточного опорного рішення вводимо до рядків та стовпців матриці плану перевезень потенціали u_i, $i = \overline{1,m}$, v_j $j = \overline{1,n}$. Одному з них надаємо довільне значення. Решту потенціалів визначаємо за базисними змінними x_{ij}, виходячи з рівностей $u_i + v_j = c_{ij}$, де один з потенціалів вже знайдено. Якщо для всіх небазисних змінних x_{ij} виконуються нерівності $u_i + v_j \le c_{ij}$, то поточне опорне рішення є оптимальним. В протилежному випадку можна здійснити його трансформацію на користь зменшення загальних транспортних витрат.

Перехід до нового опорного рішення передбачає введення до базису однієї зі змінних x_{ij}, де нерівність $u_i + v_j \le c_{ij}$ порушується найбільшим чином. Для визначення змінної, що залишатиме базис, розбудовуємо компенсаційний ланцюжок – замкнену ламану лінію, обираючи почергово по горизонталі й по вертикалі в якості її вершин базисні клітини, починаючи із вказаної небазисної змінної

x_{ij}. Почергово проставляємо до вершин ламаної лінії позначки “+” та “–”, надавши змінній x_{ij} позначку “+”. Обчислюємо $\theta = \min x_{ij}$ за всіма вершинами розбудованої ламаної лінії з позначками “–”. Нове опорне рішення буде одержано з поточного плану шляхом додавання θ до всіх змінних з позначками “+” та віднімання θ від всіх змінних з позначками “–”. Одна з базисних змінних, що після цього отримає нульове значення, виводиться з базису.

Приклад 3.2. Розглянемо трьох виробників та чотирьох замовників аграрної продукції. Нехай обсяги пропозиції продукції складають *10, 15* та *7* одиниць, а обсяги попиту на неї – *3, 5, 10* та *14* одиниць. Питомі витрати на перевезення одиниці продукції від виробників до замовників подано в табл. 3.2.

Треба знайти план перевезень, за яким сукупні транспортні витрати є мінімальними. Здійснити розрахунки методами північно-західного кута та потенціалів.

Таблиця 3.2

Вхідні дані до *прикладу 3.2*

Виробники	Замовники			
	1	*2*	*3*	*4*
1	*1*	*3*	*7*	*1*
2	*2*	*4*	*2*	*3*
3	*6*	*5*	*4*	*1*

Рішення. Перевіримо, що розглядувана транспортна задача відноситься до закритого типу:

$$10 + 15 + 7 = 32 = 3 + 5 + 10 + 14 .$$

Знайдемо початковий план перевезень методом північно-західного кута (рис. 3.4).

Кількість додатних елементів матриці початкового плану перевезень $6 = 3 + 4 - 1$, тому відповідне опорне рішення невироджене. Виділимо базисні клітини в матриці перевезень та обчислимо потенціали для всіх її рядків та стовпців, поклавши $u_1 = 0$ (рис. 3.5).

3	5	~~2~~	~~0~~	~~10~~	~~7~~	~~2~~	~~0~~
0	0	8	~~7~~	~~15~~	~~7~~	~~0~~	
0	0	0	~~7~~	~~7~~	~~0~~		
3	5	10	14				
0	0	8	7				
		0	0				

Рис. 3.4. Початковий опорний план до ***прикладу 3.2***

	1	2	3	4	u
1	3	5	“–” 2	0 “+” $8+0 \le 1$	0
2	0 $1-5 \le 2$	0 $3-5 \le 4$	“+” 8	7 “–”	-5
3	0 $1-7 \le 6$	0 $3-7 \le 5$	0 $7-7 \le 4$	7	-7
v	1	3	7	8	

Рис. 3.5. Перша ітерація за методом потенціалів до ***прикладу 3.2***

Умова оптимальності порушується на змінній x_{14}. Тому можна знайти дешевший план транспортування продукції. Розбудовуємо компенсаційний ланцюжок, проставляємо позначки до його вершин. Знаходимо $\theta = \min\{2; 7\} = 2$ та переходимо до наступного опорного плану транспортування (рис. 3.6).

Оскільки кількість додатних елементів матриці чергового плану перевезень складає $6 = 3 + 4 - 1$, відповідне опорне рішення невироджене. Виділимо базисні клітини в матриці перевезень та обчислимо потенціали для всіх її рядків та стовпців, поклавши $u_1 = 0$. Умова оптимальності порушується на змінних x_{21} та x_{22}. Тому можна знайти дешевший план транспортування продукції. Почавши зі змінної x_{22}, розбудовуємо компенсаційний ланцюжок і проставляємо позначки до його вершин. Знаходимо $\theta = min\{5; 5\} = 5$ та переходимо до наступного опорного плану транспортування (рис. 3.7).

	1	2	3	4	u
1	3	“–” 5	0 $0+0 \le 7$	2 “+”	0
2	0 $1+2 \le 2$	“+” 0 $3+2 \le 4$	10	5 “–”	2
3	0 $1+0 \le 6$	0 $3+0 \le 5$	0 $0+0 \le 4$	7	0
v	1	3	0	1	

Рис. 3.6. Друга ітерація за методом потенціалів до ***прикладу 3.2***

	1	2	3	4	u
1	3	0	0 $0+1 \le 7$	7	0
2	0 $1+1 \le 2$	5	10	0 $1+1 \le 2$	1
3	0 $1+0 \le 6$	0 $3+0 \le 5$	0 $1+0 \le 4$	7	0
v	1	3	1	1	

Рис. 3.7. Третя ітерація за методом потенціалів до ***прикладу 3.2***

Оскільки кількість додатних елементів матриці чергового плану перевезень складає $5 < 3 + 4 - 1$, відповідне опорне рішення – вироджене. Виділимо базисні клітини в матриці перевезень та обчислимо потенціали до всіх її рядків та стовпців, поклавши $u_1 = 0$. Умова оптимальності виконується. Тому поточний план перевезень є найдешевшим. Зокрема, загальні транспортні витрати складають $3 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 57$.

Відповідь: перший виробник надає *3* та *7* одиниць продукції, відповідно, першому і четвертому замовникам, другий виробник надсилає *5* і *10* одиниць продукції, відповідно, другому і третьому замовникам, вся продукція (*7* одиниць) третього виробника перевозиться до четвертого замовника. Мінімальні транспортні витрати в даному разі складатимуть *57* одиниць.

Приклад 3.3 *(для самостійного виконання)*. Розглянемо трьох виробників та чотирьох замовників аграрної продукції. Нехай обсяги пропозиції продукції складають *20, 10* та *15* одиниць, а обсяги попиту на неї – *10, 15, 15* та *5* одиниць. Питомі витрати на перевезення одиниці продукції від виробників до замовників подано в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Вхідні дані до *прикладу 3.3*

Виробники	Замовники			
	1	*2*	*3*	*4*
1	*1*	*3*	*7*	*1*
2	*2*	*4*	*2*	*3*
3	*6*	*5*	*4*	*1*

Треба знайти план перевезень, за яким сукупні транспортні витрати є мінімальними. Здійснити розрахунки методами північно-західного кута та потенціалів.

Приклад 3.4. Розглянемо трьох виробників та чотирьох замовників аграрної продукції. Нехай обсяги пропозиції продукції складають *8, 9* та *8* одиниць, а обсяги попиту на неї – *7, 9, 4* та *5* одиниць. Питомі витрати на перевезення одиниці продукції від виробників до замовників подано в табл. 3.4. Треба знайти план перевезень, за яким сукупні транспортні витрати є мінімальними. Здійснити розрахунки методами Фогеля та потенціалів.

Таблиця 3.4

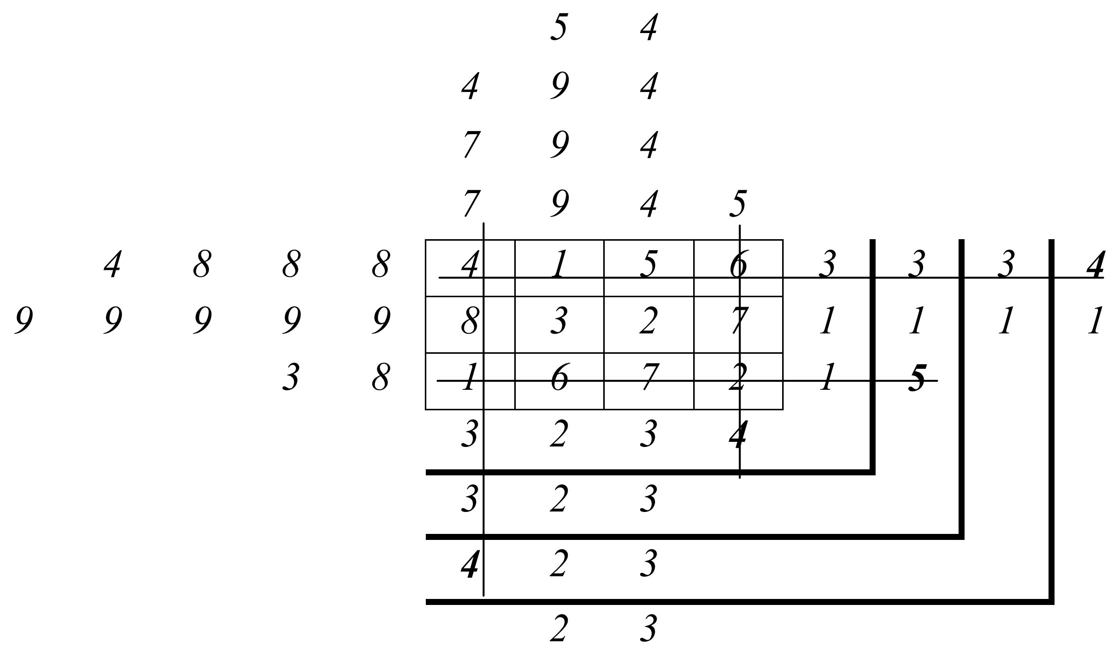
Вхідні дані до *прикладу 3.4*

Виробники	Замовники			
	1	*2*	*3*	*4*
1	*4*	*1*	*5*	*6*
2	*8*	*3*	*2*	*7*
3	*1*	*6*	*7*	*2*

Рішення. Перевіримо, що розглядувана транспортна задача відноситься до закритого типу:

$$8+9+8=25=7+9+4+5\,.$$

Знайдемо початковий план перевезень методом Фогеля (рис. 3.8).



4	*4*	*0*	*0*
0	*5*	*4*	*0*
3	*0*	*0*	*5*

Рис. 3.8. Початковий опорний план до ***прикладу 3.4***

Дане опорне рішення невироджене, адже кількість додатних елементів матриці чергового плану перевезень складає $6=3+4-1$. Виділимо базисні клітини в матриці перевезень та обчислимо потенціали до всіх її рядків та стовпців, поклавши $u_1=0$ (рис. 3.9).

	1	2	3	4	u
1	4	4	0 $0+0 \le 5$	0 $0+5 \le 6$	0
2	0 $4+2 \le 8$	5	4	0 $5+2 \le 7$	2
3	3	0 $1-3 \le 6$	0 $0-3 \le 7$	5	-3
v	4	1	0	5	

Рис. 3.9. Перевірка оптимальності початкового опорного плану до ***прикладу 3.4***

Умова оптимальності виконується. Тому поточний план перевезень є найдешевшим. Зокрема, загальні транспортні витрати складають

$$4 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 56 .$$

Відповідь: перший виробник надає *4* та *4* одиниці продукції, відповідно, першому і другому замовникам, другий виробник надсилає *5* і *4* одиниці продукції, відповідно, другому і третьому замовникам, *3* та *5* одиниць продукції третього виробника перевозиться, відповідно, до першого та четвертого замовників. Мінімальні транспортні витрати в даному разі складатимуть *56* одиниць.

Приклад 3.5 *(для самостійного виконання)*. Розглянемо трьох виробників та чотирьох замовників аграрної продукції. Нехай обсяги пропозиції продукції складають *20, 10* та *15* одиниць, а обсяги попиту на неї – *10, 15, 15* та *5* одиниць. Питомі витрати на перевезення одиниці продукції від виробників до замовників подано в табл. 3.5. Треба знайти план перевезень, за яким сукупні транспортні витрати є мінімальними. Здійснити розрахунки методами Фогеля та потенціалів.

Таблиця 3.5

Вхідні дані до *прикладу 3.5*

Виробники	Замовники			
	1	*2*	*3*	*4*
1	*1*	*3*	*7*	*1*
2	*2*	*4*	*2*	*3*
3	*6*	*5*	*4*	*1*

Питання для самоконтролю • засвоєння матеріалу РОЗДІЛУ 3 •

1. Надайте економічну постановку транспортної задачі.
2. Які транспортні задачі відносять до закритого та відкритого типу?
3. Опишіть математичну модель транспортної задачі закритого типу. Чим вона відрізняється від транспортної моделі відкритого типу?
4. Яким чином оформлюються вхідні дані для вирішення транспортної задачі в програмі ОО Calc?
5. Яким чином оформлюються розрахункові дані для транспортної задачі в інструментарії “Решатель” в електронній таблиці ОО Calc?
6. Як трансформувати транспортну задачу з відкритого до закритого типу?
7. Як знайти початковий план перевезень у закритій транспортній задачі методом північно-західного кута?
8. Опишіть послідовність пошуку початкового плану перевезень методом Фогеля.
9. Яким чином перевіряється оптимальність поточного плану перевезень у транспортній задачі за методом потенціалів?
10. Як покращити поточний план перевезень у транспортній задачі методом потенціалів?

Матеріали розділу підготовлено з використанням джерел [3; 5; 8; 13; 15; 19].

РОЗДІЛ 4 ●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

ЦІЛОЧИСЛОВІ, НЕЛІНІЙНІ, СТОХАСТИЧНІ ТА БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ В СІЛЬСЬКОМУ ГОСПОДАРСТВІ

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

4.1. Цілочислові оптимізаційні моделі в аграрній економіці

У задачах цілочислового програмування невідомі можуть приймати тільки цілі значення. Вимога дискретності (відокремленості) значень змінних зустрічається в задачах, де йдеться про поголів'я тварин, кількість техніки, найм працівників, при календарному плануванні тощо. Вирішення подібних задач методами безперервної оптимізації із наступним округленням може призвести до порушення обмежень моделі. Спеціалізовані методи вирішення задач цілочислового програмування ґрунтуються на евристичних підходах послідовного перебору припустимих планів, як це реалізовано у методі меж та розгалужень. Класичними цілочисловими оптимізаційними моделями є задачі про упакування та про призначення (***приклади 4.1*** та ***4.2***).

Приклад 4.1. Нехай є n видів продукції. Задано вагу m_i та цінність c_i для кожної з M_i одиниць її i-го виду, $i = \overline{1,n}$. Треба завантажити контейнер з граничною підйомною вагою M, щоб загальна цінність вантажу була максимальною.

Рішення. Для створення оптимізаційної моделі до розглядуваного прикладу позначимо через x_i кількість одиниць i-го виду продукції, що буде завантажено в контейнер, $i = \overline{1,n}$. Дотримуючись економічного змісту, всі введені змінні прийматимуть невід'ємні цілі значення.

Обмеження за кількістю завантажених одиниць до кожного виду продукції описуватимуть нерівності

$$x_i \le M_i\,,\ i = \overline{1,n}\,. \tag{4.1}$$

Обмеження стосовно граничної вантажопідйомності контейнера визначатиме нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \le M\,. \tag{4.2}$$

Критерій оптимальності задаватиме загальну цінність вантажу в контейнері та підлягатиме максимізації

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to max\,. \tag{4.3}$$

Таким чином, в цілочисловій оптимізаційній моделі про упакування треба знайти такі невід'ємні цілі значення змінних x_i, $i = \overline{1,n}$, що задовольняють обмеження, (4.1), (4.2) та максимізують цільову функцію (4.3).

Зауважимо, що за критерієм

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (M_i - x_i) \to min$$

відбувається мінімізація сумарної цінності залишеного вантажу.

Приклад 4.2. В аграрному підприємстві працює *7* співробітників, котрі можуть виконувати будь-яку з *7* технологічних операцій. Продуктивності (час) виконання працівниками зазначених операцій подано в табл. 4.1. Треба призначити кожного працівника на деяку технологічну операцію, щоб охопити весь обсяг робіт та забезпечити максимальну можливу сумарну продуктивність (мінімальний сукупний час) їх виконання.

Рішення. Математична модель для розглядуваного прикладу набуватиме наступного вигляду. Нехай x_{ij} – шукана двійкова (булева) змінна, що приймає одиничне значення в разі призначення на виконання i-ої технологічної операції j-го співробітника та нульове значення в протилежному випадку, $i = \overline{1,7}$, $j = \overline{1,7}$.

Таблиця 4.1

Вхідні дані до *прикладу 4.2*

Технологічні операції	Співробітники						
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	*12*	*14*	*15*	*20*	*23*	*8*	*16*
2	*14*	*18*	*13*	*19*	*22*	*21*	*15*
3	*15*	*17*	*13*	*18*	*22*	*20*	*19*
4	*18*	*17*	*10*	*22*	*16*	*15*	*13*
5	*17*	*19*	*17*	*14*	*18*	*16*	*20*
6	*16*	*17*	*18*	*15*	*15*	*18*	*19*
7	*16*	*18*	*19*	*17*	*18*	*20*	*21*

Обмеження про призначення на будь-яку технологічну операцію одного виконавця опишемо як

$$\sum_{j=1}^{7} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,7}. \tag{4.4}$$

Обмеження про надання кожному працівнику одного робітничого завдання мають вигляд

$$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,7}. \tag{4.5}$$

Критерій ефективності призначення співробітників для виконання всього обсягу аграрних робіт підлягає максимізації, якщо табл. 4.1 містить дані про продуктивність праці, або мінімізації, якщо в табл. 4.1 подано інформацію про часові характеристики діяльності співробітників, тобто

$$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} c_{ij}x_{ij} \to max\,(min), \tag{4.6}$$

де c_{ij} – числові дані з табл. 4.1.

Таким чином, в оптимізаційній моделі про призначення треба знайти такі двійкові (булеві) значення змінних x_{ij}, $i = \overline{1,7}$, $j = \overline{1,7}$, що задовольняють обмеження (4.4), (4.5) та, залежно від економічного сенсу задачі, максимізують або мінімізують цільову функцію (4.6).

Для визначення оптимального плану призначення співробітників засобами програми ОО Calc необхідно оформити вхідні дані так, як показано на рис. 4.1. Зокрема, значення комірки I3 визначимо за формулою =SUM(B3:H3) та скопіюємо її до комірок I4–I9. Аналогічно, значення комірки B10 визначимо за формулою =SUM(B3:B9) та скопіюємо її до комірок C10–H10. Значення комірки Q12 задамо за формулою

=SUMPRODUCT(B3:H9;N3:T9).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Технологічні операції	Співробітники							Виконання операцій					Продуктивність (час) виконання співробітниками технологічних операцій						
2		1	2	3	4	5	6	7						1	2	3	4	5	6	7
3	1								0	=	1		1	12	14	15	20	23	8	16
4	2								0	=	1		2	14	18	13	19	22	21	15
5	3								0	=	1		3	15	17	13	18	22	20	19
6	4								0	=	1		4	18	17	10	22	16	15	13
7	5								0	=	1		5	17	19	17	14	18	16	20
8	6								0	=	1		6	16	17	18	15	15	18	19
9	7								0	=	1		7	16	18	19	17	18	20	21
10	Працевлаштованість співробітників	0	0	0	0	0	0	0												
11		=	=	=	=	=	=	=					Загальна продуктивність (час) від призначення							
12		1	1	1	1	1	1	1									0			
13																				

Рис. 4.1. Вхідні дані до ***прикладу 4.2***
в електронній таблиці ОО Calc

Для обчислень на максимум засобами інструментарію “Решатель” розрахункові дані оформлюються згідно з рис. 4.2.

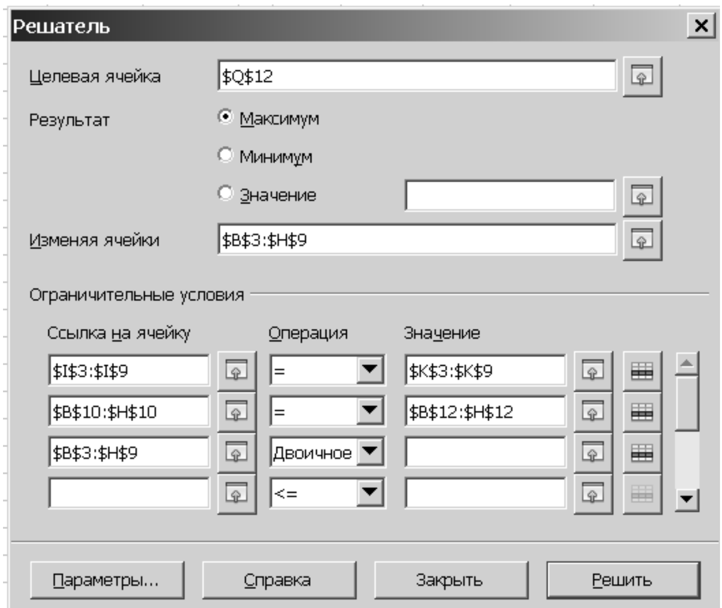


Рис. 4.2. Розрахункові дані до ***прикладу 4.2*** на максимум

Одержаний оптимальний план призначення співробітників для виконання технологічних операцій з максимальною сумарною продуктивністю наведено на рис. 4.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Технологічні операції	Співробітники							Виконання операцій					Продуктивність (час) виконання співробітниками технологічних операцій						
2		1	2	3	4	5	6	7						1	2	3	4	5	6	7
3	1	0	0	0	0	1	0	0	1	=	1		1	12	14	15	20	23	8	16
4	2	0	0	0	0	0	1	0	1	=	1		2	14	18	13	19	22	21	15
5	3	1	0	0	0	0	0	0	1	=	1		3	15	17	13	18	22	20	19
6	4	0	0	0	1	0	0	0	1	=	1		4	18	17	10	22	16	15	13
7	5	0	1	0	0	0	0	0	1	=	1		5	17	19	17	14	18	16	20
8	6	0	0	1	0	0	0	0	1	=	1		6	16	17	18	15	15	18	19
9	7	0	0	0	0	0	0	1	1	=	1		7	16	18	19	17	18	20	21
10	Працевлаштова	1	1	1	1	1	1	1												
11	ність	=	=	=	=	=	=	=					Загальна продуктивність (час) від призначення							
12	співробітників	1	1	1	1	1	1	1									139			
13																				

Рис. 4.3. Оптимальне рішення до ***прикладу 4.2*** на максимум

Відповідь: перший співробітник виконуватиме третю, другий – п’яту, третій – шосту, четвертий – четверту, п’ятий – першу, шостий – другу, сьомий – сьому технологічну операцію. Знайдена загальна продуктивність виконання всього комплексу робіт складатиме *139* одиниць.

Для обчислень на мінімум засобами інструментарію “Решатель” розрахункові дані оформлюються згідно з рис. 4.4.

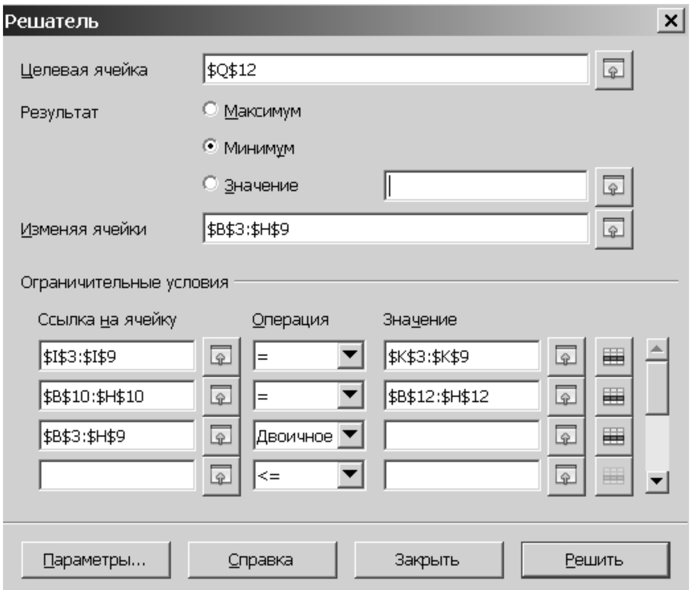


Рис. 4.4. Розрахункові дані до ***прикладу 4.2*** на мінімум

Одержаний оптимальний план призначення співробітників для виконання технологічних операцій з мінімальними сумарними витратами часу наведено на рис. 4.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Технологічні операції	Співробітники							Виконання операцій					Продуктивність (час) виконання співробітниками технологічних операцій						
2		1	2	3	4	5	6	7						1	2	3	4	5	6	7
3	1	0	0	0	0	0	1	0	1	=	1		1	12	14	15	20	23	8	16
4	2	0	0	0	0	0	0	1	1	=	1		2	14	18	13	19	22	21	15
5	3	0	1	0	0	0	0	0	1	=	1		3	15	17	13	18	22	20	19
6	4	0	0	1	0	0	0	0	1	=	1		4	18	17	10	22	16	15	13
7	5	0	0	0	1	0	0	0	1	=	1		5	17	19	17	14	18	16	20
8	6	0	0	0	0	1	0	0	1	=	1		6	16	17	18	15	15	18	19
9	7	1	0	0	0	0	0	0	1	=	1		7	16	18	19	17	18	20	21
10	Працевлаштованість співробітників	1	1	1	1	1	1	1												
11		=	=	=	=	=	=	=					Загальна продуктивність (час) від призначення							
12		1	1	1	1	1	1	1									95			

Рис. 4.5. Оптимальне рішення до ***прикладу 4.2*** на мінімум

Відповідь: перший співробітник виконуватиме сьому, другий – третю, третій – четверту, четвертий – п'яту, п'ятий – шосту, шостий – першу, сьомий – другу технологічну операцію. Знайдені загальні витрати часу на весь комплекс робіт складатимуть *95* одиниць.

4.2. Нелінійні оптимізаційні моделі в аграрній економіці

Багатоекстремальність задач нелінійного програмування значно ускладнює пошук їх оптимальних рішень. Аналітичний метод точного вирішення подібних задач шляхом визначення точок, де похідні цільової функції приймають нульові значення, в разі наявності обмежень не застосовується. Для ітераційного (наближеного) пошуку оптимальних рішень задач нелінійного програмування, що істотно залежить від вибору початкового припустимого плану, розроблено методи:

– нульового порядку (метод покоординатного спуску, метод пошуку за симплексом та методи одновимірної оптимізації – поділу навпіл, золотого перерізу, дотичних), де для визначення напряму зміни поточного рішення залучається інформація лише про значення критерію оптимальності;

– першого порядку (градієнтні методи та їх модифікації для нелінійних задач умовної оптимізації – метод проекції градієнта, метод умовного градієнта), де для визначення напряму зміни поточного рішення залучається інформація про перші похідні критерію оптимальності;

– другого порядку (метод Ньютона), де для визначення напряму зміни поточного рішення залучається інформація про другі похідні критерію оптимальності.

Приклад 4.3. Сільськогосподарське підприємство має *4* трактори. Згідно технологічних карт, передпосівний обробіток ґрунту його *1500* га сільськогосподарських угідь необхідно виконати за *8* днів польових робіт. Для цього можна залучати механізаторів *1–3* розряду. Їх відповідні тарифи оплати та продуктивність праці за зміну за вказаною технологічною операцією дорівнюють *120,5* грн., *160,5* грн., *195* грн. та *46* га, *69* га, *82* га. Треба визначити план найму механізаторів з мінімальним фондом заробітної плати, вважаючи, що всі вони розпочнуть роботу із першого дня, найм здійснюється з точністю до зміни та терміни найму механізаторів однакової розрядності співпадають.

Рішення. В математичній моделі за розглядуваним прикладом позначимо через x_1, x_2 та x_3 кількість залучених механізаторів за трьома зазначеними рівнями кваліфікації. Позначимо через y_1, y_2 та y_3 відповідні терміни найму механізаторів за кількістю змін. Дотримуючись економічного змісту, всі описані невідомі прийматимуть тільки невід’ємні цілі значення.

Введемо обмеження

– за часом виконання робіт

$$y_1 \le 8, \tag{4.7}$$

$$y_2 \le 8, \tag{4.8}$$

$$y_3 \le 8; \qquad (4.9)$$

– за кількістю використовуваних одиниць техніки в машинно-тракторному парку розглядуваного аграрного підприємства

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 4; \qquad (4.10)$$

– за обсягом виконання обов’язкових сільськогосподарських робіт

$$46 \cdot x_1 \cdot y_1 + 69 \cdot x_2 \cdot y_2 + 82 \cdot x_3 \cdot y_3 \ge 1500. \qquad (4.11)$$

Мінімізована цільова функція задачі визначатиме сумарні витрати на оплату праці механізаторів

$$120{,}5 \cdot x_1 \cdot y_1 + 160{,}5 \cdot x_2 \cdot y_2 + 195 \cdot x_3 \cdot y_3 \to min. \qquad (4.12)$$

Таким чином, в одержаній математичній моделі оптимізації найму механізаторів необхідно знайти такі невід’ємні цілі значення змінних x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, що задовольняють обмеження-нерівності (4.7)–(4.11) та мінімізують цільову функцію (4.12).

Для визначення оптимального плану найму механізаторів засобами програми MS Excel необхідно оформити вхідні дані так, як показано на рис. 4.6.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Кількість механізаторів			Терміни найму		
2		x1	x2	x3	y1	y2	y3
3	Значення	1	1	1	1	1	1
4	Обмеження						
5	Назва	Коефіцієнти			Ліва частина	Знак	Права частина
6	Терміни обробітку грунту	1			1	≤	8
7			1		1	≤	8
8				1	1	≤	8
9	За технікою	1	1	1	3	≤	4
10	За площею угідь	46	69	82	197	≥	1500
11	Критерій оптимальності						
12	Назва	Коефіцієнти			Розрахункове зачення		
13	Фонд зарплати	120,5	160,5	195	476	→	min
14							

Рис. 4.6. Вхідні дані до ***прикладу 4.3***
в електронній таблиці MS Excel

Зокрема, значення комірки E6 визначимо за формулою

=СУММПРОИЗВ($E$3:$G$3;B6:D6).

та скопіюємо її до комірок E7, E8. Значення комірки E9 задамо за формулою

=СУММПРОИЗВ(B3:D3;B9:D9).

Значення комірки E10 визначимо за формулою

=СУММПРОИЗВ(B3:D3;E3:G3;B10:D10).

Аналогічно значення комірки E13 задамо за формулою

=СУММПРОИЗВ(B3:D3;E3:G3;B13:D13).

Для виконання обчислень засобами інструментарію "Поиск решения" слід оформити розрахункові дані згідно з рис. 4.7.

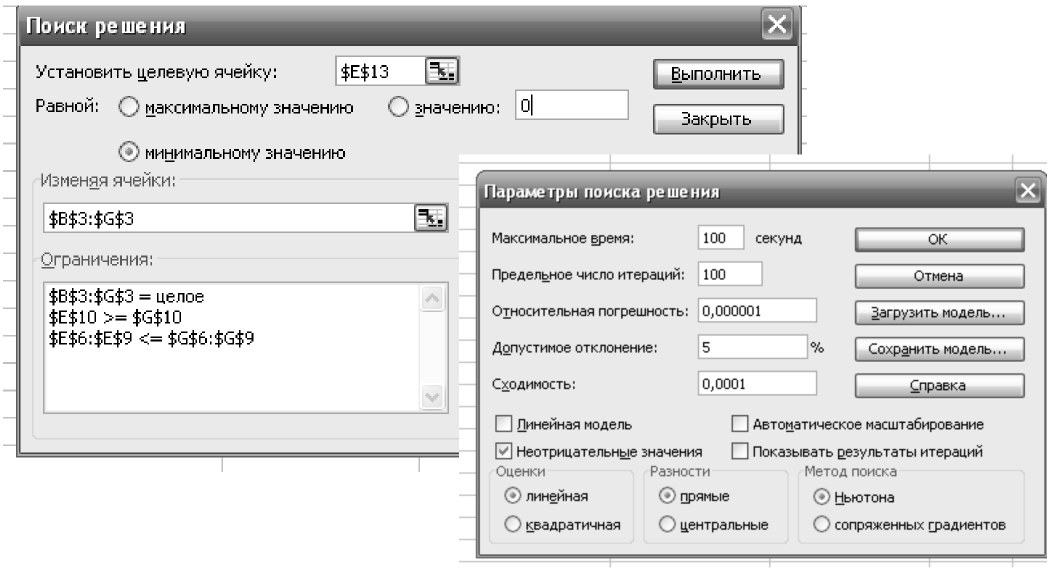


Рис. 4.7. Розрахункові дані до ***прикладу 4.3***
в інструментарії "Поиск решения"

Одержаний план найму механізаторів для передпосівного обробітку ґрунту з мінімальним фондом заробітної плати наведено на рис. 4.8.

Відповідь: необхідно на *7* днів залучити трьох механізаторів *2* розряду, на *1* день – механізатора *3* розряду, механізаторів *1* розряду наймати не доцільно. Передпосівний обробіток ґрунту триватиме *7* днів, причому в перший день буде зайнято *4* трактори, а ще

6 днів працюватиме тільки *3* трактори. Обов'язковий обсяг робіт буде виконаний. Фонд заробітної плати складатиме *3565,5* грн.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Кількість механізаторів			Терміни найму		
2		x1	x2	x3	y1	y2	y3
3	Значення	0	3	1	0	7	1
4	Обмеження						
5	Назва	Коефіцієнти			Ліва частина	Знак	Права частина
6	Терміни обробітку грунту	1			0	≤	8
7			1		7	≤	8
8				1	1	≤	8
9	За технікою	1	1	1	4	≤	4
10	За площею угідь	46	69	82	1531	≥	1500
11	Критерій оптимальності						
12	Назва	Коефіцієнти			Розрахункове зачення		
13	Фонд зарплати	120,5	160,5	195	3565,5	→	min

Рис. 4.8. Оптимальне рішення до ***прикладу 4.3***

4.3. Стохастичні оптимізаційні моделі в аграрній економіці

Серед моделей стохастичного програмування розрізняють:

– моделі оперативного стохастичного програмування, коли пошук рішення здійснюється після одержання реалізації випадкових величин задачі;

– моделі перспективного чи одноетапного стохастичного програмування, коли пошук рішення здійснюється до реалізації випадкових величин, зазвичай, за їх математичними сподіваннями;

– моделі двоетапного (багатоетапного) стохастичного програмування, коли спочатку знаходять певне рішення, а потім здійснюють його корегування по мірі одержання реалізації випадкових величин задачі.

Приклад 4.4. На переробному підприємстві працює *5* фасувально-пакувальних агрегатів на конвеєрних лініях з випуску готової продукції. Ймовірність поламки кожного агрегату протягом місяця дорівнює $p = 0{,}7$. Щомісячна зарплата майстра по ремонту складає $Z = 1500$ грн. Штат майстрів може налічувати до 5 осіб. Безпосередньо за час ремонту одного агрегату збитки від простою становлять $V = 500$ грн. За місяць може трапитися тільки одноразова одночасна зупинка конвеєрних ліній. Треба знайти оптимальну кількість майстрів, що забезпечуватиме мінімальні середні витрати на обслуговування конвеєрних ліній.

Рішення. Позначимо через i кількість майстрів, що можна найняти на роботу. За економічним змістом i прийматиме невід'ємні цілі значення, причому, згідно з умовами, $1 \le i \le 5$.

Нехай $X(i, j)$ – випадкова величина витрат на обслуговування конвеєрних ліній i майстрами в разі випадкової поламки j агрегатів. Математичне сподівання до $X(i, j)$ позначимо через $M_X(i)$.

Тоді математична модель розглядуваної задач набуватиме вигляду: знайти таке невід'ємне ціле значення i, що мінімізує критерій оптимальності

$$M_X(i) \to min$$

при обмеженні $1 \le i \le 5$.

Для здійснення обчислень засобами програми OO Calc за одержаною моделлю одновимірного цілочислового перспективного стохастичного програмування спочатку відновлюємо біноміальний розподіл імовірностей поламки j агрегатів за місяць (рис. 4.9):

$$P_j = C_5^j \cdot p^j \cdot (1-p)^{5-j}, \; j = \overline{0,5},$$

де $\sum_{j=0}^{5} P_j = 1$ та $C_5^j = 5!/(j! \cdot (5-j)!)$, $C_5^j = C_5^{5-j}$, $j = \overline{0,5}$.

Потім визначаємо витрати на обслуговування конвеєрних ліній залежно від кількості майстрів та числа поламаних агрегатів – можливі значення $X(i, j)$ (рис. 4.10).

B4 | =FACT($G$3)/(FACT(B3)*FACT($G$3-B3))*($B$1^B3)*((1-$B$1)^($G$3-B3))

	A	B	C	D	E	F	G
1	p=	0,7					
2							
3	j	0	1	2	3	4	5
4	P_j	0,002	0,028	0,132	0,309	0,360	0,168

Рис. 4.9. Розподіл імовірностей поламки агрегатів у ***прикладі 4.4***

Число майстрів, *i*	Кількість поламаних агрегатів, *j*					
	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
1	*Z*	*Z+1V*	*Z+3V*	*Z+6V*	*Z+10V*	*Z+15V*
2	*2Z*	*2Z+1V*	*2Z+2V*	*2Z+4V*	*2Z+6V*	*2Z+9V*
3	*3Z*	*3Z+1V*	*3Z+2V*	*3Z+3V*	*3Z+5V*	*3Z+7V*
4	*4Z*	*4Z+1V*	*4Z+2V*	*4Z+3V*	*4Z+4V*	*4Z+6V*
5	*5Z*	*5Z+1V*	*5Z+2V*	*5Z+3V*	*5Z+4V*	*5Z+5V*

	A	B	C	D	E	F	G
5							
6		Z=	1500		V=	500	
7							
8	Число	Кількість поламаних агрегатів, j					
9	майстрів, i	0	1	2	3	4	5
10	1	1500	2000	3000	4500	6500	9000
11	2	3000	3500	4000	5000	6000	7500
12	3	4500	5000	5500	6000	7000	8000
13	4	6000	6500	7000	7500	8000	9000
14	5	7500	8000	8500	9000	9500	10000

Рис. 4.10. Витрати на обслуговування конвеєрних ліній
у ***прикладі 4.4***

Нарешті, як показано на рис. 4.11, обчислюємо математичні сподівання $M_X(i)$ до витрат на обслуговування конвеєрних ліній залежно від кількості майстрів за формулою

$$M_X(i) = \sum_{j=0}^{5} P_j \cdot X(i, j).$$

	A	B
16	**i**	**Mx(i)**
17	**1**	**5700**
18	**2**	**5600,64**
19	**3**	**6598,15**
20	**4**	**7834,04**
21	**5**	**9250**
22		

Рис. 4.11. Усереднені витрати на обслуговування конвеєрних ліній у ***прикладі 4.4***

Відповідь: для обслуговування конвеєрних ліній із середніми мінімальними щомісячними витратами *5600,64* грн. доцільно найняти *2* майстрів.

4.4. Багатокритеріальні оптимізаційні моделі в аграрній економіці

Багатокритеріальні оптимізаційні задачі, на відміну від одноцільових задач математичного програмування, мають по декілька критеріїв, що підвищує їх здатність до адекватної формалізації багатоаспектних проблем економіки. Оскільки помноження на -1 дозволяє переводити мінімізовані критерії у максимізовані й навпаки, представимо загальну постановку багатокритеріальної оптимізаційної задачі у вигляді: знайти такі значення змінних $x_1, ..., x_n$, що задовольняють умови-обмеження

$$g_j(x_1, ..., x_n) \le 0, \ j = \overline{1, k_1},$$

$$g_j(x_1, ..., x_n) = 0, \ j = \overline{k_1 + 1, k_2},$$

$$(x_1, ..., x_n) \in X$$

та мінімізують критерії оптимальності

$$f_i(x_1, ..., x_n) \to min, \ i = \overline{1, p}.$$

Область припустимих рішень багатокритеріальної оптимізаційної задачі можна поділити на дві неперетинні частини: область згоди (домінованих планів), де якість будь-якого рішення піддається покращенню одночасно за всіма обраними локальними критеріями або, щонайменше, без погіршення значень за кожним з них, та область компромісів (недомінованих планів), де підвищення якості за будь-яким з локальних критеріїв знижує якість рішення за його іншими оцінками. Шукана множина оптимальних розв'язків міститься в області компромісів, проте саме визначення оптимального рішення є неоднозначним. До найпоширеніших з них слід віднести наступні дефініції.

1. Назвемо припустиме рішення x оптимальним за Слейтером або слабко ефективним, якщо не існує іншого припустимого рішення, на якому б усі критерії приймали менші значення, ніж на x.

2. Назвемо припустиме рішення x оптимальним за Парето або ефективним, якщо не існує іншого припустимого рішення, на якому значення всіх критеріїв не біліші, ніж на x, та хоча б один з критеріїв набуває меншого значення.

3. Назвемо припустиме рішення x оптимальним за Смейлом або строго ефективним, якщо не існує іншого припустимого рішення, на якому значення всіх критеріїв не біліші, ніж на x.

Для вирішення багатокритеріальних задач оптимізації здійснюють їх зведення до одноцільових задач шляхом застосування згортки критеріїв у єдину функцію корисності. До її найпоширеніших варіантів відносяться наступні альтернативи.

1. Лінійна згортка критеріїв за Карліном

$$F(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x) \to min$$

з параметрами $\lambda_i \in [0;1]$, $i = \overline{1,p}$, та $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

2. Нелінійна згортка критеріїв за Гермеєром

$$F(x) = \max_{i=\overline{1,p}} \lambda_i f_i(x) \to min$$

з параметрами $\lambda_i \in [0;1]$, $i = \overline{1,p}$, та $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

3. Згортка критеріїв за близькістю до "ідеальної точки"

$$F(x)=\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{f_i(x)-f_i^*}{f_i^*}\right)^2 \to min,$$

де f_i^* – найбажаніше значення критерію $f_i(x)$ при $f_i^*>0$, $i=\overline{1,p}$.

Приклад 4.5. Господарство вирощує пшеницю, овес, гречку, ячмінь та просо, показники виробництва яких наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Вхідні дані до *прикладу 4.5*

Показники	Сільськогосподарська культура				
	Пшениця	Овес	Гречка	Ячмінь	Просо
Прямі витрати праці, люд.-год./га	*4,5*	*3,2*	*7,1*	*3,5*	*5,4*
Матеріально-грошові витрати, тис. грн./га	*3,55*	*2,80*	*5,38*	*2,83*	*2,78*
Ціна, тис. грн./ц	*0,22*	*0,23*	*0,47*	*0,19*	*0,20*
Урожайність, ц/га	*25*	*20*	*19*	*22*	*18*

Площа, занята під перелічені культури, не може перевищувати *300* га. Прямі витрати праці не повинні бути більшими за *1500* люд.-год. Господарство має виконати договірні поставки на *400* ц гречки та *160* ц проса. Площа посіву пшениці та ячменю повинна бути не меншою за *80* га.

Необхідно знайти компромісні альтернативи, що забезпечують якнайбільші прибуток та рівень рентабельності виробництва обраних сільськогосподарських культур при якнайменших матеріально-грошових витратах, розглянувши рівномірні дискретні зміни кожного з трьох критеріїв оптимальності.

Рішення. Почнемо створення багатокритеріальної оптимізаційної моделі до розглядуваного прикладу, позначивши через x_1 посівну площу під пшеницю, га; через x_2 – посівну площу під овес, га; через x_3 – посівну площу під гречку, га; через x_4 – посівну площу під ячмінь, га; через x_5 – посівну площу під просо, га. Дотримуючись економічного змісту, всі введені змінні прийматимуть тільки невід'ємні значення, тобто $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$.

За умовами прикладу опишемо обмеження стосовно

– загальних посівних площ господарства

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 300; \tag{4.13}$$

– прямих витрат праці

$$4{,}5x_1 + 3{,}2x_2 + 7{,}1x_3 + 3{,}5x_4 + 5{,}4x_5 \leq 1500; \tag{4.14}$$

– виконання договірних поставок за гречкою

$$19x_3 \geq 400; \tag{4.15}$$

– виконання договірних поставок за просом

$$18x_5 \geq 160; \tag{4.16}$$

– дотримання вимог про мінімальні посівні площі пшениці та ячменю

$$x_1 + x_4 \geq 80. \tag{4.17}$$

Критерії оптимальності задаватимуть

– максимальний загальний прибуток від реалізації зібраного врожаю

$$f_1 = (0{,}22 \cdot 25 - 3{,}55)x_1 + (0{,}23 \cdot 20 - 2{,}8)x_2 + (0{,}47 \cdot 19 - 5{,}38)x_3 +$$
$$+ (0{,}19 \cdot 22 - 2{,}83)x_4 + (0{,}2 \cdot 18 - 2{,}78)x_5 \to max$$

або $$f_1 = 1{,}95x_1 + 1{,}8x_2 + 3{,}55x_3 + 1{,}35x_4 + 0{,}82x_5 \to max; \tag{4.18}$$

– мінімальні загальні витрати на вирощування зазначених сільськогосподарських культур

$$f_2 = 3{,}55x_1 + 2{,}8x_2 + 5{,}38x_3 + 2{,}83x_4 + 2{,}78x_5 \to min; \tag{4.19}$$

– максимальний підсумковий рівень рентабельності діяльності господарства

$$f_3 = f_1 / f_2 \cdot 100 \to max. \tag{4.20}$$

Таким чином, в одержаній багатокритеріальній оптимізаційній моделі потрібно знайти такі невід'ємні значення змінних x_1, …, x_5, що задовольняють обмеження (4.13)–(4.17), максимізують критерії (4.18), (4.20) та мінімізують критерій (4.19).

Для визначення засобами програми MS Excel оптимальних рішень до моделі (4.13)–(4.20) необхідно оформити вхідні дані так, як показано на рис. 4.12.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**Посівні площі**							
2		**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**			
3	**Значення**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**			
4	**Обмеження**								
5	**Назва**	**Коефіцієнти**					**Ліва частина**	**Знак**	**Права частина**
6	**За загальною площею**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**5**	≤	**300**
7	**За витратами праці**	**4,5**	**3,2**	**7,1**	**3,5**	**5,4**	**24**	≤	**1500**
8	**За контрактом із гречки**			**19**			**19**	≥	**400**
9	**За контрактом із проса**					**18**	**18**	≥	**160**
10	**За посівами пшениці та ячміня**	**1**			**1**		**2**	≥	**80**
11	**Критерії оптимальності**								
12	**Назва**	**Коефіцієнти**					**Розрахункове значення**		
13	**Прибуток**	**1,95**	**1,80**	**3,55**	**1,35**	**0,82**	**9,47**	→	**max**
14	**Витрати**	**3,55**	**2,80**	**5,38**	**2,83**	**2,78**	**17,34**	→	**min**
15	**Рентабельність**	**54,93**	**64,29**	**65,99**	**47,70**	**29,50**	**54,61**	→	**max**

Рис. 4.12. Вхідні дані до ***прикладу 4.5***
в електронній таблиці MS Excel

Зокрема, значення комірки G6 визначимо за формулою

=СУММПРОИЗВ($B$3:$F$3;B6:F6).

та скопіюємо її до комірок G7–G10, G13, G14. Значення комірки G15 задамо за формулою =G13/G14*100. Поширюємо її на комірки B15–F15, визначаючи рівень рентабельності вирощування окремих культур.

Знайдемо оптимальні плани розподілу посівних площ засобами інструментарію "Поиск решения", почергово віддаючи перевагу кожному з критеріїв моделі (4.13)–(4.20). Зокрема, для максимізації загального прибутку від реалізації розглядуваних сільськогосподарських культур розрахункові дані слід оформити так, як показано на рис. 4.13.

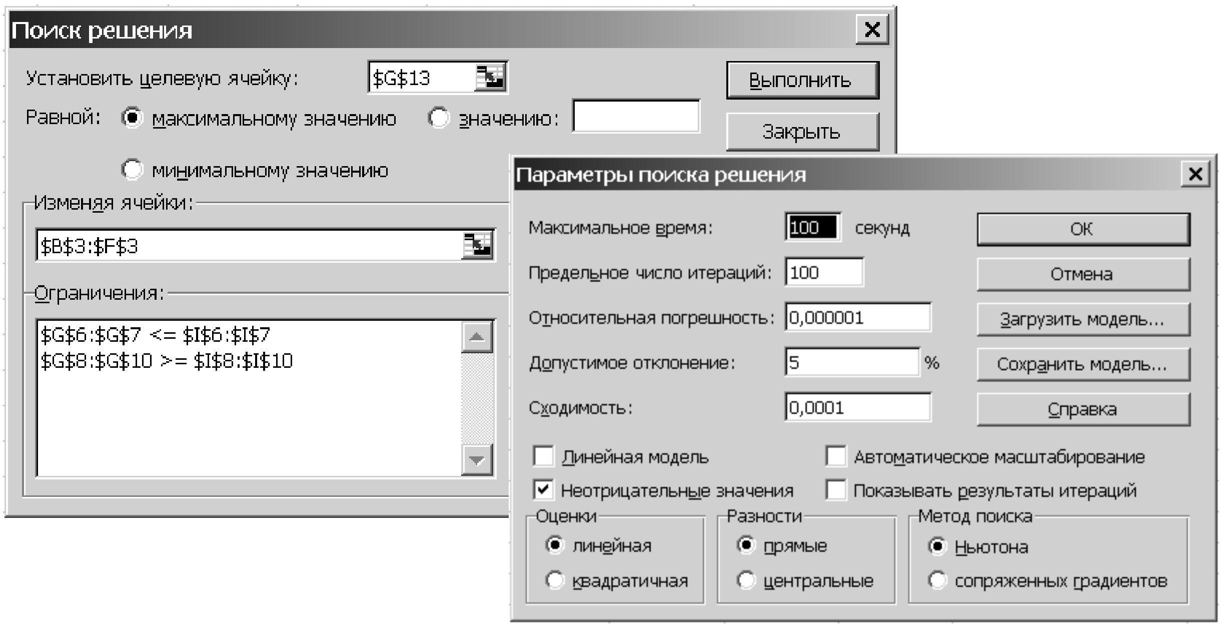


Рис. 4.13. Розрахункові дані до ***прикладу 4.5***
в інструментарії “Поиск решения”

Одержані оптимальні плани за кожним з трьох критеріїв представлено на рис. 4.14, причому сірим кольором позначено найгірші значення за кожним з критеріїв, тоді як їх найкращі значення виділено рамками.

	B	C	D	E	F	G
17						
18	**80,00**	**104,33**	**106,78**	**0,00**	**8,89**	**730,15**
19						**1175,32**
20						**62,12**
21						
22						**190,03**
23	**0,00**	**0,00**	**21,05**	**80,00**	**8,89**	**364,37**
24						**52,15**
25						
26						
27						**709,29**
28						**1136,17**
29	**80,00**	**0,00**	**153,80**	**0,00**	**8,89**	**62,43**
30						

Рис. 4.14. Оптимальні плани за окремими критеріями ***прикладу 4.5***

Знайдемо компромісні альтернативи моделі (4.13)–(4.20) при рівномірних дискретних змінах значень критеріїв: $Min_i = Min_i + 0 \cdot \Delta_i$, $Min_i + 1 \cdot \Delta_i$, $Min_i + 2 \cdot \Delta_i$, $Min_i + 3 \cdot \Delta_i$,

$Min_i + 4 \cdot \Delta_i = Max_i$ із кроком $\Delta_i = (Max_i - Min_i)/4$, де Max_i та Min_i – відповідні найбільше й найменше значення i-го критерію серед одержаних одноцільових розв’язків, $i = \overline{1,3}$. Виконаємо обчислення для почергово фіксованих значень критеріїв засобами інструментарію “Поиск решения”, знайшовши результати з рис. 4.15.

	G	H	I	J	K	L
17		Крок змін				
18	730,15	135,03	325,06	460,09	595,12	Прибуток
19	1175,32		583,08	823,48	1056,36	
20	62,12		55,75	55,87	56,34	
21						
22	190,03		320,35	415,67	584,10	
23	364,37	202,74	567,11	769,85	972,59	Витрати
24	52,15		56,49	53,99	60,06	
25						
26						
27	709,29		584,18	598,10	584,64	
28	1136,17		1067,59	1043,99	976,68	
29	62,43	2,57	54,72	57,29	59,86	Рентабельність

Рис. 4.15. Альтернативні набори значень критеріїв у ***прикладі 4.5***

Відсортуємо одержані значення за зростанням прибутку. Послідовно порівнюючи черговий набір значень критеріїв із попередніми варіантами (з не більшим прибутком), залишаємо компромісні альтернативи. Доміновані альтернативи зафарбовано сірим кольором (рис. 4.16).

	M	N	O
5	Прибуток	Витрати	Рентабельність
6	190,03	364,37	52,15
7	320,35	567,11	56,49
8	325,06	583,08	55,75
9	415,67	769,85	53,99
10	460,09	823,48	55,87
11	584,10	972,59	60,06
12	584,18	1067,59	54,72
13	584,64	976,68	59,86
14	595,12	1056,36	56,34
15	598,10	1043,99	57,29
16	709,29	1136,17	62,43
17	730,15	1175,32	62,12

Рис. 4.16. Вибір компромісних альтернатив у ***прикладі 4.5***

В разі необхідності аналогічні обчислення можна виконати для дрібнішого дискретного кроку змін значень критеріїв.

Відповідь: для обраних кроків змін значень критеріїв серед компромісних альтернатив вигляду

$$f_1 = 190{,}03 \text{ тис. грн., } f_2 = 364{,}37 \text{ тис. грн., } f_3 = 52{,}51\%,$$

$$f_1 = 320{,}35 \text{ тис. грн., } f_2 = 567{,}11 \text{ тис. грн., } f_3 = 56{,}49\%,$$

$$f_1 = 325{,}06 \text{ тис. грн., } f_2 = 583{,}08 \text{ тис. грн., } f_3 = 55{,}75\%,$$

$$f_1 = 415{,}67 \text{ тис. грн., } f_2 = 769{,}85 \text{ тис. грн., } f_3 = 53{,}99\%,$$

$$f_1 = 460{,}09 \text{ тис. грн., } f_2 = 823{,}48 \text{ тис. грн., } f_3 = 55{,}87\%,$$

$$f_1 = 584{,}10 \text{ тис. грн., } f_2 = 972{,}59 \text{ тис. грн., } f_3 = 60{,}06\%,$$

$$f_1 = 584{,}64 \text{ тис. грн., } f_2 = 976{,}68 \text{ тис. грн., } f_3 = 59{,}86\%,$$

$$f_1 = 598{,}10 \text{ тис. грн., } f_2 = 1043{,}99 \text{ тис. грн., } f_3 = 57{,}29\%,$$

$$f_1 = 709{,}29 \text{ тис. грн., } f_2 = 1136{,}17 \text{ тис. грн., } f_3 = 62{,}43\%,$$

$$f_1 = 730{,}15 \text{ тис. грн., } f_2 = 1175{,}32 \text{ тис. грн., } f_3 = 62{,}12\%$$

суб’єктивна перевага віддається:

– або за величиною прибутку як абсолютної оцінки ефективності діяльності господарства та його спроможності до розширення виробництва;

– або за величиною витрат у разі обмеженого доступу до грошових коштів на початку виробничого циклу;

– або за величиною рівня рентабельності як відносного показника ефективності діяльності господарства, що є важливим для його інвесторів та кредиторів.

Приклад 4.6 *(для самостійного виконання)*. Вибрати компромісні альтернативи у ***прикладі 4.5*** серед наведених на рис. 4.16 за двома із трьох розглянутих критеріїв.

**Питання для самоконтролю •
засвоєння матеріалу РОЗДІЛУ 4 •**

1. Опишіть економіко-математичну модель задачі про упакування.
2. В чому полягає економіко-математична модель задачі про призначення?
3. Яким чином оформлюються вхідні дані для задачі про призначення в програмі ОО Calc?
4. Як оформлюються розрахункові дані задачі про призначення в інструментарії “Решатель” в електронній таблиці ОО Calc?
5. Наведіть класифікацію методів вирішення задач нелінійного програмування.
6. Наведіть класифікацію моделей стохастичного програмування.
7. В чому полягає загальна постановка багатокритеріальної задачі оптимізації?
8. Які припустимі рішення задачі багатокритеріальної оптимізації входять до області згоди, а які – до області компромісів?
9. Дайте визначення рішень, оптимальних за Слейтером, Парето та Смейлом.
10. Які згортки критеріїв застосовують у задачах багатоцільової оптимізації?

Матеріали розділу підготовлено з використанням джерел [3; 5; 8; 12–14; 19; 20].

РОЗДІЛ 5
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАТРИЧНИХ ІГОР В АГРАРНІЙ ЕКОНОМІЦІ

5.1. Основні визначення. Графічний метод пошуку оптимальних ігрових стратегій

Предметом дослідження теорії ігор виступає аналіз конфліктних ситуацій засобами математичного апарату. Віддзеркалення змісту конфлікту в аналітичних залежностях являє собою математичну модель, яку саме й називають грою. Для її визначення треба задати:

- перелік зацікавлених сторін (гравців, учасників гри);
- перелік можливих дій (ходів, стратегій) усіх гравців у кожній ситуації;
- інтереси сторін у кількісній формі, представлені функціями виграшу чи платежів.

Залежно від кількості дій, що необхідно виконати гравцям до завершення гри, розрізняють одноходові (однокрокові) та багатоходові (багатокрокові) ігри. За кількістю можливих ситуацій ігри поділяються на скінченні та нескінченні. Гра називається кооперативною, якщо до її початку гравці створюють коаліції (команди) та домовляються про спільні дії. Ігри, де учасники переслідують власні, відмінні цілі, називають некооперативними.

Для гри з двома учасниками, що мають скінченні набори стратегій, функцію виграшу кожного з гравців зручно презентувати значеннями, розташованими в матриці, де рядки відповідають можливим діям учасника, для якого будують дану матрицю виграшів, а стовпці співставляють з ходами супротивника. На підставі подання функції виграшу зазначені ігри називають матричними.

Нехай перший гравець має m можливих дій, а в арсеналі другого учасника налічується n альтернативних стратегій. Коли виграші та програші гравців у кожній ситуації різняться лише знаками, тобто інтереси сторін є суто протилежними, достатньо розглянути єдину платіжну матрицю $A = \{a_{ij}\}_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}$, де в разі виконання учасниками, відповідно, i-го та j-го ходів, перший гравець одержує виграш a_{ij}, тоді як другий гравець має програш того ж розміру, $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$.

Оптимальною стратегією гравця називають ту, що гарантує йому найбільший можливий виграш за будь-яких дій супротивника, тобто це виграш, величина якого навіть у найгіршій ситуації не зменшиться.

Найбільший гарантований виграш $A(1)$ першого гравця визначається як

$$A(1) = \max_{i=1,m} \min_{j=1,n} a_{ij}.$$

Найменший гарантований програш $A(2)$ другого гравця складає

$$A(2) = \min_{j=1,n} \max_{i=1,m} a_{ij}.$$

Оптимальна стратегія першого гравця називається максимінною, а величина $A(1)$ − нижньою ціною гри. Оптимальна стратегія другого гравця називається мінімаксною, а величина $A(2)$ − верхньою ціною гри.

У випадку, коли нижня та верхня ціни гри співпадають, їх називають чистою ціною гри із сідловою точкою (ситуацією). Чистою стратегією гравця в даному разі називають його мінімаксну чи максимінну стратегію.

У загальному випадку, коли гравцям вигідно чергувати свої ходи, розшукують їх оптимальні змішані стратегії як імовірності (частоти) реалізації кожного можливого ходу. Рішення в змішаних стратегіях існує в будь-якій матричній грі.

Позначимо змішані стратегії учасників гри через

$$p = (p_1, ..., p_m) \text{ та } q = (q_1, ..., q_n).$$

Функція

$$F(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_i\cdot a_{ij}\cdot q_j=p\times A\times q$$

називається функцією платежів.

Для гри в змішаних стратегіях максимум мінімального виграшу першого гравця $A(1)$ дорівнює мінімуму максимального програшу другого гравця $A(2)$ та співпадає з ціною гри V:

$$\max_p \min_q p\times A\times q=A(1)=V=F(p^{опт},q^{опт})=A(2)=\min_q \max_p p\times A\times q,$$

де $p^{опт}$ та $q^{опт}$ – відповідні оптимальні змішані стратегії першого і другого учасників ігри.

До вирішення задач матричної теорії гри, за можливості, доцільно зробити скорочення розміру платіжної матриці.

1. Той рядок, значення якого є не більшими, ніж відповідні елементи деякого іншого рядка, вважається таким, що домінується, і його викреслюють з платіжної матриці як невигідну для першого гравця альтернативу.

2. Той стовпчик, значення якого є не меншими, ніж відповідні елементи деякого іншого стовпчика, вважається таким, що домінує, і його викреслюють з платіжної матриці як невигідну для другого гравця альтернативу.

Для гравця з двома можливими ходами припускається пошук змішаної стратегії графічним методом.

Приклад 5.1. В господарстві розбивається яблуневий сад. Планується засадити його деревами трьох сортів. Середня врожайність яблунь залежно від погодних умов подана в табл. 5.1. Треба знайти графічним методом оптимальну пропорцію яблуневих дерев різних сортів у саду, що забезпечує максимальний валовий гарантований збір яблук з дерева.

Таблиця 5.1

Урожайність яблунь залежно від погодних умов (кг з дерева)

Сорти яблунь	Погодні умови	
	Холодна зима, тепле літо	Тепла зима, холодне літо
I	*100*	*95*
II	*90*	*115*
III	*98*	*95*

Рішення. На підставі домінування першого рядка таблиці над її третім рядком викреслимо останній із платіжної матриці. Через те, що розглядається гра людини з природою, знайдемо лише оптимальну змішану стратегію для господаря-садівника.

Вертикальні вісі на рис. 5.1 зіставимо з можливими діями першого гравця, а горизонтальну вісь – із часткою дерев I сорту. З'єднаємо на рис. 5.1 відрізками числові дані до однакових погодних умов. Абсциса точки з максимальною ординатою на нижній обвідній вказує оптимальну частку дерев I сорту в саду $p_1^{опт}$, тоді як згадана максимальна ордината визначає середню (валову) максимальну гарантовану врожайність з однієї яблуні V.

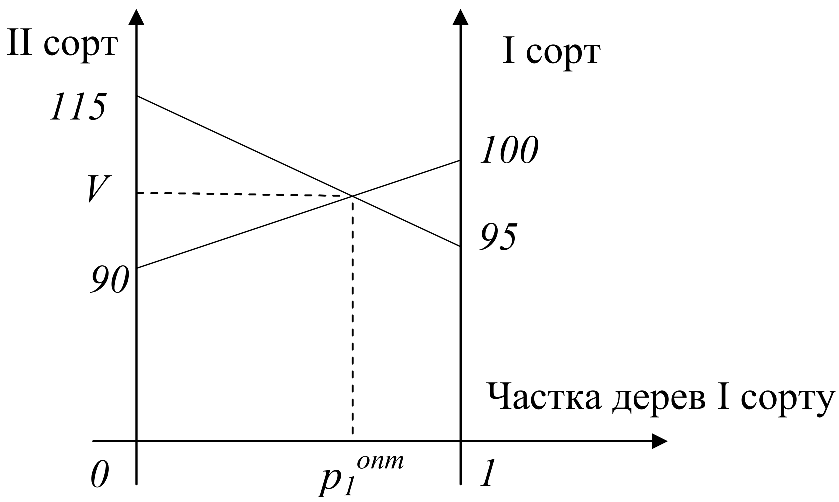


Рис. 5.1. Графічна схема пошуку оптимального рішення до ***прикладу 5.1***

Знайдемо згадані показники, відновивши рівняння до ліній, яким належать зображені на рис. 5.1 відрізки, а саме:

$$\begin{cases} 90 = k_1 0 + b_1 \\ 100 = k_1 1 + b_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 10 \\ b_1 = 90 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 115 = k_2 0 + b_2 \\ 95 = k_2 1 + b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_2 = -20 \\ b_2 = 115 \end{cases}.$$

Звідси координати шуканої точки перетину вказаних відрізків обчислюються як

$$10 p_1^{опт} + 90 = -20 p_1^{опт} + 115,$$

$$p_1^{опт} = 5/6 \approx 0{,}83, \; p_2^{опт} = 1 - 5/6 = 1/6 \approx 0{,}17$$

та $V = 10 \cdot 0{,}83 + 90 = 98{,}3$.

Відповідь: деревами I сорту доцільно зайняти 83 % площі саду, деревами II сорту – 17 % площі саду, тоді як від дерев III сорту слід відмовитися. Це дозволить гарантовано одержувати в середньому по $98{,}3$ кг яблук з дерева за будь-яких зі згаданих погодних умов.

Приклад 5.2 *(для самостійного виконання).* Посівні площі в господарстві відводяться під пшеницю трьох сортів. Їх урожайність залежно від погодних умов подано в табл. 5.2. Треба знайти графічним методом оптимальну пропорцію площ під три сорти пшениці, що забезпечує максимальну гарантовану валову врожайність.

Таблиця 5.2

Урожайність пшениці залежно від погодних умов (ц/га)

Сорти пшениці	Погодні умови	
	Висока вологість	Посуха
I	*27*	*26*
II	*24*	*28*
III	*24*	*32*

5.2. Метод пошуку оптимальних ігрових стратегій засобами лінійного програмування

В разі довільного розміру платіжної матриці гри двох супротивників пошук змішаних стратегій зводиться до вирішення допоміжної задачі лінійного програмування. А саме, будемо вважати, що всі елементи платіжної матриці, а тому й ціна гри є додатними, тобто $a_{ij} > 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, та $V > 0$. Зауважимо, що дане припущення забезпечується додаванням достатньо великої додатної константи до всіх елементів платіжної матриці.

За оптимальною стратегією $p^{опт}$ першого гравця його середні виграші за будь-якої чистої стратегії супротивника не менші ціни гри V. Тому можемо записати сукупність нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}p_1^{опт} + ... + a_{m1}p_m^{опт} \geq V, \\ ... \\ a_{1n}p_1^{опт} + ... + a_{mn}p_m^{опт} \geq V. \end{cases} \qquad (5.1)$$

Кожну з наведених нерівностей помножимо на $1/V$ і введемо нові змінні

$$x_1 = p_1^{опт}/V, ..., x_m = p_m^{опт}/V.$$

За нових змінних нерівності (5.1) перепишуться як

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{m1}x_m \geq 1, \\ ... \\ a_{1n}x_1 + ... + a_{mn}x_m \geq 1. \end{cases} \qquad (5.2)$$

Скориставшись умовою

$$p_1^{опт} + ... + p_m^{опт} = 1,$$

одержимо $$x_1 + ... + x_m = 1/V.$$

Мета першого гравця – максимізувати свій гарантований виграш, ціну гри V, або мінімізувати обернену величину $1/V$. Звідси одержуємо допоміжну задачу лінійного програмування в постановці:

знайти значення змінних $x_i \geq 0, i = \overline{1,m}$, що задовольняють систему лінійних обмежень (5.2) і надають цільовій функції мінімальне значення

$$Z_1 = x_1 + ... + x_m \to min. \tag{5.3}$$

За результатами вирішення допоміжної оптимізаційної задачі (5.2), (5.3) слід обчислити величину ціни гри V за формулою

$$V = 1/(x_1 + ... + x_m),$$

а потім відновити шукані компоненти оптимальної змішаної стратегії першого гравця у вигляді

$$p_1^{опт} = x_1 \cdot V, ..., p_m^{опт} = x_m \cdot V.$$

За оптимальною стратегією $q^{опт}$ другого гравця його середні програші за будь-якої чистої стратегії супротивника не більші ціни гри V. Тому можемо записати сукупність нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}q_1^{опт} + ... + a_{1n}q_n^{опт} \leq V, \\ ... \\ a_{m1}q_1^{опт} + ... + a_{mn}q_n^{опт} \leq V. \end{cases} \tag{5.4}$$

Кожну з наведених нерівностей помножимо на $1/V$ і введемо нові змінні

$$y_1 = q_1^{опт}/V, ..., y_n = q_n^{опт}/V.$$

За нових змінних нерівності (5.4) перепишуться як

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n \leq 1, \\ ... \\ a_{m1}y_1 + ... + a_{mn}y_n \leq 1. \end{cases} \tag{5.5}$$

Скориставшись умовою

$$q_1^{опт} + ... + q_n^{опт} = 1,$$

одержимо

$$y_1 + ... + y_n = 1/V.$$

Мета другого гравця – мінімізувати свій гарантований програш, ціну гри V, або максимізувати обернену величину $1/V$. Звідси одержуємо допоміжну задачу лінійного програмування в постановці:

знайти значення змінних $y_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}$, що задовольняють систему лінійних обмежень (5.5) і надають цільовій функції максимальне значення

$$Z_2 = y_1 + ... + y_n \to max. \qquad (5.6)$$

За результатами вирішення допоміжної оптимізаційної задачі (5.5), (5.6) слід обчислити величину ціни гри V за формулою

$$V = 1/(y_1 + ... + y_n),$$

а потім відновити шукані компоненти оптимальної змішаної стратегії другого гравця у вигляді

$$q_1^{опт} = y_1 \cdot V, ..., q_n^{опт} = y_n \cdot V.$$

Зауважимо, що замість вирішення для другого гравця задачі (5.5), (5.6) можна скористатися допоміжною задачею (5.2), (5.3) для транспонованої платіжної матриці гри. Нарешті зазначимо, що допоміжні лінійні задачі (5.2), (5.3) та (5.5), (5.6) є взаємно двоїстими. Таким чином, можна вирішити лише одну з них, простішу за кількістю змінних чи обмежень-нерівностей, та знайти розв'язок іншої задачі, спираючись на відомі теореми двоїстості.

Знайдемо максимальну гарантовану урожайність V та оптимальну змішану стратегію $(p_1^{опт}, p_2^{опт}, p_3^{опт})$ господаря-садівника у ***прикладі 5.1*** методом зведення до моделі лінійного програмування.

Введемо допоміжні невід'ємні невідомі

$$x_1 = p_1^{опт}/V,\ x_2 = p_2^{опт}/V, x_3 = p_3^{опт}/V.$$

Допоміжні обмеження, що зіставляються з вимогою одержання гарантованої врожайності V, набуватимуть вигляду

$$\begin{cases} 100x_1 + 90x_2 + 98x_3 \geq 1, \\ 95x_1 + 115x_2 + 95x_3 \geq 1. \end{cases}$$

Допоміжна цільова функція, що забезпечуватиме максимально можливе значення врожайності V, прямуватиме до мінімуму

$$Z_1 = x_1 + x_2 + x_3 \to min.$$

Оформлення вхідних даних побудованої допоміжної лінійної моделі в середовищі програми ОО Calc показано на рис. 5.2.

E10 =SUMPRODUCT($B$3:$D$3;B10:D10)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Допоміжні змінні					
2		x1	x2	x3			
3	Значення						
4	Допоміжні обмеження						
5	Назва	Коефіцієнти			Ліва частина	Знак	Права частина
6	Забезпечення гарантованої ціни гри	100	90	98	0	≥	1
7		95	115	95	0	≥	1
8	Допоміжний критерій оптимальності						
9	Назва	Коефіцієнти			Розрахункове значення		
10	Забезпечення максимальної ціни гри	1	1	1	0	→	min

Рис. 5.2. Вхідні дані до ***прикладу 5.1***
в електронній таблиці ОО Calc

Для виконання обчислень засобами інструментарію "Решатель" слід оформити розрахункові дані згідно з рис. 5.3.

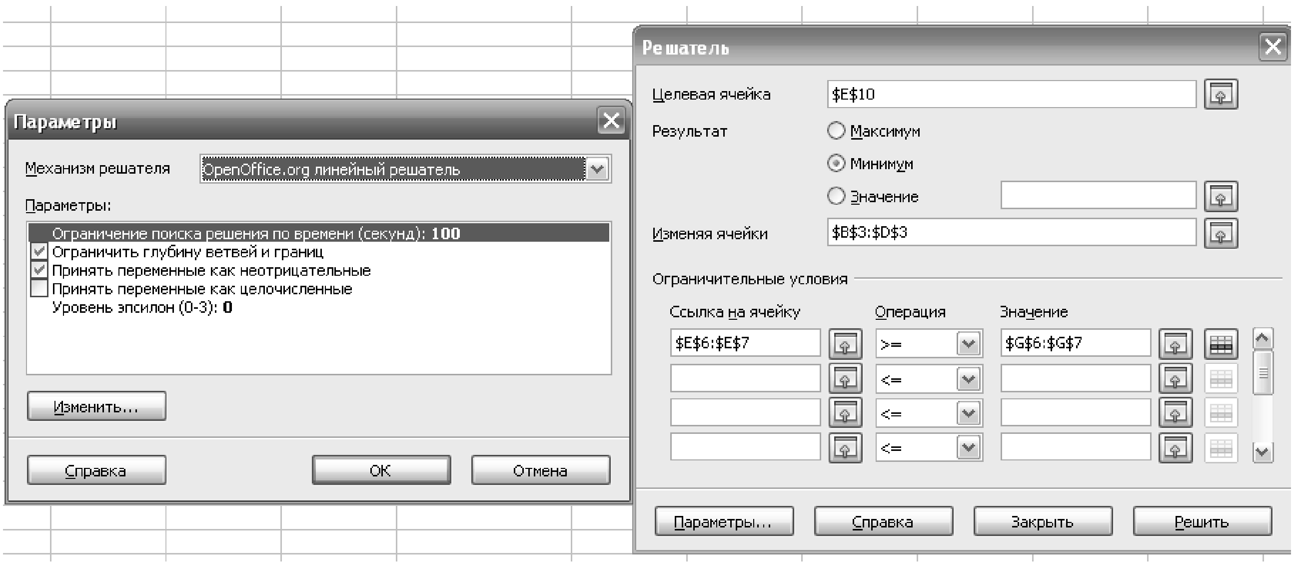


Рис. 5.3. Розрахункові дані до ***прикладу 5.1***
в інструментарії "Решатель"

Знайдене оптимальне рішення допоміжної лінійної моделі у ***прикладі 5.1*** наведено на рис. 5.4.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Допоміжні змінні					
2		x1	x2	x3			
3	Значення	0,0085	0,0017	0,0000			
4	Допоміжні обмеження						
5	Назва	Коефіцієнти			Ліва частина	Знак	Права частина
6	Забезпечення гарантованої ціни гри	100	90	98	1	≥	1
7		95	115	95	1	≥	1
8	Допоміжний критерій оптимальності						
9	Назва	Коефіцієнти			Розрахункове значення		
10	Забезпечення максимальної ціни гри	1	1	1	0,010169	→	min
11							

Рис. 5.4. Оптимальне допоміжне рішення до ***прикладу 5.1***

За одержаними результатами спочатку знаходимо ціну гри V – максимальний гарантований збір яблук з одного дерева в саду:

$$V = 1/0{,}010169 = 98{,}3 \text{ кг.}$$

Потім відновлюємо шукані компоненти оптимальної змішаної стратегії садівника стосовно оптимальної пропорції яблунь різних сортів:

$$p_1^{опт} = 0{,}0085 \cdot 98{,}3 \approx 0{,}83,$$

$$p_2^{опт} = 0{,}0017 \cdot 98{,}3 \approx 0{,}17,$$

$$p_3^{опт} = 0 \cdot 98{,}3 = 0.$$

Приклад 5.3 *(для самостійного виконання).* Господарство вирощує кукурудзу на зерно як попередника під озиму пшеницю. Можливі 9 способів посіву кукурудзи: квадратно-гніздовий 70×70 см, гніздовий 180×70 см, гніздовий 210×70 см, гніздовий $(210+70) \times 70$ см, пунктирний 70 см, пунктирний 180 см, пунктирний 210 см, пунктирний $210+70$ см та пунктирний $210+3+140$ см. Сумарна врожайність кукурудзи та пшениці в залежності від способів посіву та сприятливих чи несприятливих погодних умов подана в табл. 5.3. Треба визначити методом зведення до моделі лінійного програмування оптимальну змішану посівну стратегію господарства, що гарантує найкращу сумарну врожайність зазначених сільськогосподарських культур.

Таблиця 5.3

Сумарна врожайність кукурудзи та пшениці залежно від погодних умов (ц/га)

Спосіб посіву	Погодні умови	
	сприятливі	несприятливі
1	*53,45*	*46,70*
2	*54,19*	*47,80*
3	*51,11*	*52,80*
4	*52,27*	*48,20*
5	*53,23*	*41,60*
6	*51,10*	*52,20*
7	*53,01*	*51,10*
8	*53,99*	*49,20*
9	*53,44*	*48,80*

Питання для самоконтролю •
засвоєння матеріалу РОЗДІЛУ 5 •

1. Що досліджує теорія ігор? Що необхідно задати для визначення гри?
2. Надайте класифікацію ігор із прикладами.
3. Які ігри відносять до матричних?
4. Якої стратегії дотримуються учасники матричної гри?
5. Що таке “рішення матричної гри в чистих стратегіях”?
6. Що таке “рішення матричної гри в змішаних стратегіях”?
7. Як здійснюється скорочення розмірів платіжної матриці гри?
8. Опишіть графічний метод пошуку оптимальних змішаних стратегій учасників матричних ігор.
9. Як знайти оптимальні змішані стратегії гравців у матричній грі засобами лінійного програмування?

Матеріали розділу підготовлено з використанням джерел [2; 3; 5; 6; 8; 9].

РОЗДІЛ 6 ●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА МЕРЕЖАХ

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

6.1. Задача про максимальний потік. Вирішення зведенням до моделі лінійного програмування

Розглядається система постачання речовини від джерела (початкового пункту) до приймача (кінцевого пункту). Визначено лінії комунікації з відомими пропускними спроможностями. Треба знайти величину максимального потоку від джерела до приймача. Прикладами розглядуваної системи можуть бути газопровід, зрошувальна система, нафтопостачальна мережа тощо.

Схематичне подання умов задачі про максимальний потік зручно зробити на мережі, що являє собою орієнтований граф із занумерованими вершинами та зваженими дугами.

Перша та остання вершини зіставляються з джерелом та приймачем системи. Решта вершин відповідає вузлам розгалуження. Постачальні лінії між ними подаються дугами мережі. Їхні ваги вказують на максимальні пропускні спроможності комунікацій розглядуваної системи.

Вирішення задачі про максимальний потік зводиться до розв'язання задачі лінійного програмування. А саме, для кожної дуги вводиться окрема змінна, що вказує обсяг переданої речовини. До транзитних вузлів-вершин записується закон збереження речовини. За кожною дугою вводиться нерівність про неможливість передачі більшої кількості речовини, ніж пропускна спроможність цієї комунікації. Цільова функція визначає величину потоку або за початковим, або за кінцевим пунктами. Значення критерію оптимальності підлягає максимізації.

Приклад 6.1. В господарстві працює зрошувальна система, яка подає воду від джерела до розподільного вузла за комунікаціями, зображеними на рис. 6.1, де ваги дуг позначають пропускні спроможності труб зрошувальної системи (м^3/хв.). Треба знайти максимальний обсяг водопостачання від початкового до кінцевого пункту.

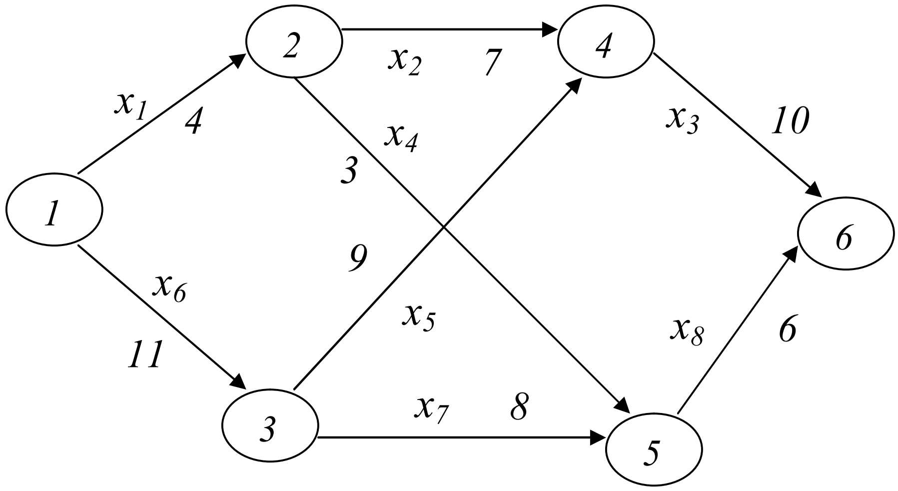


Рис. 6.1. Мережа до ***прикладу 6.1***

Рішення. Введемо для кожної дуги змінну з невід'ємними значеннями ($x_1, ..., x_8$), котрі позначатимуть обсяг води (м^3/хв.), що поступає за відповідною комунікацією.

Для кожного вузла-розгалуження системи записуємо обмеження-рівність згідно з законом збереження речовини, тобто

$$2: \quad x_1 = x_2 + x_4, \tag{6.1}$$

$$3: \quad x_6 = x_5 + x_7, \tag{6.2}$$

$$4: \quad x_2 + x_5 = x_3, \tag{6.3}$$

$$5: \quad x_4 + x_7 = x_8. \tag{6.4}$$

На підставі обмеженості пропускних спроможностей комунікацій отримаємо нерівності

$$x_1 \le 4, x_2 \le 7, x_3 \le 10, x_4 \le 3, x_5 \le 9, x_6 \le 11, x_7 \le 8, x_8 \le 6\,. \tag{6.5}$$

Цільова функція створюваної моделі лінійного програмування задаватиме обсяг води (м^3/хв.), що надходить з джерела до приймача, і підлягає максимізації:

$$F = x_1 + x_6 = x_3 + x_8 \to max. \tag{6.6}$$

Таким чином, задача про максимальний потік зводиться до пошуку таких невід'ємних значень змінних $x_1, ..., x_8$, які задовольняють обмеження (6.1)–(6.5) та надають критерію оптимальності (6.6) максимальне значення.

На рис. 6.2 представлено вікно програми ОО Calc із вхідними даними для обчислень за моделлю (6.1)–(6.6). Дані для розрахунків за допомогою інструментарію "Решатель" наведено на рис. 6.3.

J20 =SUMPRODUCT($B$3:$I$3;B20:I20)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8			
3	Значення											
4	Обмеження											
5	Назва	Коефіцієнти								Ліва частина	Знак	Права частина
6	Збереження потоку у транзитних вузлах	1	-1		-1					0	=	0
7						-1	1	-1		0	=	0
8			1	-1		1				0	=	0
9					1			1	-1	0	=	0
10	За максимальними пропускними спроможностями комунікацій	1								0	≤	4
11			1							0	≤	7
12				1						0	≤	10
13					1					0	≤	3
14						1				0	≤	9
15							1			0	≤	11
16								1		0	≤	8
17									1	0	≤	6
18	Критерій оптимальності											
19	Назва	Коефіцієнти								Розрахункове значення		
20	Величина потоку	1					1			0	→	max

Рис. 6.2. Вхідні дані в ОО Calc до ***прикладу 6.1***

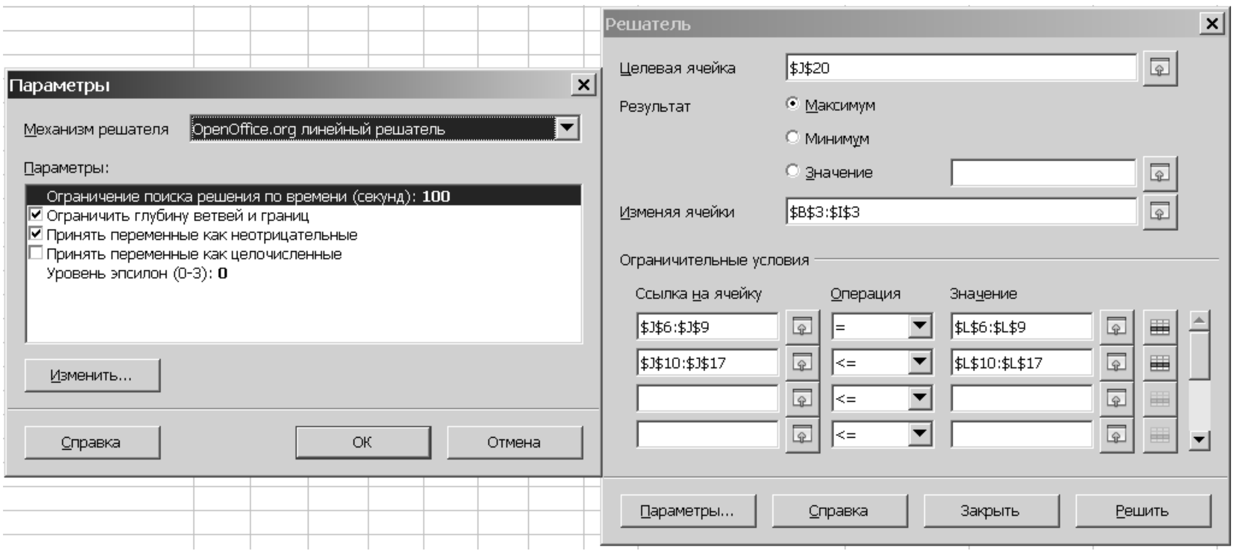


Рис. 6.3. Розрахункові дані в інструментарії "Решатель" ОО Calc до ***прикладу 6.1***

Одержані результати зображено на рис. 6.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		Обсяги завантаження комунікацій										
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8			
3	Значення	4	1	10	3	9	11	2	5			
4	Обмеження											
5	Назва	Коефіцієнти								Ліва частина	Знак	Права частина
6	Збереження потоку у транзитних вузлах	1	-1		-1					0	=	0
7						-1	1	-1		0	=	0
8			1	-1		1				0	=	0
9					1			1	-1	0	=	0
10	За максимальними пропускними спроможностями комунікацій	1								4	≤	4
11			1							1	≤	7
12				1						10	≤	10
13					1					3	≤	3
14						1				9	≤	9
15							1			11	≤	11
16								1		2	≤	8
17									1	5	≤	6
18	Критерій оптимальності											
19	Назва	Коефіцієнти								Розрахункове значення		
20	Величина потоку	1					1			15	→	max

Рис. 6.4. Оптимальне рішення до ***прикладу 6.1***

Відповідь: знайдений максимальний потік води складає 15 м^3/хв., для чого задіяні комунікації із обсягами завантаження $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 10, x_4 = 3, x_5 = 9, x_6 = 11, x_7 = 2, x_8 = 5$.

Приклад 6.2 *(для самостійного виконання).* Знайти максимальний потік речовини, котрий можна передати за системою, представленою мережею на рис. 6.5.

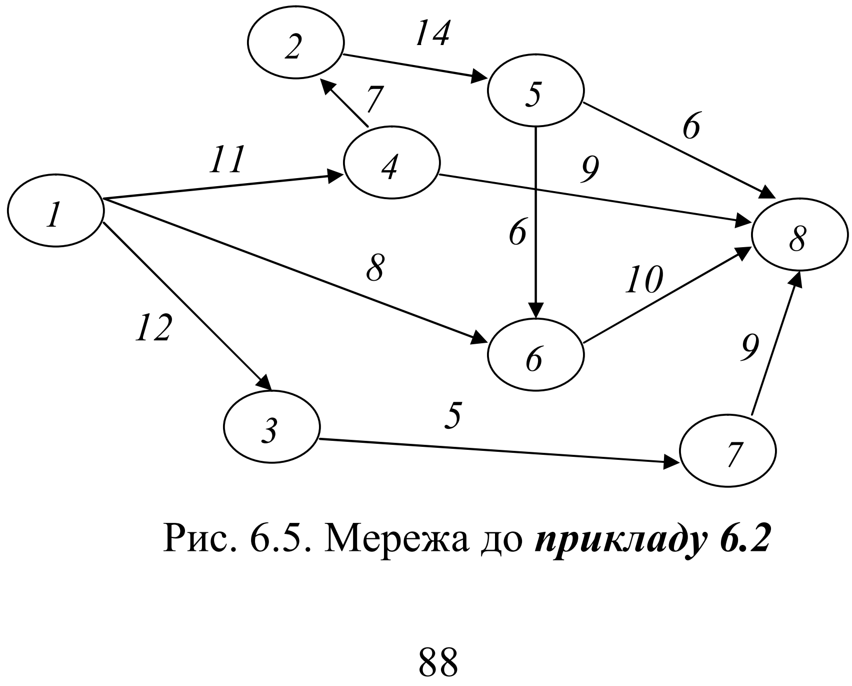


Рис. 6.5. Мережа до ***прикладу 6.2***

6.2. Задача розподілу на мережі. Вирішення зведенням до моделі лінійного програмування

Нехай відомі m виробників та n споживачів продукції із заданими обсягами пропозиції та попиту. Між зазначеними виробниками та споживачами визначено комунікаційні зв'язки та вартості розподілу одиниці продукції. Треба скласти план із мінімальними сумарними витратами розподілу продукції згідно пропозиції її виробників і попиту споживачів.

До задач розподілу відносяться транспортні задачі, де, наприклад, оцінюють витрати на перевезення врожаю зерна на елеватори, молока – на переробні комбінати, мінеральних добрив – на поля господарств тощо.

Розглянемо задачу розподілу закритого типу, де загальний обсяг виробництва продукції співпадає з сумарним обсягом її замовлення. Подання умов задач розподілу на мережі, що являє собою зв'язний неорієнтований граф зі зваженими вершинами й дугами, передбачає наступну економічну інтерпретацію. Виробників зображають вершинами з додатними вагами, рівними обсягам їх пропозиції продукції. Вершини з нульовими вагами відповідають транзитним розподільним вузлам. Споживачів-приймачів зображають вершинами з від'ємними вагами, рівними обсягам їх попиту на продукцію. Комунікаційні зв'язки між виробниками та споживачами зіставляють з ребрами мережі, причому ваги відповідних ребер задають згідно з вартостями розподілу одиниці продукції. Зауважимо, що в задачі відкритого типу до мережі слід додати фіктивних споживача або виробника, що приймуть на себе надлишок пропозиції чи попиту та будуть з'єднані з усіма іншими суб'єктами-вершинами системи ребрами-комунікаціями з набагато більшими вагами-витратами розподілу продукції.

Пошук оптимального плану розподілу на мережі можна звести до вирішення задачі лінійного програмування. А саме, для кожного ребра вводиться по дві змінні, що вказують обсяги розподілу продукції за відповідним комунікаційним зв'язком у двох можливих напрямах. До всіх вершин мережі записують обмеження на підставі рівності обсягів одержаної та відданої продукції з урахуванням обсягів її виробництва та споживання. Цільова функція характеризує загальні витрати на розподіл продукції за розглядуваною мережею. Значення критерію оптимальності підлягає мінімізації.

Приклад 6.3. В районі працює *2* виробника та *5* оптових замовників аграрної продукції. Їх пропозиції та попит подано як додатні та від'ємні ваги вершин мережі на рис. 6.6. Наявні транспортні комунікації зображено ребрами, вагами яких є вартості перевезення одиниць аграрної продукції. Треба визначити найдешевший план транспортування аграрної продукції згідно пропозиції її виробників і попиту замовників.

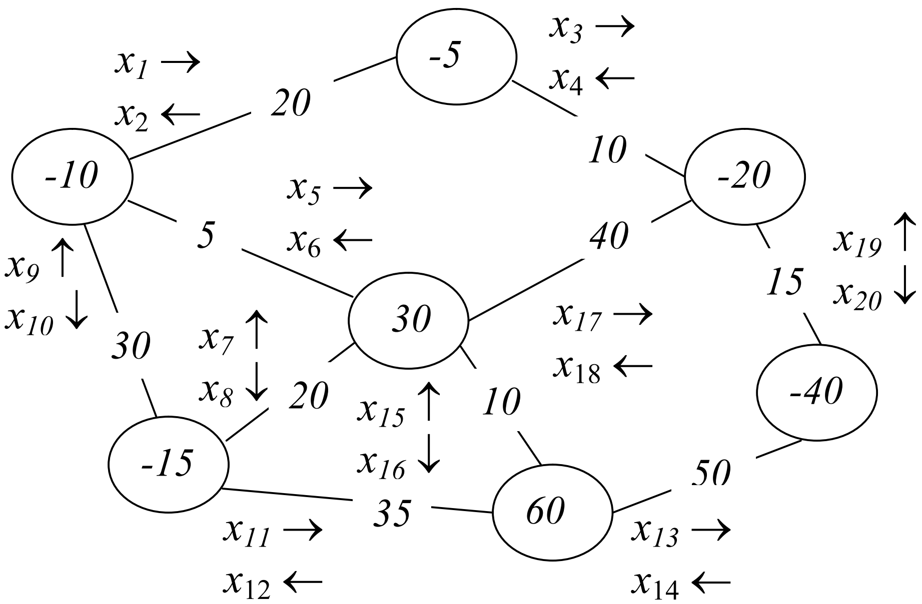


Рис. 6.6. Мережа до ***прикладу 6.3***

Рішення. Розглядувана транспортна задача відноситься до закритого типу, адже $10+5+20+40+15=90=30+60$.

Введемо для кожного ребра по дві змінні з невід'ємними значеннями, що позначатимуть обсяг перевезення продукції за певною комунікацією у тому чи іншому напрямі (рис. 6.6).

За кожною вершиною записуємо обмеження-рівність

$$-5: \quad x_1 + x_4 = x_2 + x_3 + 5 \ , \tag{6.7}$$

$$-20: \quad x_3 + x_{17} + x_{19} = x_4 + x_{18} + x_{20} + 20 \, , \tag{6.8}$$

$$-40: \quad x_{13} + x_{20} = x_{14} + x_{19} + 40 \, , \tag{6.9}$$

$$30: \quad x_5 + x_7 + x_{15} + x_{18} + 30 = x_6 + x_8 + x_{16} + x_{17} \, , \tag{6.10}$$

$$60: \quad x_{11} + x_{14} + x_{16} + 60 = x_{12} + x_{13} + x_{15} \, , \tag{6.11}$$

$$-10: \quad x_2 + x_6 + x_9 = x_1 + x_5 + x_{10} + 10 \, , \tag{6.12}$$

$$-15: \quad x_8 + x_{10} + x_{12} = x_7 + x_9 + x_{11} + 15 \, . \tag{6.13}$$

Цільова функція створюваної моделі лінійного програмування задаватиме загальні транспортні витрати, які слід мінімізувати:

$$F = 20(x_1 + x_2) + 10(x_3 + x_4) + 5(x_5 + x_6) + 20(x_7 + x_8) +$$
$$+ 30(x_9 + x_{10}) + 35(x_{11} + x_{12}) + 50(x_{13} + x_{14}) + 10(x_{15} + x_{16}) +$$
$$+ 40(x_{17} + x_{18}) + 15(x_{19} + x_{20}) \to min \, . \tag{6.14}$$

Таким чином, розглядувана транспортна задача зводиться до пошуку таких невід’ємних значень змінних $x_1, ..., x_{20}$, що задовольняють обмеження (6.7)–(6.13) та надають критерію оптимальності (6.14) мінімальне значення.

На рис. 6.7 представлено вікно в електронній таблиці OO Calc із вхідними даними для обчислень за моделлю (6.7)–(6.14).

V15 =SUMPRODUCT($B$3:$U$3;B15:U15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1		Обсяги перевезень																						
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20			
3	Значення																							
4	Обмеження																							
5	Назва	Коефіцієнти																				Ліва частина	Знак	Права частина
6	Утворення перевезень по вузлах згідно попиту та пропозиції	1	-1	-1	1																	0	=	5
7				1	-1													1	-1	1	-1	0	=	20
8														1	-1					-1	1	0	=	40
9						1	-1	1	-1							1	-1	-1	1			0	=	-30
10												1	-1	-1	1	-1	1					0	=	-60
11		-1	1			-1	1			1	-1											0	=	10
12								-1	1	-1	1	-1	1									0	=	15
13	Критерій оптимальності																							
14	Назва	Коефіцієнти																				Розрахункове значення		
15	Загальні витрати на транспортування	20	20	10	10	5	5	20	20	30	30	35	35	50	50	10	10	40	40	15	15	0	→	min

Рис. 6.7. Вхідні дані в OO Calc до ***прикладу 6.3***

Введені дані для розрахунків за допомогою інструментарію "Решатель" наведено на рис. 6.8.

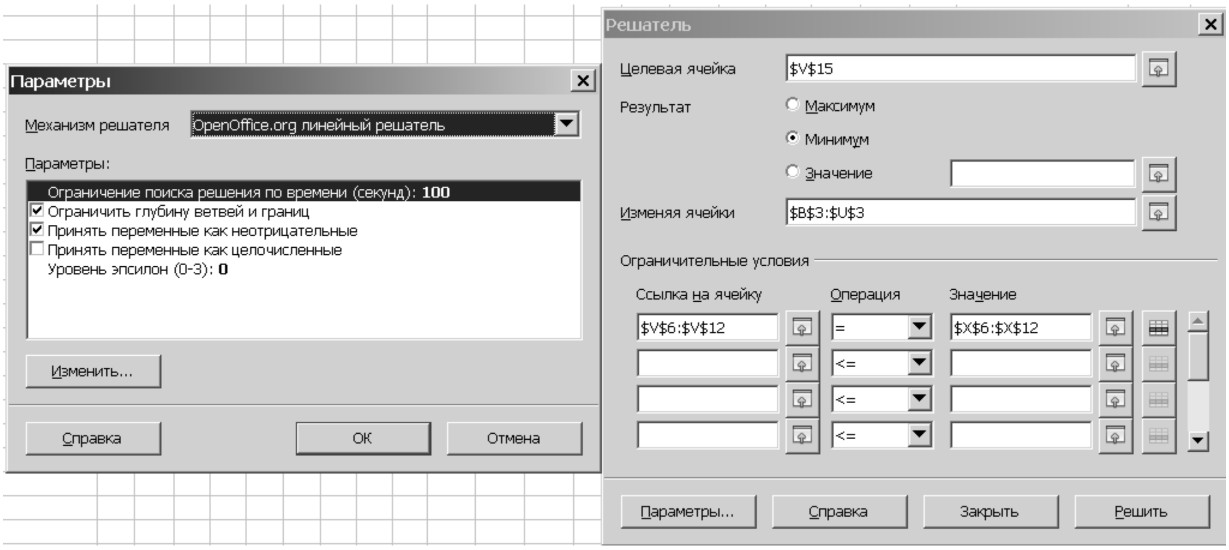


Рис. 6.8. Розрахункові дані в інструментарії "Решатель" ОО Calc до ***прикладу 6.3***

Одержані результати зображено на рис. 6.9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1		Обсяги перевезень																						
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20			
3	Значення	25	0	20	0	0	35	0	15	0	0	0	0	40	0	20	0	0	0	0	0			
4	Обмеження																							
5	Назва	Коефіцієнти																				Ліва частина	Знак	Права частина
6	Утворення перевезень по вузлах згідно попиту та пропозиції	1	-1	-1	1																	5	=	5
7				1	-1													1	-1	1	-1	20	=	20
8														1	-1					-1	1	40	=	40
9						1	-1	1	-1							1	-1	-1	1			-30	=	-30
10												1	-1	-1	1	-1	1					-60	=	-60
11		-1	1			-1	1			1	-1											10	=	10
12								-1	1	-1	1	-1	1									15	=	15
13	Критерій оптимальності																							
14	Назва	Коефіцієнти																				Розрахункове значення		
15	Загальні витрати на транспортування	20	20	10	10	5	5	20	20	30	30	35	35	50	50	10	10	40	40	15	15	3375	→	min

Рис. 6.9. Результати розрахунків до ***прикладу 6.3***

Відповідь: знайдені мінімальні витрати на перевезення продукції складають *3375* грошових одиниць, для чого задіяні транспортні комунікації з обсягами перевезень

$$x_1 = 25, x_3 = 20, x_6 = 35, x_8 = 15, x_{13} = 40, x_{15} = 20 .$$

Приклад 6.4 *(для самостійного виконання).* Знайти оптимальний план розподілу ресурсів за мережею, представленою на рис. 6.10.

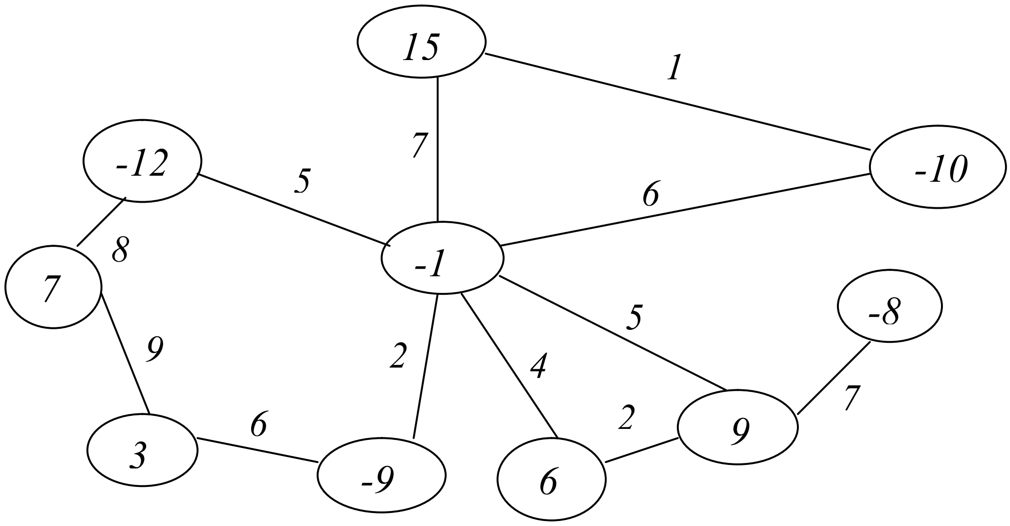


Рис. 6.10. Мережа до ***прикладу 6.4***

6.3. Задача про найкоротший шлях. Метод Мінті-Дейкстри

Для єдиного постачальника ресурсу наведена система комунікаційних зв’язків з його споживачами-замовниками. Задано витрати (грошей, часу) на передачу ресурсу незалежно від його обсягу. Треба визначити найкоротші (найдешевші) шляхи постачання ресурсу від джерела до досяжних за даною системою приймачів.

Схематичне відображення умов задачі про найкоротший шлях зручно подати на мережі, що являє собою орієнтований граф із занумерованими вершинами та зваженими дугами. Одна з вершин, з якої тільки виходять дуги, позначає джерело ресурсу, тоді як решту вершин зіставляють з його приймачами. Комунікаційні зв’язки між ними подаються дугами мережі, ваги яких дорівнюють витратам на передачу ресурсу за відповідною комунікацією незалежно від його обсягу. Довжина шляху між вершинами, що складається з послідовно орієнтованих дуг, визначається як сума ваг усіх дуг цього шляху. За підсумками вирішення задачі мають бути відомими найкоротші шляхи від джерела до вершин мережі, в які можна перейти за її дугами, та вершини, в які не можна потрапити за комунікаційними лініями розглядуваної системи.

Знайти розв'язок задачі про найкоротший шлях за скінченну кількість ітерацій дозволяє алгоритм Мінті-Дейкстри. Його реалізація передбачає почергове двокомпонентне позначення кожної досяжної вершини x номером вершини y, з якої здійснено перехід до x за дугою з вагою $l(y,x)$, та довжиною найкоротшого шляху $d(x)$ від вершини-джерела s до даної вершини x.

Алгоритм Мінті-Дейкстри.

Надаємо вершині s позначку $(s;0)$.

1. Для кожної не позначеної вершини x, до якої входить дуга від позначеної вершини y, знаходимо суму $d(y)+l(y,x)$. Проставляємо двокомпонентні позначки для тих вершин, де ці суми найменші. В разі існування для деякої вершини декількох мінімальних сум, обираємо для позначення лише одну з них. Переходимо до кроку 2.

2. Якщо позначено всі вершини мережі, то алгоритм припиняє свою роботу. Якщо з позначених вершин не існує дуг до вершин без позначок, то не позначені вершини не досяжні за розглядуваною мережею, алгоритм припиняє свою роботу. В противному випадку повертаємось до кроку 1.

Після завершення роботи алгоритму за другою компонентою позначки вершини одержуємо довжину найкоротшого шляху до неї. Рухаючись за першими компонентами позначок, відновлюємо знайдений оптимальний шлях від даної вершини до початкового пункту.

Приклад 6.5. Хлібобулочні вироби постачаються до восьми магазинів. Вартості перевезення продукції за існуючими комунікаціями складають $X \to 2 = 4$, $X \to 3 = 5$, $X \to 4 = 4$, $X \to 7 = 6$, $2 \to 6 = 5$, $1 \to 6 = 2$, $8 \to 1 = 2$, $4 \to 8 = 7$, $4 \to 1 = 3$, $3 \to 5 = 4$, $4 \to 5 = 1$, $2 \to 8 = 3$, $3 \to 7 = 2$. Знайти найдешевші маршрути постачання хлібобулочних виробів до розглядуваних магазинів.

Рішення. Зобразимо на рис. 6.11 систему комунікацій за умовами задачі. Вершини мережі позначатимуть хлібозавод та занумеровані магазини. Ваги дуг вказуватимуть вартості перевезення за відповідною комунікацією. Подвійні позначки до вершин з'являтимуться під час вирішення задачі.

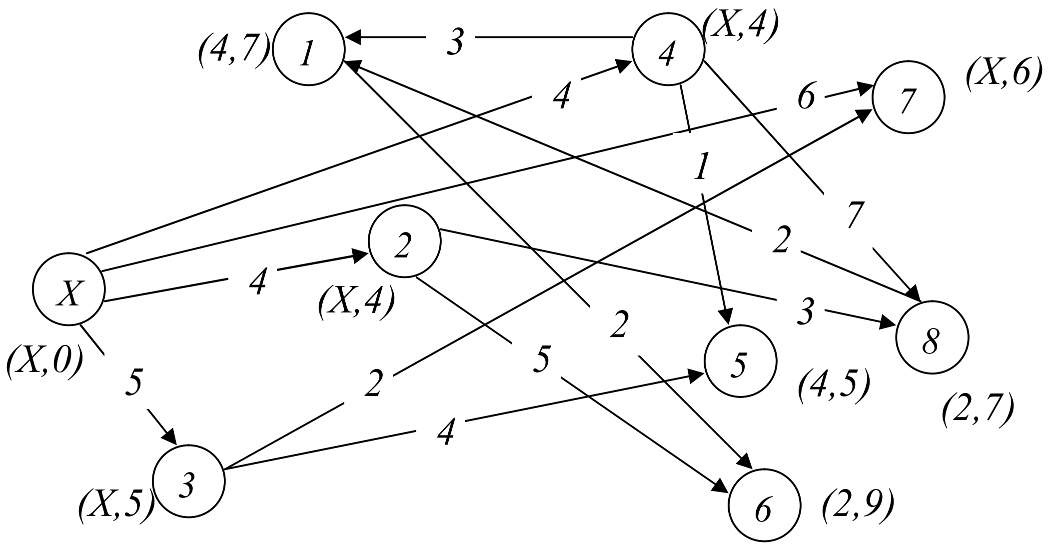


Рис. 6.11. Мережа до ***прикладу 6.5***

1) $X \to 3 \quad 0+5=5$

$X \to 2 \quad 0+4=4$ (min)

$X \to 7 \quad 0+6=6$

$X \to 4 \quad 0+4=4$ (min)

2) $X \to 3 \quad 0+5=5$ (min)

$X \to 7 \quad 0+6=6$

$2 \to 6 \quad 4+5=9$

$2 \to 8 \quad 4+3=7$

$4 \to 1 \quad 4+3=7$

$4 \to 5 \quad 4+1=5$ (*min*)

$4 \to 8 \quad 4+7=11$

3) $X \to 7 \quad 0+6=6$ (*min*)

$4 \to 1 \quad 4+3=7$

$4 \to 8 \quad 4+7=11$

$2 \to 6 \quad 4+5=9$

$2 \to 8 \quad 4+3=7$

$3 \to 7 \quad 5+2=7$

4) $2 \to 6 \quad 4+5=9$

$2 \to 8 \quad 4+3=7$ (*min*)

$4 \to 1 \quad 4+3=7$ (*min*)

$4 \to 8 \quad 4+7=11$

5) $2 \to 6 \quad 4+5=9$ (*min*)

$1 \to 6 \quad 7+2=9$

Всі вершини позначено, алгоритм завершує свою роботу.

Відповідь:	маршрут до магазину	вартість маршруту
	$1 \leftarrow 4 \leftarrow X$	*7,*
	$2 \leftarrow X$	*4,*
	$3 \leftarrow X$	*5,*
	$4 \leftarrow X$	*4,*
	$5 \leftarrow 4 \leftarrow X$	*5,*
	$6 \leftarrow 2 \leftarrow X$	*9,*
	$7 \leftarrow X$	*6,*
	$8 \leftarrow 2 \leftarrow X$	*7.*

Приклад 6.6 *(для самостійного виконання).* Молочна продукція комбінату перевозиться до семи магазинів. Умовні вартості її перевезення за наявними комунікаціями складають: $M \to 1 = 7$, $M \to 2 = 3$, $M \to 5 = 6$, $M \to 4 = 7$, $2 \to 3 = 4$, $5 \to 3 = 2$, $2 \to 4 = 8$, $4 \to 6 = 5$, $4 \to 7 = 2$, $1 \to 7 = 4$. Визначити найдешевші маршрути перевезення молочної продукції до розглядуваних магазинів.

6.4. Графіки Ганта у задачах календарного планування на мережі

Методи планування й управління на мережі забезпечують:

- складання календарного плану виконання певного комплексу робіт;
- оцінку необхідних трудових, матеріальних та фінансових ресурсів, затрат часу;
- контроль комплексу робіт з прогнозуванням і запобіганням можливих зривів при їх виконанні;
- оцінку дієздатності та якості системи за обраними критеріями.

Зручним унаочненням складу та зв'язків етапів (операцій), що становлять зміст аналізованого інвестиційного проекту (технологічного процесу), є мережні графіки. А саме, окремі етапи зіставлятимуться з дугами мережі, позначеними парою номерів їх початкових та кінцевих вершин. В такий спосіб враховується, що етап $i \to j$ мусить розпочинатися не раніше, ніж будуть виконані всі етапи, позначені як $p \to i$. З іншого боку, етап $i \to j$ виконується до всіх етапів, позначених як $j \to p$. Вагами дуг найчастіше бувають тривалості виконання відповідних етапів та обсяги ресурсів, що потрібні задля забезпечення їхньої реалізації в одиницю часу.

Ефективним засобом календарного планування для створення оптимальної стратегії управління інвестиційним проектом чи технологічним процесом є графіки Ганта. Вони відображають послідовно-паралельне виконання складових етапів чи операцій, враховуючи ранні терміни їхнього початку та пізні терміни їхнього завершення. В результаті визначається динаміка витрат ресурсів на реалізацію аналізованого інвестиційного проекту (технологічного процесу) та задаються "критичні" етапи (операції), котрі мають виконуватися без затримок.

Приклад 6.7. Побудувати графіки Ганта за ранніми термінами початку та пізніми термінами завершення етапів інвестиційного проекту, зображеного за допомогою мережного графіку на рис. 6.12. Визначити мінімальний сумарний час реалізації проекту та знайти його “критичні” етапи.

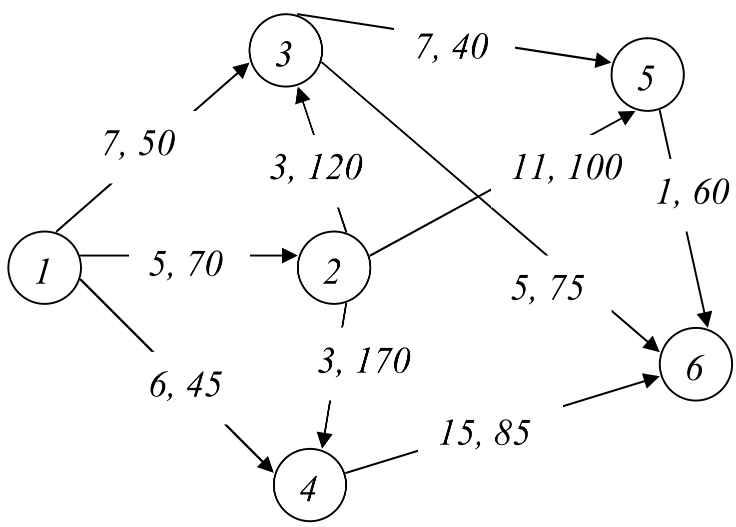


Рис. 6.12. Мережа до ***прикладу 6.7***

Рішення. На графіку Ганта за ранніми термінами початку (рис. 6.13) по вертикальній вісі відкладатимемо окремі етапи аналізованого інвестиційного проекту з урахуванням ранніх строків їхнього виконання. За горизонтальною віссю здійснюється відлік часу, відбиваючи тривалості реалізації окремих етапів та всього інвестиційного проекту в цілому.

Докладніше, рухаючись в напрямі часу по горизонталі та зверху вниз по вертикалі, спочатку зобразимо суцільними відрізками етапи $1 \to 2$, $1 \to 3$, $1 \to 4$.

Етапи $2 \to 3$, $2 \to 4$, $2 \to 5$ можуть найраніше початися тільки відразу після завершення етапу $1 \to 2$. Тому зображуємо суцільні відрізки для $2 \to 3$, $2 \to 4$, $2 \to 5$ після *5* одиниць часу.

Етапи $3 \to 5$ і $3 \to 6$ найраніше можуть початися відразу після завершення найдовшого з етапів $1 \to 3$, $2 \to 3$. Тому зображуємо суцільні відрізки для $3 \to 5$ та $3 \to 6$ після *8* одиниць часу. Пунктирною лінією продовжуємо відрізок для етапу $1 \to 3$ до *8*-ої одиниці

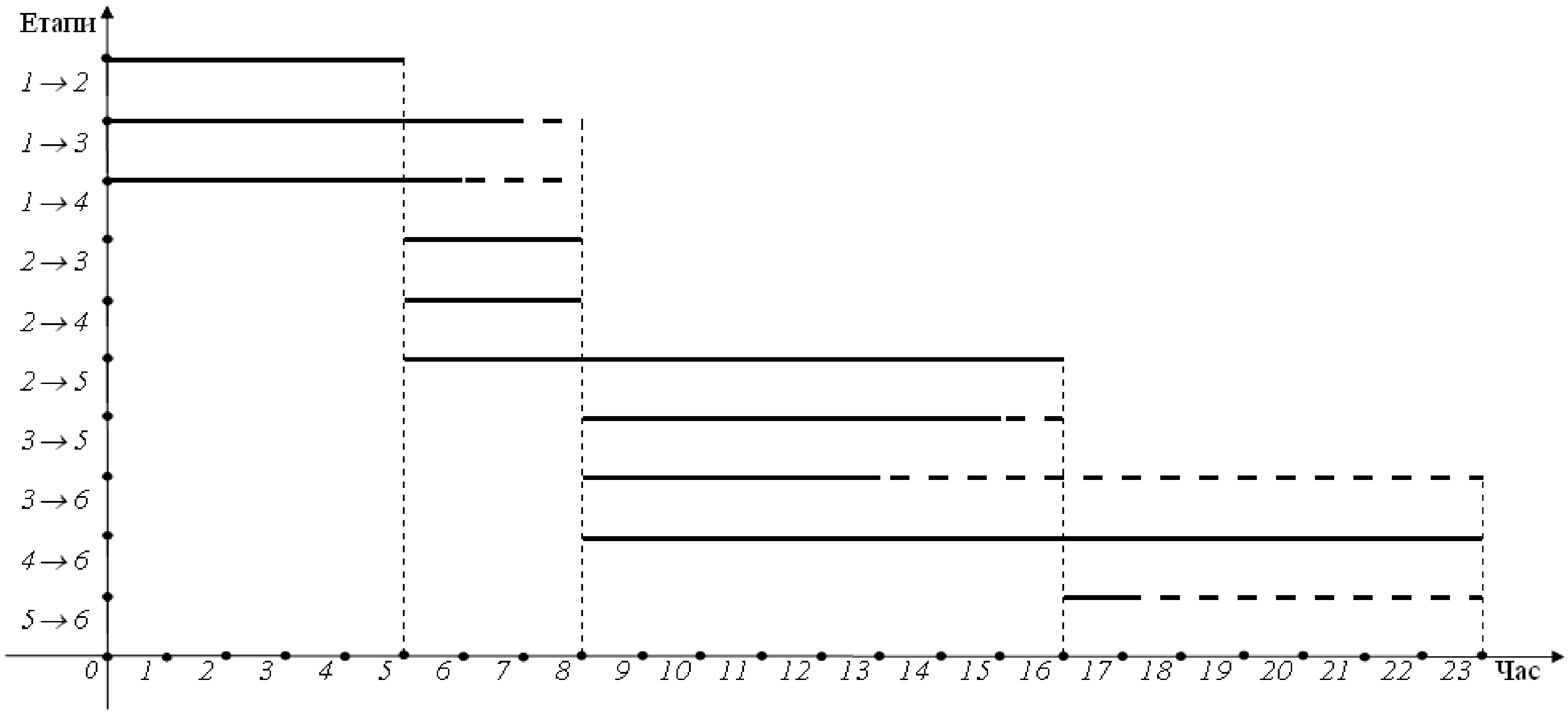


Рис. 6.13. Графік Ганта за ранніми термінами початку до ***прикладу 6.7***

часу включно, що вказуватиме на можливість відповідного уповільнення його виконання.

Ранній початок етапу $4 \rightarrow 6$ залежить від строків завершення найдовшого з безпосередньо попередніх етапів $1 \rightarrow 4$ і $2 \rightarrow 4$. Тому зображуємо суцільний відрізок для $4 \rightarrow 6$ після *8* одиниць часу. Пунктирною лінією продовжуємо відрізок для етапу $1 \rightarrow 4$ до *8*-ої одиниці часу включно, що вказуватиме на можливість відповідного уповільнення його виконання.

Етап $5 \rightarrow 6$ найраніше може розпочатися відразу після завершення найдовшого з етапів $2 \rightarrow 5$ та $3 \rightarrow 5$. Тому зображуємо суцільний відрізок для $5 \rightarrow 6$ після *16* одиниць часу. Пунктирною лінією продовжуємо відрізок для етапу $3 \rightarrow 5$ до *16*-ої одиниці часу включно, що вказуватиме на можливість відповідного уповільнення його виконання.

Завершення етапу $4 \rightarrow 6$ обумовлює мінімальний загальний час реалізації аналізованого інвестиційного проекту тривалістю *23* одиниці. З погляду на це, виконання етапів $3 \rightarrow 6$ та $5 \rightarrow 6$ можна також продовжити до *23*-ої одиниці часу включно, що й показано на рис. 6.13 відповідними пунктирами.

Динаміку сумарних витрат ресурсів за ранніми строками початку етапів інвестиційного проекту проілюструємо гістограмою на рис. 6.14. Пікові потреби в ресурсах (*485* одиниць) припадають на *6*-у одиницю часу.

Аналогічно, на графіку Ганта за пізніми термінами завершення (рис. 6.15) по вертикальній вісі відкладатимемо окремі етапи аналізованого інвестиційного проекту з урахуванням пізніх строків їхнього виконання. За горизонтальною віссю здійснюється відлік часу, відбиваючи тривалості реалізації окремих етапів та всього інвестиційного проекту в цілому.

Докладніше, рухаючись в оберненому до часу напрямі по горизонталі та знизу вгору по вертикалі, спочатку зобразимо суцільними відрізками справа наліво від *23*-ої одиниці часу етапи $5 \rightarrow 6$, $4 \rightarrow 6$ та $3 \rightarrow 6$.

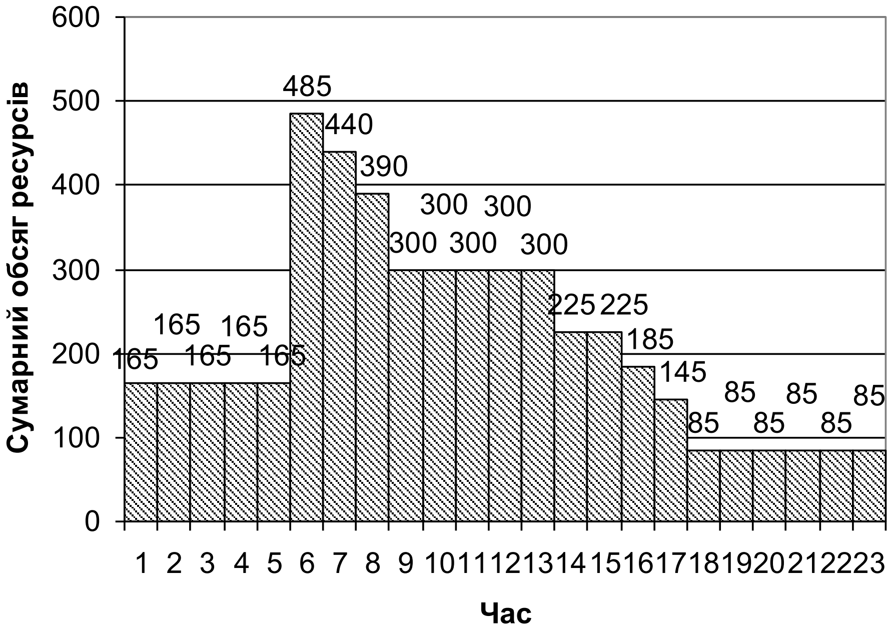


Рис. 6.14. Динаміка витрат ресурсів за ранніми строками початку етапів

Етапи $3 \to 5$ і $2 \to 5$ мають завершитися до початку етапу $5 \to 6$. Тому зображуємо їх суцільними відрізками справа наліво від 22-ої одиниці часу.

Етапи $2 \to 4$ й $1 \to 4$ повинні завершитися найпізніше до початку етапу $4 \to 6$. Через це зображуємо суцільні відрізки для етапів $2 \to 4$ й $1 \to 4$ справа наліво від 8-ої одиниці часу.

Пізнє завершення етапів $2 \to 3$ й $1 \to 3$ залежить від строків початку більш раннього з безпосередньо наступних етапів $3 \to 5$ та $3 \to 6$. Тому зображуємо суцільні відрізки для $2 \to 3$ й $1 \to 3$ справа наліво від 15-ої одиниці часу. Пунктирною лінією продовжуємо відрізок для етапу $3 \to 6$ до 15-ої одиниці часу, що вказуватиме на можливість відповідного уповільнення його виконання.

Етап $1 \to 2$ найпізніше може завершитися до початку найбільш раннього з безпосередньо наступних етапів $2 \to 5$, $2 \to 4$ і $2 \to 3$. Через це зображуємо суцільний відрізок для $1 \to 2$ справа наліво від 5-ої одиниці часу, а також продовжуємо пунктирною лінією відрізки для етапів $2 \to 5$ і $2 \to 3$ до 5-ої одиниці часу, що вказуватиме

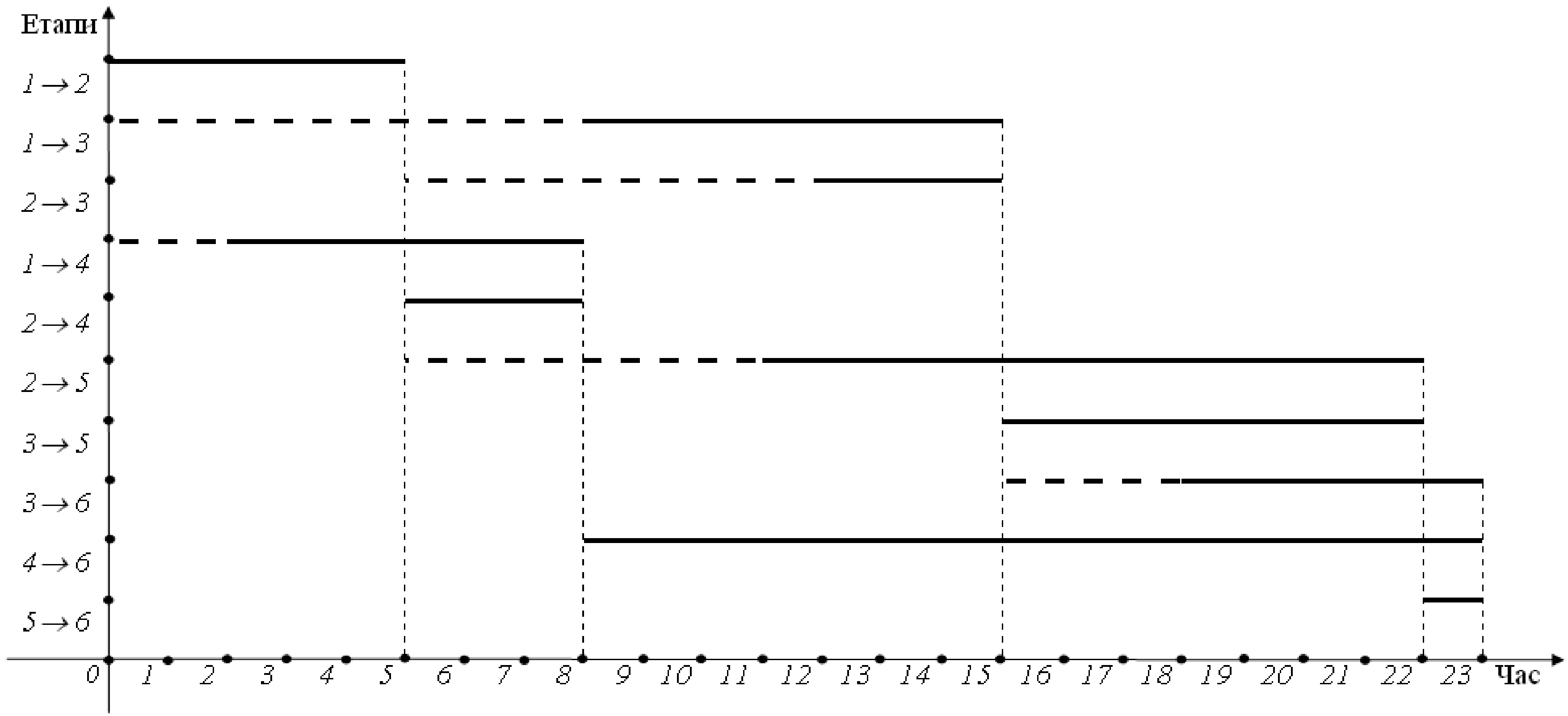


Рис. 6.15. Графік Ганта за пізніми термінами завершення до ***прикладу 6.7***

на можливість відповідного уповільнення їхнього виконання. Окрім цього, припустимо збільшити тривалість реалізації початкових етапів $1 \to 3$ й $1 \to 4$, розпочавши їх від 1-ої одиниці часу виконання аналізованого інвестиційного проекту, що й показано на рис. 6.15 відповідними пунктирами.

Динаміку сумарних витрат ресурсів за пізніми строками завершення етапів інвестиційного проекту проілюструємо гістограмою на рис. 6.16. Пікові потреби в ресурсах (*355* одиниць) припадають на *13–15*-у одиниці часу.

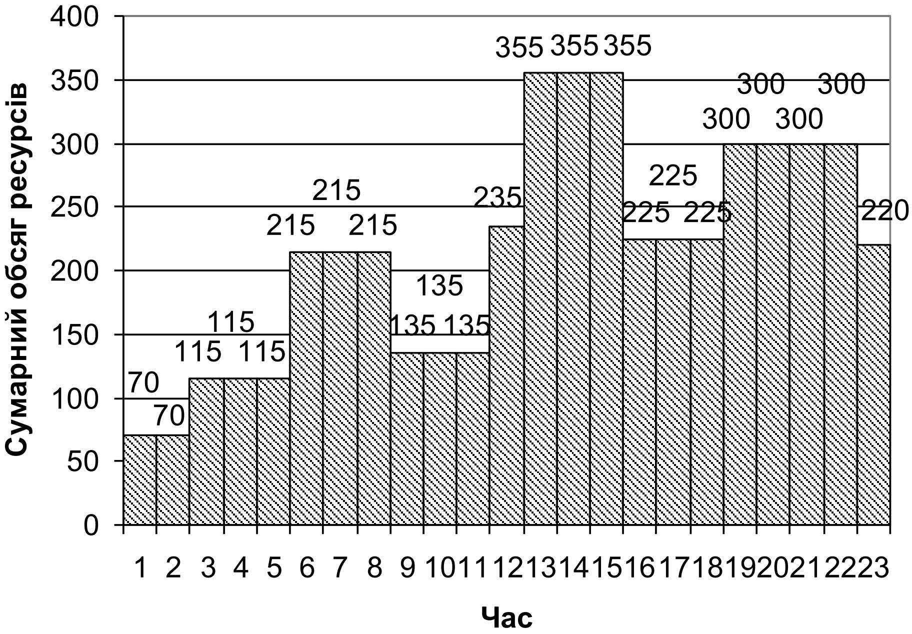


Рис. 6.16. Динаміка витрат ресурсів за пізніми строками завершення етапів

“Критичними” етапами аналізованого інвестиційного проекту є ті, що зображені на графіках Ганта на рис. 6.13 й 6.15 без продовження пунктирними лініями. Таким чином, етапи $1 \to 2$, $2 \to 4$ та $4 \to 6$ в обох випадках мають виконуватися без затримок, адже їхнє уповільнення збільшить загальну тривалість реалізації аналізованого інвестиційного проекту.

Відповідь: мінімальний сумарний час виконання аналізованого інвестиційного проекту складає *23* одиниці часу. Його “критичні” етапи – $1 \to 2$, $2 \to 4$ й $4 \to 6$.

Приклад 6.8 *(для самостійного виконання).* Побудувати графіки Ганта за ранніми термінами початку та пізніми термінами завершення операцій технологічного процесу, зображеного за допомогою мережного графіку на рис. 6.17. Визначити мінімальний сумарний час реалізації процесу та знайти його “критичні” операції.

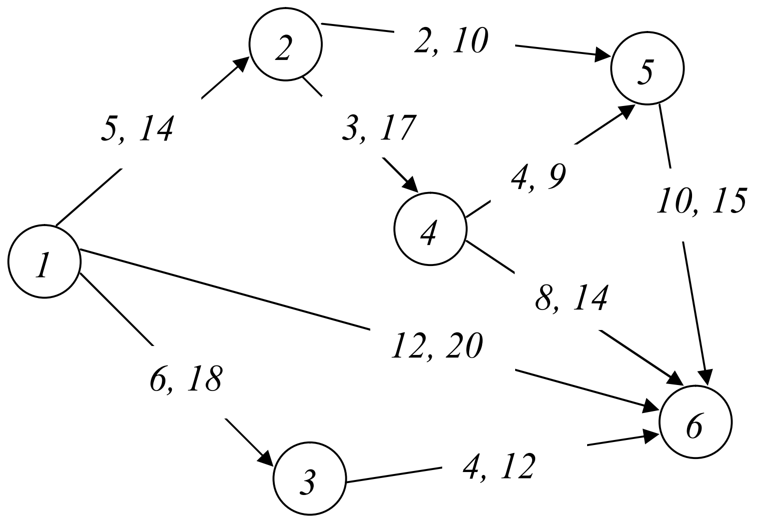


Рис. 6.17. Мережа до ***прикладу 6.8***

**Питання для самоконтролю •
засвоєння матеріалу РОЗДІЛУ 6 •**

1. В чому полягає постановка та економічна інтерпретація задачі про максимальний потік?
2. Опишіть модель лінійного програмування, до розв’язання якої зводиться пошук максимального потоку.
3. В чому полягає постановка та економічна інтерпретація задачі розподілу на мережі?
4. Які задачі розподілу відносять до закритого типу? Як перетворити відкриту задачу розподілу на мережі в задачу закритого типу?
5. Опишіть модель лінійного програмування, до розв’язання якої зводиться вирішення задачі розподілу на мережі.
6. В чому полягає постановка та економічна інтерпретація задачі про найкоротший шлях на мережі?

7. Опишіть алгоритм Мінті-Дейкстри, призначений для вирішення задачі про найкоротший шлях на мережі.
8. Що забезпечують методи планування й управління на мережі?
9. Які різновиди графіків Ганта існують?
10. Опишіть етапи складання графіку Ганта за ранніми термінами початку операцій.
11. Опишіть етапи складання графіку Ганта за пізніми термінами завершення операцій.
12. Як виявити "критичні" етапи аналізованого проекту чи процесу за графіками Ганта?
13. Як скласти діаграми динаміки витрат ресурсів за графіками Ганта?

Матеріали розділу підготовлено з використанням джерел [1; 5; 6; 9; 11; 16; 17; 19].

РОЗДІЛ 7 ●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В АГРАРНІЙ ЕКОНОМІЦІ

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

7.1. Загальна схема методу динамічного програмування

Динамічне програмування являє собою математичний апарат, що дозволяє реалізувати оптимальне управління багатокроковим процесом прийняття рішень, наприклад, при інвестуванні, календарному плануванні, ремонті й заміні обладнання тощо.

Оптимальне управління в системах без оберненого зв'язку здійснюють за принципом оптимальності Беллмана: в будь-якому стані системи слід обирати той варіант управління, що призведе до найбільшого сумарного виграшу від даного кроку до завершення досліджуваного процесу.

Розглянемо n-кроковий процес управління, пов'язаний з послідовними переходами системи із стану S_0 до стану S_n. Функціональну залежність майбутнього стану системи S_k від її поточного стану S_{k-1} та реалізованого варіанту управління X_k задамо у вигляді $S_k = \varphi_k(S_{k-1}, X_k)$, а величину виграшу від здійсненого переходу подамо як $f_k(S_{k-1}, X_k)$, $k = \overline{1, n}$.

Задача динамічного програмування в максимізаційному варіанті полягає в пошуку послідовності припустимих управлінь X_1, …, X_n, що надають критерію оптимальності максимальне значення

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}, X_k) \to max.$$

Для вирішення задачі динамічного програмування спочатку здійснюють обчислення за рекурентними співвідношеннями

$$Z_n(S_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(S_{n-1}, X_n),$$

$$X_n(S_{n-1}) = arg(Z_n(S_{n-1})),$$

$$Z_{n-1}(S_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \{f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n(S_{n-1})\},$$

$$X_{n-1}(S_{n-2}) = arg(Z_{n-1}(S_{n-2})),$$

$$\ldots,$$

$$Z_k(S_{k-1}) = \max_{\{X_k\}} \{f_k(S_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}(S_k)\},$$

$$X_k(S_{k-1}) = arg(Z_k(S_{k-1})),$$

$$\ldots,$$

$$Z_1(S_0) = \max_{\{X_1\}} \{f_1(S_0, X_1) + Z_2(S_1)\},$$

$$X_1(S_0) = arg(Z_1(S_0)).$$

Знайдена в результаті оберненого проходу величина $Z_1(S_0)$ визначатиме шуканий максимальний виграш від реалізації досліджуваного процесу.

Виконавши прямий прохід

$$X_1 = X_1(S_0) \to S_1 = \varphi_1(S_0, X_1) \to X_2 = X_2(S_1) \to \ldots$$

$$\to S_{n-1} = \varphi_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) \to X_n = X_n(S_{n-1}),$$

встановлюємо шукану послідовність багатокрокових управлінських рішень X_1, …, X_n.

7.2. Вирішення задачі заміни обладнання за принципом оптимальності Беллмана

Розглянемо задачу оптимального використання обладнання у виробничому періоді тривалістю n років, по завершенні якого техніку буде продано. Наприкінці кожного року наявне обладнання можна оновити чи продовжити його експлуатацію. Треба знайти послідовність оптимальних управлінських дій, що підтримують виробничий процес з мінімальними сумарними витратами на використання техніки.

Позначимо через $g(j)$ вартість нового обладнання, $p(i,j)$ – ціну продажу, $e(i,j)$ – вартість експлуатації обладнання віком i в році j. На підтримку вирішення задачі заміни обладнання надамо графічну ілюстрацію, зіставивши горизонтальну вісь із реальним часом, а вертикальну вісь – із віком обладнання (рис. 7.1).

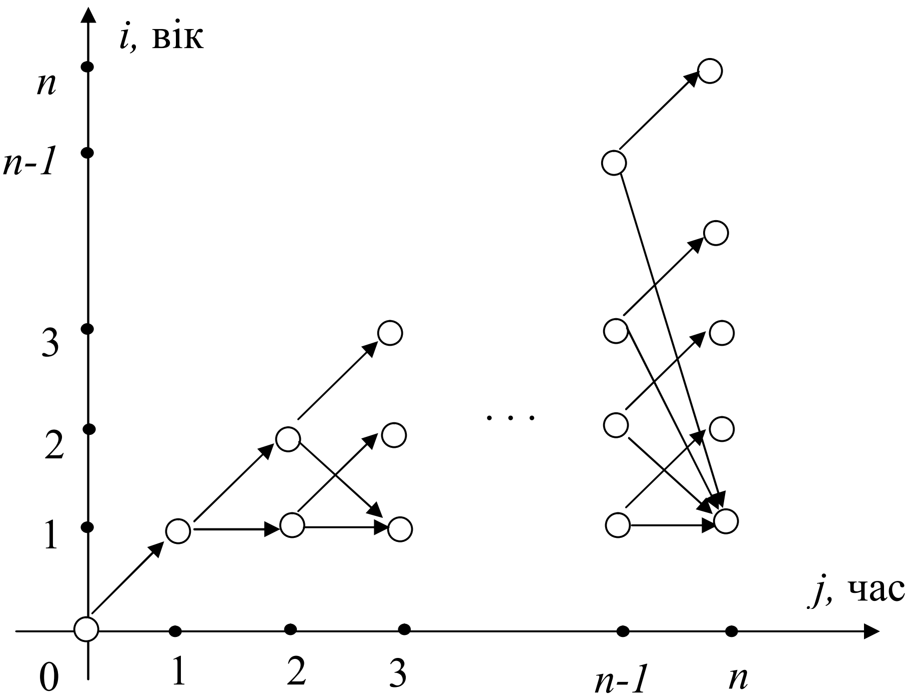


Рис. 7.1. Схема багатокрокового управління в задачі заміни обладнання

З кожного вузла (i,j), $1 \le i \le j$, $j = \overline{1, n-1}$, спрямуємо по два вектори: до вузла $(1, j+1)$ з вагою $f_{ij}^{p} = -p(i,j) + g(j) + e(0,j)$ щодо витрат на оновлення обладнання та до вузла $(i+1, j+1)$ з вагою $f_{ij}^{e} = e(i,j)$ щодо витрат на продовження експлуатації наявного обладнання.

Назвемо вузли (i,j), $1 \le i \le j$, станами часового шару j, а вузли (i,j), $i \le j \le n$, – станами вікового шару i.

Встановлюємо вагу вузлів у зворотному до часу напрямі. А саме,

$$Z_{in} = -p(i,n),\ i = \overline{1,n}.$$

Для j-го часового шару обчислюємо

$$Z_{ij} = min\{f_{ij}^{p} + Z_{1\ j+1}, f_{ij}^{e} + Z_{i+1\ j+1}\}$$

та виділяємо дугу з вузла (i, j), що відповідає компоненті, де у Z_{ij} досягається мінімум, $i = \overline{1, j}$, $j = \overline{n-1, 1}$. Нарешті одержуємо

$$Z_{00} = f_{00} + Z_{11} -$$

шукані мінімальні витрати на використання обладнання.

Рухаючись в напрямі часу від вузла $(0,0)$ до n-го часового шару, покроково відновлюємо послідовність оптимальних управлінських рішень стосовно оновлення чи продовження експлуатації техніки.

Приклад 7.1. Сільськогосподарське обладнання використовується протягом 5 років у виробничому циклі, а після того продається. Кожен рік можна або замінити його новою моделлю, або продовжити експлуатацію. На початку виробничого циклу ціна нового обладнання складає $g = 320$ тис. грн., а обладнання віком i років ($1 \le i \le 5$) – $p(i) = g / 2^i$ тис. грн.. На початку виробничого циклу річні витрати на утримання обладнання віком i років ($0 \le i \le 4$) дорівнюють $e(i) = 40(i+1)$ тис. грн. Щорічна інфляція складає 10% до базових цін і витрат. Треба визначити стратегію заміни техніки в господарстві з мінімальними загальними витратами за розглядуваний виробничий період.

Рішення. Будемо застосовувати для наведених нижче фінансових характеристик подвійну індексацію, вказуючи в такий спосіб на вік обладнання та момент прийняття відповідного управлінського рішення. Зіставимо від’ємні числа з прибутками господарства, а додатні – з його витратами. Для зручності конкретизуємо базові ціни та витрати на експлуатацію обладнання залежно від його віку в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Ціна продажу та витрати на експлуатацію обладнання

Показник	Вік обладнання, років					
	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Ціна продажу, тис. грн.	*320*	*160*	*80*	*40*	*20*	*10*
Витрати на експлуатацію, тис. грн.	*40*	*80*	*120*	*160*	*200*	-

Обчислимо вартості управлінських рішень щодо продовження експлуатації та оновлення обладнання, рухаючись в напрямі часу по вікових зрізах.

$$f_{00} = 320 + 40 = 360,$$

$$f_{11}^{e} = 80 \cdot 1{,}1 = 88,\ f_{12}^{e} = 80 \cdot 1{,}2 = 96,$$

$$f_{13}^{e} = 80 \cdot 1{,}3 = 104,\ f_{14}^{e} = 80 \cdot 1{,}4 = 112,$$

$$f_{22}^{e} = 120 \cdot 1{,}2 = 144,\ f_{23}^{e} = 120 \cdot 1{,}3 = 156,\ f_{24}^{e} = 120 \cdot 1{,}4 = 168,$$

$$f_{33}^{e} = 160 \cdot 1{,}3 = 208,\ f_{34}^{e} = 160 \cdot 1{,}4 = 224,$$

$$f_{44}^{e} = 200 \cdot 1{,}4 = 280,$$

$$f_{11}^{p} = (-160 + 320 + 40) \cdot 1{,}1 = 220,\ f_{12}^{p} = (-160 + 320 + 40) \cdot 1{,}2 = 240,$$

$$f_{13}^{p} = (-160 + 320 + 40) \cdot 1{,}3 = 260,\ f_{14}^{p} = (-160 + 320 + 40) \cdot 1{,}4 = 280,$$

$$f_{22}^{p} = (-80 + 320 + 40) \cdot 1{,}2 = 336,\ f_{23}^{p} = (-80 + 320 + 40) \cdot 1{,}3 = 364,$$

$$f_{24}^{p} = (-80 + 320 + 40) \cdot 1{,}4 = 392,$$

$$f_{33}^{p} = (-40 + 320 + 40) \cdot 1{,}3 = 416,\ f_{34}^{p} = (-40 + 320 + 40) \cdot 1{,}4 = 448,$$

$$f_{44}^{p} = (-20 + 320 + 40) \cdot 1{,}4 = 476.$$

Знайдемо проміжні фінансові підсумки найекономнішого використання обладнання з даного стану до завершення модельного періоду, рухаючись у зворотному до часу напрямі по часових зрізах.

$$Z_{55} = (-10) \cdot 1{,}5 = -15,\ Z_{45} = (-20) \cdot 1{,}5 = -30,\ Z_{35} = (-40) \cdot 1{,}5 = -60,$$

$$Z_{25} = (-80) \cdot 1{,}5 = -120,\ Z_{15} = (-160) \cdot 1{,}5 = -240,$$

$$Z_{44} = min\{280 - 15, 476 - 240\} = 236,$$

$$Z_{34} = min\{224 - 30, 448 - 240\} = 194,$$

$$Z_{24} = min\{168 - 60, 392 - 240\} = 108,$$

$$Z_{14} = min\{112 - 120, 280 - 240\} = -8,$$

$$Z_{33} = min\{208 + 236, 416 - 8\} = 408,$$

$$Z_{23} = min\{156 + 194, 364 - 8\} = 350,$$

$$Z_{13} = min\{104 + 108, 260 - 8\} = 212,$$

$$Z_{22} = min\{144 + 408, 336 + 212\} = 548,$$

$$Z_{12} = min\{96 + 350, 240 + 212\} = 446,$$

$$Z_{11} = min\{88 + 548, 220 + 446\} = 636,$$

$$Z_{00} = 360 + 636 = 996.$$

Мінімальні загальні витрати на використання техніки в господарстві за 5 років складатимуть $Z_{00} = 996$ тис. грн..

Зобразимо на рис. 7.2 графічну схему управління використанням сільськогосподарського обладнання, де вагами дуг виступатимуть вартості управлінських рішень, а вагами вершин – згадані проміжні фінансові підсумки. Виділені дуги вказуватимуть на ефективніші управлінські рішення для кожного стану згідно з досягненням мінімуму у відповідних величинах Z_{ij}.

На підґрунті аналізу графічної схеми за рис. 7.2, рухаючись в напрямі часу за виділеними дугами, визначаємо оптимальну управлінську стратегію використання техніки в господарстві.

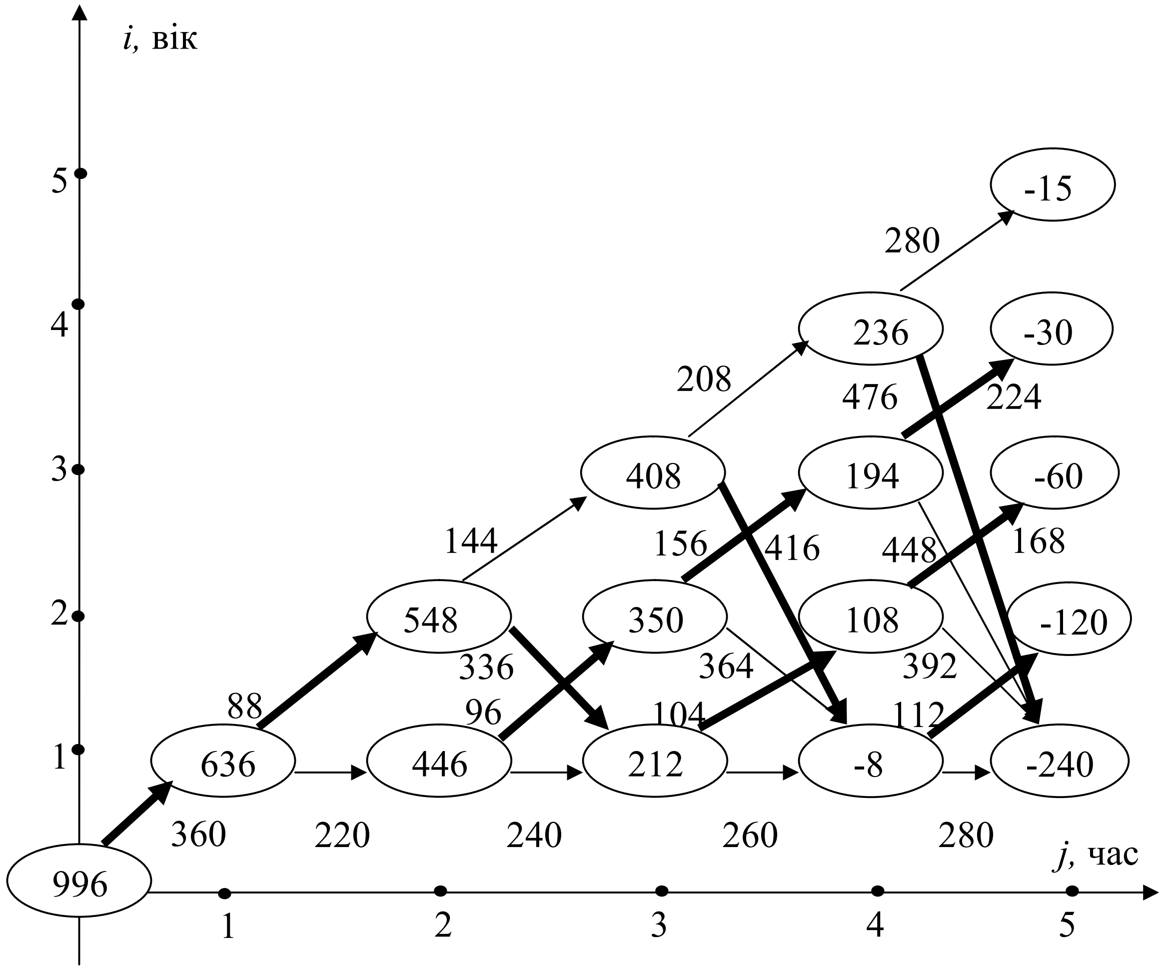


Рис. 7.2. Схема управління використанням техніки до ***прикладу 7.1***

Відповідь: управлінська стратегія вигляду

"продовження експлуатації → оновлення обладнання → продовження експлуатації → продовження експлуатації"

забезпечує використання техніки в господарстві з мінімальними загальними витрати *996* тис. грн. за *5* років.

Приклад 7.2. Сільськогосподарське обладнання використовується протягом *4* років у виробничому циклі, а після того продається. Кожен рік можна або замінити його новою моделлю, або продовжити експлуатацію. Ціна продажу та витрати на експлуатацію обладнання протягом року в залежності від його віку на початку виробничого циклу подано в табл. 7.2. Щороку ціна продажу обладнання зростає на 10 тис. грн., а витрати на його експлуатацію – на 5 тис. грн.. Треба визначити стратегію заміни техніки в господарстві з мінімальними загальними витратами за розглядуваний виробничий період.

Таблиця 7.2

Ціна продажу та витрати на експлуатацію обладнання

<table>
<tr><td rowspan="2">Показник</td><td colspan="5">Вік обладнання, років</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Ціна продажу, тис. грн.</td><td>80</td><td>70</td><td>60</td><td>50</td><td>40</td></tr>
<tr><td>Витрати на експлуатацію, тис. грн.</td><td>10</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>–</td></tr>
</table>

Рішення. Введемо індексацію й позначення для допоміжних величин за аналогією до ***прикладу 7.1.*** Знайдемо фінансові наслідки щорічних управлінських рішень відносно продовження експлуатації або продажу обладнання.

$$f_{00} = 80 + 10 = 90,$$

$$f_{11}^{e} = 10 + 5 = 15, \; f_{12}^{e} = 10 + 10 = 20, \; f_{13}^{e} = 10 + 15 = 25$$

$$f_{22}^{e} = 20 + 10 = 30, \; f_{23}^{e} = 20 + 15 = 35$$

$$f_{33}^{e} = 30 + 15 = 45,$$

$$f_{11}^{p} = -(70 + 10) + (80 + 10) + 10 + 5 = 25,$$

$$f_{12}^{p} = -(70 + 20) + (80 + 20) + 10 + 10 = 30,$$

$$f_{13}^{p} = -(70 + 30) + (80 + 30) + 10 + 15 = 35,$$

$$f_{22}^{p} = -(60 + 20) + (80 + 20) + 10 + 10 = 40,$$

$$f_{23}^{p} = -(60 + 30) + (80 + 30) + 10 + 15 = 45,$$

$$f_{33}^{p} = -(50 + 30) + (80 + 30) + 10 + 15 = 55.$$

Визначимо проміжні фінансові підсумки використання техніки в тому ж порядку, що й у ***прикладі 7.1.***

$$Z_{44} = -(40+40) = -80,\ Z_{34} = -(50+40) = -90,$$

$$Z_{24} = -(60+40) = -100,\ Z_{14} = -(70+40) = -110,$$

$$Z_{33} = min\{45-80, 55-110\} = -55,$$

$$Z_{23} = min\{35-90, 45-110\} = -65,$$

$$Z_{13} = min\{25-100, 35-110\} = -75,$$

$$Z_{22} = min\{30-55, 40-75\} = -35,\ Z_{12} = min\{20-65, 30-75\} = -45,$$

$$Z_{11} = min\{15-35, 25-45\} = -20,$$

$$Z_{00} = 90-20 = 70.$$

Загальні витрати на використання сільськогосподарського обладнання за 4 роки складатимуть $Z_{00} = 70$ тис. грн..

Зобразимо на рис. 7.3 графічну схему управління використанням сільськогосподарського обладнання, де вагами дуг виступатимуть вартості управлінських рішень, а вагами вершин – проміжні фінансові підсумки. Виділені дуги вказуватимуть на ефективніші управлінські рішення для кожного стану згідно з досягненням мінімуму у відповідних величинах Z_{ij}.

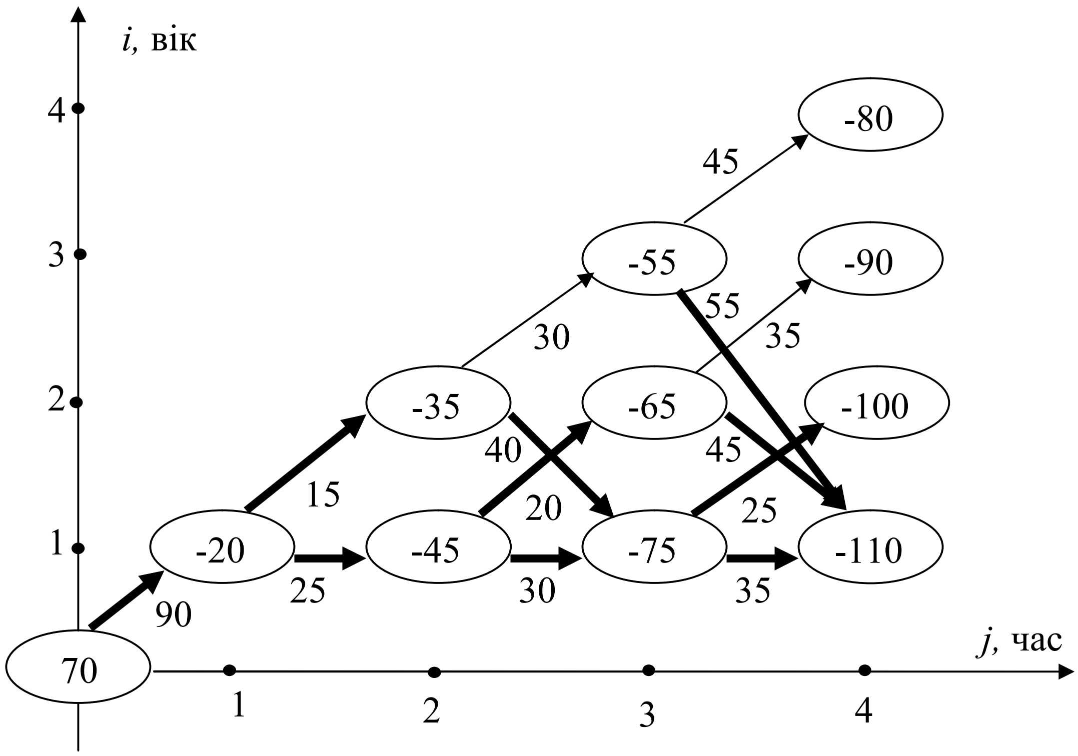


Рис. 7.3. Схема управління використанням техніки до ***прикладу 7.2***

За результатами аналізу графічної схеми, поданої на рис. 7.3, на відміну від ***прикладу 7.1***, отримаємо декілька оптимальних управлінських стратегій використання техніки в господарстві.

Відповідь: управлінські стратегії вигляду

"продовження експлуатації $\to$ оновлення обладнання $\to$ продовження експлуатації",

"продовження експлуатації $\to$ оновлення обладнання $\to$ оновлення обладнання",

"оновлення обладнання $\to$ продовження експлуатації $\to$ оновлення обладнання",

"оновлення обладнання $\to$ оновлення обладнання $\to$ продовження експлуатації",

"оновлення обладнання $\to$ оновлення обладнання $\to$ оновлення обладнання",

забезпечують використання техніки в господарстві з мінімальними загальними витрати *70* тис. грн. за *4* роки.

Приклад 7.3 *(для самостійного виконання).* Сільськогосподарське обладнання використовується протягом *5* років у виробничому циклі, а після того продається. Кожен рік можна або замінити його новою моделлю, або продовжити експлуатацію. Вартість нового обладнання в році j $(0 \le j \le 4)$ складає $g(j) = 100 + 10 \cdot j$ тис. грн.. В році j $(1 \le j \le 5)$ обладнання віком i $(1 \le i \le j)$ років продається за ціною $p(i, j) = (100 + 10 \cdot j) \cdot (1 - 0{,}1 \cdot i)$ тис. грн.. В році j $(0 \le j \le 4)$ експлуатація обладнання віком i $(0 \le i \le j)$ років протягом наступного річного періоду обходиться в $e(i, j) = 10 + 2 \cdot j + 1 \cdot i$ тис. грн.. Треба описати динаміку цін і витрат у відсотках та визначити стратегію заміни техніки в господарстві з мінімальними загальними витратами за розглядуваний виробничий період.

**Питання для самоконтролю •
засвоєння матеріалу РОЗДІЛУ 7 •**

1. Які процеси можна оптимізувати із застосуванням динамічного програмування?
2. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана.
3. В чому полягає задача динамічного програмування?
4. Опишіть реалізацію методу динамічного програмування.
5. Що зображує графічна схема багатокрокового управління в задачі заміни обладнання?
6. Які обчислення передбачає вирішення задачі заміни обладнання?
7. Скільки оптимальних рішень може мати задача заміни обладнання?

Матеріали розділу підготовлено з використанням джерел [3; 5–7; 11; 16; 19].

РОЗДІЛ 8
ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ В СІЛЬСЬКОМУ ГОСПОДАРСТВІ

8.1. Основні поняття та класифікація моделей управління запасами

Предметом дослідження теорії управління запасами є обчислення динаміки їх накопичення і витрачання та обґрунтування постачання, щоб загальні витрати на доставку і зберігання ресурсів та продукції для безперебійного забезпечення споживачів були мінімальними. Під стратегією управління розуміють сукупність правил, якими необхідно керуватись при виборі моменту та обсягу замовлення.

Попит на запас може бути детермінованим (визначеним) або випадковим. Його поповнення може здійснюватись періодично через визначені інтервали часу чи по мірі вичерпування запасу. Термін виконання замовлення інколи вважають миттєвим. В інших випадках на це відводять певний час, що залежатиме від обсягу замовлення. Обсяг замовлення буває сталим чи визначається напередодні чергової поставки. Вартість поставок може залежати від обсягу замовлення або бути завжди однаковою. Збитки зберігання заздалегідь вивезеного ресурсу та штраф за виникнення його дефіциту бувають як сталими, так і змінними.

Якщо на складі накопичуються й витрачаються однотипні вироби, то здійснюють управління однономенклатурним запасом. Якщо витрачаються декілька видів ресурсів, то застосовують прийоми управління багатономенклатурним запасом.

Якщо всі параметри задачі управління запасами є відомими, то її описують детермінованою моделлю. В протилежному випадку розглядають стохастичні моделі управління запасами. Якщо параметри задачі управління запасами не змінюються з часом, то її описують статичною моделлю. В протилежному випадку розглядають динамічні моделі управління запасами.

8.2. Динамічна детермінована модель управління запасами

Позначимо через $A(t)$ і $B(t)$ обсяги поповнення і витрачання запасу на момент часу t, а через $a(t)$ і $b(t)$ – інтенсивності поповнення та витрачання запасу для даного моменту часу. Тоді обсяг наявного запасу визначатиметься як

$$I(t) = I(0) + A(t) - B(t)$$

або
$$I(t) = I(0) + \int_0^t a(\tau)d\tau - \int_0^t b(\tau)d\tau,$$

де $I(0)$ – початковий обсяг запасу при $t = 0$.

Приклад 8.1. Продуктивність роботи ремонтної бригади перші 4 години підвищується з $1,5$ тракторів на кінець 1-ої години до 6 тракторів на кінець 4-ої години, а потім рівномірно знижується до 3 тракторів на кінець 8-ої години. Скільки тракторів бригада відремонтує за 3 години, за 7 годин?

Рішення. Подамо на рис. 8.1 графік зміни продуктивності роботи ремонтної бригади. Відновимо рівняння прямих ліній, яким належать ланки цього графіку.

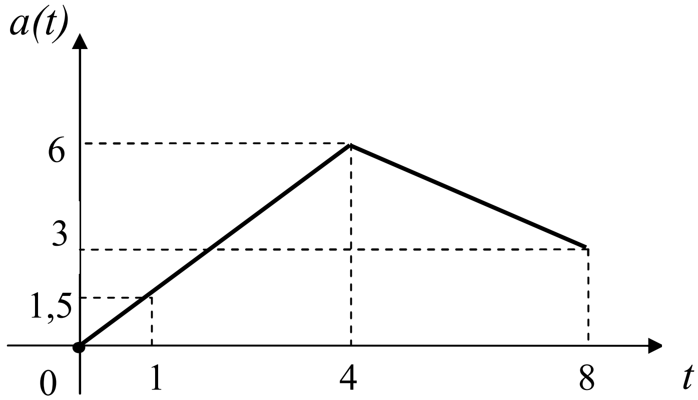


Рис. 8.1. Графік динаміки продуктивності ремонту тракторів

При $\tau \in [0;4]$ маємо

$$\begin{cases} 1{,}5 = 1k_1 + b_1 \\ 6 = 4k_1 + b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 3/2 \\ b_1 = 0 \end{cases},$$

тобто $a(\tau) = 3\tau/2$.

При $\tau \in [4;8]$ маємо

$$\begin{cases} 6 = 4k_2 + b_2 \\ 3 = 8k_2 + b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = -3/4 \\ b_2 = 9 \end{cases},$$

тобто $a(\tau) = 9 - 3\tau/4$.

Кількісні результати роботи бригади обчислюються за формулою

$$I(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau .$$

Тоді $$I(3) = \int_0^3 3\tau/2d\tau = 3\tau^2/4\Big|_0^3 = 27/4 = 6{,}75,$$

$$I(7) = \int_0^4 3\tau/2d\tau + \int_4^7 (9 - 3\tau/4)d\tau = 3\tau^2/4\Big|_0^4 - 4(9 - 3\tau/4)^2/6\Big|_4^7 = 26{,}625.$$

Відповідь: за 3 години роботи бригада повністю відремонтує 6 тракторів (почне працювати над сьомим трактором), а за 7 годин роботи бригада повністю відремонтує 26 тракторів (почне працювати над двадцять сьомим трактором).

Приклад 8.2 *(для самостійного виконання).* У хлібопекарні на кінець 1-ої години роботи випікається 200 кг хлібу. Через 2 години продуктивність досягає 500 кг і залишається сталою протягом решти 5 годин роботи. Скільки хліба буде випечено за $2{,}5$ години роботи, за всю зміну?

8.3. Статична детермінована модель управління запасами без дефіциту

У статичній детермінованій моделі без дефіциту вважають, що поповнення запасу здійснюється через однакові проміжки часу (T), обсяг замовлення є однаковим (S) та запас поповнюється миттєво. Нехай загальний час споживання ресурсу складає q, а весь його обсяг дорівнює Q. Приймаючи, що витрачання запасу відбувається зі сталою інтенсивністю b, знаходимо, що $b = Q/q$. Поповнення запасу при зроблених припущеннях здійснюють в моменти часу 0, T, $2T$, $3T$, … . Зв'язок між S, T та b визначається за формулою $T = S/b$.

Зміни поточного обсягу запасу в статичній детермінованій моделі без дефіциту подано на рис. 8.2, де рівень запасу при $t \in [0;T]$ зменшується згідно з рівнянням $I(t) = S - bt$.

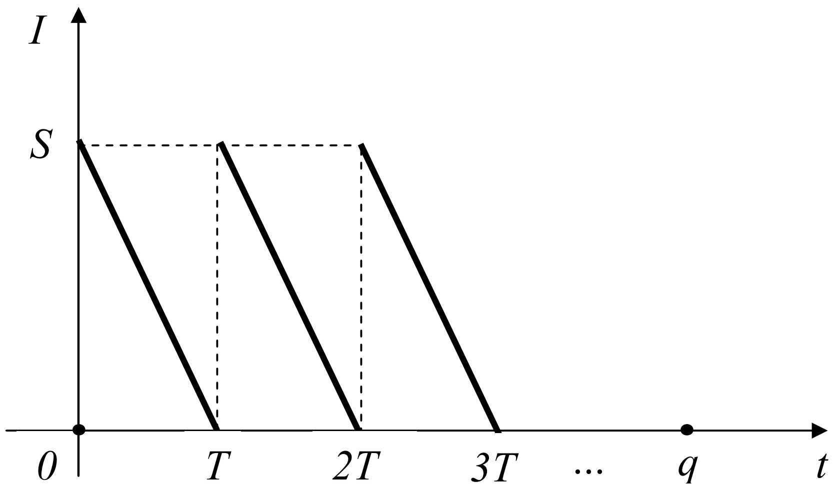


Рис. 8.2. Динаміка витрачання запасу в моделі без дефіциту

Треба визначити обсяг партій замовлення S_0, що мінімізує загальні витрати на перевезення та зберігання запасу. Нехай C – сумарні витрати, C_1 та C_2 – відповідно витрати на постачання та зберігання запасу. Припустимо, що вартість постачання однієї партії не залежить від її обсягу і складає c_1. За таких умов загальна кількість потрібних поставок складає

$$k = Q/S = q/T.$$

Звідки $$C_1 = c_1 \cdot k = c_1 \cdot Q / S.$$

Нехай вартість збереження одиниці запасу в одиницю часу дорівнює c_2. Тоді

$$C_2 = k \cdot c_2 \cdot \int_0^T I(t)dt = k \cdot c_2 \cdot \int_0^T (S - bt)dt = k \cdot c_2 \cdot (St - bt^2 / 2)\Big|_0^T =$$

$$= k \cdot c_2 \cdot S \cdot T / 2 = q \cdot c_2 \cdot S / 2.$$

Остаточно маємо

$$C = C_1 + C_2 = c_1 \cdot Q / S + q \cdot c_2 \cdot S / 2.$$

Для визначення S_0 прирівнюємо похідну від C за S до 0. В результаті одержуємо рівняння вигляду

$$C_0' = -c_1 \cdot Q / S_0^2 + q \cdot c_2 / 2 = 0.$$

Тоді $$S_0 = \sqrt{\frac{2c_1Q}{c_2q}} = \sqrt{\frac{2c_1b}{c_2}}.$$

За знайденим, при оптимальному обсязі замовлення витрати на перевезення запасу та на його збереження мають бути однаковими:

$$\frac{c_1Q}{S_0} = \frac{S_0c_2q}{2} = \sqrt{\frac{c_1c_2Qq}{2}}.$$

Звідки $$C_0 = \sqrt{2c_1c_2Qq},\ k_0 = \sqrt{\frac{c_2Qq}{2c_1}},\ T_0 = \sqrt{\frac{2c_1q}{c_2Q}}.$$

На практиці обсяг замовлення може відрізнятись від знайденого S_0. Для визначення змін у сумарних витратах розкладемо C в ряд Тейлора в околі S_0

$$C \approx C_0 + C_0' \cdot \Delta S + C_0'' \cdot \Delta S^2 / 2$$

Тоді $$\Delta C = C - C_0 \approx \frac{4c_1Q}{S_0^3} \cdot \frac{\Delta S^2}{2},$$

звідки $$\Delta C / C_0 \approx (\Delta S / S_0)^2,$$

тобто відносні зміни сумарних витрат у відсотках складатимуть

$$\Delta C / C_0 \cdot 100\% \approx (\Delta S / S_0)^2 \cdot 100\%.$$

Приклад 8.3. Протягом 120 діб господарство вирощує свиней. Перевезення партії комбікорму коштує 200 грн. (незалежно від обсягу замовлення). Збереження 1 ц комбікорму на фермі обходиться в 3 грн. на добу. На весь період відгодівлі потрібно 3600 ц комбікорму. Визначити найбільш економний обсяг регулярного замовлення комбікорму, терміни його поповнення та витрати на транспортування і зберігання. Надати оцінку додаткових сумарних витрат господарства, якщо буде замовлятись по 100 ц комбікорму?

Рішення. Згідно з умовами, добові витрати комбікорму становлять $b = 3600 / 120 = 30$ ц.

Тоді шуканий обсяг найбільш економного регулярного замовлення комбікорму складе

$$S_0 = \sqrt{2 \cdot 200 \cdot 30 / 3} \approx 63{,}25 \text{ ц.}$$

Знайдена партія замовлення забезпечить господарство комбікормом протягом $T_0 = 63{,}25 / 30 = 2{,}11$ діб.

Витрати на транспортування комбікорму складатимуть

$$C_{10} = 200 \cdot 3600 / 63{,}25 \approx 11384{,}2 \text{ грн.}$$

Витрати на зберігання комбікорму на складі господарства становитимуть

$$C_{20} = 120 \cdot 3 \cdot 63{,}25 / 2 \approx 11384{,}2 \text{ грн.}$$

В разі замовлення комбікорму партіями по 100 ц господарство збільшить витрати на

$$(\Delta C / C_0)100 \approx ((100 - 63{,}25) / 63{,}25)^2 \cdot 100 \approx 33{,}77\%.$$

Відповідь: найбільш економна партія перевезення комбікорму має обсяг $63{,}25$ ц. Цього запасу вистачатиме на $2{,}11$ доби. Витрати на транспортування і зберігання комбікорму за зазначеною схемою витрачання складуть по *11384,2* грн. В разі замовлення комбікорму обсягом по *100* ц господарство збільшить витрати на *33,77*%.

Приклад 8.4 *(для самостійного виконання).* Ремонтна бригада потребує *12000* деталей, що рівномірно використовуються протягом року. Постачання будь-якої за обсягом партії деталей коштує *950* грн., а збереження на складі однієї деталі обходиться в *5* грн. на добу. Визначити обсяг найбільш економного регулярного замовлення деталей, інтервал між їх поставками та витрати на транспортування і зберігання. Надати оцінку додаткових сумарних витрат, якщо буде замовлятись по *2000* деталей. При якому рівні запасу слід направляти замовлення, якщо воно виконується *12* діб?

8.4. Статична детермінована модель управління запасами з дефіцитом

У статичній детермінованій моделі з дефіцитом вважають, що поповнення запасу здійснюється через однакові проміжки часу ($\overline{T}$), обсяг замовлення є сталим ($\overline{S}$) та запас поповнюється миттєво. Нехай загальний час споживання ресурсу складає q, а весь його обсяг дорівнює Q. Поповнення запасу при зроблених припущеннях здійснюють в моменти часу 0, $\overline{T}$, $2\overline{T}$, $3\overline{T}$, … . Вважаючи, що попит на запас характеризується сталою інтенсивністю b, знаходимо, що $b = Q / q$. Проте припускаємо, що в певні регулярні періоди запас продукції дорівнює 0, тобто: задоволення попиту є неможливим. За рахунок цього зі швидкістю b накопичується дефіцит. Його буде погашено з наступної партії ресурсу завдяки завантаженню на власний склад споживача тільки $\widetilde{S}$ ($\widetilde{S} < \overline{S}$) одиниць привезеного ресурсу.

Динаміку споживання запасу та накопичення дефіциту в розглядуваній моделі представлено на рис. 8.3, де періоди $\overline{T}$ між поставками партій розбиваються на дві частини: T_1, коли відбувається споживання ресурсу, та T_2, коли накопичується дефіцит. З геометричних міркувань справедливо

$$T_1 = \frac{\tilde{S}}{\bar{S}}\bar{T}, \quad T_2 = \frac{\bar{S} - \tilde{S}}{\bar{S}}\bar{T}.$$

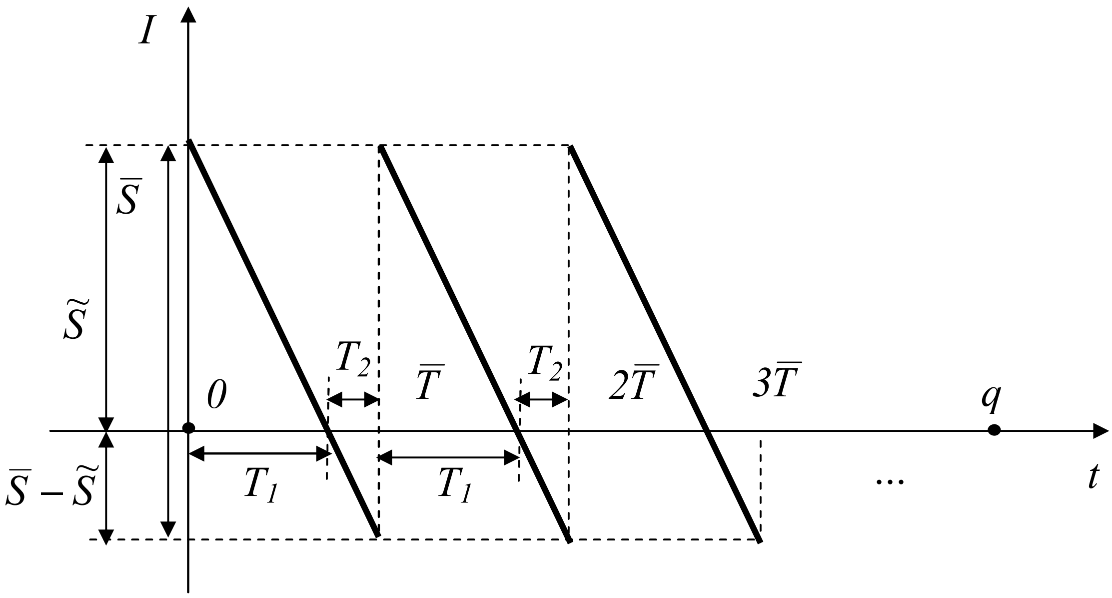


Рис. 8.3. Динаміка витрачання запасу в моделі з дефіцитом

Сумарні витрати

$$\bar{C} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_3$$

в розглядуваній моделі складатимуться з витрат на перевезення запасу $\bar{C}_1$, витрат на його збереження $\bar{C}_2$ та виплат штрафів за виникнення дефіциту $\bar{C}_3$.

За аналогією з моделлю управління запасами без дефіциту припустимо, що вартість постачання однієї партії не залежить від її обсягу та складає c_1. За таких умов загальна кількість потрібних поставок складає

$$\bar{k} = Q / \bar{S} = q / \bar{T}.$$

Звідки $$\bar{C}_1 = c_1 \cdot \bar{k} = c_1 \cdot Q / \bar{S}.$$

Нехай вартість збереження одиниці запасу в одиницю часу дорівнює c_2. Тоді

$$\overline{C}_2 = \bar{k} \cdot c_2 \cdot \int_0^{T_1} \frac{\widetilde{S}}{T_1} t dt = \bar{k} \cdot c_2 \cdot (\widetilde{S} t^2 / (2T_1))\Big|_0^{T_1} =$$

$$= \bar{k} \cdot c_2 \cdot \widetilde{S}^2 \cdot \overline{T} / (2\overline{S}) = q \cdot c_2 \cdot \widetilde{S}^2 / (2\overline{S}).$$

Нехай штраф за дефіцит одиниці ресурсу в одиницю часу дорівнює c_3. Тому

$$\overline{C}_3 = \bar{k} \cdot c_3 \cdot \int_0^{T_2} \frac{(\overline{S} - \widetilde{S})}{T_2} t dt = \bar{k} \cdot c_3 \cdot ((\overline{S} - \widetilde{S}) t^2 / (2T_2))\Big|_0^{T_2} =$$

$$= \bar{k} \cdot c_3 \cdot (\overline{S} - \widetilde{S})^2 \cdot \overline{T} / (2\overline{S}) = q \cdot c_3 \cdot (\overline{S} - \widetilde{S})^2 / (2\overline{S}).$$

Остаточно маємо

$$\overline{C} = \overline{C}_1 + \overline{C}_2 + \overline{C}_3 = c_1 \cdot Q / \overline{S} + q \cdot c_2 \cdot \widetilde{S}^2 / (2\overline{S}) + q \cdot c_3 \cdot (\overline{S} - \widetilde{S})^2 / (2\overline{S}).$$

Для визначення оптимального обсягу партії $\overline{S}_0$ однієї поставки ресурсу та відповідного максимального рівню його запасу $\widetilde{S}_0$ на складі споживача, при яких сумарні витрати є мінімальними, прирівнюємо частинні похідні від $\overline{C}$ за $\overline{S}$ та $\widetilde{S}$ до 0. В результаті одержуємо систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \overline{C}'_{\overline{S}0} = -\dfrac{c_1 Q}{\overline{S}_0^2} - \dfrac{c_2 \widetilde{S}_0^2 q}{2\overline{S}_0^2} + \dfrac{4\overline{S}_0 c_3 (\overline{S}_0 - \widetilde{S}_0) q - 2c_3 (\overline{S}_0 - \widetilde{S}_0)^2 q}{4\overline{S}_0^2} = 0, \\ \overline{C}'_{\widetilde{S}0} = \dfrac{2c_2 \widetilde{S}_0 q}{2\overline{S}_0} - \dfrac{2c_3 (\overline{S}_0 - \widetilde{S}_0) q}{2\overline{S}_0} = 0. \end{cases}$$

Позначимо через $\rho = \dfrac{c_3}{c_2 + c_3}$ коефіцієнт збитків через дефіцит, що приймає значення в діапазоні $[0;1]$. Значення ρ вказуватиме частку часу, коли здійснюється витрачання запасу, а величина $1 - \rho$ задаватиме частку часу, коли накопичуватиметься дефіцит. Тоді маємо

$$\begin{cases} \overline{S}_0 = \sqrt{\dfrac{2c_1 b}{c_2}} / \sqrt{\rho}, \\ \widetilde{S}_0 = \sqrt{\dfrac{2c_1 b}{c_2}} \cdot \sqrt{\rho}. \end{cases}$$

Зауважимо, що при дотриманні оптимального режиму постачання запасу витрати на транспортування дорівнюють сумі витрат на зберігання ресурсу та виплат штрафів за виникнення їхнього дефіциту, тобто

$$c_1 \cdot Q / \overline{S}_0 = \overline{C}_{10} =$$

$$= \overline{C}_{20} + \overline{C}_{30} = q \cdot c_2 \cdot \widetilde{S}_0^2 / (2\overline{S}_0) + q \cdot c_3 \cdot (\overline{S}_0 - \widetilde{S}_0)^2 / (2\overline{S}_0).$$

Приклад 8.5. Протягом *120* діб господарство вирощує свиней. Перевезення партії комбікорму коштує *200* грн. (незалежно від обсягу замовлення). Збереження *1* ц комбікорму на фермі обходиться в *3* грн. на добу. На весь період відгодівлі потрібно *3600* ц комбікорму. Треба визначити найбільш економний обсяг регулярного замовлення комбікорму та максимальний рівень його запасу, якщо втрачений прибуток від виникнення дефіциту комбікорму дорівнює *45* грн. за *1* ц на добу. Обчислити витрати на транспортування і зберігання комбікорму в господарстві та втрачений прибуток від виникнення дефіциту. Яку частку часу буде споживатись запас, а скільки – накопичуватись дефіцит?

Рішення. Знайдемо допоміжний коефіцієнт

$$\rho = 45 / (45 + 3) = 0{,}938.$$

Звідси одержуємо, що *93,8* % часу буде споживатись запас комбікорму, а *6,2* % часу – накопичуватись його дефіцит.

Згідно з умовами прикладу, добовий попит на комбікорм становитиме

$$b = 3600 / 120 = 30 \text{ ц.}$$

Шуканий обсяг найбільш економного регулярного замовлення комбікорму в даному випадку дорівнюватиме

$$\overline{S}_0 \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 30}{3}} / \sqrt{0{,}938} \approx 65{,}32 \text{ ц.}$$

Максимальний рівень запасу комбікорму в господарстві складе

$$\widetilde{S}_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 30}{3}} \cdot \sqrt{0{,}938} \approx 61{,}24 \text{ ц.}$$

Витрати на перевезення комбікорму становитимуть

$$\overline{C}_{10} \approx 200 \cdot 3600 / 65{,}32 \approx 11022{,}7 \text{ грн.}$$

Витрати на збереження комбікорму на власному складі господарства складуть

$$\overline{C}_{20} \approx 120 \cdot 3 \cdot 61{,}24^2 / (2 \cdot 65{,}32) \approx 10333{,}78 \text{ грн.}$$

Втрачений прибуток через накопичення дефіциту комбікорму дорівнюватиме

$$\overline{C}_{30} \approx 120 \cdot 45 \cdot (65{,}32 - 61{,}24)^2 / (2 \cdot 65{,}32) \approx 688{,}92 \text{ грн.}$$

Відповідь: обсяги партії найбільш економного регулярного замовлення та максимального запасу комбікорму складають, відповідно, $65{,}32$ ц та $61{,}24$ ц. Витрати господарства на перевезення комбікорму, його збереження на власному складі та втрати прибутку через дефіцит досягатимуть, відповідно, $11022{,}7$ грн., $10333{,}78$ грн. та $688{,}92$ грн. Запас витрачатиметься $93{,}8\%$ часу, а дефіцит накопичуватиметься протягом $6{,}2\%$ часу.

Приклад 8.6 *(для самостійного виконання).* Ремонтна бригада потребує 12000 деталей, що рівномірно використовуються протягом року. Постачання будь-якої за обсягом партії деталей коштує 950 грн., а збереження на складі однієї деталі обходиться в 5 грн. на добу. Треба визначити обсяг найбільш економного регулярного замовлення деталей та максимальний рівень їх запасу, якщо втрати прибутку через невчасний ремонт дорівнюють 25 грн. за деталь на добу. Обчислити витрати на перевезення і збереження деталей на власному складі ремонтної майстерні та втрати прибутку внаслідок невчасного ремонту. Яку частку часу буде споживатись запас деталей, а скільки – накопичуватись дефіцит?

Питання для самоконтролю •
засвоєння матеріалу РОЗДІЛУ 8 •

1. Які основні поняття й величини характеризують процес управління запасами?
2. Дайте визначення детермінованої, стохастичної, динамічної та статичної моделей управління запасами.
3. Як обчислити наявний обсяг ресурсу в динамічній детермінованій моделі з нерівномірними інтенсивностями споживання й поповнення запасу?
4. Опишіть динаміку витрачання ресурсу в статичній детермінованій моделі управління запасами без дефіциту.
5. Чому дорівнює обсяг найбільш економного регулярного замовлення ресурсу в статичній детермінованій моделі управління запасами без дефіциту?
6. Які витрати розглядають у статичній детермінованій моделі управління запасами без дефіциту?
7. Опишіть динаміку витрачання ресурсу в статичній детермінованій моделі управління запасами з дефіцитом.
8. Чому дорівнює обсяг найбільш економного регулярного замовлення ресурсу та його максимальний запас на складі споживача в статичній детермінованій моделі управління запасами з дефіцитом?
9. Які витрати розглядають у статичній детермінованій моделі управління запасами з дефіцитом?

Матеріали розділу підготовлено з використанням джерел [1; 6; 11; 16; 17; 19].

РОЗДІЛ 9

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

9.1. Загальні положення теорії систем масового обслуговування

Системи масового обслуговування характеризуються наявністю двох сторін: тієї, що потребує обслуговування, та тієї, що призначена задовольнити вимогу. Інакше кажучи, система масового обслуговування поєднує два процеси – появу запитів на обслуговування та їх задоволення.

Під запитом розуміють будь-яку вимогу на виконання певної роботи: ремонт апаратури, обслуговування покупців у роздрібній торгівлі, встановлення телефонного зв'язку тощо. Вхідний потік запитів визначається послідовністю вимог і характеризується певним законом розподілу ймовірної кількості запитів в одиницю часу, що в реальності надходитимуть нерегулярно. Інтенсивність вхідного потоку запитів можна задати величиною λ – їх кількістю в одиницю часу.

За числом каналів обслуговування k (технічних засобів або людей, які надають послуги, використовуючи відповідні технічні засоби) системи масового обслуговування поділяються на одноканальні й багатоканальні. Механізм обслуговування, як і вхідний потік, характеризується терміном обслуговування та кількістю вимог μ, виконаних в одиницю часу.

Системи масового обслуговування поділяють на ті, що спроможні обслуговувати весь вхідний потік замовлень, та ті, що задовольнятимуть тільки частину запитів. Позначимо через $\rho = \lambda / \mu$ коефіцієнт загального навантаження каналів обслуговування.

Тоді якщо $\rho \le k$, то система масового обслуговування спроможна задовольнити весь вхідний потік запитів, причому при $\rho = k$ вона працюватиме на межі своєї потужності без простоїв.

Якщо $\rho > k$, то система масового обслуговування не спроможна охопити весь вхідний потік запитів.

Черга – це сукупність запитів, які очікують на задоволення в системі масового обслуговування. Дисципліна черги характеризує порядок виконання запитів. За способом відбору запитів для обслуговування виділяють дисципліни черги

а) за принципом "першим прийшов – першим обслуговуєшся" (правило FIFO – First Input First Output);

б) за принципом "останнім прийшов – обслуговуєшся першим" (правило LIFO – Last Input First Output);

в) з обмеженим терміном перебування запиту в черзі;

г) із обслуговуванням з пріоритетом.

За ставленням до створення черги розрізняють системи масового обслуговування, що припускають створення необмеженої чи обмеженої черги, і такі системи масового обслуговування, що забороняють її створення, відмовляючи запитам у разі зайнятості всіх каналів обслуговування.

9.2. Багатоканальні системи масового обслуговування з відмовою

Ймовірності знаходження r запитів у системі масового обслуговування з відмовою визначають за формулами

$$p_r = \frac{p_0 \rho^r}{r\,!},\; r = \overline{1,k},$$

де
$$p_0 = 1/(\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i\,!}) \;-$$

частка часу простою всієї розглядуваної системи масового обслуговування без клієнтів ($r = 0$). Через те, що зазначені ймовірності охоплюють усі можливі стани системи, справедливо

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_k = 1 .$$

Ймовірність відмови розглядуваної системи масового обслуговування становить

$$P_{відмови} = p_k .$$

Ймовірність обслуговування запиту дорівнює

$$P_{обсл} = 1 - P_{відмови} .$$

Абсолютна пропускна спроможність системи в одиницю часу складає

$$Z = \lambda \cdot P_{обсл} .$$

Середнє число зайнятих каналів обслуговування знаходиться за формулою

$$k_{ср} = Z / \mu .$$

Приклад 9.1. У кондитерському магазині приймають телефонні замовлення на виготовлення випічки. Відомо, що запити на обслуговування надходять з інтенсивністю 58 замовлень за годину. В магазині працює 3 телефонні лінії, причому одне замовлення оформлюють в середньому за 4 хвилини. Якщо з першого разу замовник не зміг додзвонитись, він телефонує в інший магазин. Визначити імовірність втрати клієнту та середню кількість замовлень, прийнятих в одиницю часу.

Рішення. Інтенсивність вхідного потоку запитів становить $\lambda = 58$ замовлень за годину. Кількість каналів обслуговування дорівнює $k = 3$. Інтенсивність обслуговування замовлень на одній телефонній лінії складає $\mu = 60 / 4 = 15$ замовлень за годину. Коефіцієнт загального навантаження каналів обслуговування дорівнює $\rho = \lambda / \mu = 58 / 15 \approx 3{,}87$. Через те, що $\rho > k$, розглядувана система масового обслуговування не спроможна задовольнити всіх клієнтів. Тому цілком доречно, що утворення черги в ній заборонено.

Знайдемо допоміжну величину, що вказує на частку часу простою системи масового обслуговування без дзвінків

$$p_0 = 1/(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!}) =$$

$$\approx 1/(1 + \frac{(3{,}87)^1}{1} + \frac{(3{,}87)^2}{2} + \frac{(3{,}87)^3}{6}) \approx 0{,}046.$$

Імовірність відмови системи масового обслуговування, інакше кажучи, втрати клієнта, оцінюється за формулою

$$P_{відмови} = \frac{p_0 \rho^k}{k!} \approx \frac{0{,}046 \cdot (3{,}87)^3}{6} \approx 0{,}44,$$

тобто $44\,\%$ потенційних клієнтів втрачається.

За годину роботи кондитерській магазин прийме

$Z = \lambda(1 - P_{відмови}) \approx 58(1 - 0{,}44) \approx 32$ замовлення.

Відповідь: імовірність втрати клієнта складає $0{,}44$. Середня кількість замовлень, прийнятих за годину, дорівнює 32.

Приклад 9.2 *(для самостійного виконання).* У відділі готової їжі супермаркету працює 4 телефонні лінії для прийому замовлень. На обслуговування одного клієнта в середньому витрачається 5 хвилин. Інтенсивність потоку замовлень складає 50 запитів за годину. Визначити ймовірність обслуговування клієнта, що в разі сигналу "зайнято" телефонує в інший магазин чи кафе. Скільки замовлень буде прийнято протягом 12 годин роботи супермаркету?

9.3. Багатоканальні системи масового обслуговування з необмеженою чергою

Ймовірності знаходження r запитів у системі масового обслуговування з необмеженою чергою визначають за формулами

$$p_0 = 1/(\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1}}{k! \cdot (k-\rho)}),$$

коли система масового обслуговування простоює взагалі без клієнтів, тобто $r = 0$,

$$p_r = \frac{p_0 \rho^r}{r!},$$

коли черга ще не утворюється, $r = \overline{1,k}$,

$$p_r = \frac{p_0 \rho^r}{k^{r-k} k!}$$

коли утворюється черга з $r - k$ клієнтів, $r > k$.

Зокрема, для одноканальної системи масового обслуговування з необмеженою чергою маємо

$$p_0 = 1 - \rho, \;\; p_r = p_0 \rho^r, r \geq 1.$$

Ймовірність того, що запит потрапляє в чергу, дорівнює

$$P_{черги} = \frac{p_0 \rho^{k+1}}{k! \cdot (k-\rho)}.$$

Аналогічний показник для одноканальної системи обчислюється за формулою

$$P_{черги} = \rho^2.$$

Середня кількість зайнятих каналів обслуговування визначається як

$$k_{ср} = \rho.$$

Імовірність простою кожного каналу обслуговування обчислюється за формулою

$$P_{простою} = 1 - \frac{\rho}{k}.$$

Середня кількість запитів у черзі дорівнює

$$Z_{черги} = P_{черги} / P_{простою}.$$

Середнє число запитів у системі масового обслуговування становить

$$Z_{сист} = Z_{черги} + k_{ср}.$$

Виходячи з того, що у стабільному режимі роботи кількості запитів на вході та виході системи масового обслуговування є однаковими, середній час перебування запиту в черзі та безпосередньо під обслуговуванням, дорівнює

$$T_{сист} = T_{черги} + T_{обсл},$$

де $$T_{черги} = Z_{черги} / \lambda \text{ та } T_{обсл} = 1/\mu.$$

Приклад 9.3. На склад харчової продукції за шестигодинний робочий день в середньому звертається по *63* клієнти. На складі працює *3* бригади вантажників, що обслуговують за годину *4* замовлення. Знайти ймовірність утворення черги, імовірність простою кожної бригади та середній час перебування клієнта на складі.

Рішення. Інтенсивність вхідного потоку запитів складає $\lambda = 63/6 = 10,5$ замовлень за годину. Кількість каналів обслуговування дорівнює $k = 3$. Швидкість роботи однієї бригади становить $\mu = 4$ замовлення за годину. Коефіцієнт загального навантаження каналів обслуговування дорівнює $\rho = \lambda / \mu = 10,5/4 \approx 2,63$. Через те, що $\rho < k$, дана система масового обслуговування здатна охопити послугами всіх клієнтів. Оскільки $\rho > k - 1$, зайвих каналів обслуговування (бригад) нема.

Знайдемо допоміжну величину, що вказує на частку часу простою всієї системи масового обслуговування, а саме

$$p_0 = 1/(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{k+1}}{k!(k-\rho)}) =$$

$$\approx 1/(1 + \frac{2,63^1}{1} + \frac{2,63^2}{2} + \frac{2,63^3}{6} + \frac{2,63^4}{6(3-2,63)}) \approx 0,03.$$

Імовірність простою кожної бригади складу дорівнює

$$P_{простою} = 1 - \rho / k \approx 1 - 2{,}63 / 3 \approx 0{,}13,$$

тобто 13% часу кожна бригада не працює.

Імовірність утворення черги з клієнтів на складі становить

$$P_{черги} = \frac{p_0 \rho^{k+1}}{k!(k-\rho)} \approx \frac{0{,}03 \cdot 2{,}63^4}{6(3-2{,}63)} \approx 0{,}68.$$

Середня довжина черги дорівнює

$$Z_{черги} = \frac{P_{черги}}{P_{простою}} \approx \frac{0{,}68}{0{,}13} \approx 5{,}41.$$

Середній час перебування клієнту на складі, враховуючи час очікування та обслуговування, визначимо за формулою

$$T_{сист} = Z_{черги} / \lambda + 1 / \mu \approx 5{,}41 / 10{,}5 + 1 / 4 \approx 0{,}77 \text{ години} \approx 46 \text{ хвилин.}$$

Відповідь: імовірності утворення черги та простою кожної бригади дорівнюють, відповідно, $0{,}68$ та $0{,}13$. Середній час перебування клієнту на складі складає 46 хвилин.

Приклад 9.4 *(для самостійного виконання).* На склад мінеральних добрив та засобів боротьби зі шкідниками рослин в середньому надходить по 62 замовлення за восьмигодинний робочий день. На складі працює 4 пункти обслуговування клієнтів, що обробляють по 2 замовлення за годину. Визначити час простою кожного пункту та ймовірність потрапляння клієнтів у чергу.

9.4. Багатоканальні системи масового обслуговування з обмеженою чергою

Нехай число запитів, що очікують на задоволення в системі масового обслуговування, обмежено кількістю m. Ймовірності знаходження r запитів у системі масового обслуговування з обмеженою чергою визначають за формулами

$$p_0 = 1/(\sum_{i=0}^{k}\frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1}(1-(\rho/k)^m)}{k \cdot k! \cdot (1-\rho/k)}),$$

коли система масового обслуговування простоює взагалі без клієнтів, тобто $r = 0$,

$$p_r = \frac{p_0 \rho^r}{r!},$$

коли черга ще не утворюється, $r = \overline{1,k}$,

$$p_r = \frac{p_0 \rho^r}{k^{r-k} \cdot k!},$$

коли утворюється черга з $r - k$ клієнтів, $r = \overline{k+1, k+m}$.

Зокрема, для одноканальної системи масового обслуговування з обмеженою чергою маємо

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}},\ p_r = p_0 \rho^r,\ r = \overline{1, m+1}.$$

Ймовірність відмови розглядуваної системи масового обслуговування визначається як

$$P_{відмови} = p_{k+m}.$$

Її відносна пропускна спроможність дорівнює

$$P_{обсл} = 1 - P_{відмови}.$$

Абсолютна пропускна спроможність системи в одиницю часу складає

$$Z = \lambda \cdot P_{обсл}.$$

Середнє число зайнятих каналів можна знайти за формулою

$$k_{ср} = \rho \cdot P_{обсл}.$$

Зокрема, в одноканальній системі одержуємо

$$k_{ср} = 1 - p_0.$$

Середнє число запитів у черзі становить

$$Z_{черги} = \frac{p_0 \rho^{k+1} (1 - (m + 1 - m\rho / k)(\rho / k)^m)}{k \cdot k! \cdot (1 - \rho / k)^2}.$$

Середнє число запитів у системі масового обслуговування з обмеженою чергою дорівнює

$$Z_{сист} = Z_{черги} + k_{ср}.$$

Приклад 9.5. У майстерні за день ремонтується 4 машини. Єдина бригада ремонтників приймає машини на ремонт, якщо на власній стоянці майстерні на 7 машин є вільні місця. Визначити ймовірність прийняття машини на ремонт та середнє число зайнятих місць на стоянці, якщо відомо, що за ремонтом до майстерні звертається 9 клієнтів за день.

Рішення. Інтенсивність вхідного потоку запитів складає $\lambda = 9$ замовлень за день. Кількість каналів обслуговування дорівнює $k = 1$. Швидкість роботи бригади становить $\mu = 4$ ремонти за день. Коефіцієнт загального навантаження єдиного каналу обслуговування дорівнює $\rho = \lambda / \mu = 9/4 = 2{,}25$. Через те, що $\rho > k$, розглядувана система масового обслуговування дійсно має обмежувати довжину черги клієнтів ($m = 7$).

Знайдемо допоміжну величину, що вказує частку часу простою системи масового обслуговування без роботи

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}} = \frac{1 - 2{,}25}{1 - 2{,}25^9} \approx 0{,}00085.$$

Імовірність відмови клієнту складає

$$P_{відмови} = p_0 \cdot \rho^{m+1} \approx 0{,}00085 \cdot 2{,}25^8 \approx 0{,}56.$$

Тоді частка обслугованих клієнтів дорівнюватиме

$$P_{обсл} = 1 - P_{відмови} \approx 1 - 0{,}56 = 0{,}44.$$

Середнє число зайнятих місць на стоянці співпадає з середньою довжиною черги, тобто

$$Z_{черги} = p_0 \rho^2 (1-(m+1-m\rho)\rho^m)/(1-\rho)^2 =$$

$$\approx 0{,}00085 \cdot 2{,}25^2 (1-(7+1-7 \cdot 2{,}25)2{,}25^7)/(1-2{,}25)^2 \approx 6{,}2 .$$

Відповідь: імовірність ремонту машини становить $0{,}44$. Середнє число зайнятих місць на стоянці майстерні складає $6{,}2$.

Приклад 9.6 *(для самостійного виконання).* Ремонтна майстерня, що обслуговує трьох клієнтів за день, обладнана власною стоянкою на 6 машин. В разі наявності вільного місця машина приймається на ремонт. Інтенсивність потоку клієнтів складає 7 звертань за день. Визначити ймовірність втрати клієнта та середнє число машин у майстерні, якщо ремонт здійснює 1 бригада.

Питання для самоконтролю •
засвоєння матеріалу РОЗДІЛУ 9 •

1. Надайте практичні приклади систем масового обслуговування.
2. Наведіть основні кількісні характеристики систем масового обслуговування.
3. Що таке “черга” та які дисципліни черги бувають?
4. Надайте класифікацію моделей систем масового обслуговування.
5. Які формули описують роботу багатоканальних систем масового обслуговування з відмовою?
6. Які формули характеризують функціонування багатоканальних систем масового обслуговування з необмеженою чергою?
7. Які формули описують роботу багатоканальних систем масового обслуговування з обмеженою чергою?

Матеріали розділу підготовлено з використанням джерел [1; 6; 7; 11; 16; 19].

РОЗДІЛ 10

ТЕОРІЯ ШТУЧНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ В ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

10.1. Загальні поняття теорії штучних нейронних мереж

До головних проблем, де виявляється доцільним застосування обчислювальних конструкцій нейронних мереж, належать:

• задачі розпізнавання образів, тобто зіставлення аналізованих інформаційних зразків із заздалегідь відомими групами;

• кластеризації чи класифікації образів без вчителя, коли подібні досліджувані зразки об’єднуються в спільні групи;

• задачі прогнозування, де в розглядуваній інформаційній базі встановлюють закономірності й тенденції, котрі потім поширюватимуться на нові аналізовані порції вхідних даних.

Штучні нейронні мережі створюються з нейронів, рис. 10.1.

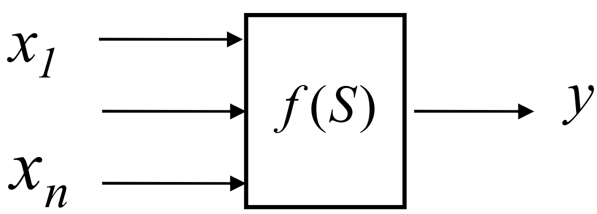


Рис. 10.1. Схематичний вигляд нейрона

Складовими частинами нейронів є канали-дендрити (приймачі), за якими надходять вхідні (числові) імпульси $(x_1, \ldots x_n)$. Згенерований нейроном вихідний (оцифрований, бінарний чи аналоговий, неперервний) сигнал передається до інших елементів мережі за єдиним каналом-аксоном (передавачем) y. Кожний одержаний імпульс підлягає обробці збуджуючим або гальмуючим синапсом, котрий посилює чи пригнічує надісланий до даного нейрону вхідний сигнал. У кількісному плані йдеться про помноження величини імпульсу x_i на відповідний додатний чи від'ємний ваговий параметр ω_i, $i = \overline{1,n}$. Безпосередньо всередині нейрону відбувається додавання скорегованих у такий спосіб даних та, можливо, зсув їхньої суми під впливом зовнішнього константного імпульсу b, стабілізованого на момент завершення створення нейронної мережі:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i + b.$$

Отриманий внаслідок цього єдиний сигнал S в загальному випадку піддається нелінійному перетворенню, що виконується активаційною (передавальною) функцією:

$$y = f(S).$$

Найбільш поширені функції активації наведено в табл. 10.1.

Першим питанням побудування нейронної мережі виявляється вибір її архітектури, тобто задання характеристик нейронів (кількості дендритів, вигляду передавальних функцій), топології зв'язків між ними та вхідних і вихідних каналів для опрацьовуваної мережею інформації в цілому.

Другим ключовим питанням створення нейронної мережі виявляється її налагодження чи навчання, тобто узгодження з реальними, відомими з досвіду чи експериментів наборами даних шляхом оптимального підбору вагових параметрів синапсів її нейронів.

Докладніше, за структурою застосованих нейронів відрізняють гомогенні мережі, утворені однорідними за типом та функцією активації елементами, та гетерогенні мережі, побудовані з нейронів, щонайменше, з різними передавальними функціями. У складних мережах нейрони згруповують у шарах, тобто об'єднують за спільністю вхідних сигналів. Розрізняють вхідний шар, до якого надходять зовнішні аналізовані дані; вихідний шар, що видає остаточні імпульсні результати функціонування нейронної мережі; проміжні чи сховані шари, котрі виконують базову обчислювально-перетворювальну роботу мережної конструкції, рис. 10.2.

Таблиця 10.1

Функції активації нейронних мереж

Назва	Формула	Область значень
Порогова	$f(S)=\begin{cases}0, S<T\\ 1, S\ge T\end{cases}$	*0* або *1*
Знакова (сигнатурна)	$f(S)=\begin{cases}1, S>0\\ -1, S\le T\end{cases}$	*1* або -*1*
Сигмоїдальна (логістична) S-подібна	$f(S)=\dfrac{1}{1+e^{-S}}$	$(0, 1)$
Півлінійна	$f(S)=\begin{cases}S, S>0\\ 0, S\le 0\end{cases}$	$[0, \infty)$
Лінійна	$f(S)=S$	$(-\infty, \infty)$
Радиальна базисна (гаусівська)	$f(S)=e^{-S^2}$	$(0, 1]$
Півлінійна з насиченням	$f(S)=\begin{cases}0, S\le 0\\ S, 0<S<1\\ 1, S\ge 1\end{cases}$	$[0, 1]$
Лінійна з насиченням	$f(S)=\begin{cases}-1, S\le -1\\ S, -1<S<1\\ 1, S\ge 1\end{cases}$	$[-1, 1]$
Гіперболічний тангенс (сигмоїдальна)	$f(S)=\dfrac{e^S-e^{-S}}{e^S+e^{-S}}$	$(-1, 1)$

За характером функціонування (еволюцією станів нейронів) мережі поділяють на асинхронні, коли в кожний момент часу змінюється стан лише одного нейрону, та на синхронні, де, зазвичай, трансформація станів нейронів відбувається пошарово. Нарешті, за зв'язністю розрізняють мережі, що не мають зворотних зв'язків, тобто вихідні сигнали від кожного попереднього шару мережі послідовно надходять на входи всіх нейронів її наступного шару, а також мережі, котрі працюють зі зворотними зв'язками, тобто вихідні імпульси з наступних шарів передаються на входи нейронів попередніх шарів. Крім того, ще однією типовою архітектурою нейронних мереж виступає топологія з перехресними зв'язками між нейронами у межах одного шару.

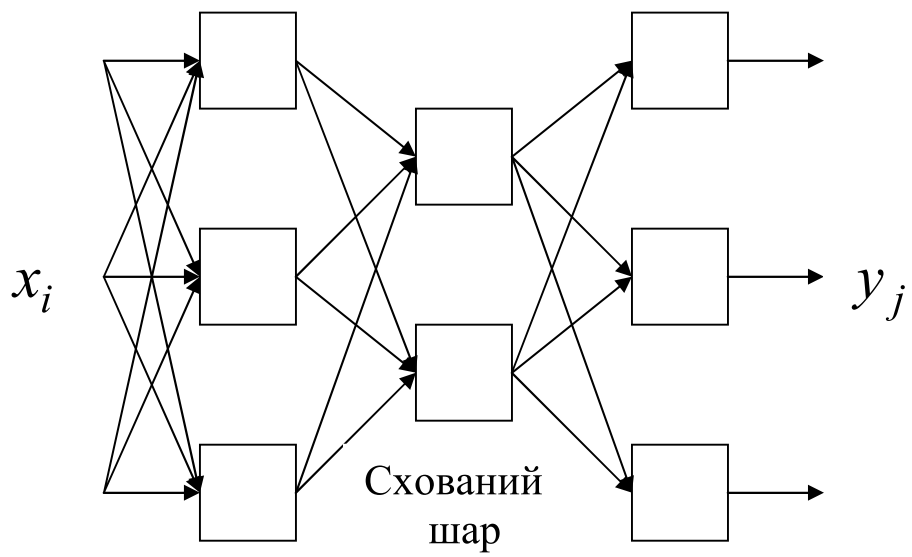


Рис. 10.2. Приклад топології нейронної мережі

Далі, налагодження синапсів може відбуватися за схемою навчання з вчителем або без нього. У першому випадку йдеться про задання експертних пар (навчальних прикладів) із відомих вхідних сигналів та відповідних вихідних імпульсів, які слід забезпечити у створюваній мережі шляхом оптимального вибору (корегування) синаптичних ваг. Якість виконаного навчання оцінюється за досягнутим значенням середньоквадратичного відхилення між бажаними та реальними вихідними сигналами розробленої нейронної мережі.

Якщо під час налагодження останньої необхідна певна зміна її архітектури, то застосовують ще й контрольні приклади з пар вхідних та вихідних даних на підтвердження адекватності виконаної трансформації. По завершенні створення нейронної мережі на відомих інформаційних парах здійснюють остаточне тестування одержаної моделі.

В разі навчання без вчителя відбувається циклічне (ітераційне) налагодження нейронної мережі тільки за відомими вхідними наборами даних, що ініціюють самоорганізацію її нейронів з метою довільної композиції подібних вхідних зразків у спільних класах. Якість навчання нейронної мережі та підсумкова адекватність моделювання дедалі збільшуватиметься з підвищенням повноти (різноманітності) залучених для навчання експертних прикладів.

10.2. Нейромережні моделі • прогнозування в аграрній економіці •

Комп'ютерне побудування нейронних мереж для вирішення задач прогнозування пропонує інструментарій NXL Predictor, що є надбудовою програми MS Excel.

Інтерфейс інструментарію NXL Predictor дозволяє ідентифікувати набори вхідних та вихідних сигналів для навчання, вказати параметри нейронної мережі, задати вхідні сигнали для прогнозування вихідних даних та здійснити перегляд за графічним унаочненням процесу навчання нейронної мережі.

В якості параметрів утворення нейронної мережі задаються початкові ваги синапсів, вигляд одноманітних функцій активації до всіх нейронів, їх кількість у схованому шарі. Ітераційний процес навчання припиняється за вичерпуванням заданої кількості ітерацій (epochs) або за досягненням мінімальних змін ваг синапсів (minimum weight delta), рис. 10.3.

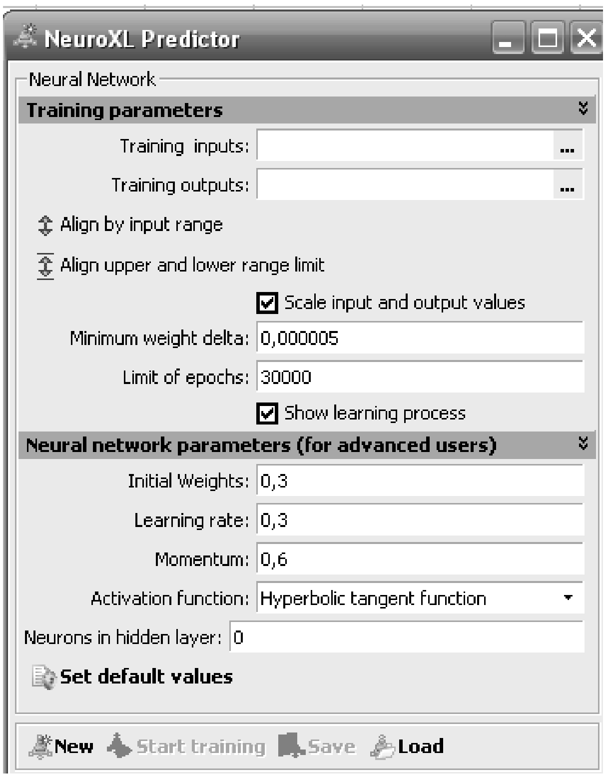


Рис. 10.3. Вхідний інтерфейс NXL Predictor

Приклад 10.1. Спрогнозувати засобами інструментарію NXL Predictor обсяг виробництва зернових та зернобобових культур по Дніпропетровській області на наступний рік за їх площею посівів, обсягом виробництва та ціною реалізації поточного року, табл. 10.2. Зробити порівняння фактичних та прогнозованих нейромережною моделлю результатів та навести очікуваний обсяг виробництва зернових та зернобобових культур на *2013* рік.

Таблиця 10.2

Динаміка виробництва зернових та зернобобових культур у Дніпропетровській області

Рік	Площа посівів, тис. га	Обсяг виробництва, тис. ц	Ціна реалізації, грн./т
1998	*861,5*	*17416,9*	*150,7*
1999	*798,6*	*15410,3*	*197,8*
2000	*885,5*	*15713,6*	*397,4*
2001	*1018,7*	*32724,2*	*342,1*
2002	*1070,1*	*29794,3*	*307,4*
2003	*828*	*12786,9*	*514,7*

Продовження табл. 10.2

2004	*1108,5*	*30567,9*	*434,3*
2005	*1040,3*	*29083,9*	*402,6*
2006	*1077*	*26352,7*	*501,5*
2007	*1156*	*16718,5*	*802,7*
2008	*1104,6*	*36938,7*	*728,8*
2009	*1118,6*	*28172,3*	*758,8*
2010	*1110,3*	*27086,1*	*1039,5*
2011	*1179,3*	*34560,9*	*1327,2*
2012	*1129,3*	*15542,7*	*1562*

Рішення. Розглянемо навчальну вибірку з вхідними даними у комірках B2:D15 та вихідними даними у комірках C3:C16, де площа посівів, обсяг виробництва та ціна реалізації зернових та зернобобових культур в попередньому році обумовлюють обсяг їх виробництва на наступний рік. За допомогою інструментарію NXL Predictor одержано нейронну мережу, що генерує вихідні дані на фактичному вхідному наборі з середньою похибкою *1306,06* тис. ц (комірки E3:E16 та E19), рис. 10.4 та 10.5.

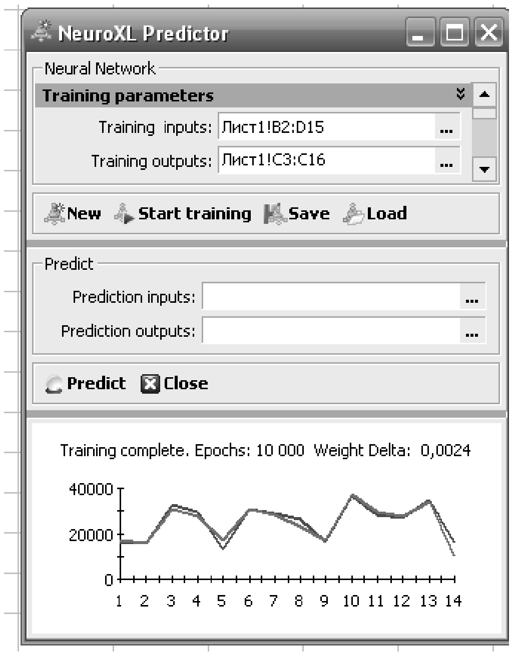


Рис. 10.4. Результат навчання нейронної мережі до ***прикладу 10.1***

	A	E
1	Рік	Неромережний прогноз обсягу виробництва
2	*1998*	
3	*1999*	*16824,55*
4	*2000*	*15891,67*
5	*2001*	*31035,31*
6	*2002*	*27309,92*
7	*2003*	*16893,90*
8	*2004*	*30711,17*
9	*2005*	*28425,97*
10	*2006*	*23140,35*
11	*2007*	*17069,21*
12	*2008*	*37135,18*
13	*2009*	*29626,14*
14	*2010*	*27454,31*
15	*2011*	*34188,11*
16	*2012*	*13886,05*
17		
18		Середня похибка
19		*1306,06*
20		

Рис. 10.5. Прогноз фактичних даних ***прикладу 10.1*** інструментарієм NXL Predictor

Зауважимо, що за розрахунками функцією ТЕНДЕНЦИЯ програми MS Excel лінійна регресія на даному прикладі дає середню похибку *6521,61* тис. ц, що є гіршим за середню похибку на нейронній мережі у *5* раз. Прогноз обсягу виробництва зернових та зернобобових культур у Дніпропетровській області на *2013* рік за побудованою нейромережною моделлю наведено в комірці Е17 (рис. 10.6).

	A	B	C	D	E
1	Рік	Площа посівів, тис.га	Обсяг виробництва, тис.ц	Ціна реалізації, грн./т	Неромережний прогноз обсягу виробництва
16	*2012*	*1129,3*	*15542,7*	*1562*	*13886,05*
17	*2013*				*35991,03*
18					Середня похибка
19					*1306,06*
20					

Рис. 10.6. Прогнозування обсягу виробництва зернових та зернобобових культур засобами NXL Predictor

Відповідь: створена нейромережна модель працює з середньою похибкою *1306,06* тис. ц. Прогноз обсягу виробництва зернових та зернобобових культур на Дніпропетровщині в *2013* році склав *35991,03* тис. ц, що відрізняється від фактичного врожаю обсягом *37103* тис. ц на *3*%.

10.3. Нейромережні моделі кластеризації в аграрній економіці

Комп'ютерне побудування нейронних мереж для вирішення задач кластеризації-класифікації пропонує інструментарій NXL Clusterizer, що є надбудовою програми MS Excel.

Вхідний інтерфейс інструментарію NXL Clusterizer дозволяє ідентифікувати вхідні сигнали, що групуватимуться до заданої кількості кластерів, задати початкові ваги синапсів, вигляд одномагнітних функцій активації для всіх нейронів, стартові норму та радіус навчання, обрати опуклий варіант алгоритму створення нейронної мережі, масштабувати вхідні дані за вимогами функцій активації, рис. 10.7.

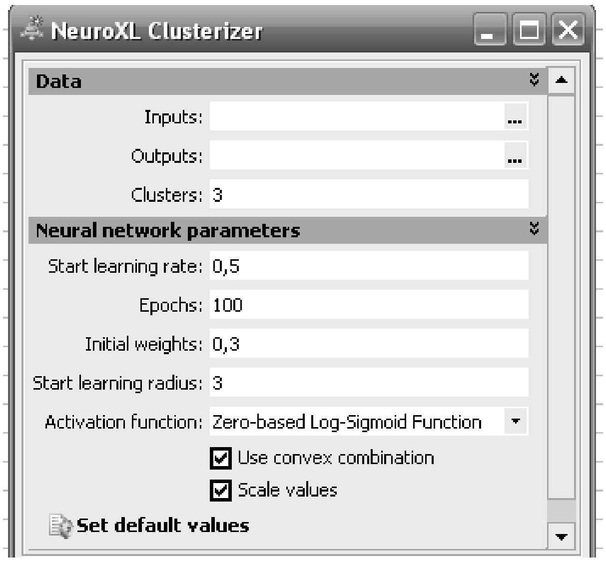


Рис. 10.7. Вхідний інтерфейс NXL Clusterizer

Вихідний інтерфейс інструментарію NXL Clusterizer включає подання діаграми ваг кластерів за кількістю включених до них записів, розрахунок середніх, мінімальних та максимальних значень за кожним показником до кожного кластеру, а також відображення діаграми зважених середніх показників кластерів відносно середніх значень по всьому вхідному масиву даних, рис. 10.8. Ітераційний процес створення нейронної мережі припиняється за вичерпуванням заданої кількості ітерацій (epochs).

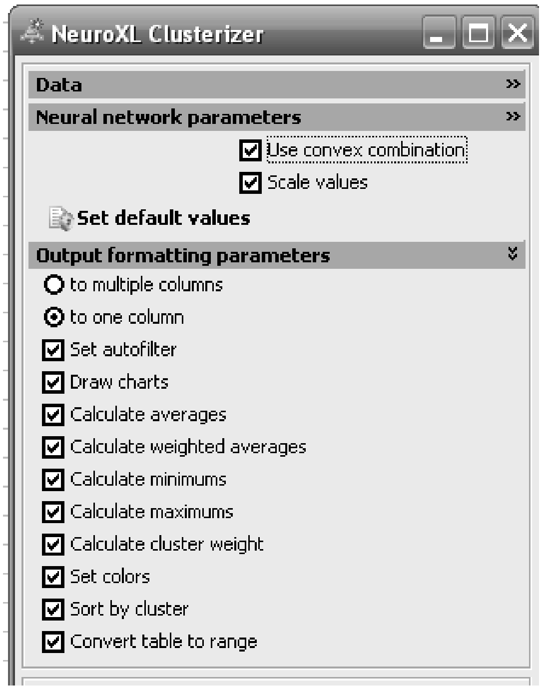


Рис. 10.8. Вихідний інтерфейс NXL Clusterizer

Приклад 10.2. Виконати кластеризацію провідних, середніх та відстаючих районів Дніпропетровської області за високим, середнім та низьким рівнем спеціалізації на виробництві кукурудзи на зерно за показниками врожайності та площею фактичного збору даної культури (табл. 10.3), застосувавши програму NXL Clusterizer.

Таблиця 10.3

Стан виробництва кукурудзи на зерно в районах Дніпропетровської області

№ п/п	Район	Урожайність, ц/га	Площа збору, тис. га
1	Апостолівський	*40,3*	*6,0*
2	Васильківський	*24,4*	*4,9*
3	Верхньодніпровський	*34,8*	*7,0*

Продовження табл. 10.3

4	Дніпропетровський	*40,4*	*9,0*
5	Криворізький	*31,7*	*4,1*
6	Криничанський	*31,1*	*11,2*
7	Магдалинівський	*47,0*	*18,4*
8	Межівський	*28,1*	*6,6*
9	Нікопольський	*27,7*	*4,3*
10	Новомосковський	*44,1*	*16,3*
11	Павлоградський	*25,1*	*6,7*
12	Петриківський	*47,7*	*6,6*
13	Петропавлівський	*14,1*	*4,2*
14	Покровський	*41,7*	*3,8*
15	П'ятихатський	*29,6*	*8,8*
16	Синельниківський	*30,7*	*27,4*
17	Солонянський	*34,0*	*12,1*
18	Софіївський	*33,5*	*3,2*
19	Томаківський	*31,5*	*5,2*
20	Царичанський	*30,7*	*12,0*
21	Широківський	*36,0*	*4,7*
22	Юріївський	*26,4*	*5,4*

Рішення. За вхідними даними з комірок C2:D23 засобами NXL Clusterizer одержано групування районів Дніпропетровщини за виробництвом кукурудзи на зерно по трьох кластерах, як показано в комірках E2:E23 на рис. 10.9. Характеристики кластерів за вагою та середніми, мінімальними і максимальними показниками наведено на рис. 10.10.

Відповідь: до кластеру високого рівня спеціалізації на виробництві кукурудзи на зерно ввійшли *13,64*% районів Дніпропетровської області з середньою врожайністю *40,6* ц/га (від *30,7* до *47* ц/га) та середньою площею збору *20,7* тис. га (від *16,3* до *27,4* тис. га). Ці показники, відповідно, на *22,26*% та *142,36*% перевищують середні обласні величини врожайності та площі збору розглянутої культури.

	A	B	C	D	E
1		Район	Урожайність, ц/га	Площа збору, тис. га	Номер кластеру
2	7	Магдалинівський	47	18,4	1
3	10	Новомосковський	44,1	16,3	1
4	16	Синельниківський	30,7	27,4	1
5	1	Апостолівський	40,3	6	2
6	3	Верхньодніпровський	34,8	7	2
7	4	Дніпропетровський	40,4	9	2
8	6	Криничанський	31,1	11,2	2
9	12	Петриківський	47,7	6,6	2
10	14	Покровський	41,7	3,8	2
11	17	Солонянський	34	12,1	2
12	18	Софіївський	33,5	3,2	2
13	20	Царичанський	30,7	12	2
14	21	Широківський	36	4,7	2
15	2	Васильківський	24,4	4,9	3
16	5	Криворізький	31,7	4,1	3
17	8	Межівський	28,1	6,6	3
18	9	Нікопольський	27,7	4,3	3
19	11	Павлоградський	25,1	6,7	3
20	13	Петропавлівський	14,1	4,2	3
21	15	П'ятихатський	29,6	8,8	3
22	19	Томаківський	31,5	5,2	3
23	22	Юріївський	26,4	5,4	3

Рис. 10.9. Групування районів за виробництвом кукурудзи на зерно інструментарієм NXL Clusterizer

	B	C	D	E
25		Урожайність, ц/га	Площа збору, тис. га	
26		40,6	20,7	**Cluster 1 average**
27		37,02	7,56	**Cluster 2 average**
28		26,51	5,58	**Cluster 3 average**
29		22,26%	142,36%	**Cluster 1 weighted average (%)**
30		11,48%	-11,48%	**Cluster 2 weighted average (%)**
31		-20,17%	-34,69%	**Cluster 3 weighted average (%)**
32		30,7	16,3	**Cluster 1 minimum**
33		30,7	3,2	**Cluster 2 minimum**
34		14,1	4,1	**Cluster 3 minimum**
35		47	27,4	**Cluster 1 maximum**
36		47,7	12,1	**Cluster 2 maximum**
37		31,7	8,8	**Cluster 3 maximum**
38			13,64%	**Cluster 1 weight (%)**
39			45,45%	**Cluster 2 weight (%)**
40			40,91%	**Cluster 3 weight (%)**

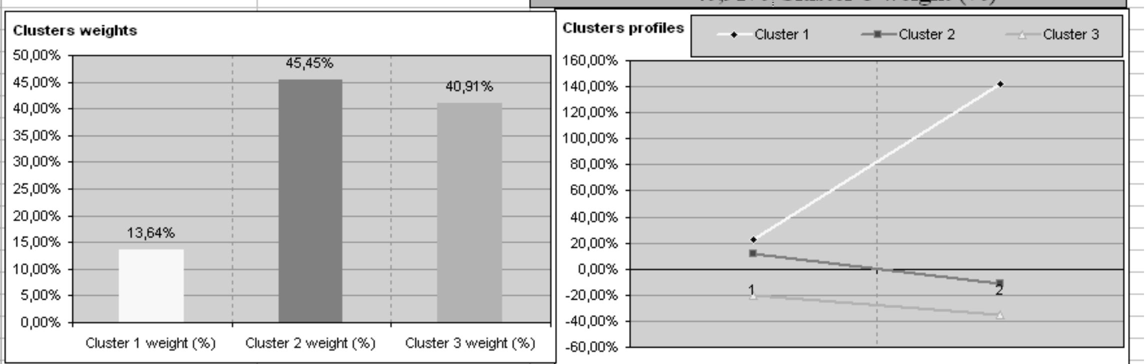


Рис. 10.10. Характеристики кластерів у ***прикладі 10.2***

До кластеру середнього рівня спеціалізації на виробництві кукурудзи на зерно ввійшли *45,45*% районів Дніпропетровської області з середньою врожайністю *37,02* ц/га (від *30,7* до *47,7* ц/га) та середньою площею збору *7,56* тис. га (від *3,2* до *12,1* тис. га). Показник середньої врожайності кластеру перевищує на *11,48*% середню обласну величину, в той час як середня площа збору кукурудзи на зерно в кластері поступається середній обласній величині на *11,48*%.

До кластеру низького рівня спеціалізації на виробництві кукурудзи на зерно ввійшли решта *40,91*% районів Дніпропетровської області з середньою врожайністю *26,51* ц/га (від *14,1* до *31,7* ц/га) та середньою площею збору *5,58* тис. га (від *4,1* до *8,8* тис. га). Ці показники є меншими, відповідно, на *20,17*% та *34,69*%, ніж середні обласні величини за врожайністю та площею збору розглянутої культури.

Питання для самоконтролю •
засвоєння матеріалу РОЗДІЛУ 10 •

1. У вирішенні яких задач застосовуються штучні нейронні мережі?
2. Як працює штучний нейрон?
3. В чому полягає процедура створення та налагодження нейронної мережі?
4. Опишіть вхідні параметри інструментарію NXL Predictor.
5. Які результати видає надбудова NXL Predictor?
6. Опишіть вхідні параметри інструментарію NXL Clusterizer.
7. Які результати видає надбудова NXL Clusterizer?

Матеріали розділу підготовлено з використанням джерел [4; 10].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Аронович А. Б. Сборник задач по исследованию операцій / А. Б. Аронович, М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. – М. : МГУ, 1997. – 256 с.
2. Браславец М. Е. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве : учеб. пособие / М. Е. Браславец, Р. Г. Кравченко. – М. : Колос, 1972. – 589 с.
3. Бех О. В. Математичне програмування : навч. посібник / О. В. Бех, Т. А. Городня, А. Ф. Щербак. – Львів : Магнолія 2006, 2007. – 200 с.
4. Васильєва Н. К. Математичні моделі інноваційного розвитку в аграрній економіці : монографія / Н. К. Васильєва. – Дніпропетровськ : РВВ ДДАУ, 2007. – 348 с.
5. Васильєва Н. К. Методи й моделі оптимізації в економіці : навч. посібник / Н. К. Васильєва. – Дніпропетровськ : РВВ ДДАУ, 2008. – 142 с.
6. Васильєва Н . К. Методичні вказівки до вивчення курсу "Дослідження операцій" / Н. К. Васильєва. – Дніпропетровськ : РВВ ДДАУ, 2008. – 72 с.
7. Вентцель Е. С. Исследование операций : задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1988. – 208 с.
8. Вітлінський В. В. Математичне програмування : навч.-метод. посібник / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – К. : КНЕУ, 2001. – 248 с.
9. Гольштейн Е. Г. Задачи линейного программирования / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. – М. : Наука, 1969. – 384 с.
10. Зайченко Ю. П. Основи проектування інтелектуальних систем : навч. посібник / Ю. П. Зайченко. – К. : Видавничий Дім "Слово", 2004. – 352 с.
11. Исследование операций в экономике : учеб. пособие / под. ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

12. Косоруков О. А. Исследование операций : учебник / О. А. Косоруков, А. В. Мищенко. – М. : Экзамен, 2003. – 448 с.
13. Костевич Л. С. Математическое программирование : Информационные технологии оптимальных решений : учеб. пособие / Л. С. Костевич. – Мн. : Новое знание, 2003. – 424 с.
14. Ржевський С. В. Дослідження операцій : підручник / С. В. Ржевський, В. М. Александрова. – К. : Академвидав, 2006. – 560 с.
15. Сибаль Я. І. Економіко-математичне моделюваня в АПК : навч. посібник / Я. І. Сибаль, З. С. Кадюк, І. Є. Іваницький. – Львів : Магнолія 2006, 2013. – 277 с.
16. Таха Х. Введение в исследование операцій / Х. Таха : пер. с англ. А. А. Минько, В. И. Тюптя. – М. : Издательский дом "Вильямс", 2001. – 912 с.
17. Томас Р. Количественные методы анализа хозяйственной деятельности / Р. Томас : пер. с англ. Б. И. Башкатов. – М. : Дело и Сервис, 1999. – 432 с.
18. Тунеев М. М. Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства : учеб. пособие / М. М. Тунеев, В. Ф. Сухоруков. – М. : Финансы и статистика, 1986. – 144 с.
19. Ульянченко О. В. Дослідження операцій в економіці : підручник / О. В. Ульянченко. – Х. : Гриф, 2002. – 580 с.
20. Чемерис А. Методи оптимізації в економіці : навч. посібник / А. Чемерис, Р. Юринець, О. Мищишин. – К. : Центр навчальної літератури, 2006. – 152 с.

Vasylieva N. K.

Economic and Mathematical Modelling in Agriculture : Text-book. – Dnipropetrovsk : Bila K. O., 2015. – 155 p.

Methods of solving of the linear programming's problems by means of OO Calc and MS Excel computer tools are considered. Examples of creating of the integer, non-linear, stochastic, dynamic programming's and multicriteria optimization's models are given. Main theoretical principles and practical approaches for solving of the agrarian economy's problems, reducing to the models of the optimal network planning, inventory, matrix games, queuing theory and artificial neural networks are presented. Questions and tasks for control of mastering of the exposed material are proposed.

This text-book is oriented to the students of the higher educational establishments, post-graduates by the economical specialties and professionals, who are interested in the problems of the economic and mathematical modelling in agriculture.

Васильева Н. К.

Экономико-математическое моделирование в сельском хозяйстве : учеб. пособие. – Днепропетровск : Белая Е.А., 2015. – 155 с.

Рассмотрены методы решения задач линейного программирования с применением компьютерного инструментария OO Calc и MS Excel. Приведены примеры создания моделей целочисленного, нелинейного, стохастического, динамического программирования и многокритериальной оптимизации. Представлены основные теоретические принципы и практические подходы к решению задач аграрной экономики, которые сводятся к моделям оптимального планирования на сетях, управления запасами, матричных игр, систем массового обслуживания, искусственных нейронных сетей. Предложены вопросы и задания для контроля усвоения изложенного материала.

Для студентов высших учебных заведений, аспирантов по экономическим специальностям и специалистов, которые интересуются проблемами экономико-математического моделирования в сельском хозяйстве.

Навчально-методичне видання

***Васильєва** Наталя Костянтинівна*

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В СІЛЬСЬКОМУ ГОСПОДАРСТВІ

Навчальний посібник

Видання друкується в авторській редакції

Відповідальний редактор *Біла К. О.*

Підписано до друку 17.04.15. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Спосіб друку – плоский.
Ум. др. арк. 10,2. Тираж 100 прим. Зам. № 0415-04.

Видавець та виготовлювач СПД Біла К. О.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 3618 від 06.11.09

Надруковано на поліграфічній базі видавця Білої К. О.
Україна, 49000, м. Дніпропетровськ, пр. К. Маркса, 111, офіс 17

Поштова адреса: Україна, 49087, м. Дніпропетровськ, п/в 87, а/с 4402

Тел.: +38 (067) 972-90-71
e-mail: conf@confcontact.com
www.confcontact.com