

УДК 519.87:502.1

Т.С. Кагадій, д.ф.-м.н., професор,  
професор кафедри вищої математики,  
НТУ Дніпровська політехніка, м. Дніпро;  
Л.Ф. Сушко, старший викладач  
кафедри вищої математики та фізики,  
ДДАЕУ, м. Дніпро;  
К.П. Косинська, студентка ДДАЕУ, м. Дніпро;  
Ю.О. Білова, студентка  
НТУ Дніпровська політехніка, м. Дніпро.

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ ОХОРОНИ ДОВКІЛЛЯ

Методами математичного моделювання розв'язано задачі про забруднення повітря на виробництві; про визначення часу витоку нафти з резервуару циліндричної форми. Отримано закон зміни кількості бактерій в залежності від часу.

Забруднення повітря, хімічне, біологічне забруднення, математичне моделювання.

Екологічна безпека складається з двох компонент – природничої та техногенної безпеки, які виступають в тісній взаємодії. Ситуація на виробництві, що існує або прогнозується, повинна забезпечувати нормальне функціонування всіх систем та збереження здоров'я людини.

Аналіз літературних джерел показує, що найбільшого поширення набули моделі, що не враховують змінної часу або використовують ймовірнісні підходи [1], [2].

В роботі розглянуто актуальні задачі математичного моделювання і прогнозування стану довкілля. Оскільки задіяно апарат звичайних диференціальних рівнянь, розв'язок є доступним і зрозумілим для студентів, залучення яких до наукових досліджень є необхідним.

Експериментальні дослідження підтверджують високий токсичний канцерогенний вплив вуглецевих сполук на людину, тому контроль над їх кількістю в повітрі на підприємстві є актуальним. Розглянемо модельну задачу про забруднення повітря на підприємстві [3].

*Задача 1.* В приміщенні цеху, що містить  $10800 \text{ м}^3$  повітря, нараховують  $0,12\%$  вуглецю. Вентилятор подає свіже повітря з концентрацією вуглецю  $0,04\%$  в кількості  $a \text{ м}^3$  за хвилину. За умови, що концентрація вуглецю в приміщенні однакова, знайти, якою повинна бути потужність вентилятора, щоб через  $10$  хвилин його роботи концентрація вуглецю не перевищувала  $0,06\%$ .

Позначимо  $x$  (%) - концентрацію вуглецю в момент часу  $t$ . Складемо баланс вуглецю, що міститься в повітрі за час  $dt$ . Протягом цього часу

потрапляє  $0,00004 \times a \, dt$ , а витікає в навколишнє середовище  $0,01x \times a \, dt \, \text{м}^3$  вуглецю. Таким чином, за  $dt$  хвилині кількість газу зменшиться на  $Dq = (0,01x - 0,00004) \times a \, dt \, \text{м}^3$ . З іншої сторони,  $dq = -10800 \times 0,01 dx \, \text{м}^3$  (знак «-» обрано тому, що  $dx < 0$ ).

Отримаємо диференціальне рівняння [4]:

$$(0,01x - 0,00004) \times a \, dt = -10800 \times 0,01 dx.$$

Після відокремлювання змінних рівняння має вигляд:

$$-\frac{adt}{10800} = \frac{dx}{x - 0,04}.$$

Звідси, після інтегрування обох частин рівняння:

$$x - 0,04 = ce^{-\frac{at}{10800}}.$$

З умови  $x|_{t=0} = 0,12$  отримаємо значення сталої  $c = 0,08$ . Щоб визначити потужність вентилятора  $a$ , приймаємо  $x = 0,06$  і  $t = 10$ , що дає нам співвідношення

$$0,02 = 0,08 \times e^{-\frac{a}{10800}}.$$

Звідси:

$$e^{-\frac{a}{10800}} = \frac{1}{4} \text{ та } a = 1080 \times \ln 4 \approx 1500 \, \text{м}^3/\text{хв}.$$

Існування біосфери і людини завжди було побудовано на використанні водних ресурсів. Збільшення технологічного навантаження викликає забруднення води [5]. Розрізняють хімічні, біологічні та фізичні забруднювачі. Серед хімічних найбільш поширеним є нафта і нафтопродукти. В роботі розв'язано задачу про визначення часу витоку нафти з резервуара циліндричної форми та отримано закон зміни кількості бактерій в залежності від часу.

**Задача 2.** Циліндричний резервуар висотою  $H$  і діаметром  $D$  наповнений нафтою. Обчислити час, за який витече вся нафта через круглий отвір радіусом  $a$ , розміщений в дні резервуара.

Площа поперечного перерізу резервуара  $x = \frac{\pi D^2}{4}$ , площа отвору  $\omega = \frac{\pi a^2}{4}$ .

Кількість рідини, що витікає з резервуара за час  $dt$ , можна обчислити як об'єм циліндра с площею основи цього резервуара. Рідина витікає зі швидкістю  $v$ , що залежить від  $h$ , тобто:

$$dv = \frac{\pi a^2}{4} \cdot v(h) \cdot dt.$$

Цей самий об'єм можна обчислити інакше. Рівень рідини зменшується на  $dh$ , тому

$$dv = -\frac{\pi D^2}{4} dh.$$

Звідси отримаємо рівняння

$$\frac{\pi a^2}{4} v(h) dt = -\frac{\pi D^2}{4} dh.$$

За законом Торрічеллі

$$v(h) = \mu \sqrt{2gh},$$

де  $g$  - прискорення вільного падіння,  $\mu$  - коефіцієнт витрат.

Тоді останнє рівняння має вигляд:

$$a^2 \mu \sqrt{2gh} \cdot dt = -D^2 dh.$$

Розв'язуючи це рівняння, дістанемо вираз:

$$\left(\frac{a}{D}\right)^2 \mu \cdot t + c = -2 \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{h}.$$

За умови задачі. в період часу  $t=0$ ,  $h=H$ . Звідси:

$$c = \frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}.$$

Таким чином

$$\left(\frac{a}{D}\right)^2 \mu \cdot t = (2\sqrt{H} - 2\sqrt{h}) \frac{1}{\sqrt{2g}}.$$

Час, за який витече вся вода

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{D}{a}\right)^2.$$

*Задача 3.* Деякі бактерії розмножуються пропорційно їх початковій кількості, але в той же час необхідно враховувати, що вони виробляють токсини, що впливають на загальну кількість самих бактерій. Припустимо, що швидкість розмноження бактерій пропорційна за мультиплікативним принципом кількості бактерій та токсинів. В той же час швидкість утворення токсинів пропорційна кількості бактерій, які вже існують. Знайти закон зміни кількості бактерій в залежності від часу.

Позначимо кількість бактерій  $N$ . Відповідно умові задачі складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = k_1 N x \\ \frac{dx}{dt} = k_2 N \end{cases},$$

де  $x$  - кількість токсинів,  $\frac{dN}{dt}$  - швидкість розмноження бактерій,  $\frac{dx}{dt}$  - швидкість формування токсинів,  $k$ ,  $k_1, k_2$  - коефіцієнти пропорційності [4].

Розв'язуючи систему диференціальних рівнянь, отримаємо:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{k}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} x \Rightarrow N = \frac{k}{k_2} x - \frac{k_1}{2k_2} x^2 + c_1;$$

$c_1 = 0$ , якщо  $N|_{x=0} = 0$ . Тоді

$$N = ax - bx^2, a = \frac{k}{k_2}, b = \frac{k_1}{2k_2} \Rightarrow N_{max} = M = \frac{a^2}{4b} = \frac{k^2}{2k_1k_2}$$

Це – рівняння зв'язку між кількістю бактерій та кількістю токсинів.

Далі необхідно знайти залежність кількості бактерій від часу. Для цього перетворимо останнє рівняння о вигляду:

$$bx^2 - ax + N = 0 .$$

Розв'яжемо це рівняння відносно  $x$  :

$$x = \frac{a}{2b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{N}{b}} .$$

З урахуванням останнього, після інтегрування першого рівняння системи, отримаємо шуканий результат:

$$N = \frac{M}{ch^2 \frac{kt}{2}} .$$

Одним з напрямів інноваційних методів викладання є доведення до студентів практичних застосувань теоретичного матеріалу і розвиток відповідних практичних навичок. Тому будь-який розділ математики, що вивчається, має бути проілюстрований, як мінімум, модельними задачами. Наведені в роботі постановки задач та їх розв'язки мають наукову новизну, але водночас достатньо наочні та зрозумілі. Це має спонукати студентів активніше займатися науковими дослідженнями.

#### Список джерел

1. Бараннік В. О. Конспект лекцій з дисципліни «Моделювання та прогнозування стану довкілля» / В. О. Бараннік ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 46 с.
2. Бараннік В. О. Моделювання і прогнозування стану довкілля : навч. посіб. / В. О. Бараннік. – Харків : ХНАМГ, 2007. – 85 с.
3. Маценко В.Г. Математичне моделювання: навчальний посібник / В.Г. Маценко. – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2014. – 519с.
4. Самойленко А.М. та ін. Диференціальні рівняння. Підручник / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк – 2-ге вид перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – 600с.
5. Стан підземних вод України. Щорічник. – К.: ДНВП «ГЕОІНФОРМ України», 2018. – 122с.