

**Цоцко В.І.**

*Дніпровський державний аграрно-економічний університет*

**ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ  
В КОНТЕКСТІ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ**

Пошук нових підходів до вирішення завдань досягнення необхідних фізичних властивостей поверхневого шару металу в контексті ресурсозберігаючих технологій повинен опиратися на чітко визначене температурне поле вказаного шару, яке формується під час енергетичної дії на поверхню металу, а також сумісним з нею впливом потоків насичуючих елементів. Для того щоб контролювати процес теплопередачі та споріднені з ним явища дифузійного насичення і явища перенесення взагалі, потрібно мати визначену інформацію про локальні значення температури та її часові зміни. При реалізації поставлених задач шляхом математичного моделювання виникає проблема вибору оптимального методу для досягнення поставленої мети.

Так, моделювання нестационарного температурного поля на одновимірному зразку заданого металу у фазах нагрівання (1) та охолодження (2) поверхні дало наступні результати [1]:

$$v(x,t) = \frac{2bl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t \right] - 1 \right\} \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} x \right); \quad (1)$$

де  $v(x,t)$  – функція температурного відхилення від рівноважного розподілу температури у зразку при нагрівання,  $t$  – час процесу,  $l$  – довжина зразка у напрямку “ $x$ ”,  $b$  – швидкість нагрівання активної поверхні зразка,  $a^2$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу;

$$w(x,t) = \frac{2bl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t_0 \right] - 1 \right\} \exp \left[ - \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t \right] \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} x \right); \quad (2)$$

$$z(x,t) = \frac{2cl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t \right] \right\} \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} x \right), \quad (3)$$

де  $w(x,t)+z(x,t)$  – функція температурного відхилення від рівноважного розподілу температури у зразку при охолодженні,  $t$  – час процесу,  $t_0$  – інтервал

часу нагрівання,  $c$  – швидкість охолодження активної поверхні зразка Функція  $w(x,t)$  - компонент внутрішньої післядії, що залежить від початкового розподілу температури в процесі нагрівання,  $z(x,t)$  - компонент зовнішнього впливу, що визначається термічною дією на активну поверхню моделі.

Для вирішення поставленої задачі було застосовано метод розподілу змінних, який призводив до розв'язку у вигляді ряду Фур'є [2, с. 200-219]. Дана схема розв'язку задач теплопровідності не завжди зручна, що визначається видом рівноважної функції, від якої шукається відхилення.

В контексті імпульсної енергетичної дії на оброблювану поверхню металу апробовувалась можливість поверхневого легування в процесі лиття. При дослідженні поверхневого легування виливків було проведене моделювання кристалізації поверхневого шару виливок з метою керування та оптимізації процесами структуроутворення і формування необхідних фізичних властивостей шару [3].

У випадку спрощеної одновимірної моделі поставлена задача (задача Стефана або задача про фазовий перехід) була розв'язана стандартним методом подібності, який призводив до знаходження трансцендентного рівняння відносно параметра швидкості кристалізації  $\alpha$ :

$$\frac{k_1 c_c \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}\right)}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2 c_p \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}\right)}{a_2 \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda \rho \alpha, \quad (4)$$

в яке входять коефіцієнти температуропровідності  $a_1$  і  $a_2$ , теплопровідності  $k_1$  і  $k_2$  твердої та рідкої фаз, а також додаткові температурні умови  $c_c$  і  $c_p$  обробки,  $\Phi(s)$  – інтеграл похибок.

Перехід до реальної (циліндричної) моделі системи привів до неможливості застосування методу подібності для вирішення поставленої задачі. Неприйнятність методу пов'язується з асиметрією, неоднорідністю системи відносно єдиної змінної  $z = \frac{r}{2\sqrt{t}}$ , вираженій через радіальну координату

$r$  та час  $t$ . На відміну від початкових умов, перетворенням подібності не відповідають граничні умови.

Для вирішення поставленої задачі було застосовано чисельний метод - метод кінцевих різниць за неявною схемою обчислення. [2, с. 557] або схему з випередженням, як стійку схему при довільних часових  $\tau$  і просторових  $h$  кроків, на відміну від явної схеми, стійкої лише при певному співвідношенні між ними [2, с. 611]. Неявні схеми для рівняння теплопровідності приводять до системи алгебраїчних рівнянь, для знаходження розв'язку яких крім звичайних методів лінійної алгебри або методів ітерацій можна застосувати найбільш економічний метод - метод прогонки або метод факторизації [2, с. 591], який враховує спеціальний вигляд матриці системи різницевого рівняння. Методом зворотної прогонки, коли опорною температурою вибиралась не температура розплаву, а осьова температура форми (ливарного стрижня), було розраховано параметр швидкості кристалізації  $\alpha$ , який визначає переміщення кристалізаційного фронту  $\Delta r$  (мм) в залежності від часу процесу  $t$  (с):

$$\Delta r = \alpha \cdot t^\beta, \quad (5)$$

де показник ступеня  $\beta = 0,623$ . Чисельний розрахунок параметра швидкості кристалізації  $\alpha$  дав наступні значення  $\alpha$ :  $\alpha = 0,149$ , що суттєво відрізнялось від його значення у випадку одновимірної моделі ( $0,216 \text{ мм/с}^{1/2}$ ).

Висновок. Оптимізація моделювання нестационарного температурного поля поверхневого шару твердо фазного матеріалу при енергетичній дії на поверхню досягається в результаті поєднання та доповнення одне одного аналітичного та чисельного методів дослідження.

[1] Цоцко В.І. Розподіл температури одновимірного зразка в умовах місцевої термообробки./ В.І. Цоцко, І.М. Спиридонова, Б.Г. Пелешенко // Фізика і хімія твердого тіла. Т. 9, № 1 (2008). С. 181-184.

[2] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. 736 с.

[3] Рядно А.А. Численно-аналитическое определение скорости кристаллизации расплава в условиях осевой симметрии на примере проушин отливок траков./ А.А. Рядно, В.И. Цоцко, Б.И. Пелешенко // Математичне моделювання. Дніпродзержинський державний технічний університет. 2008. 2 (19). С. 22-25.