

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МАЛОГО ПАРАМЕТРУ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

При побудові моделей складних задач теорії пружності і в'язкопружності доводиться вдаватися до спрощення дозвільних систем рівнянь. Одним з ефективних підходів є методи малих параметрів [1]. У даній роботі описаний метод збурень коли малий параметр являє собою відношення характеристик жорсткості. Початкові ідеї методу викладені в [2]. У даній роботі метод узагальнено на випадок просторових задач лінійної теорії в'язкопружності. Вдалося не просто розщепити напружено-деформований стан на три складові з різними властивостями, але і зберегти зв'язок між цими станами, що підвищує якість математичної моделі і наближає її до реальної задачі. Для демонстрації ефективності роботи даного методу наведено розв'язання модельної задачі для в'язкопружного ортотропного тіла з циліндричною анізотропією.

Ключові слова: асимптотичний метод, метод малого параметра, ортотропний матеріал, в'язкопружність, циліндрична анізотропія, модельна задача

Т.С. КАГАДИЙ
 НТУ Дніпровська політехніка
 О.В. БЕЛОВА, І.В. ЩЕРБИНА
 Национальная металлургическая академия Украины

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЯЗКОПРУГОСТИ

При построении моделей сложных задач теории упругости и вязкоупругости приходится прибегать к упрощению разрешающих систем уравнений. Одним из эффективных подходов являются методы малых параметров [1]. В данной работе описан метод возмущений когда малый параметр представляет собой отношение жесткостных характеристик. Первоначальные идеи метода изложены в [2]. В данной работе метод обобщен на случай пространственных задач линейной теории вязкоупругости. Удалось не просто расщепить напряженно-деформированное состояние на три составляющие с различными свойствами, но и сохранить связь между этими состояниями, что повышает качество математической модели и приближает ее к реальной задаче. Для демонстрации эффективности работы данного метода приведено решение модельной задачи для вязкоупругого ортотропного тела с цилиндрической анизотропией.

Ключевые слова: асимптотический метод, метод малого параметра, ортотропный материал, вязкоупругость, цилиндрическая анизотропия, модельная задача

T.S.KAGADIY
 NTU Dnieper Polytechnic
 O.V. BELOVA, I.V. SHCERBINA,
 National Metallurgical Academy Ukraine

APPLICATION OF A METHOD OF SMALL PARAMETER AT MODELLING PROBLEMS OF THE THEORY VISCOELASTICITY

At construction of models of challenges of the theory of an elasticity and viscoelasticity is necessary to resort to simplification of resolving set of equations. One of effective approaches is method of small parameters [1]. In the given work the method of perturbations is described when the small parameter represents the ration stiff performances. Initial ideas of a method are stated in [2]. In the given work the method is generalized on a case of spatial problems of the linear theory viscoelasticity. It was possible to split not simply the intense-deformed condition on three components with various properties, but also to keep connection between these conditions that raise quality of mathematical model and approximates it to a real problem. For demonstrating an overall performance of the given method the solution of a modelling problem for a viscoelastic orthotropic skew field with cylindrical anisotropy is reduced. At mathematical modelling the intense-deformed condition of viscoelastic skew fields with switch connections or battening plates it is possible to use various methods, both analytical, and numerical (for example, a finite element method). To shortages of numerical methods it is possible to refer complexities in view of strong anisotropy of a material. At a solution of a problem

an asymptotic method applied by authors nuances of a select of small parameter give a boomerang effect. The more strongly anisotropy of a material, the more precisely received solutions. Earlier the given method has been applied to a solution of contact problems about a load transmission from elastic switch connections to elastic plates with curvilinear anisotropy.

The analysis of the differential equations of the spatial theory viscoelasticity an orthotropic skew field is lead. The intense-deformed condition of such skew field is split on three components with various properties which are connected through boundary conditions on shearing stresses. The solution of an initial problem is in the form of superposition of components.

The possibility of a statement of boundary conditions for searching trial functions that reduces a solution of a spatial problem of the theory viscoelasticity to sequentially solved boundary value problems of a potential theory is shown.

As the received solutions represent transforms of Laplace the method of returning to pre-images by means of two-point approximant Pade and limit representations of required magnitudes is offered. Effectiveness of such approach is shown on a modelling problem.

Keywords: asymptotic method, orthotropic material, viscoelasticity, rectilinear anisotropy, cylindrical anisotropy, modelling problem

Розглянемо в'язкопружне тіло, матеріал якого є ортотропним щодо як пружних, так і в'язкопружних властивостей. Головні напрямки анізотропії збігаються з декартовими осями координат x, y, z . Співвідношення між деформаціями і напруженнями в цьому випадку можуть бути записані таким чином:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{1}{E_1} \left(\sigma_{11} + \int_0^t K_{11}(t-r) \sigma_{11} dr \right) - \nu_{12} \frac{1}{E_2} \left(\sigma_{22} + \int_0^t K_{12}(t-r) \sigma_{22} dr \right) - \frac{\nu_{13}}{E_3} \left(\sigma_{33} + \int_0^t K_{13}(t-r) \sigma_{33} dr \right) \\
 e_{22} &= -\frac{\nu_{21}}{E_1} \left(\sigma_{11} + \int_0^t K_{21}(t-r) \sigma_{11} dr \right) + \frac{1}{E_2} \left(\sigma_{22} + \int_0^t K_{22}(t-r) \sigma_{22} dr \right) - \frac{\nu_{23}}{E_3} \left(\sigma_{33} + \int_0^t K_{23}(t-r) \sigma_{33} dr \right), \\
 e_{33} &= -\frac{\nu_{31}}{E_1} \left(\sigma_{11} + \int_0^t K_{31}(t-r) \sigma_{11} dr \right) - \frac{\nu_{32}}{E_2} \left(\sigma_{22} + \int_0^t K_{32}(t-r) \sigma_{22} dr \right) + \frac{1}{E_3} \left(\sigma_{33} + \int_0^t K_{33}(t-r) \sigma_{33} dr \right), \\
 e_{23} &= \frac{1}{G_{23}} \left(\sigma_{23} + \int_0^t K_1(t-r) \sigma_{23} dr \right), \quad e_{13} = \frac{1}{G_{13}} \left(\sigma_{13} + \int_0^t K_2(t-r) \sigma_{13} dr \right), \\
 e_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \left(\sigma_{12} + \int_0^t K_3(t-r) \sigma_{12} dr \right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

При цьому $\nu_{12}E_1 = \nu_{21}E_2, \nu_{23}E_2 = \nu_{32}E_3, \nu_{31}E_3 = \nu_{13}E_1,$
 $K_{12} = K_{21}, K_{23} = K_{32}, K_{31} = K_{13}.$

Тут $E_1, E_2, E_3 (G)$ - миттєві модулі пружності (зсуву), ν_{ij} - коефіцієнти Пуассона, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ - нормальні напруження, $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$ - дотичні напруження, $K_{ij}(t-r)$ - ядра повзучості, t -час. Для апроксимації ядер повзучості використовуються наступні аналітичні вирази [2]:

$$\begin{aligned}
 K_{ij}(t-r) &= k_{ij}(t-r)^{\alpha_{ij}-1} \exp[-\beta_{ij}(t-r)] \\
 K_i(t-r) &= k_i(t-r)^{\alpha_i^*-1} \exp[-\beta_i^*(t-r)] \quad (0 < \alpha_{ij}, \alpha_i^* \leq 1)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Компоненти тензора деформацій $e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{23}, e_{13}, e_{12}$ виражаються через проєкції вектора переміщень за формулами :

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad e_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Застосовуючи перетворення Лапласа за часом з параметром p до співвідношень (1) і розв'язуючи їх щодо трансформант напружень, отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= E_1 E_{11}(p) \left[\tilde{e}_{11} + \nu_{12} F_{12}(p) \tilde{e}_{22} + \nu_{13} F_{13}(p) \tilde{e}_{33} \right], \\ \tilde{\sigma}_{22} &= E_2 E_{22}(p) \left[\nu_{21} F_{21}(p) \tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{22} + \nu_{23} F_{23}(p) \tilde{e}_{33} \right], \\ \tilde{\sigma}_{33} &= E_3 E_{33}(p) \left[\nu_{31} F_{31}(p) \tilde{e}_{11} + \nu_{32} F_{32}(p) \tilde{e}_{22} + \tilde{e}_{33} \right], \\ \tilde{\sigma}_{23} &= G_{23} F_1(p) \tilde{e}_{23}, \quad \tilde{\sigma}_{13} = G_{13} F_2(p) \tilde{e}_{13}, \quad \tilde{\sigma}_{12} = G_{12} F_3(p) \tilde{e}_{12}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$F_{ii}(p) = \frac{1}{1 + f_{ii}(p)}, \quad F_{ij}(p) = \frac{1 + f_{ij}(p)}{1 + f_{jj}(p)}, \quad F_i(p) = \frac{1}{1 + f_i(p)}, \quad (i=1,2,3),$$

$$f_{ij}(p) = k_{ij} \Gamma(\alpha_{ij}) (p + \beta_{ij})^{-\alpha_{ij}}, \quad f_i(p) = k_i \Gamma(\alpha_i^*) (p + \beta_i^*)^{-\alpha_i^*}, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Тепер питання про напружено-деформований стан тривимірного в'язкопружного ортотропного тіла може бути зведено до інтегрування рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{xx} + \varepsilon \tilde{u}_{yy} + \varepsilon l_1 \tilde{u}_{zz} + \varepsilon m \tilde{v}_{xy} + \varepsilon m_1 l_1 \tilde{w}_{xz} &= 0, \\ \varepsilon \tilde{v}_{xx} + q \tilde{v}_{yy} + \varepsilon l_2 \tilde{v}_{zz} + \varepsilon m_2 \tilde{u}_{xy} + \varepsilon m_3 l_2 \tilde{w}_{yz} &= 0, \\ \varepsilon l_1 \tilde{w}_{xx} + \varepsilon l_2 \tilde{w}_{yy} + q_1 \tilde{w}_{zz} + \varepsilon m_4 l_1 \tilde{u}_{xz} + \varepsilon m_5 l_2 \tilde{v}_{yz} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$q = \frac{E_2 F_{22}(p)}{E_1 F_{11}(p)}, \quad q_1 = \frac{E_3 F_{33}(p)}{E_1 F_{11}(p)}, \quad \varepsilon = \varepsilon^* \frac{F_3(p)}{F_{11}(p)}, \quad \varepsilon^* = \frac{G_{12}}{E_1}.$$

$$l_2 = \frac{G_{23} F_1(p)}{G_{12} F_3(p)}, \quad l_1 = \frac{G_{13} F_2(p)}{G_{12} F_3(p)}, \quad m = 1 + \mu, \quad m_i = 1 + \mu_i,$$

$$\mu = \nu_{12} \varepsilon^{-1} F_{12}(p), \quad \mu_1 = \nu_3 F_{13}(p) (\varepsilon l_1)^{-1}, \quad \mu_2 = \nu_{21} F_{21}(p) q \varepsilon^{-1},$$

$$\mu_3 = \nu_{23} F_{23}(p) q (\varepsilon l_2)^{-1}, \quad \mu_4 = \nu_{31} F_{31}(p) q_1 (\varepsilon l_1)^{-1}, \quad \mu_5 = \nu_{32} F_{32}(p) q_1 (\varepsilon l_2)^{-1},$$

за відповідними граничними умовами.

Тут і далі індекси x, y, z позначають диференціювання за відповідними координатами, а тильда над буквами визначає трансформанти Лапласа. Передбачається, що коефіцієнти Пуассона досить малі і нехтується їх творами.

Рівняння (5) аналогічні рівнянням рівноваги в переміщеннях пружного ортотропного тіла і при асимптотичному аналізі цих рівнянь слід вибрати малий параметр. Таким параметром може служити величина ε^* , оскільки для реальних ортотропних матеріалів це відношення дійсно є малим. Але якщо параметр перетворення Лапласа p не збігається з нулями або полюсами функції, то в якості малого параметра може бути обрана величина, ε оскільки при цьому відношення $F_3(p)/F_{11}(p)$ не перевищує одиниці.

Відзначимо, що знайдений розв'язок є трансформанти Лапласа і залишається ще задача знаходження оригіналів. Для малих і великих значень часу оригінали можуть бути побудовані досить просто в явному вигляді

$$\Omega(t) = a_0 + a_1 t + \dots \quad (t \rightarrow 0), \quad (6)$$

$$\Omega(t) = b_0 + b_1 e^{-\beta t} + \dots \quad (t \rightarrow \infty) \quad (7)$$

Однак при цьому залишаються невідомими області малих і великих часів, а також розв'язки, які слід використовувати при довільних значеннях часу. "Гранична" інформація (7), (8) дозволяє судити про поведінку відповідних функцій при будь-яких значеннях часу, якщо використовувати двоточкову апроксиманту Паде [3]. Це функція вигляду

$$T(t) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 e^{\beta t} + \dots}{\delta_0 + \gamma_1 t + \delta_1 e^{\beta t} + \dots} \quad (8)$$

Коефіцієнти в (8) знаходяться з точністю до загального множника (покладемо для визначеності $\delta_0 = 1$) і з умов, що при розкладанні в ряди функції (9) при $t \rightarrow 0$ і $t \rightarrow \infty$ виходили б асимптотичні вирази (6), (7), тобто

при $t \rightarrow 0$

$$a_0 + a_1 t = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 e^{\beta t}}{1 + \gamma_1 t + \delta_1 e^{\beta t}}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} T(t) = \frac{\alpha_0 + \beta_1}{1 + \delta_1} = a_0,$$

при $t \rightarrow \infty$

$$b_0 + b_1 e^{-\beta t} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 e^{\beta t}}{1 + \gamma_1 t + \delta_1 e^{\beta t}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \frac{\beta_1}{\delta_1} = b_0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях t і $e^{\beta t}$ отримуємо значення коефіцієнтів $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, що входять в формулу (8).

Запропонований метод може бути застосований для розв'язання осесиметричних задач в яких матеріал тіл є в'язкопружним з циліндричною анізотропією. Як модельну розглянемо задачу про дію зосередженої сили на кордон в'язкопружного ортотропного напівнескінченного тіла з циліндричною анізотропією, обмеженого площиною $z = 0$ (вісь z спрямована всередину тіла).

Сила прикладена на початку координат, дорівнює P_0 при $t \geq 0$ (при $t < 0$ сила відсутня) і спрямована уздовж осі Oz . При цьому граничні умови будуть наступними:

$$\sigma_{33} = -\frac{P_0 \delta(r)}{2\pi}, \quad \sigma_{13} = 0 \quad (z = 0)$$

Тут $\delta(r)$ - функція Дірака. Передбачається, що матеріал тіла має переважно зсувну повзучість.

Використовуючи описаний вище підхід, отримаємо розв'язок у формі ряду за ступенями параметра ε

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)} + \varepsilon \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} + o(\varepsilon^2) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (9)$$

де

$$\tilde{\sigma}_{11}^{(0)} = E_1 \varepsilon^{1/2} \frac{\partial U^{2,0}}{\partial r} = -\frac{P_0}{2\pi p} \left(\frac{\zeta_2^3 + 2\zeta_2 r^2 - r^2 (\zeta_2^2 + r^2)^{3/2}}{r^2 (\zeta_2^2 + r^2)^{3/2}} \right),$$

$$\tilde{\sigma}_{22}^{(0)} = E_1 \varepsilon^{1/2} \frac{U^{2,0}}{r} = -\frac{P_0}{2\pi p} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\zeta_2}{r^2 \sqrt{\zeta_2^2 + r^2}} \right), \quad \tilde{\sigma}_{33}^{(0)} = E_1 \varepsilon^{1/2} \frac{\partial W^{1,0}}{\partial \zeta_1} = -\frac{P_0}{2\pi p} \frac{\zeta_1}{(\zeta_1^2 + r^2)^{3/2}},$$

$$\tilde{\sigma}_{13}^{(0)} = E \varepsilon \left(\frac{\partial W^{1,0}}{\partial r} + \frac{\partial U^{2,0}}{\partial \zeta_2} \right) = -\frac{P_0 \varepsilon^{1/2}}{2\pi p} \left(\frac{r}{(\zeta_1^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{r}{(\zeta_1^2 + r^2)^{3/2}} \right) = 0,$$

$$\tilde{\sigma}_{11}^{(2)} = E_1 \varepsilon^{1/2} \left(\frac{\partial U^{1,0}}{\partial r} + \mu \left(\frac{U^{2,0}}{r} + \frac{\partial W^{1,0}}{\partial \zeta_1} \right) \right), \quad \tilde{\sigma}_{22}^{(2)} = E_1 \varepsilon^{1/2} \left(\frac{U^{1,0}}{r} + \mu \left(\frac{\partial U^{2,0}}{\partial r} + \frac{\partial W^{1,0}}{\partial \zeta_1} \right) \right),$$

$$\tilde{\sigma}_{33}^{(2)} = E_1 \varepsilon^{1/2} \left(\frac{\partial W^{2,0}}{\partial \zeta_2} + \mu \left(\frac{\partial U^{2,0}}{\partial r} + \frac{U^{2,0}}{r} \right) \right), \quad \tilde{\sigma}_{13}^{(2)} = 0,$$

$$W^{1,0} = \frac{E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} P_0}{2\pi p} \frac{1}{\sqrt{\zeta_1^2 + r^2}}, \quad U^{1,0} = \frac{E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} P_0}{2\pi p} \frac{\zeta_1}{r \sqrt{r^2 + \zeta_1^2}},$$

$$U^{2,0} = \frac{E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} P_0}{2\pi p} \left(\frac{1}{r} - \frac{\zeta_2}{r \sqrt{\zeta_2^2 + r^2}} \right), \quad W^{2,0} = \frac{m E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} P_0}{2\pi p} \frac{1}{\sqrt{\zeta_2^2 + r^2}}.$$

При цьому знаходження розв'язків для більш високих наближень є завданням тих же труднощів, що і в нульовому наближенні

Зокрема, для $\tilde{\sigma}_{33}$ подання (9) записується таким чином:

$$\tilde{\sigma}_{33} = -\frac{P_0}{2\pi p} \left[\frac{\zeta_1}{(\zeta_1^2 + r^2)^{3/2}} - \varepsilon \frac{\zeta_2}{(\zeta_2^2 + r^2)^{3/2}} + 0 \left(\varepsilon^2 \right) \right] \quad (10)$$

Зворотне перетворення Лапласа визначає напруження як функцію координат і часу. У разі, коли матеріал тіла має переважно зсувною повзучістю

$$\alpha = 1 \quad F(p) = (p + \beta) / (p + \beta + k), \quad \varepsilon = \varepsilon_1 F(p)$$

На лінії дії сили ($r = 0$) вираз (10) набуває вигляду

$$\tilde{\sigma}_{33} = -\frac{P_0}{2\pi} \frac{E_1}{G} \frac{1}{z^2} \left[\frac{p + \beta + k}{p + (p + \beta)} - \left(\frac{G}{E_1} \right)^3 \frac{(p + \beta)^2}{p(p + \beta + k)^2} \right] \quad (11)$$

Застосовуючи до останнього висловом зворотне перетворення Лапласа отримаємо

$$\sigma_{33} = -\frac{P_0}{2\pi} \frac{E_1}{G} \frac{1}{z^2} \left\{ 1 + \frac{k}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) - \left(\frac{G}{E_1} \right)^3 \left[\left(\frac{\beta}{\beta + k} \right)^2 + \left(-\frac{k^2}{\beta + k} t + \frac{(\beta + k)^2 - \beta^2}{(\beta + k)^2} \right) e^{-(\beta + k)t} \right] \right\}$$

У більш складних задачах знаходження оригіналів викликає значні труднощі. Однак для "малих" і "великих" часів оригінали знаходяться досить просто, якщо трансформанти уявити в формі рядів за малим параметром $\bar{\varepsilon}$

$$\tilde{T}(p) = (d_0 + d_1 \bar{\varepsilon} + d_2 \bar{\varepsilon}^2 + \dots) / p \quad (12)$$

Для матеріалу з переважно зсувною повзучістю при великих значеннях параметра (що відповідає малим значенням часу t) $\bar{\varepsilon} = k / (p + \beta)$, а при малих p (що відповідає великим значенням часу) $\bar{\varepsilon} = \Delta p / (p + \beta)$, $\Delta = -k / (\beta + k)$. Тоді при $t \rightarrow 0$ вираз (11) може бути записано у вигляді

$$\tilde{\sigma}_{33} = -\frac{P_0}{2\pi} \frac{E_1}{G_1} \frac{1}{z^2} \frac{1}{p} \left[1 + \bar{\varepsilon} - \left(\frac{G}{E_1} \right) \frac{1}{(1 + \bar{\varepsilon})^2} \right]$$

Переходячи до оригіналів, отримаємо розкладання для функції

$$\sigma_{33}^* = -\sigma_{33} 2\pi G z^2 / P_0 E_1 \sigma_{33}^* = 1 - \left(\frac{g}{E_1} \right)^3 + k \left(1 + 2 \left(\frac{G}{E_1} \right)^3 \right) t \quad (t \rightarrow 0) \quad (13)$$

При великих значеннях t (11) набуває вигляду

$$\tilde{\sigma}_{33} = -\frac{P_0 E_1}{2\pi G} \frac{1}{z^2} \frac{1}{p} \left[\frac{k+\beta}{\beta} \left(1 + \bar{\varepsilon} - \left(\frac{G}{E_1} \right)^3 \left(\frac{\beta}{k+\beta} \right)^2 \frac{1}{(1+\bar{\varepsilon})^2} \right) \right]$$

Тоді розкладання для оригіналів записується в такий спосіб

$$\sigma_{33}^* = \frac{\beta+k}{\beta} - \left(\frac{G}{E_1} \right) \left(\frac{\beta}{\beta+k} \right)^2 - \frac{k}{k+\beta} \left[\frac{\beta+k}{\beta} + 2 \left(\frac{G}{E_1} \right) \left(\frac{\beta}{\beta+k} \right)^2 \right] e^{-\beta t} \quad (14)$$

На рисунках 1а) і 1б) показана зміна напруження на лінії дії сили при $k=3, \beta=1$ (рис.1а)); $k=2,5; \beta=0,5$ (рис.1б)).

Криві 1, 2 побудовані відповідно за формулами (13), (14) для малих і великих значень часу, крива 3 отримана в результаті зрощування граничних розкладів за допомогою апроксиманти Паде. Відзначимо, що точні за часом значення напружень σ_{33}^* , повністю збігаються з обчисленими Паде-апроксимаціями. Це ще раз доводить, що апроксиманта Паде дозволяє ефективно будувати розв'язки задачі при довільних значеннях часу, якщо відомі граничні розкладання шуканих функцій.

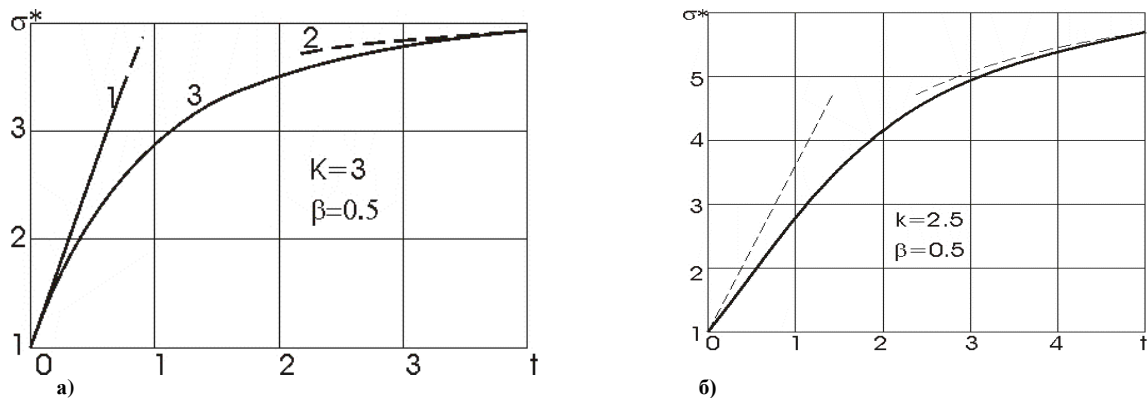


Рис. 1. Зміна нормального напруження

Висновки.

Проведено аналіз диференціальних рівнянь просторової теорії в'язкопружності ортотропного тіла. Напружено-деформований стан такого тіла розщеплюється на три складові з різними властивостями, які пов'язані через граничні умови за дотичними напруженнями. Розв'язок вихідної задачі знаходиться в вигляді суперпозиції складових.

Показана можливість формулювання граничних умов для відшукування основних функцій, що зводить розв'язок просторової задачі теорії в'язкопружності до крайових задач теорії потенціалу що послідовно розв'язуються.

Оскільки отримані розв'язки є трансформантами Лапласа, то запропоновано метод повернення до оригіналів за допомогою двухточкової апроксиманти Паде та граничних уявлень шуканих величин. Ефективність такого підходу показана на модельній задачі.

Список використаної літератури

1. Manevich L. I., Pavlenko L. I., Koblik S. G. Asymptotic method in the theory of an elasticity of an orthotropic skew field : monography. Kyiv : Vusha shkola, 1982. 152 с.
2. Кагадий Т. С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов : монографія. Днепропетровск : РИК НГА України, 1998. 260 с.
3. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде : монографія. Москва, 1986. 496 с.
4. Кузьменко В. И., Власенко Ю. Е. Компьютерное моделирование поведения упругопластических оснований сложной структуры. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2008. № 12. С. 113-123.

5. Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій : монографія. Львів : «СПОЛОМ», 2007. 320 с.

1. Manevich L. I., Pavlenko L. I., Koblik S. G. Asymptotic method in the theory of an elasticity of an orthotropic skew field : monography. Kyiv : Vusha shkola, 1982. 152 s.

2. Kagadiy T. S. Metod vozmuscheniy v mehanike uprugih (vyazkouprugih) anizotropnyih i kompozitsionnyih materialov : monografiya. Dnepropetrovsk : RIK NGA UkraYini, 1998. 260 s.

3. Beyker Dzh., ml., Greyvs-Morris P. Approksimatsii Pade : monografiya. Moskva, 1986. 496 s.

4. Kuzmenko V. I., Vlasenko Yu. E. Kompyuternoe modelirovanie povedeniya uprugoplasticheskikh osnovaniy slozhnoy strukturyi. Problemi obchislyvalnoYi mehaniki I mItsnostI konstruktsIy. 2008. # 12. S. 113-123.

5. Kir'yan V. I., Osadchuk V. A., Nikolishin M. M. Mehanika ruynuvannya zvarnih z'Ednan metalokonstruktsIy : monografiya. LvIv : «SPOLOM», 2007. 320 s.

КАГАДИЙ Татьяна Станиславовна – д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики НТУ Днепроvская политехника

БЕЛОВА Оксана Викторовна – к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики Национальной металлургической академии Украины

ЩЕРБИНА Ирина Владимировна – к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики Национальной металлургической академии Украины