ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ЛОРЕНЦА

Пелешенко Б.И., Семиренко Т.Н. (Днепр)
dsaupelesh@ukr.net, tsemyrenko@ukr.net

Пусть Φ - объединение функции $\phi(t) = sign\ t$ и множества положительных, возрастающих выпуклых или вогнутых на отрезке $[0;1]$ функций $\phi(t)$, для которых выполняются условия $\lim\limits_{t\to+0}\phi(t) = = \phi(0) = 0$ и $\phi(2t) = O\left(\phi(t)\right)$, когда $t \to +0$.

Для функции $\phi(t) \in \Phi$ обозначим $M_\phi(t) = \sup\limits_{0<s\leq\min(1/t,1)} \dfrac{\phi(st)}{\phi(s)}$ $(0 < t < \infty)$ и α_ϕ, β_ϕ - соответственно ее верхний и нижний показатели растяжения.

Через $S(0;2\pi)$ обозначается пространство измеримых по Лебегу на $(0;2\pi)$ функций и через $f^*(t)$ - невозрастающая перестановка модуля функции $f(x) \in S(0;2\pi)$ относительно нормированной меры Лебега $m(e) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_e dx$.

Пусть LM - множество медленно меняющихся в нуле и на бесконечности функций $h(t)$, заданных на $(0,\infty)$.

Пространство Лоренца $\Lambda_{\phi,a}(0,2\pi)$ для заданных $\phi(t) \in \Phi$ и $a \in (0;\infty]$ состоит из измеримых по мере Лебега на $\mathbb{R}^n$ функций, для которых конечна квазинорма $\|f\|_{\Lambda_{\phi,a}} = \left\{\int\limits_0^1 \left(f^*(t)\right)^a d\phi(t)\right\}^{1/a}$, если $\phi(t) \neq signt$, $0 < a < \infty$, и квазинорма $\sup\limits_{0<t<1}\left(f^*(t)\phi(t)\right)$ для $a = \infty$.

Функция $\phi(t) \in \Phi$ является фундаментальной функцией пространства $\Lambda_{\phi,a}(0;2\pi)$. В случае, если $\phi(t) = t^{\frac{1}{p}}$, $0 < p < \infty$, то $\Lambda_{\phi,1}(0;2\pi) = = L^{p1}(0;2\pi)$, а если $\phi(t) = signt$, то $\Lambda_{\phi,\infty}(0;2\pi) = L_\infty(0;2\pi)$.

Квазилинейный оператор T ограниченно действует из пространства Лоренца $\Lambda_{\phi,1}(0;2\pi)$ в пространство $\Lambda_{\psi,\infty}(0;2\pi)$ ([1], с.177), если существует такое число $M > 0$, что для любого $t \in (0;1]$ и любой функции $f(x) \in \Lambda_{\phi,1}(0;2\pi)$ выполняется неравенство

$$(Tf)^*(t)\psi(t) \leq M \int\limits_0^1 f^*(u)d\phi(u).$$

Используя результаты статьи [2], в работе доказана интерполяция преобразования Фурье и потенциала Рисса в пространствах Лоренца.

Теорема 1. *Пусть* $0 < a \leq 1$, $0 < t \leq 1$, $h(u)$ *- медленно меняющаяся функция в нуле и на бесконечности, для которой выполняются условия* $\int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)} = \infty$, $\int\limits_t^\infty \frac{du}{uh(u)} < \infty$, *и* $\phi(t) = t^{\frac{a}{2}} \int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)} + t^a \int\limits_t^1 \frac{du}{u^{\frac{a}{2}+1}h(u)}$. *Тогда найдется такая постоянная* $C > 0$, *что для любой* $f(t) \in L_{a,\phi}(0,2\pi)$ *и ее преобразования Фурье* $(Ff)(t)$ *[3] справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(Ff)_n^*\right]^a \frac{1}{nh\left(\frac{1}{n}\right)} \leq C \int\limits_0^1 \left(f^*(t)\right)^a d\phi(t),$$

где $(Ff)_n^* = (Ff)^*(n-1)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < a \leq 1$, $1 \leq t < \infty$, $h(u)$ *- медленно меняющаяся функция в нуле и на бесконечности, для которой выполняются условия* $\int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)} < \infty$, $\int\limits_t^\infty \frac{du}{uh(u)} = \infty$, *и* $\phi(t) = t^{\frac{a}{2}} \int\limits_0^t \frac{du}{uh(u)} + t^a \int\limits_t^1 \frac{du}{u^{\frac{a}{2}+1}h(u)}$. *Тогда найдется такая постоянная* $C > 0$, *что для любой* $f(t) \in L_{a,\phi}(0,2\pi)$ *и ее преобразования Фурье справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(Ff)_n^*\right]^a \frac{1}{n^{1-\frac{a}{2}}h\left(\frac{1}{n}\right)} \leq C \int\limits_0^1 \left(f^*(t)\right)^a d\phi(t).$$

Литература

1. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. — 400с.

2. *Пелешенко Б.И.* Интерполяция операторов слабого типа (ϕ_0, ψ_0, ϕ_1, ψ_1) в пространствах Лоренца // Укр.мат.журн. — 2005. — Т.57, №11. — С.1490-1507.

3. *A. Zygmund.* Trigonometric series. — Cambridge, 1959. — Vol.II.