

## ФРАКТАЛЬНЫЙ ПОДХОД К МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Щелокова М.А., <sup>2</sup>Слободян С.Б., <sup>3</sup>Дырда В.И.

<sup>1</sup>Запорожский национальный технический университет, <sup>2</sup>Подольский государственный аграрно-технический университет, <sup>3</sup>Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины

## ФРАКТАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ

<sup>1</sup>Щолокова М.О., <sup>2</sup>Слободян С.Б., <sup>3</sup>Дирда В.І.

<sup>1</sup>Запорізький національний технічний університет, <sup>2</sup>Подільський державний аграрно-технічний університет, <sup>3</sup>Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України

## FRactal Approach to Solid Fracture Mechanics

<sup>1</sup>Schelokova M.A., <sup>2</sup>Slobodian S.B., <sup>3</sup>Dyrda V.I.

<sup>1</sup>Zaporozhye National Technical University, <sup>2</sup>State Agrarian and Engineering University in Podilya, <sup>3</sup>Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Polyakov of National Academy of Science of Ukraine

**Аннотация.** В статье дан обзор по формированию представлений о механизмах разрушения твёрдых тел, начиная с конца девятнадцатого столетия. Рассматриваются ранние работы А.Ф. Иоффе, А.А. Гриффитса, Ирвина, Г.В. Колосова и других. Отмечается популярность критерия разрушения А.А. Гриффитса, основанного на энергетическом балансе, для расчёта движения трещин. Рассматриваются также подходы Е.М. Морозова,  $J$ -интеграл Черепанова – Райса, работы А.А. Лебедева, В.З. Партона, А.Н. Гузя, И.А. Миклашевича, Г.И. Баранблатта, критерии разрушения Дагдейла, Леонова-Панасюка и т.д. Показано, что для описания микросоebenностей реальных трещин целесообразно использовать фрактальные модели. Поэтому рассматриваются такие важные вопросы как: общая схема фрактального подхода, обобщённая фрактальная модель реальной трещины, влияние показателя фрактальной размерности трещины на величину коэффициента интенсивности напряжений, математическое описание синергетической модели фрактальной трещины.

На микроуровне профиль шероховатой трещины аппроксимируется фрактальным объектом, на макроуровне трещина имеет вид гладкого контура, поэтому остаются справедливыми классические постановки задач разрушения, носителем фрактальных микросоebenностей трещины выступает дополнительный параметр – фрактальная размерность. Для оценки реальной «длины» трещины строится энтропийная  $\alpha$ -мерная мера. С помощью данного подхода становится возможным фрактальное обобщение энергетического критерия разрушения твёрдых тел, содержащих трещины, имеющих фрактальную особенность на микроуровне. Величина упругой энергии определяется на макроуровне; поверхностная энергия, необходимая для создания двух фрактальных поверхностей, записывается с учётом того, что на микроуровне трещина имеет фрактальную шероховатость. Такой подход позволяет установить связь между микро- и макроуровнями, при этом позволяет перевести на более высокий уровень формализации понятие о структуре как таковой.

В заключении статьи рассматривается фрактальное обобщение энергетической концепции разрушения твёрдых тел. В частности, рассматривается задача о накоплении повреждений и фрактальный анализ резин при длительном циклическом разрушении. Для конкретной резины найдена величина фрактальной размерности поверхности разрушения: в исходном состоянии и при наработке более 30000 часов при экстремальных циклических нагружениях. Показано изменение коэффициента Пуассона для исходной резины и «разрыхлённой» при длительном утомлении.

**Ключевые слова:** деформация, прочность, фрактал, разрушение, трещина, энергия разрушения

### Основные представления о механизмах разрушения твёрдых тел

Этому важному вопросу посвящена многочисленная научная литература; обзоры исследований изложены в [1-9]. Следует подчеркнуть, что представление о прочности и разрушении твёрдых тел стали складываться уже в XIX веке. Так, в 1898 г. немецкий механик Г. Кирш, решив задачу об одноосном растяжении прямоугольной пластинки с малым круговым

отверстием, обнаружил резкий пик напряжений в точках на краю отверстия. В 1909 г. решение Колосова – Инглисса задачи о растяжении пластинки с эллиптическим отверстием показало, что пиковые напряжения определяются кривизной отверстия; у вершин, где кривизна максимальна, напряжения могут достичь значений, во много раз превышающих значения напряжений в сплошной пластинке. Благодаря профессору Инглиссу в практику расчётов на прочность входит понятие концентрации напряжений.

В 1920 г. А.Ф. Иоффе объяснил причину расхождения теоретической и технической прочности несложным, но эффективным опытом на кристалле каменной соли. После помещения кристалла в горячую воду его прочность значительно увеличивалась. Вывод был следующий: лишившись поверхностного слоя, кристалл освободился от многочисленных царапин и трещин. Эксперименты по упрочнению кристаллов, случаи преждевременного разрушения конструкций при напряжениях, значительно меньших расчётных, показали недостаточность представлений о прочности как о постоянной материала.

В 1920 г. Гриффитс попытался достичь теоретической прочности в опытах на разрыв стеклянных волокон и установил, что с уменьшением диаметра волокон их прочность резко возрастает и становится сравнимой с теоретической. Отличие прочности реальных тел от теоретической он объяснил наличием в них трещин, превышающих по размеру межмолекулярные расстояния. В настоящее время, в машиностроении, горной механике, в котлостроении и других отраслях исследователи постоянно сталкиваются с трещиноподобными дефектами и технологическими отверстиями в виде угловых вырезов или лунок. Примерами могут служить Т-образные хвосты лопаток, обода дисков, резьбовые соединения, угловые сварные стыки и т.д.

В своё время, причины развития трещины в теле Гриффитс связал с процессами накопления и освобождения в нем энергии деформаций. В качестве модели им был выбран узкий эллиптический вырез, и предполагалось, что разрушение происходит вдоль площадки, на которой нормальное растягивающее напряжение достигает критического значения.

В современной механике деформируемого твёрдого тела для описания реальной трещины используются различные математические модели (рис. 1), при этом рассматривается одна и та же задача: определить напряжённо-деформированное состояние в окрестности вершины трещины и на основании некоторого критерия проанализировать вопрос о разрушении.



1 – разрез; 2 – эллипс; 3 – лунка; 4 – прямоугольник

Рисунок 1 – Математические модели трещины

К настоящему времени, для каждого представления реальной трещины решение первой части поставленной задачи найдено: для случая прямолинейного разреза – формулы Келдыша – Седова, для эллипса – решение Г.В. Колосова, для модели в виде лунки – решение Вейнеля и Линга. Особый

интерес представляет модель трещины в виде лунки с вершинами в форме острого «клюва», который обеспечивает конечность напряжений в концах трещины. В этом случае, с помощью асимптотического метода в версии С.А. Назарова, задачу сводят к следующим предельным: вдали от трещины – к задаче о растяжении плоскости с прямолинейным разрезом; вблизи – к задачам о внешности параболы и полубесконечной полосы.

С целью усовершенствования и поиска адекватной модели реальной трещины, для описания напряжённо-деформированного состояния в окрестности вершины, в настоящее время широкое развитие получили исследования, базирующиеся на экспериментах и аналогиях. К примеру, применяя принцип аналогий, С.Д. Волков предположил, что характер распределения напряжений вблизи вершины трещины повторяет ниспадающий участок кривой на полной диаграмме деформирования материала, полученной при испытании гладкого образца в условиях предельно жёсткого нагружения. В Институте проблем прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины были проведены испытания с целью исследования кинетики разрушения пластичных материалов в разных состояниях. Результаты показали, что характер распределения напряжений у вершины макротрещины непосредственно связан с процессами упрочнения матрицы материала при различном термосиловом воздействии и сопутствующими им процессами разрыхления в целом. С использованием деформационных трёхстадийных моделей, которые кроме зоны пластического течения учитывают также и разрыхление материала в зоне предразрушения, решён ряд упругопластических задач [3].

Одной из удачных попыток описания распределения напряжений в зоне предразрушения можно считать двухпараметрическую сильно нелинейную функцию, состоящую из двух частей: степенной, описывающей упрочнение матрицы материала, и экспоненциальной, описывающей особенности накопления повреждений в материале с учётом вида напряжённого состояния и наработки

$$\sigma = \sigma_{0,2} \left( \frac{x}{R} \right)^n \exp \left( - \frac{3K_\sigma - 1}{B} \left( \frac{x}{R} \right)^{1-n} \right),$$

где  $\sigma_{0,2}$  – предел текучести материала;  $x$  – текущее расстояние от вершины трещины до рассматриваемой точки в пластической зоне;  $R$  – протяжённость пластической зоны;  $n$  – коэффициент деформационного упрочнения;  $B$  – характеристика чувствительности материала к виду напряжённого состояния в отношении накопления повреждений;  $K_\sigma$  – параметр Бриджмена.

Одновременно с исследованием величины параметров, характеризующих напряжённое состояние в вершине трещины, развиваются подходы к решению проблемы по оценке размеров зон пластичности и предразрушения. В частности, применительно к центральной трещине нормального отрыва в пластине из ортотропного материала была установлена зависимость протяжённости пластической зоны, возникающей у вершины трещины, от величины пределов текучести в направлении осей анизотропии.

Современный уровень развития вычислительной техники позволил создать целый ряд численных подходов к расчёту напряжённо-деформированного состояния элементов конструкций, сформировалась вычислительная механика деформируемого твёрдого тела. Каждый метод численного решения условно разбивается на два этапа: дискретизация, которая заключается в сведении «континуальной» задачи к конечномерной, алгебраической и непосредственное решение полученной задачи с учётом её специфики. Переход к конечномерной задаче достигается различными способами: выбором конечного числа координатных функций вариационных методов, конечноразностной аппроксимацией, вариационно-разностным методом, МКЭ и т.д. Универсального подхода не существует из-за возникающих трудностей в каждом конкретном приложении, например, при решении пространственных задач механики композитов, применение непосредственной дискретизации не позволяет получить приемлемую алгебраическую систему; при численном решении задач теории вязкоупругости возникает проблема дискретизации по времени. Трудности в ряде случаев преодолеваются, используя специальные методы осреднения. В вычислительной механике учитывается и тот факт, что исследователя в основном интересует напряжённое состояние, а не вектор перемещения. Кроме того, иногда исследователю известно, в каких точках следует искать опасные напряжения и в таких случаях целесообразно применять метод Монте-Карло, который позволяет определить напряжения в одной точке.

Анализируя современные вычислительные методы механики деформируемого твёрдого тела, применительно к задачам о трещиноподобных дефектах, следует отметить, что каждый раз решение начинается с выбора исходной модели. Как правило, трещина заменяется подходящей системой граничных сегментов, за исключением концов трещины, где вводятся специальные концевые элементы. Однако значительно повысить точность вычисления за счёт увеличения общего числа специальных элементов в конце трещины не удаётся, и более высокая точность может быть достигнута лишь использованием в окрестности конца трещины более сложных аппроксимирующих формул, основанных на более приближенной к реальной модели трещины.

При решении задачи о разрушении, возникает необходимость выбора соответствующего критерия разрушения. А.А. Гриффитс первым определил предельное значение внешней нагрузки, вызывающей разрушение. Его критерий основан на энергетическом балансе: энергия упругой деформации, высвобождающаяся при росте трещины, должна равняться энергии, затраченной на образование новых поверхностей:  $dU/dl = dW/dl$ . Гриффитс выразил  $dU/dl$  через напряжение  $dU/dl = \pi\sigma^2 l/E$ , впоследствии эту величину стали называть энергией движения трещины  $G$ . При хрупком разрушении  $G = 2\gamma$ , где  $\gamma$  – поверхностная энергия, являющаяся фундаментальной константой материала, зависящей от прочности межатомных связей. Справедливость этого критерия распространяется только на материалы, не

способные деформироваться в процессе разрушения (типа стекла). Для металлических материалов Ирвином и Орованом, основываясь на энергетическом критерии Гриффитса, была добавлена в поверхностную энергию необратимая работа пластической деформации. Это позволило представить зависимость между разрушающим напряжением  $\sigma$  и длиной

трещины  $l$  в виде 
$$\sigma = \sqrt{\frac{E(2\gamma + \gamma_p)}{\pi l(1 - \gamma^2)}}$$
, где  $\gamma_p$  – энергия, затраченная на пластическую деформацию в локальной зоне у вершины трещины в момент нестабильности разрушения. Ирвин показал, что поля деформаций и напряжений на фронте трещины можно описать с помощью коэффициентов интенсивности напряжения  $K$ . Это позволяет различные виды разрушения материала моделировать путём растяжения специального образца с предварительно созданной трещиной с учётом автомодельности напряжённо-деформированного состояния на фронте трещины. Критическое значение  $K_I = K_{Ic}$  определяет критическую энергию на единицу длины трещины  $G_{Ic}$ , необходимую для её движения. Физическое представление вершины трещины как плавное смыкание её берегов, послужило основанием для Баренблатта ввести в концевой области трещины силы сцепления и получить аналогичный критерий.

Следует особо выделить разработанные М.Я. Леоновым, В.В. Панасюком, П.М. Витвицким, Д.С. Дагдейлом, И.И. Лучко, И.М. Панько, С.Я. Яремой и другими деформационные критерии локального разрушения – критическое раскрытие трещины. В основу теории положен критерий раскрытия трещины, предложенный М.Я. Леоновым и В.В. Панасюком ( $\delta_c$ -модель). Неупругая зона впереди трещины моделируется разрезами, к берегам которых приложены напряжения, физический смысл которых определяется свойствами материала. Трещина получает возможность распространяться, если расстояние между противоположными поверхностями трещины в её конце достигает предельной величины  $2v_n(l_0, l, P_*) = \delta_k$ , где  $v_n(l_0, l, P_*)$  – нормальная составляющая вектора смещения берегов трещины, рассчитываемая методами линейной теории упругости;  $P_*$  – параметр, характеризующий внешнюю предельную нагрузку;  $l_0$  – характерный линейный размер области начальной трещины.

В условиях упругопластического поведения материала с трещиной, предельное раскрытие трещины  $\delta_k$ , при которой наступает нестабильность разрушения, зависит от пластической деформации на фронте трещины и поэтому связь между  $\delta_k$  и  $G_{Ic}$  достаточно сложная. По этой причине возникают трудности практического использования критерия локального разрушения, связанного с раскрытием трещины.

Е.М. Морозов предложил критерий, названный пределом трещиностойкости, который включает: критерий линейной механики разрушения  $K_c$ , механическое свойство материала в виде временного сопротивления  $\sigma_B$  и характеристику локального напряжённого состояния в

виде максимального главного напряжения  $\sigma_1$  у края трещины:  
 $I_c = K_c \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_B} \right)^{3/2}$ . При замене отношения  $\sigma_1/\sigma_B$  на  $\sigma_K/\sigma_B$ , где  $\sigma_K$  – критическое напряжение, критерий принимает другой вид:  $I_c = K_c \varphi(\sigma_K/\sigma_B)$ , а величина, обратная отношению  $\sigma_K/\sigma_B$  выступает как коэффициент запаса прочности по временному сопротивлению. Однако, так как эта величина не является характеристикой предельного состояния локальных объёмов металла вблизи трещины, использование данного критерия приводит к определённым ограничениям.

Отметим также критерий М.Л. Вильямса: разрушение происходит в момент достижения радиусом кривизны конца трещины некоторого предельного значения, характерного для каждого конкретного материала.

Наряду с силовыми и деформационными критериями локального разрушения широко известны энергетические критерии. Одним из таких критериев является  $I$ -интеграл Черепанова-Райса. Черепанов, анализируя состояние области, окружающей вершину трещины, движущейся в сплошном деформируемом теле, получил выражение для удельной работы разрушения в виде:

$$I = \oint_C \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \sigma_{ij} n_j \right) ds$$

где  $C$  – замкнутый контур;  $\frac{\partial W}{\partial x}$  – плотность энергии деформации;  $V_i$ ,  $\sigma_{ij}$  – компоненты перемещений и напряжений;  $n_j$  – компонента нормали к элементу контура  $ds$ .

Условие ограниченности интеграла выступает как необходимое условие корректности той или другой модели твёрдого тела. В настоящее время разработаны экспериментальные методы определения  $I$ -интеграла с менее жёсткими требованиями к размеру образца, чем при определении  $K_{Ic}$ . Следует учесть, плотность энергии деформации  $\mathcal{E}$  является функцией деформации в данной точке только для упругих условий. При появлении необратимых деформаций на величину  $\mathcal{E}$  влияет история нагружения и его тепловой режим.

Для сложного напряжённого состояния, согласно приведённым моделям, направление распространения разрушающей трещины приходится постулировать, что является существенным их недостатком. При этом вопрос зарождения и образования макроскопического трещиноподобного дефекта также не нашёл в них отражение. Причина кроется в сложности и неоднозначности реального процесса разрушения. По этой же причине все модели сопряжены с определённой идеализацией геометрии и свойств объекта. Основываясь на интуитивном представлении о корректности задачи – малости изменения решения при малом изменении параметров задачи, нередко возникают «парадоксы малого параметра».

Другими словами, для изучения реального процесса разрушения, исследование только поведения макроскопических дефектов (зародышевых,

магистральных трещин) на основе сплошной среды недостаточно, необходимо учитывать процессы, происходящие на структурном микроскопическом уровне, следует также изучить влияние внутренней структуры на макроскопические характеристики. Исследования в этой области в настоящее время ведутся одновременно по нескольким направлениям.

Интересной представляется энергетическая концепция Дж. Си, предполагающая в качестве критерия разрушения использовать критическую плотность энергии деформации. Это в свою очередь предполагает анализ разрушения, деформации и напряжения индивидуальных блоков. Основные соотношения для каждого элемента могут различаться и поэтому решение необходимо связать с историей нагружения. Это требует формирования банка данных, содержащего кривые напряжение – деформация при одноосном растяжении, охватывающие область локальных скоростей деформации, реализуемых в различных объёмах материала на фронте трещины.

Следует отметить попытки описания процессов разрушения на основании математического анализа базовых закономерностей разрушения, какой является теория катастроф. Так, классические объекты теории разрушения могут быть представлены как объекты теории катастроф: задача Гриффитса – как катастрофа складки, деформирование через пружину – как катастрофа сборки, длина трещины – с катастрофой типа ласточкин хвост. Тогда переход от рассеянного разрушения к магистральной трещине или появление точки бифуркации соответствуют изменению типа катастрофы.

Ещё в 60-е годы прошлого века В.В. Новожиловым была выдвинута модель разрушения, которая связала механику сплошных сред с молекулярными представлениями. Идея связать меру поврежденности материала с изменением его плотности вследствие разрыхления материала объясняла появление трещины в сплошной среде как переход среды из одной формы равновесного состояния в другую. По мере развития экспериментальной техники, исследователи получили возможность более точно оценить остаточное изменение объёма при пластическом деформировании. Обработка большого массива экспериментальных данных показала: суммарный объём пустот не всегда отражает реальное состояние материала, поскольку можно привести примеры, когда прочность повреждённого материала выше прочности менее повреждённого материала.

Связь  $K_{Ic}$  с механическими свойствами и параметрами структуры материала была разработана в расчётной модели локального разрушения упругопластических тел А.Е. Андрейкивым:

$$K_{Ic} = \left( \rho \tau_s E (1 - \nu^2) \ln(1 - \psi)^{-1} \right)^{1/2}$$

где  $\rho$  – некоторый характеристический структурный параметр;  $\tau_s$  – предел текучести при сдвиге;  $\psi$  – сужение поперечного сечения гладкого образца при одноосном растяжении.

Другая зависимость  $K_{Ic}$  от структуры предложена в виде:

$$K_{Ic} = \frac{\sigma_{0,2}^{1-m} \varepsilon_{\max}^{1+m} E^{1+m}}{(1-\nu)^2 F\{\Gamma(m)\}} S^{1/2}$$

где  $m$  – коэффициент деформационного упрочнения;  $S$  – величина близкая к расстоянию между большими неметаллическими включениями;  $\varepsilon_{\max}$  – предельная деформация в вершине.

Для трещин нормального отрыва в средах со структурой предложен обобщённый дискретно-интегральный критерий прочности для материалов двух типов: упругопластического с ограничением по деформативности и упругого идеально пластического. Критическое раскрытие исходной трещины связывается с деформативностью пластических материалов.

В последнее время процесс разрушения рассматривается как иерархический переход системы от низшего уровня к высшему. Переход к верхнему иерархическому уровню сопровождается сменой ведущего механизма поглощения энергии. Атомарный уровень связан с разрушением межатомных связей; уровень зерна – с существованием внутренней структуры деформируемого материала. Мезоскопический уровень описывает изменение поврежденности, рост микротрещин и переход в магистральную трещину. Эти различия вызывают целую иерархию математических структур, необходимых для описания системы в целом. С другой стороны, изучение механизма разрушения на каждом иерархическом уровне выявило самоподобие структуры на различных масштабах и тенденцию в поведении системы к самоорганизации.

Большое значение в исследовании структурных особенностей формирующихся трещин занимают исследования поверхностей разрушения. Это объясняется предположением, что структурные особенности поверхности разрушения являются прямым «наследием» структуры фронта трещины, приведшей к разрушению. Для описания характеристик поверхности разрушения широко используют случайные распределения, например, тригонометрические или функции Вейерштрасса. Влияние соседних областей на измеряемые в локальной точке характеристики учитываются путём введения корреляционных функций.

После того как Мандельбротом было выдвинуто и экспериментально проверено предположение о статистическом самоподобии поверхностей разрушения, появились попытки классифицировать масштабные уровни разрушения, изложить другим языком классическую теорию хрупкого квазистатического разрушения. В работе Р.В. Гольдштейна и А.Б. Мосолова был проведён фрактальный анализ иерархической структуры деформируемого тела на масштабе размеров  $\delta \ll L$ , где  $\delta$  – размеры зерна,  $L$  – размер задачи, масштаб неоднородности внешних полей.

Обобщая вышеизложенный обзор работ, посвящённых описанию механизма разрушения, а также работы многих современных отечественных и зарубежных учёных: А.А. Лебедева, Н.Г. Чаусова, В.З. Партона, Н.Г. Стащюка, Р.В. Гольдштейна, В.М. Ентова, А.Н. Гузя, М.М. Назаренко, Л.И. Слепяна, В.М. Корнева и других, можно выделить два подхода: в первом прочность тела

характеризуется поведением магистральной макротрещины, во втором – через развитие и рост множества микродефектов. Однако, сложной и неоднозначной остаётся одна из основных задач механики разрушения – корректный переход от микроскопического описания, когда необходимо учитывать свойства элементарных структурных единиц (например, наличие границы зёрен в металле), к макроскопическому, когда существенны только интегральные характеристики среды. Очевидно, проблема может быть частично решена, если при разработке математической модели поведения макроскопических дефектов автомодельность механизма разрушения будет учтена за счёт привлечения характеристик, описывающих геометрические особенности структуры.

Совместное рассмотрение процессов деформации и разрушения с учётом влияния распределения дефектов на метрическую структуру деформируемого материала специалистами белорусской научной школы [8] предлагается осуществить с помощью более общих пространств, чем евклидово. Процессы распространения трещины рассматриваются как движение в пространстве Финслера. Развиваемый Миклашевичем подход к дефектной структуре с использованием физического аппарата описания полевых структур, позволил ему подойти ближе к решению проблемы определения связи макроскопических характеристик материала с микроскопическими характеристиками структуры. Недостатком предложенной Миклашевичем теории является сложность, что затрудняет её использование в инженерных расчётах. Как частный случай, он обосновывает положение, что разрушение на всех структурных уровнях имеет фрактальные свойства.

Примерами использования фрактального анализа для описания закономерностей разрушения на макроскопическом уровне может служить ряд последних работ [1-9]; была предложена гипотеза о необходимости существования переходного поверхностного слоя, обладающего фрактальной размерностью. В рамках этой гипотезы показателем диссипативных свойств материала при самоподобном разрушении является фрактальная размерность, учитывающая вклад в диссипацию энергии двух основных механизмов: пластической деформации и образования аморфной зоны переходного слоя вблизи вершины трещины; поверхностная энергия  $\Pi$  выражается как интегральная разность между размерностью окружающего пространства  $D$  и фрактальной размерностью материала переходной зоны

$$\Pi = k \int_{i=2}^3 (D - D_{Fi})$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности;  $D_{Fi}$  – фрактальная размерность слоя в переходной зоне от размерности 2 к размерности 3.

Основные фрактальные характеристики разрушения представляют предмет напряжённых дискуссий и исследований последних лет. Одной из таких характеристик по-прежнему является фрактальная размерность трещины. В большинстве случаев теоретические построения для проблемы фрактальных размерностей трещины исходят из предположения, что геометрия поверхности

разрушения есть «наследство» геометрии фронта трещины при развитии разрушения.

В настоящее время существует множество экспериментальных методов определения фрактальной размерности реальных объектов, основанных на различных определениях физической фрактальной размерности. В частности, при измерении размерности поверхностей разрушения большое распространение получили металлографические методы, метод вертикальных сечений и Фурье-анализ профиля.

Вследствие трудностей методического характера, достаточно сложно получить системные экспериментальные данные о размерной неоднородности дефектов, охватывающие широкий круг материалов, различные условия нагружения, масштабность повреждений. Поэтому, для решения практических задач прогнозирования предельного состояния, связанного с формированием трещины недопустимого размера, необходима дальнейшая разработка адекватных математических моделей, учитывающих размерную неоднородность дефектов. При этом необходимо усовершенствовать критерии разрушения, так как большинство из них ориентированы на трещины-разрезы: критерии Ирвина, Баренблатта, Леонова-Панасюка, Дагдейла. Универсальным считается критерий Гриффитса, которым можно было бы пользоваться для всех задач, но он связан с существенными математическими трудностями, так как для строгого его применения необходимо знать, как меняется геометрия трещины в процессе разрушения [3].

Ниже рассматривается возможность обобщения энергетического подхода Гриффитса на трещины, обладающие фрактальными характеристиками.

Обзор опубликованных материалов теоретических и экспериментальных исследований позволил сделать ряд обобщений, которые легли в основу разработанного фрактального подхода к энергетической концепции квазихрупкого разрушения твёрдых тел:

- геометрические особенности профиля поверхностей разрушения на микроуровне являются прямым наследием особенностей развития фронта трещины;
- для описания микроособенностей реальных трещин целесообразно выбирать модель фрактала, так как, подобно природным, фрактальные объекты обладают «шероховатостью» и свойством самоподобия.

### **Общая схема фрактального подхода**

Основу механики разрушения составляют критерии прочности, которые устанавливают момент исчерпания несущей способности материала. При этом критерии прочности не следуют из уравнений равновесия и движения механики сплошной среды, а являются дополнительным условием при решении вопроса о предельном равновесии тела с трещиной. Формулировки критериев обязательно содержат некоторые удельные характеристики: на единицу длины, площади или объёма, методика определения которых на гладких образцах стандартизирована. Но если граница исследуемого объекта на микроуровне сильно изрезана (шероховата), то реальные длина, площадь и объём отличаются от тех, с

которыми работает традиционная теория, при этом возникает ряд противоречий экспериментальным данным. Введение фрактальной поправки при определении удельных характеристик, позволит учесть шероховатость поверхности, а также автомодельность процесса разрушения.

Общая схема фрактального подхода предполагает следующие этапы:

- на микроуровне профиль шероховатой трещины аппроксимируется соответствующим фрактальным объектом размерности  $\alpha$ , при этом  $1 < \alpha < 2$ ;
- фрактальная шероховатость «сглаживается» покрытием  $\alpha$ -мерными шарами; для оценки реальной длины трещины строится энтропийная  $\alpha$ -мерная мера;
- на макроуровне, трещина имеет вид гладкого контура, поэтому остаются справедливыми классические постановки задач разрушения, носителем фрактальных микроособенностей трещины выступает дополнительный параметр – фрактальная размерность  $\alpha$ .

Таким образом, фрактальный подход по предложенной схеме, позволит, оставаясь в рамках линейной механики разрушения, не только привлечь к решению задач дополнительный параметр, характеризующий геометрические особенности микроструктуры реальной трещины, но и частично отразить тот факт, что процесс разрушения – это совокупность процессов микро- и макроуровней.

Следует отметить, привлечение фрактальных кривых (в плоском случае) к моделированию на микроуровне шероховатости реальных трещин предполагает некоторое ограничение – извилистость реальной трещины, как и её площадь, имеют конечные значения, поэтому существует естественный нижний предел применимости фрактальной модели. Для металлов это размер зерна или субзерна. Другими словами, нижний предел следует понимать не в математическом, а в физическом смысле. С другой стороны, математический фрактал бесконечно извилист и поэтому имеет бесконечную длину. Таким образом, фрактальная модель имеет и верхний предел применимости. Как отмечено в работе [1], «...верхний предел применимости связан с геометрическими размерами тела, размерами трещины, характерным масштабом неоднородности внешних полей и т.д.». Таким образом, конечность интервала, на котором проявляются фрактальные свойства физических объектов, предопределяет, что, исследователь при нахождении фрактальных характеристик должен сам выбрать этот интервал, при этом все полученные с помощью фрактальных объектов соотношения на практике выполняются лишь приближённо.

### **Обобщённая фрактальная модель реальной трещины в твёрдом теле**

**Фрактальные особенности процесса разрушения.** На сегодняшний день в механике разрушения твёрдых тел сложились ряд представлений о самом механизме разрушения, которые непосредственно стали основой предложенного в диссертационной работе фрактального подхода. Выделим основные из них.

- *Необходимость одновременного рассмотрения процессов разрушения, происходящих на различных структурных уровнях.* Механика деформируемого твёрдого тела оперирует такими понятиями, в определении которых уже присутствует представление о континууме и его свойствах, например, идеально-упругое, идеально-жесткое тело. Отражением же коллективности процесса разрушения является иерархическая природа деформирования и разрушения, поскольку на микроскопическом уровне процессы макроскопического деформирования связаны с деформацией и разрывом межатомных связей. Это изменение не может происходить как изолированный процесс, а всегда только как скоррелированное взаимодействие многих структурных элементов тела. Необходимость одновременного рассмотрения процессов, происходящих на различных структурных уровнях очевидна: при мысленном «дроблении» используемых в технике материалов на всё более мелкие кусочки, мы приходим к качественному изменению свойств на некотором уровне. Этот предел не всегда существует отчётливо, но для таких материалов уже не применима методология континуума.
- *В качестве параметра, отвечающего за геометрические особенности деформационного рельефа, выступает фрактальная размерность.*

**Физический механизм, вызывающий фрактальный характер разрушения.** Процесс деформации почти всегда сопровождается появлением рельефа на поверхности материалов, формирование которого наблюдается как в пластичных, так и в малопластичных металлах и сплавах. Деформационный рельеф, в свою очередь, является результатом изменений, протекающих на разных масштабных уровнях. Таким образом, согласно теории дислокаций, параметром, управляющим поведением металлических материалов под нагрузкой, является концентрация дислокаций, а переход на каждый последующий дислокационный уровень отображается в преобразовании фрактальной размерности структуры материала. На начальной стадии пластической деформации дислокации равномерно распределены по всему объёму. При увеличении уровня деформации образуются скопления в виде клубков, и уже наблюдается сложное согласованное поведение, которое не присуще одиночным дислокациям. Оно приводит к значительному усилению диссипации подводимой энергии. В дальнейшем клубки формируются в чётко выраженную ячеистую структуру, которая, по сути, является фракталом с размерностью  $D > 1$ . Достижение значения очередной критической плотности дислокаций приводит к тому, что границы ячеистой структуры становятся неустойчивыми, и дальнейший сток возникающих дислокаций в эти границы невозможен. Тогда происходит следующая перестройка структуры металла, и возникает полосчатая структура (рис. 2).



1 – хаотическое распределение



Рисунок 2 – Схематическое изображение

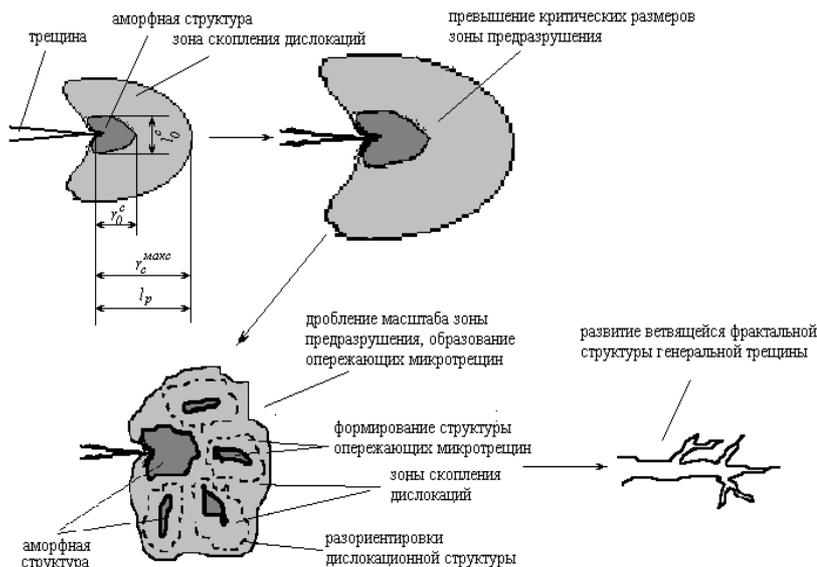
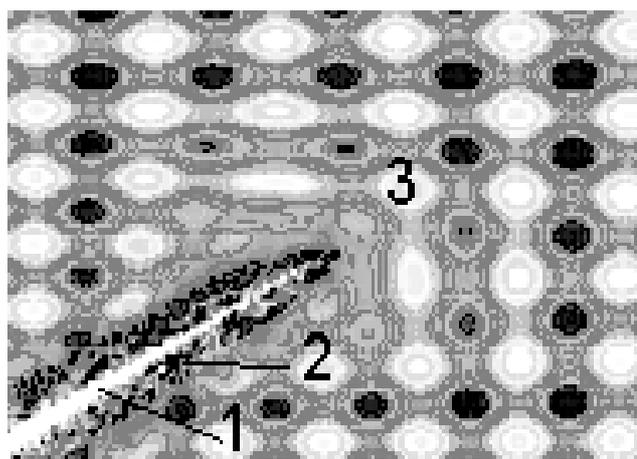


Рисунок 4 – Формирование древовидных форм трещин

Таким образом, возникновение трещин в материалах следует рассматривать именно как процесс преобразования фрактальной размерности структуры – с трёхмерного объёма материала на две новые двумерные поверхности разрушения (рис. 3).

Вблизи вершины трещины присутствуют микронесплошности, которые, в свою очередь, сами способны в локальной области материала генерировать процесс дальнейшего преобразования структуры. Другими словами, происходит процесс «размножения» в пространстве первоначальной структуры в соответствии с некоторыми коэффициентами, а значит, проявляется самоподобный характер разрушения. Это обстоятельство объясняет древовидные формы профиля многих реальных трещин (рис. 4).

Построение последовательной теории такого сложного взаимодействия пока не представляется возможным и является одной из самых актуальных задач механики разрушения. Однако, привлекая к описанию механизма разрушения фрактальные объекты, а также используя фрактальную размерность в виде параметра, характеризующего



1 – трещина (вновь возникшие поверхности с размерностью 2); 2 – переходной слой с пространственной размерностью, меняющийся от 3 к 2; 3 – трёхмерный объём основного материала  
Рисунок 3 – Схема структуры материала вблизи трещины

геометрическую структуру материала, появляется возможность распространения методов механики сплошной среды, которая занимается изучением механического поведения материала на макроуровне – на микроуровень сред со структурой.

Используя эти эмпирические обобщения, можно построить синергетическую модель реальной трещины в твёрдом теле. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

### **Фрактальная модель реальной трещины**

**Математическая модель.** Необходимость в учёте структуры реальных объектов противоречит традиционной для механики сплошной среды операции определения единичного элемента объёма. Как правило, при создании математической модели процесса разрушения, среда, содержащая трещиноподобные дефекты, ассоциируется с трёхмерным евклидовым пространством, что делает практически невозможным учесть при этом структурные микродефекты материала. Математические исследования структуры пространства, ассоциируемого с разрушением, начали проводиться ещё в 50-е годы прошлого века, при этом уже тогда было показано, что внутренняя метрика идеального тела не совпадает с метрикой реального материала. Согласно И.А. Миклашевичу [8], пространство, ассоциируемое с разрушением, – «пространство различной геометрической структуры».

Следует отметить, что идеальным самоподобием обладают лишь математические фракталы, реальные же фракталы в большинстве случаев самоподобны лишь в статистическом смысле, т.е. при увеличении малого фрагмента особенности строения крупного объекта воспроизводятся лишь в среднем, поэтому математический фрактал можно рассматривать лишь как аппроксимацию реального процесса разрушения (формирующейся трещины).

Таким образом, фрактальные объекты обладают важным свойством для механики трещин, а именно свойством самоподобия. Уже не раз было отмечено, что фрактальные объекты имеют дробную размерность, и связь этой размерности с самоподобием состоит именно в том, что с помощью самоподобия можно сконструировать множество дробной размерности наиболее простым образом. По определению, преобразование подобия метрического пространства – это отображение пространства на само себя, при котором все расстояния между точками изменяются в одном и том же отношении. Кроме того, самоподобные объекты инвариантны по отношению к аффинному преобразованию:

$$x_i \rightarrow \lambda_i x_i, \quad i = 1, \dots, d;$$

причём преобразование имеет групповую структуру, действующую на каждую из величин  $\lambda_i$  таким образом, что  $\lambda_i$  должно быть функцией от одной из величин набора  $\lambda_1$ :

$$\lambda_i = \lambda_1^{\xi_i}.$$

Величины  $\xi_i$  характеризуют скейлинговые свойства самоподобного объекта, которые ещё называют показателями шероховатости.

С другой стороны, под шероховатостью поверхности разрушения понимают максимальный размах профиля трещины, который на практике может быть определён различными экспериментальными методами. Известно, что между высотой профиля поверхности трещины  $z$  и текущей позицией измерения  $R$  выявлена пропорциональность:

$$z \sim R^\xi.$$

Таким образом, показатель степени  $\xi$  по физическому смыслу совпадает с показателем шероховатости для самоподобных процессов на определённом масштабном уровне.

В 1939 году, ещё до открытия самоподобного характера процесса разрушения, В. Вейбуллом, для аппроксимации экспериментальных данных по прочности стали на разрыв была введена функция:

$$F_\omega(t, \xi, \beta, \mu) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t-\mu}{\beta}\right)^\xi}, & t > \mu \\ 0, & t \leq \mu \end{cases}$$

где  $\xi$  – параметр формы распределения;  $\beta$  – параметр масштаба;  $\mu$  – параметр сдвига.

Случаи  $\xi = 1$  и  $\xi = 2$  описывают экспоненциальное и Рэлеевское распределения соответственно. Анализируя вид функции, в очередной раз отметим функциональную зависимость формы поверхности разрушения от показателя шероховатости.

Таким образом, наиболее близкой математической моделью реальной шероховатой трещины в твёрдом теле является математический фрактальный объект. Фрактальная размерность модели должна фигурировать как скейлинговый показатель при описании фрактальных свойств разрушения. Отметим важное обстоятельство: фрактальные свойства разрушения проявляются по-разному. С одной стороны, свойствами фракталов обладают непосредственно измеримые величины, независимые и не зависящие от наблюдателя, такие как длина трещины и профиль поверхности. С другой – это фрактальное распределение характеристик, связанных с разрушением, например, тензора трещиноватости. В этом случае фрактальные свойства лишь интерпретация наблюдателем объектов и отражают как свойства объекта, так и наблюдателя. Поэтому, большинство экспериментальных и теоретических исследований, включая данную работу, посвящено определению фрактальных характеристик именно первого рода.

Размерность фрактала должна соответствовать степени шероховатости (изрезанности) профиля реальной трещины и находится в интервале от 1 до 2. Сечение формирующейся поверхности разрушения целесообразно моделировать фрактальным объектом размерности от 0 до 1. Случай, когда фрактальная размерность равна 1 соответствует появлению в теле абсолютно

гладкой трещины, равенство нулю – идеально сплошная, бездефектная среда, что в обоих случаях практически невозможно для реальных материалов.

**Синергетическая модель.** Рассматривая эмпирические обобщения и принимая в качестве математической модели реальной трещины на микроуровне фрактальный объект, можно сделать следующий вывод. Если предположить, что на микроуровне реальная трещина моделируется фрактальной кривой, которая на макроуровне будет иметь вид гладкой кривой, то появится возможность рассматривать такую модель в рамках линейной механики разрушения, при этом фрактальные особенности микроуровня можно учитывать в виде скейлингового показателя при получении оценок прочностных характеристик.

В этом случае синергетическую модель реальной трещины в твёрдом теле можно представить следующим образом: на микроуровне трещина имеет вид фрактальной кривой, на макроуровне – обычная гладкая трещина, имеющая кроме основного макропараметра – длины, дополнительный – фрактальную размерность микроструктуры.

Рассмотрим пример использования предложенной модели реальной трещины в рамках линейной механики разрушения.

### **Влияние показателя фрактальной размерности трещины на величину коэффициента интенсивности напряжений**

Введение специального параметра, учитывающего особенности микроструктуры контура трещины, позволит получить более точные оценки прочностных характеристик. С другой стороны, после введения в алгоритм решения фрактальной размерности модельной трещины возникает необычный масштабный фактор, который согласуется с известными теоретическими предположениями, а также экспериментальными исследованиями. К примеру, классическая механика в качестве одного из параметров трещиностойкости конструкции определяет длину трещины. В.В. Новожилов отмечал, что в механике разрушения присутствует скрытый параметр размерности длины. Другим примером может служить коэффициент интенсивности напряжений. В общем случае нагружения для компонент тензора напряжений и вектора перемещений в малой окрестности произвольной точки на контуре фронта трещины справедливо представление

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_{\beta} f_{ij}^{(\beta)}(\theta) + O(1); \\ u_i &= \frac{\sqrt{r}}{\mu\sqrt{2\pi}} K_{\beta} \varphi_i^{(\beta)}(\theta) + O(r^{3/2}); \\ i, j &= 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $r, \theta$  – полярные координаты произвольной точки окрестности;  $f_{ij}^1(\theta), f_{ij}^2(\theta), f_{ij}^3(\theta), \varphi_i^1(\theta), \varphi_i^2(\theta), \varphi_i^3(\theta)$  – безразмерные функции полярного угла, не зависящие ни от внешней нагрузки, ни от размеров и геометрии тела и трещины.

Коэффициенты  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  характеризуют перераспределение напряжений и перемещений в теле, обусловленное наличием трещины, и являются функциями величины приложенной к телу нагрузки, размеров и геометрии тела, а главное – длины и формы трещины. Поскольку величина локальных напряжений пропорциональна этим коэффициентам, то часто напряжённое состояние оценивают по величине  $K_{\alpha}$ , не рассматривая  $\sigma_{ij}$ . При выводе асимптотических выражений (1) трещина моделировалась прямолинейным разрезом, реальная шероховатость не учитывалась. Напротив, исследования о влиянии физической шероховатости трещины на величину коэффициента интенсивности напряжений, проведённые А.А. Шанявским, указали на тот факт, что оценка этой величины должна включать одновременный учёт высоты рельефа, особенности профиля рельефа по направлению роста трещины и перпендикулярно к нему. Как отмечено Миклашевичем [8], интегральной оценкой влияния этих факторов на коэффициент интенсивности может служить фрактальная размерность трещины.

В настоящее время экспериментов по определению показателя фрактальной размерности реальных объектов проводится достаточно много, и было бы естественно, в качестве размерности фрактальной модели трещины выбирать размерность профиля реальной исследуемой поверхности разрушения. Но, несмотря на достаточно большое количество существующих методик определения размерности физических фракталов, различные методы приводят к различным результатам. Нет оснований отдать предпочтение одному из существующих методов, так как численные значения размерности, полученные тем или иным методом, коррелируют между собой и отражают особенности исследуемых поверхностей. Поэтому даже для близких по своей природе объектов нельзя рассматривать фрактальную размерность объекта как его характерное свойство, ничего не говоря об используемом методе измерения этой размерности.

Подобные трудности связаны с общим алгоритмом оценки фрактальной размерности: исследуемое пространство делят на небольшие сферы (кубы), подсчитывают наименьшее число сфер, необходимых для покрытия интересующего нас множества точек, и получают меру величины множества. Таким образом, масштабный уровень  $\varepsilon$  и выбор покрытия существенно повлияют на показатель фрактальной размерности.

Отметим важное и принципиальное обстоятельство: при математическом определении фрактальной размерности структуры, размерность пространства, в котором она рассматривается, не используется, что позволяет избежать введения обобщённых пространств; так, например, Миклашевичем [8] для описания процесса разрушения используется пространство Финслера. Другими словами, фрактальные объекты можно рассматривать как множества точек, вложенные в пространство.

Рассмотрим прямоугольную пластинку (в изотропной среде). Длину и ширину пластинки считаем большими по сравнению с толщиной, которую для удобства принимаем равной единице:  $a \gg 1$ ,  $b \gg 1$ . В пластинке имеется дефект в виде прямолинейной сквозной трещины малой длины  $2l$  ( $l \ll a$ ,  $l \ll b$ ). На масштабе  $\approx 10^{-6}$  поверхности, образующие полость трещины, имеют шероховатость, которая в каждом сечении поверхностей характеризуется фрактальной размерностью  $\alpha$  (рис. 5). Пластинка равномерно растягивается в ортогональном к плоскости трещины направлении напряжением  $p$ . Требуется оценить величину коэффициента интенсивности напряжений.

Поскольку трещина на макроуровне имеет вид гладкого прямолинейного разреза, воспользовавшись классическим решением линейной механики разрушения и полагая  $p(x) = p = \text{const}$ , получим

$$K_{f1} = \frac{p}{\sqrt{\pi l}} \frac{\Gamma(3/2)(x+l)^{\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha+3/2)(2l)^{1/2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}; \alpha + \frac{3}{2}; \frac{x+l}{2l}\right),$$

где  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  – гипергеометрическая функция.

Для преобразования полученного выражения используем свойство функции  ${}_2F_1(a, b; c; x)$ :

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}$$

при условии  $c-a-b > 0$ ,  $c-a > 0$ ,  $c-b > 0$ .

В итоге, выражение  $K_{f1}$  имеет вид

$$K_{f1} = \frac{p}{\sqrt{l}} \frac{(2l)^\alpha \Gamma(\alpha-1/2)}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)}$$

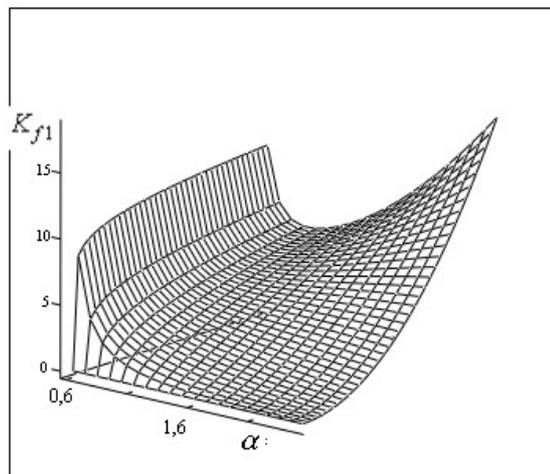


Рисунок 6 – Зависимость  $K_{f1}$  от  $l$  и  $\alpha$

Графическая интерпретация зависимости величины  $K_{f1}$  макроскопической трещины и фрактальной размерности  $\alpha$ , характерной для микроуровня, представлена на рис. 6.

Если в (2) положить  $\alpha = 1$ , то получим классическое выражение соответствующее одномерному разрезу, т.е.

$$K_{f1} = K_1 = p\sqrt{\pi l}$$

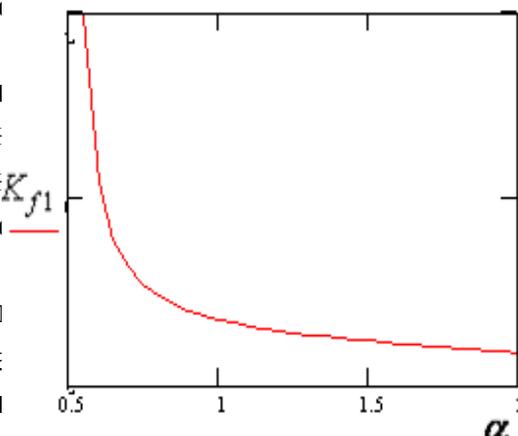


Рисунок 7 – Зависимость  $K_{f1}$  от фрактальной размерности  $\alpha$  модельной трещины

Анализируя зависимость (2) при фиксированных  $p$  и  $l$  (рис. 7), отметим, что с увеличением фрактальной размерности (шероховатости, изрезанности контура трещины на микроуровне) происходит снижение интенсивности напряжений в окрестности концентраторов напряжения. Полученный вывод в полной мере согласуется с положениями материаловедения.

### Построение оценки «длины» шероховатого контура

При моделировании на микроуровне профиля реальной трещины фрактальной кривой возникает проблема нахождения «длины» фрактального контура. Воспользуемся аналогией и обратимся к методам введения геометрической информации в алгоритм решения задач по исследованию явлений, связанных с взаимодействием электромагнитных волн с фрактальными контурами и поверхностями. Достаточно простым приёмом ввода геометрической информации в алгоритм решения краевой задачи является аппроксимация некоординатных границ покрытиями простыми компактами: отрезками, прямоугольниками, кругами, эллипсами, шарами и т.д. Применение такой аппроксимационной техники к спрямлению контуров и поверхностей с использованием конструктивных (а не традиционных аксиоматических) определений длины по Минковскому или по Хаусдорфу позволяет обобщить постановку и решение краевых задач для фрактальных (физически шероховатых, изрезанных, пористых и т.п.) контуров и получить предельные переходы к классическим результатам, соответствующим идеальным гладким моделям.

Следует отметить, что определения длины по Минковскому и Хаусдорфу на классе всех спрямляемых простых дуг эквивалентны классическому определению длины, но, несмотря на большую общность, длина в смысле Минковского (или Хаусдорфа), рассматриваемая на всем классе спрямляемых множеств, вряд ли может считаться «геометрической» длиной. Тем не менее, эти определения обладают рядом важных преимуществ, и самое главное из них: они значительно расширяют класс множеств, относительно которых можно говорить, что они имеют конечную «длину».

Как известно, обычную кривую можно измерить, определяя число  $N(\delta)$  прямолинейных отрезков длины  $\delta$ , необходимых для того, чтобы покрыть ее. Для обычной кривой  $N(\delta) = L_0/\delta$ , а длина кривой определяется предельным переходом

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} L_0 \delta^0, \quad \delta > 0.$$

Множеству точек кривой можно поставить в соответствие и площадь, а также объём (рис. 8).

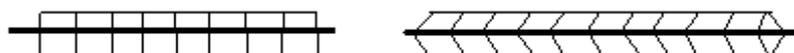


Рисунок 8 – Покрытие кривой квадратами и кубами

Указывая число квадратов (кубов)  $N(\delta)$ , необходимых для покрытия, площадь  $A$  (объём  $V$ ) кривой можно записать

$$A = N(\delta)\delta^2 \sim L_0\delta^1, \quad V = N(\delta)\delta^3 \sim L_0\delta^2, \quad \text{для } \delta \rightarrow 0.$$

Очевидно, для обычной кривой величины  $A$  и  $V$  обращаются в нуль при  $\delta \rightarrow 0$ . Относительно фрактальной кривой (например, сильно изрезанной на микроуровне) можно отметить, что число  $N(\delta)$  растёт как  $C\delta^{-\alpha}$ , где  $C = L_0^\alpha$ , где  $L_0$  – макроскопическая длина рассматриваемой кривой.

Рассмотрим контур, который на некотором участке имеет фрактально распределённые геометрические точки. Предфрактальный покрывающий компакт  $K_n$ , соответствующий модели контура, рассматривается как предел монотонно возрастающей последовательности покрывающих компактов  $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_i \supset \dots \supset K_n$ , которым соответствует последовательность увеличивающихся по длине контуров  $l_0 \supset l_1 \supset l_2 \supset \dots \supset l_i \supset \dots \supset l_n$ .

Построение покрывающих компактов и соответствующих контуров осуществляется следующим образом. Выбирается измеряющий отрезок  $\Delta l_1 < l$  и измеряется этой мерой фрактальный контур. Количество звеньев, которое укладывается на контуре  $l_1$  зависит от диаметра  $l$  всего фрактального множества (расстояние между наиболее удалёнными точками) и  $\Delta l_1$  в виде функции  $N_{\Delta l_1} = f(l / \Delta l_1)$ . Для контура  $l_2$  с измеряющим отрезком  $\Delta l_2 < \Delta l_1$  количество покрывающих звеньев  $N_{\Delta l_2 \Delta l_1} = f(\Delta l_1 / \Delta l_2)$ ; для  $l_3$  с  $\Delta l_3 < \Delta l_1$ :  $N_{\Delta l_3 \Delta l_1} = f(\Delta l_1 / \Delta l_3)$  и т.д., причём,  $N_{\Delta l_1} \sim N_{\Delta l_2 \Delta l_1} = N_{\Delta l_2 l}$ ;  $N_{\Delta l_1} \sim N_{\Delta l_3 \Delta l_1} = N_{\Delta l_3 l}$  и т.д. Таким образом, в результате такого измерения «длины» фрактального контура получаем величину  $A(l, n) = l \sim \Delta l_1 \sim \Delta l_2 \sim \dots \sim \Delta l_{n-1} = N_{\Delta l_{n-1} l} \sim \Delta l_1 \sim \Delta l_2 \sim \dots \sim \Delta l_{n-1}$ . В более удобном виде можно записать

$$L(\Delta l) = N(\Delta l)\Delta l = C_0 (l/\Delta l)^\alpha \Delta l,$$

где  $C_0$  – безразмерная постоянная;  $l$  – макроскопическая длина.

«Длину» фрактального контура можно построить и с помощью обобщения меры величины множества точек в пространстве. Обобщение меры основано на выборе некоторой пробной функции  $h(\delta) = \gamma(\alpha)\delta^\alpha$ , и покрытии множества, образуя меру  $M_\alpha = \int h(\delta)$ . Для прямолинейных отрезков, квадратов и кубов геометрический коэффициент  $\gamma(\alpha) = 1$ , для кругов  $\gamma = \pi/4$  и для сфер  $\gamma = \pi/6$ . В общем случае, при  $\delta \rightarrow 0$  мера  $M_\alpha$  равна нулю или бесконечности в зависимости от выбора  $\alpha$ -размерности меры. Размерность Хаусдорфа-Безиковича  $D$  некоторого множества, есть критическая размерность, при которой мера  $M_\alpha$  изменяет своё значение с нуля на бесконечность:

$$M_\alpha = \int \gamma(\alpha)\delta^\alpha = \gamma(\alpha)N(\delta)\delta^\alpha \sim \delta^{D-\alpha}, \quad \alpha > D, \\ \sim \delta^{D-\alpha}, \quad \alpha < D.$$

Таким образом,  $M_\alpha$  –  $\alpha$ -мера множества. Значение  $M_\alpha$  при  $\alpha = D$  часто конечно, но может быть равно нулю или бесконечности; существенно, при

каком именно значении  $\alpha$  величина  $M_\alpha$  изменяется скачком. Заметим, что в приведённом выше определении размерность Хаусдорфа-Безиковича фигурирует как локальное свойство в том смысле, что эта размерность характеризует свойства множеств точек в пределе при исчезающем малом диаметре, или размере,  $\delta$  пробной функции, используемой для покрытия множества. Следовательно, определённая таким способом фрактальная размерность  $D$ , может рассматриваться как локальная характеристика множества, и выступать как параметр для оценки прочностных характеристик в локальной зоне вблизи вершины трещины (если эта зона обладает фрактальными особенностями).

Мера  $M_\alpha$  позволяет отразить существенные различия в свойствах множеств нетривиальной (отличной от 0 и бесконечности) меры для целых и дробных  $\alpha$  в терминах самой меры. Это обстоятельство принципиально важно при оценке «длины» фрактальной трещины, так как степень шероховатости или изрезанности непосредственно определяет величину фрактальной размерности, которая, в свою очередь, учитывается при построении меры.

Используя обобщение меры величины множества, основанное на выборе некоторой пробной степенной функции, определим протяжённость множества, которое составляет суть фрактального контура.

На фрактальном контуре размерности  $\alpha$ , вводим меру Хаусдорфа с покрытием соответственно  $\alpha$  – мерными компактами, тогда, принимая во внимание, что  $N(\delta) = (l/\delta)^\alpha$ , где  $l$  – макроскопическая длина контура (топологическая длина) протяжённость контура составит

$$L_\alpha = \gamma(\alpha) \delta^\alpha = \gamma(\alpha) N(\delta) \delta^\alpha = \gamma(\alpha) l^\alpha \quad (3)$$

Отметим важное обстоятельство – фрактальная «длина» не обладает свойством аддитивности. Это несложно показать, рассмотрев два фрактальных разреза с одной и той же размерностью  $\alpha$ , но разными макроскопическими длинами  $l_1$  и  $l_2$ . Тогда, принимая во внимание (3), длины фрактальных разрезов примут вид

$$L_{1_\alpha} = \gamma(\alpha) l_1^\alpha, \quad L_{2_\alpha} = \gamma(\alpha) l_2^\alpha$$

Рассмотрим теперь фрактальный разрез с макроскопической длиной  $l_1 + l_2$ :

$$L = \gamma(\alpha) (l_1 + l_2)^\alpha$$

Очевидно, при  $\alpha > 1$ :  $(l_1 + l_2)^\alpha > l_1^\alpha + l_2^\alpha$ , а следовательно,

$$L > L_{1_\alpha} + L_{2_\alpha}$$

При использовании конструктивного подхода при оценке длины шероховатого на микроуровне контура появляется возможность обобщить решение ряда задач механики разрушения для трещин, профиль которых на микроуровне обладает фрактальными особенностями (физическая шероховатость, изрезанность, пористость и т.п.).

## Приложение теории интегро-дифференциального исчисления дробного порядка к математическому описанию синергетической модели фрактальной трещины

Для описания профиля уже образовавшейся трещины следует выбирать фрактальный объект, размерности  $1 < \alpha < 2$ , который описывается непрерывной, но при этом не дифференцируемой в каждой точке функцией. Частично эту проблему можно решать, вводя на фрактальных разрезах меры дробного порядка, используя при этом математическое определение меры Хаусдорфа. Наличие равномерной меры позволит применять интегрирование; однако математического аппарата интегрирования (и дифференцирования) целого порядка становится недостаточно, так как с его помощью достаточно сложно описать структуры с размерностью дробного порядка. Для этой цели обратимся к дифференциальному аппарату дробного исчисления, с помощью которого появляется возможность осуществить фрактальный подход к решению задач механики разрушения. Рассмотрим, необходимые для дальнейшего изложения, определения дробных интегралов и производных.

Для  $n$ -кратного интеграла известна формула

$$\int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x \varphi(t) dt dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt,$$

доказательство которой легко провести методом математической индукции. Заметив, что  $(n-1)! = \Gamma(n)$ , видим, что правой части последнего выражения можно придать смысл и при нецелых значениях  $n$ . Поэтому естественно определять интегрирование нецелого порядка следующим образом.

Пусть  $\varphi(x) \in L_1(a, b)$ , интегралы

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha} \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a; \\ (I_{b-}^{\alpha} \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\alpha > 0$ , называются интегралами дробного порядка  $\alpha$  (дробными интегралами Римана – Лиувилля). Первый из них – правосторонний, второй – левосторонний.

Дробное дифференцирование рассматривают как операцию, обратную дробному интегрированию. Для функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , дробные производные порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , (производные Римана – Лиувилля), соответственно левосторонняя и правосторонняя, имеют вид

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha}}, \\ D_{b-}^{\alpha} f(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Если  $f(x) \in AC([a, b])$  функция  $f(x)$  имеет всюду производные  $D_{a+}^\alpha f(x)$  и  $D_{b-}^\alpha f(x)$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Для случая  $\alpha$ : если  $\alpha$  – целое число, то под дробной производной порядка  $\alpha$  понимают обычное дифференцирование; если же  $\alpha$  – не целое, то

$$D_{a+}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1$$

$$D_{b-}^\alpha f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Как было отмечено ранее, универсальным элементом покрытия для фрактальных кривых может служить  $\alpha$ -мерный шар с объёмом, определяемым как  $\alpha$ -мерная мера Хаусдорфа ( $t$  – диаметр шара)

$$h(t) = \gamma(\alpha) t^\alpha, \quad \text{где} \quad \gamma(\alpha) = \frac{\Gamma^\alpha(1/2)}{2^\alpha \Gamma(1 + \alpha/2)}, \quad 2 < \alpha < 3. \quad (5)$$

Выражение (5) при  $1 < \alpha < 2$  можно рассматривать как  $\alpha$ -мерную площадь сечения шара, а для  $0 < \alpha < 1$  – как  $\alpha$ -мерную длину диаметра.

С другой стороны,  $\alpha$ -мерную меру можно получить обычным интегрированием ( $\alpha-1$ )-меры

$$h(t) = \alpha \gamma(\alpha) \int_0^t \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}}$$

С учётом выражения (4), энтропийную меру Хаусдорфа можно записать в виде

$$h(t) = \alpha \Gamma(\alpha) \gamma(\alpha) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\mu(\alpha)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx = I_{0+}^\alpha(\mu(\alpha)), \quad (6)$$

где  $I_{0+}^\alpha(\mu(\alpha))$  – интеграл дробного порядка  $\alpha$  от функции  $\mu(\alpha) = \alpha \Gamma(\alpha) \gamma(\alpha)$ .

Из выражения (6) следует, что  $\alpha$ -мерная мера Хаусдорфа геометрического фрактального объекта может строиться с использованием операции дробного интегрирования ( $\alpha-1$ )-меры. Скейлинговый показатель  $\alpha$  характеризует локальные свойства измеряемого фрактального множества.

Геометрически выражение (6) можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим участок  $(0, t)$  вдоль оси  $Ox$  некоторого плоского фрактального контура размерности  $\alpha$ . «Длине» фрактального участка на интервале  $(0, t)$  ставится в соответствие площадь криволинейной трапеции

образованной функцией  $\frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}}$ , другими словами, происходит некоторое «сглаживание» шероховатого участка рассматриваемого контура (рис. 9).

Таким образом, после «сглаживания» участок  $(0, t)$  на макроуровне имеет вид гладкой кривой, что делает возможным использование фрактальной модели реальной трещины к описанию процесса разрушения в рамках линейной механики.

### **Сравнительный анализ разработанного фрактального подхода**

Сравним рассмотренный выше фрактальный подход и полученные при этом основные положения с концепцией математического описания процесса разрушения, предложенной Миклашевичем [8]. Для описания геометрических особенностей реального разрушения им было использовано обобщённое пространство Финслера. Рассматривая с геометрической позиции процессы упругого деформирования, происходящие в идеальном кристалле, он описал их как процессы в римановом пространстве с положительно определённой метрикой, не зависящей от направления. Элемент длины в этой метрике имеет вид:

$$dl^{(r)} = \sqrt{r g_{ij} \frac{dx^{(r)i}}{dt} \frac{dx^{(r)j}}{dt}},$$

где  $r$  при переменных обозначает пространство Римана;  $x^i, x^j$  – текущие координаты точки;  $t$  – натуральный параметр кривой (в случае распространения трещины натуральным параметром выбирают длину трещины); индексы пробегает значения от 0 до размерности пространства.

Для среды с микроструктурой метрика зависит не только от положения сопутствующей системы координат, но и от векторного поля, связанного с дефектами. Кроме того, на основании физического смысла задачи, геометрические свойства зависят также от направления движения в этом пространстве и не только от определяющих характеристик пространства, но и от скоростей. Фрактальная размерность трещины определяется Миклашевичем как отношение длин траектории в пространстве Финслера и римановом пространстве.

Таким образом, привлечение энтропийной меры Хаусдорфа к получению оценки длины фрактального контура позволяет сделать это наиболее простым и наглядным способом. Используя конструктивное определение «длины» к описанию протяжённости фрактальных объектов появляется возможность осуществить фрактальный подход к задачам механики разрушения твёрдых тел, не привлекая специальные пространства.

Из приведённого выше можно сделать следующие обобщения:

- поскольку предложенный фрактальный подход основан на построении «сглаживающей» энтропийной меры, его применение к решению задач механики разрушения твёрдых тел позволит рассматривать фрактальные трещины как структуру, вложенную в евклидово пространство и, таким образом, не придётся определять расстояния между точками в пространстве, в котором формируется реальная трещина, а также не придётся вводить специальную метрику;

- «сглаживание» фрактальной шероховатости трещины на микроуровне позволит на макроуровне рассматривать её как одномерную гладкую трещину и, таким образом, появляется возможность расширить область применения линейной механики на трещины, приближенные к реальным;
- привлечение интегро-дифференциального аппарата дробного исчисления к разработке фрактального подхода позволило получить выражение для оценки реальной длины трещины; «длине» фрактального контура, с помощью построения  $\alpha$ -мерного покрытия, ставится в соответствие площадь криволинейной трапеции образованной функцией порядка  $\alpha-1$ .

### **Фрактальное обобщение энергетической концепции разрушения твёрдых тел**

На основе фрактального подхода проведём энергетическую оценку процесса разрушения по деформационным признакам. Известно, что режим разрушения представлен следующими видами деформаций: упругой, упруго-пластической, упруго-вязкой, пластической и т.д. Каждому виду деформации свойственен свой энергетический потенциал.

Один из способов учёта фрактальной особенности диссипации энергии в зоне формирования трещины – это введение поправок, непосредственно связанных с фрактальным характером выделения энергии, в балансовое уравнение Гриффитса. Продемонстрируем это на решении модельных задач механики разрушения для случая трещин, которые на микроуровне имеют фрактальные геометрические особенности.

**Связь величины параметра  $\alpha$  с физическими макровеличинами: статической вязкостью разрушения и пределом прочности бездефектного материала.** При рассмотрении квазихрупких трещин на каждом масштабном уровне длина фрактальной трещины подчинена закону

$$L = (l/d)^D d, \quad (7)$$

где  $D$  – фрактальная размерность поверхности разрушения, определяемая, как правило, одним из экспериментальных методов;  $d$  – характерный масштабный параметр, который для каждого уровня, на котором исследуется процесс разрушения, определяется с помощью соотношения:

$$d = \frac{2}{\pi} \frac{K_{Ic}^2}{\sigma_c^2}, \quad (8)$$

где  $\sigma_c$  – предел прочности бездефектного материала;  $K_{Ic}$  – статическая вязкость разрушения, определяемая на макромасштабе для прямолинейной трещины  $\omega = \pi$  длины  $2a$ .

Из выражений (3) и (7) следует, что параметр  $\alpha$ , определяющий размерность меры покрытия шероховатых участков трещины на некотором масштабном уровне  $d$  (принятом в механике разрушения), является одновременно и фрактальной размерностью  $D$  этих участков. При этом, полагая, что на одном и том же масштабном уровне оба выражения должны давать одинаковую оценку длины фрактального участка, запишем

$$d^{1-\alpha} = \frac{\pi^{\alpha/2}}{2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)} \quad (9)$$

Таким образом, для оценки величины параметра  $d$  получаем выражение, учитывающее только фрактальную размерность поверхности разрушения

$$d = \frac{\pi^{\alpha/2(1-\alpha)}}{2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + 1\right)} \quad (10)$$

Приравнивая правые части (8) и (10), получим неявное выражение для оценки размерности  $\alpha$  через экспериментально определяемые на макроскопическом уровне физические величины

$$\frac{\pi^{\alpha/2(1-\alpha)}}{2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + 1\right)} = \frac{2}{\pi} \frac{K_{lc}^2}{\sigma_c^2}$$

**Задача о накоплении повреждений.** С целью описать процесс накопления повреждений при квазихрупком разрушении, Л.М. Качановым было введено понятие параметра сплошности среды  $\varpi$  или параметра поврежденности (разрыхления). Как известно, эта величина характеризует изменение площади поперечного сечения образца при его разрушении в условиях неупругой деформации, которая увеличивается со временем под действием постоянного напряжения при постоянной температуре.

С помощью параметра поврежденности  $\varpi$  Ю.Н. Работновым было предложено кинетическое уравнение поврежденности

$$\frac{d\varpi}{dt} = f(P, \varpi) \quad (11)$$

где  $P$  – величина постоянной приложенной нагрузки. Критерием разрушения выбирается условие

$$\varpi|_{t=t_*} = 1 \quad (12)$$

где  $t_*$  – время до разрушения образца.

Очевидно, для однозначного решения уравнения (11) необходимо сформулировать начальное условие. В реальном материале до приложения нагрузки всегда имеется определённый уровень поврежденности. Однако, как правило, в континуальной механике разрушения, до приложения нагрузки материал считают абсолютно бездефектным, т.е.

$$\varpi|_{t=0} = 0 \quad (13)$$

Используя фрактальный подход и, привлекая непосредственно синергетическую модель формирующейся поверхности разрушения, покажем, что условие (13) не отвечает начальному состоянию реального образца.

Решим задачу о накоплении повреждений в твёрдом теле, при этом будем придерживаться обобщённой энергетической концепции Гриффитса.

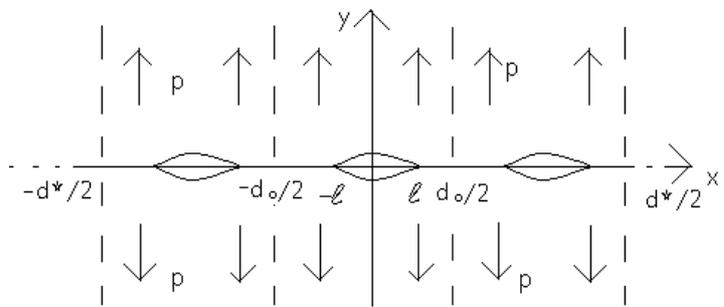


Рисунок 10 – Периодическая система микротрещин

Пусть вдоль оси  $y$  упругая изотропная плоскость растягивается на бесконечности равномерной нагрузкой величины  $p$ . При этом вдоль оси  $x$  образуется поверхность разрушения, представляющая собой систему микротрещин (рис. 10).

Рассмотрим разрушения внутри произвольной, достаточно широкой полосы  $-d_*/2 \leq x \leq d_*/2$ . Пусть  $d_0$  – период системы и в рассматриваемую полосу попало  $N$  трещин одинаковой длины  $2l$ . Очевидно, разрушение материала можно представить как рост числа периодов  $N$  с одновременным увеличением относительной длины трещин  $2l/d_0$  внутри этих периодов. Величина относительной длины трещин может быть интерпретирована как параметр поврежденности

$$\varpi = \frac{2l}{d_0}, \quad (14)$$

а выполнение условия (12) соответствует разрыву полосы, т.е. слиянию всех трещин в один разрез.

Суммарная элементарная работы по формированию поверхности разрушения внутри рассматриваемой полосы

$$\Delta W = NW_1 = -\frac{p^2 d_* d_0 (1-\nu)}{\mu_0} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\pi\varpi/2)} - 1 \right),$$

где  $\mu_0 = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль сдвига;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

В случае развитого разрушения  $\varpi \rightarrow 1$  и, следовательно,

$$\Delta W = -\frac{2p^2 d_* d_0 (1-\nu)}{\pi \mu_0 (1-\varpi)}. \quad (15)$$

Для того чтобы записать выражение для потенциальной энергии, формирующейся поверхностью разрушения на масштабе  $10^{-6}$  будем представлять в виде фрактального множества с размерностью  $\alpha$  из интервала  $(0, 1)$  (рис. 11).

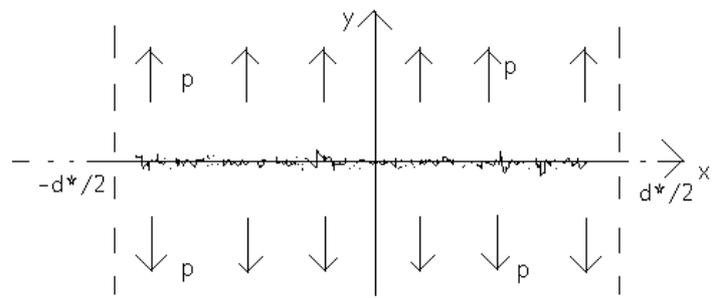


Рисунок 11 – Фрактальная модель формирующейся трещины

Случай  $\alpha = 0$  соответствует бездефектному состоянию материала, а  $\alpha \geq 1$  – образованию поверхности разрушения.

Оценку длины реальной трещины внутри полосы  $-d_*/2 \leq x \leq d_*/2$  запишем в виде

$$L = \frac{(\Gamma(1/2))^\alpha d_*^\alpha}{2^\alpha \Gamma(1 + \alpha/2)}$$

Тогда

$$\Delta\Pi = -2\gamma \frac{(\Gamma(1/2))^\alpha d_*^\alpha}{2^\alpha \Gamma(1 + \alpha/2)} \quad (16)$$

В соответствии с энергетическим балансовым уравнением Гриффитса, учитывая (15) и (16), для критической нагрузки запишем

$$p^2 = \gamma \frac{\pi \beta (1 - \varpi) N (\Gamma(1/2))^\alpha}{2^\alpha d_*^{2-\alpha} (1 - \nu) \Gamma(1 + \alpha/2)} \quad (17)$$

Отметим важность полученного выражения: соотношение (17) представляет однозначную зависимость нагрузки, вызывающей разрушение, от параметра поврежденности  $\varpi$ , числа периодов  $N$  системы трещин, возникающих на определённой стадии разрушения, и фрактальной размерности  $\alpha$  образующейся при этом поверхности. Другими словами, для каждого уровня нагрузки фрактальная размерность формирующейся поверхности разрушения определяет для этой поверхности степень поврежденности. Действительно, с помощью выражения (9) формула (17) примет вид

$$p^2 = \gamma \frac{\pi \beta (1 - \varpi) N d^{1-\alpha}}{d_*^{2-\alpha} (1 - \nu)} = C (1 - \varpi) N \frac{d^{1-\alpha}}{d_*^{2-\alpha}},$$

где

$$C = \gamma \frac{\pi \beta}{d_* (1 - \nu)}$$

Таким образом, для параметра поврежденности имеем

$$\varpi = 1 - \frac{1}{CN} p^2 \frac{d^{1-\alpha}}{d_*^{2-\alpha}} \quad (18)$$

Очевидно, в момент разрушения полосы, система трещин сливается в сплошной разрез, т.е. можно полагать:  $\alpha \rightarrow 1$  и  $N \rightarrow \infty$ . Как следует из

выражения (18), в этом случае  $\varpi = 1$ , что полностью отвечает критерию разрушения (12).

Интересно отметить, равенство  $\alpha = 0$  предполагает, что в наблюдаемой полосе не должно быть ни единого микроповреждения т.е.  $N \rightarrow 0$ , что совершенно не возможно даже при самых современных технологиях изготовления материалов, поэтому выражение (18) следует рассматривать для случаев  $0 < \alpha < 1$ . Таким образом, возвращаясь к начальному условию (13) кинетического уравнения поврежденности (11), приходим к заключению, что оно не соответствует начальному состоянию реального материала и поэтому требует доработки.

Проведённые эксперименты [3] по выявлению существования зависимости между величиной растягивающей нагрузки и величиной фрактальной размерности формирующейся поверхности разрушения однозначно указывают на её существование. Используя фрактальный подход, появляется возможность сделать оценку этой зависимости. С помощью выражений (14) и (18) зависимость фрактальной размерности формирующейся поверхности разрушения  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) от величины приложенной растягивающей нагрузки  $p$  принимает вид

$$\alpha = 1 - \frac{\ln \frac{CN - \frac{2l}{d_0}}{p^2}}{\ln \frac{d_*}{d}} = 1 + \log_{\frac{d_*}{d}} \frac{p^2}{\frac{\pi \varpi \sigma}{d_* (1-\nu)} N - \frac{2l}{d_0}}$$

Поскольку  $d_*/d < 1$ , последнее выражение явно указывает на тот факт, что при увеличении приложенной растягивающей нагрузки  $p$ , фрактальная размерность формирующейся трещины будет также возрастать, что качественно совпадает с результатами экспериментов.

**Фрактальный анализ резин при длительном циклическом разрушении.** Резины и резиноподобные материалы относятся к упруго-наследственным средам. Известно, что их разрушение представляет собой процесс множественного зарождения и развития микротрещин: в период рассеянного разрушения вплоть до появления макротрещин происходит зарождение, движение, рост и агрегация различного рода дефектов. Все это позволяет в качестве количественной меры накопления таких дефектов использовать функцию поврежденности, вид которой зависит от физико-механических характеристик материала, механизма разрушения, влияния внешней среды и т.д. При этом разрушение, безусловно, имеет вероятностную природу, а сам процесс накопления повреждений автомоделен, т.е. подобен самому себе. Поэтому вполне очевидно, что в последнее время в качестве математического аппарата стали использовать аппарат теории множеств дробной размерности – фракталов. В рамках этой модели процесс накопления дефектов рассматривается как развитие самоподобного фрактального кластера,

а начало его лавинообразного роста обычно интерпретируется как начало появления макротрещин.

Ниже рассматривается одна из важнейших сторон механики разрушения – фрактальный анализ поверхности разрушения массивных резиновых образцов при их длительном циклическом нагружении. Использование фрактальной трактовки разрушения здесь вполне уместно по следующим причинам. Для резин при циклическом нагружении поверхность макротрещин имеет нерегулярную структуру с наличием различного рода неровностей. Важной особенностью такой поверхности является статическое самоподобие рельефа поверхности; при этом свойство самоподобия сохраняется на макро-, мезо- и микроуровнях. Все это позволяет моделировать такую нерегулярную структуру фрактальными поверхностями.

Изложим имеющуюся экспериментальную информацию в рассматриваемом контексте в виде кратких эмпирических обобщений.

1. Наблюдаемая экспериментально кинетика разрушения твёрдых тел обусловила важное эмпирическое обобщение: макроразрушению материала можно рассматривать как процесс множественного микроразрушения; возникновению магистральной трещины предшествует длительный период накопления повреждаемости. В резинах это особенно хорошо проявляется при длительных (нескольких лет) циклических нагрузках. В течение этого периода происходит вероятностный процесс зарождения, движения, роста и агрегации микродефектов самого различного вида: пор, субмикротрещин, микротрещин и т.д. При этом процесс развития микродефектов автомоделен, т.е. подобен самому себе: в процессе разрушения изменяются лишь размерные параметры, а безразмерные характеристики микродефектов, например, форма кривой распределения их числа по размерам, остаются без изменений. Фрактограммы поверхности разрушения резин, показанные на рис. 12, подтверждают локальную автомоделность на микро- и макроуровнях.

2. Таким образом, в процессе разрушения как микродефектов растёт самоподобный кластер. Наблюдаемый в резине реальных условиях фрактальный кластер отражает динамику процесса разрушения, создан случайному закону и первый взгляд им совершенно неупорядоченную структуру. Тем не менее исследование показывают, что кластер обладает строгой

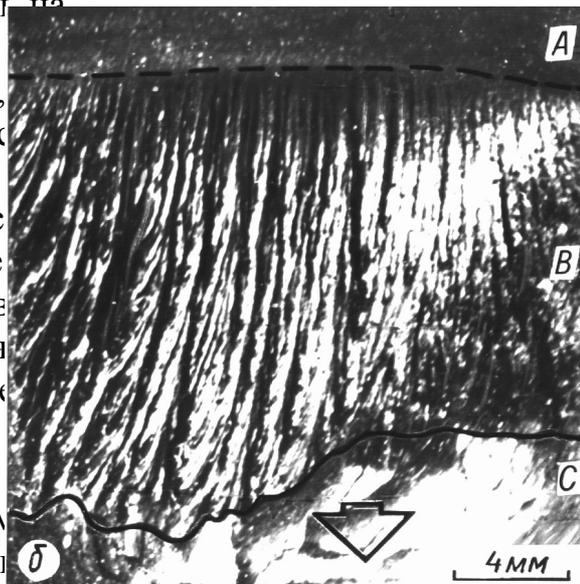


Рис. 12. Фрактограмма поверхности усталостного разрушения

иерархией структуры и имеет внутренний порядок, являющийся фрактальной размерностью кластера.

Как известно, реальная поверхность разрушения резин имеет шероховатую, нерегулярную структуру, отражающую динамику процесса разрушения. При этом несмотря на кажущуюся хаотичность, поверхность разрушения резины обладает свойствами самоподобия на микро- и макроуровнях. Если площадь  $S$  такой самоподобной (автомодельной) поверхности покрыть квадратами со стороной  $R_0$ , то она будет пропорциональна

$$S = (R/R_0)^{d_f-2},$$

где  $d_f$  – фрактальная размерность Хаусдорфа – Бесиковича.

Для гладких поверхностей разрушения (в резине они при циклическом разрушении не наблюдаются)  $d_f = d - 1$  и при  $d = 3$  (евклидово пространство)  $d_f = 2$ .

Как отмечалось выше, методы фрактального анализа позволяют получить обобщённые соотношения между механическими характеристиками резины и параметрами её структуры. Испытываемые резиновые образцы имели евклидову размерность  $d = 3$ ; их фрактальная размерность изменялась в пределах  $2 \leq d_f \leq 3$ . Установлено, что именно дробная часть  $d_f$  отражает отклонение структуры реального тела от классического евклидова тела, а величина фрактальной размерности поверхности разрушения  $d_p$  показывает отличие реальной поверхности разрушения ( $d_p > 2$ ) от идеализированной линейной. Если в линейной механике разрушения размерность плоскости принята  $d_p = 2$ , то в реальных поверхностях разрушения всегда  $d_p > 2$ .

Для композитных материалов с квазивязким разрушением Баланкин А.С. получил выражение, связывающее фрактальную размерность с коэффициентом Пуассона

$$d_p = \frac{2(1+4\nu)}{1+2\nu}.$$

При  $\nu = 0,5$  величина  $d_p = 2$  соответствует гладкой поверхности (линейный процесс разрушения).

Коэффициент Пуассона может быть определён при испытании образцов на объёмное сжатие. В этом случае можно использовать выражение вида

$$\frac{\sigma_e}{E} = \frac{1-2\nu}{6(1+\nu)},$$

где  $\sigma_e$  – предел вынужденной эластичности.

Полученная при фрактографической оценке поверхность разрушения образца (рис. 12) соответствовала времени нагружения  $t = 31350$  часов и отмечалась полосчатостью, т.е. чередованием усталостных бороздок в виде темных и светлых зон.

Для фрактального анализа поверхности разрушения воспользуемся экспериментальным приёмом Б. Мандельброта. Мандельброт Б. исследовал поверхность разлома металлов; по его мнению, такая поверхность разрушения

является поверхностью с локальной фрактальной размерностью, она обладает самоподобием и для неё можно использовать соотношения периметра и площади в виде

$$L(\delta) \sim [S(\delta)]^{d_p/2}$$

$$d_p = 2 \lg L(\delta) / \lg S(\delta)$$

или

где  $d_p = d - 1$  (здесь, как и выше,  $d_p$  – фрактальная размерность поверхности разрушения);  $L$  – длина «береговой линии» шероховатой или светлой зоны на фрактограмме;  $S$  – площадь этих зон;  $\delta$  – шаг измерения или так называемый «эталон».

На рис. 13 показано соотношение периметра и площади шероховатых зон; длина «береговой линии» (периметр) и площадь измерялись с помощью эталона длины  $\delta = 1$  мм при десятикратном увеличении. Аппроксимация зависимости  $L \sim S^{d_p/2}$  даёт фрактальную размерность  $d_p = 1,98$ ; из этого следует, что в диапазоне исследуемых масштабов поверхность разрушения имеет размерность  $d_f = 2,98$ .

Представляет определённый интерес использовать полученные результаты для определения коэффициента Пуассона «разрыхлённой» резины

$$\nu = \frac{d_f}{d-1} - 1 = \frac{2,98}{3-1} - 1 = 0,490$$

При независимых экспериментальных исследованиях  $\ln S$  ↑ (объёмное сжатие цилиндрического образца диаметром 20 мм и высотой 15 мм из резины с наработкой  $t = 31350$  часов) получена величина  $\nu = 0,492$ , которая находится в хорошем согласии с этой величиной.

Для неразрушенной резины при  $t = 0$  было получено значение коэффициента Пуассона  $\nu = 0,499$  и, следовательно, фрактальная размерность образца  $d_f = 2,998$ .

Как видно, метод фрактальной оценки поверхности разрушения позволяет определить макроструктурные характеристики резины по значениям микроструктурных параметров материала без каких-либо подгоночных коэффициентов. Результаты исследований свидетельствует о том, что процесс разрушения резины является нелинейным; по-видимому, в локальных зонах, т.е. в зонах интенсивного разрушения материала (в данной работе их можно отождествлять с магистральными трещинами) нелинейность процесса будет больше, чем в среднем по образцу.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булат А.Ф., Дырда В.И. Фракталы в геомеханике. – К.: Наук. думка, 2005. – 358 с.
1. Булат А.Ф., Дырда В.И. Фрактальная природа разрушения эластомеров при длительном циклическом нагружении // Геотехническая механика. – Днепропетровск: Авантаж, 2003. – Вып. 45. – С. 3-22.
2. Щолокова, М.О. Фрактальне узагальнення енергетичного критерію квазікрихкого руйнування твердих тіл: Автореф. дис. канд. техн. наук / М.О. Щолокова. – Запоріжжя, 2007. – 19 с.
3. Щелокова, М.А. Фрактальное обобщение уравнения Гриффитса / М.А. Щелокова // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2004. – №2. – С. 86-89.

4. Щелокова, М.А. Приложение фрактальной геометрии к описанию механизма разрушения / М.А. Щелокова // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет, 2004. – Вип. 8. – С. 137-144.
5. Щелокова, М.А. Исследование фрактальных особенностей вершины трещиноподобного дефекта конструкции / М.А. Щелокова // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет, 2003. – Вип. 7. – С. 134-141.
6. Мосолов, А.Б. Автомоделность и фрактальная геометрия разрушения / А.Б. Мосолов, О.Ю. Динариев // Проблемы прочности. – 1988. – № 1. – С. 3-7.
7. Миклашевич, И.А. Микромеханика разрушения в обобщенных пространствах / И.А. Миклашевич. – Минск: Логвинов, 2003. – 194 с.
8. Турбин, А.Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А.Ф. Турбин, Н.В. Працевитый. – К.: Наукова думка, 1992. – 197 с.

#### REFERENCES

1. Bulat, A.F. and Dyrda, V.I. (2005), *Fraktaly v geomekhanike* [Fractals in geomechanics], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
9. Bulat, A.F. and Dyrda, V.I. (2003), "Fractal nature of destruction of elastomers under prolonged cyclic loading", *Geo-Technical Mechanics*, no. 45, pp. 137-144.
10. Shchelokova, M.O. (2007), "Fractal generalization of the energy criterion for quasi-violent destruction of solids", Abstract of Ph.D. dissertation, National Academy of Sciences of Ukraine, Zaporizhia, Ukraine.
11. Shchelokova, M.A. (2004a), "Fractal generalization of the Griffith equation", *Innovative Materials and Technologies in Metallurgy and Mechanical Engineering*, no. 2, p. 86-89.
12. Shchelokova, M.A. (2004b), "The application of fractal geometry to the description of the mechanism of destruction", *Problems of computational mechanics and strength of structures*, no. 8, p. 137-144.
13. Shchelokova, M.A. (2003), "Investigation of fractal singularities of the vertex of a fracture-like structural defect", *Problems of computational mechanics and strength of structures*, no. 7, p. 134-141.
14. Mosolov, A.B. and Dinariev, O.Yu. (1988), "Self-similarity and fractal geometry of destruction", *Strength of materials*, no. 1, p. 3-7.
15. Miclshевич, I.A. (2003), *Mikromekhanika razrusheniya v obobshchennykh prostranstvakh* [Micromechanics of fracture in generalized spaces], Logvinov, Mink, Belarus.
16. Turbin, A.F. and Pratssevity, N.V. (1992), *Fraktalnyye mnozhestva, funktsii, raspredeleniya* [Fractal sets, functions, distributions], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

#### Об авторах

**Щелокова Марина Александровна**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина, marschel@meta.ua

**Слободян Сергей Борисович**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры общетехнических дисциплин и физики, Подольский государственный аграрно-технический университет, Каменец-Подольск, Украина, sergessb75@gmail.com

**Дырда Виталий Илларионович**, доктор технических наук, профессор, заведующий отделом механики эластомерных конструкций горных машин, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепр, Украина, vita.igtm@gmail.com

#### About the authors

**Schelokova Marina Alexandrovna**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Department of Applied Mathematics in Zaporozhye National Technical University, Zaporizhia, Ukraine, marschel@meta.ua

**Slobodyan Sergey Borisovich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Department of General Technical Disciplines and Physics, State Agrarian and Engineering University in Podilya, Kamianets-Podilskyi, Ukraine, sergessb75@gmail.com

**Dyrda Vitaly Illarionovich**, Doctor of Technical Sciences (D. Sc.), Professor, Head of Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Polyakov of National Academy of Science of Ukraine (IGTM NASU), Dnipro, Ukraine, vita.igtm@gmail.com

**Анотація.** У статті надано огляд по формуванню уявлень про механізми руйнування твердих тіл, починаючи з кінця дев'ятнадцятого століття. Розглядаються ранні роботи А.Ф. Іоффе, А.А. Гриффитса, Ірвіна, Г.В. Колосова та інших. Відзначається популярність критерію руйнування А.А. Гриффитса, заснованого на енергетичному балансі, для розрахунку руху тріщин. Розглядаються також підходи Е.М. Морозова,  $J$ -інтеграл Черепанова-Райса, роботи А.А. Лебедева, В.З. Партон, А.Н. Гузя, І.А. Миклашевича, Г.І. Баранблатта, критерії руйнування Дагдейл, Леонова-Панасюка і т.д. Показано, що для опису мікрособливості реальних тріщин доцільно використовувати фрактальні моделі. Тому розглядаються такі важливі питання як: загальна схема фрактального підходу, узагальнена фрактальна модель реальної тріщини, вплив показника фрактальної розмірності тріщини на величину коефіцієнта інтенсивності напружень, математичний опис синергетичної моделі фрактальної тріщини.

На мікрорівні профіль шорсткої тріщини апроксимується фрактальним об'єктом, на макрорівні тріщина має вигляд гладкого контуру, тому залишаються справедливими класичні постановки задач руйнування, носієм фрактальних мікрособливості тріщини виступає додатковий параметр – фрактальна розмірність. Для оцінки

реальної «довжини» тріщини будується ентропійна  $\alpha$ -мірна міра. За допомогою даного підходу стає можливим фрактальне узагальнення енергетичного критерію руйнування твердих тіл, що містять тріщини, що мають фрактальну особливість на мікрорівні. Величина пружної енергії визначається на макрорівні; поверхнева енергія, необхідна для створення двох фрактальних поверхонь, записується з урахуванням того, що на мікрорівні тріщина має фрактальну шорсткість. Такий підхід дозволяє встановити зв'язок між мікро- і макрорівні, при цьому дозволяє перевести на більш високий рівень формалізації поняття про структуру як такої.

У висновку статті розглядається фрактальне узагальнення енергетичної концепції руйнування твердих тіл. Зокрема, розглядається задача про накопичення пошкоджень і фрактальний аналіз гум при тривалому циклічному руйнуванні. Для конкретної гуми знайдена величина фрактальної розмірності поверхні руйнування: в початковому стані і при напрацюванні більш 30000 годин при екстремальних циклічних навантаженнях. Показано зміну коефіцієнта Пуассона для вихідної гуми і «розпушеної» при тривалому втомленні.

**Ключові слова:** деформація, міцність, фрактал, руйнування, тріщина, енергія руйнування.

**Abstract.** The authors present an overview of how the concept of solid destruction mechanisms has been forming since the end of the nineteenth century. Early works of A.F. Ioffe, A.A. Griffiths, Irvine, G.V. Kolosov and others are considered with focusing on popular Griffiths destruction criterion, which is based on the energy balance and used for calculating the cracks movement. The overview also includes E.M. Morozov approaches, Cherepanov-Rice  $J$ -integral, works of A.A. Lebedev, V.Z. Parton, A.N. Guz, I.A. Miklashevich, G.I. Baranblatt, destruction criteria of Dagdale and Leonov-Panasyuk, and others. It is shown that it is expedient to use fractal models to describe micro-features of real cracks. Therefore, such important issues as: general scheme of fractal approach, generalized fractal model of real crack, effect of the crack fractal dimension on value of the stress intensity factor, mathematical description of synergetic model of the fractal crack are considered.

At the microlevel, profile of rough crack is approximated by fractal object; though at the macro level, the crack features a smooth contour. Therefore, classical formulations of fracture problems remain valid, and additional parameter - fractal dimension – is a carrier of the fractal micro-features of the crack. For estimating real “length” of the crack, an entropic  $\alpha$ -dimensional measure was constructed. With the help of this approach, fractal generalization of energy criterion for destruction of crack-contained solids with fractal specificity at the micro level becomes possible. Rate of elastic energy is determined at the macrolevel; surface energy needed for creating two fractal surfaces is recorded with taking into account the fact that at the microlevel, the crack features fractal roughness. Such approach makes it possible to establish a link between micro- and macrolevels, and allows the concept of structure as such to be translated to the higher level of validation.

In the conclusion of the article, fractal generalization of the energy concept of solid destruction is considered. In particular, a problem of damage accumulation and fractal analysis of rubbers during long cyclic destruction is considered. Fractal dimension of the fracture surface was found for the concrete rubber in its initial state and after operation under extreme cyclic loading for more than 30,000 hours. A change of Poisson's ratio for original rubber and rubber “loosened” due to prolonged fatigue is shown.

**Keywords:** deformation, strength, fractal, destruction, crack, fracture energy.

*Стаття поступила в редакцію 12.12.2017*

*Рекомендовано к печати д-ром техн. наук В.Г. Шевченко*