МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Т.С. Кагадій, І.В. Щербина, О.Д. Онопрієнко

РЯДИ: ТЕОРІЯ, ПРИКЛАДИ, РОЗВ'ЯЗАННЯ

Навчальний посібник

Дніпро 2021

УДК 517 (075.8)

Рекомендовано вченою радою Дніпровського державного аграрно-економічного університету як навчальний посібник для здобувачів вищої освіти з інженерних спеціальностей. Протокол № 8 від 29 квітня 2021 р.

Рецензенти:

А.Є. Шевельова, д. ф.-м. н., професор (професор кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара);

С.В. Зданевич, к.т.н., доцент (доцент кафедри теоретичної механіки, опору матеріалів та матеріалознавства ДДАЕУ)

Кагадій Т.С. Ряди: теорія, приклади, розв'язання/ Т.С. Кагадій, І.В. Щебрина, О.Д. Онопрієнко; Міністерство освіти і науки України, Дніпровський державний аграрно-економічний університет – Дніпро: ДДАЕУ, 2021. – 126 с.

Навчальний посібник містить теоретичні відомості та практичні завдання з теми «Ряди». Докладні розв'язання, вказівки, відповіді, додатковий теоретичний матеріал, велика кількість прикладів для самостійної роботи, завдання підвищеної складності дозволяють використовувати посібник для усіх видів занять, а також при підготовці студентів до олімпіад з вищої математики.

ЗМІСТ

ВСТУП

Найбільш ефективна та одночасно найбільш складна форма засвоєння математичних дисциплін – самостійна робота студента з теоретичними та практичними відомостями. В умовах дистанційного навчання питання забезпечення студентів новим адаптованим навчальним матеріалом є актуальним.

Мета посібника:

- надання студенту можливості ознайомитись з основними теоретичними питаннями, а завдяки великій кількості розв'язаних прикладів, навчитися виконувати різні завдання самостійно;
- сформувати й розвинути математичне мислення студентів, розвити у них практичні навички при розв’язуванні нестандартних задач;
- не виходячи за рамки програми курсу для технічних спеціальностей, допомогти студентам самостійно вивчити нові прийоми та методи розв'язання, а також ознайомитися з деякими теоретичними відомостями.

Навчальний посібник складається з таких розділів: числові ряди, функціональні ряди, степеневі ряди, ряди Фур’є, застосування рядів. Набір завдань підвищеної складності призначений для студентів, які цікавляться вищою математикою і прагнуть поглибити свої знання з цього предмету.

1. ЧИСЛОВІ РЯДИ.
ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОСТАЛИХ РЯДІВ

Ряди є одним з важливих розділів математичного аналізу і мають широке застосування для розв’язання прикладних задач, що розглядаються у низці дисциплін технічного напрямку. Немалий внесок в історію розвитку числових рядів зробили Жан Лерон Даламбер, Огюстен Луі Коші, Карл Фрідріх Гаус, П‘єро Менголі, Йоганн Бернулі, Готфрід Вільгельм Лейбніц.

Дати відповідь на питання, коли вперше з’явилися ряди в математиці неможливо. Вже вавилонські математики вміли сумувати арифметичну і геометричну прогресії. Поняття збіжності числових рядів, мабуть, вперше з’явилось у листі Й. Бернуллі до Г. Лейбніца від 7 квітня 1713 р., де він використав вираз «розбіжний ряд». У відповідь у листі від 28 червня Лейбніц використав вираз «збіжний ряд» майже у сучасному сенсі.

1.1. Деякі загальні поняття

Якщо u_1 , u_2 ,...u_n ,...— нескінченна числова послідовність, то вираз

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називається ***числовим рядом***, а величини u_1 , u_2 ,...— членами цього ряду.

Якщо всі члени ряду є додатними, то ряд називається ***знакододатним***.

Числовий ряд $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається збіжним, якщо існує границя послідовності часткових сум ряду $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ при необмеженому зростанні номеру *n*, цю границю називають сумою ряду: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Якщо границя не існує, ряд називається розбіжним.

1.2. Властивості рядів

1. Якщо в ряді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ відкинути скінченну кількість членів, то це не впливає на збіжність ряду.

2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і має суму S , тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$, де λ – число, також збігається і має суму λS .

3. Якщо збігаються ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma$, то також збігаються ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \pm b_n\right)$ і їх суми дорівнюють $S \pm \sigma$.

4. Необхідна умова збіжності. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то такий ряд розбіжний.

1.3. Достатні ознаки збіжності для знакосталих рядів:

Ознака порівняння. Нехай маємо два знакосталих ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2), причому $a_n \le b_n$ для $N \ge n$. Тоді, якщо ряд (2) збігається, то збігається і ряд (1). Якщо ряд (1) розбігається, то розбігається і ряд (2).

Взагалі, якщо існують ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ і якщо $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ існує і не дорівнює нулю, то ці ряди ведуть себе однаково, тобто, якщо один ряд збігається, то і другий збігається, якщо один розбігається, то і другий розбігається. Найчастіше для порівняння використовується ***узагальнений гармонічний ряд*** (або ***ряд Діріхле***) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Цей ряд збігається, якщо $\boldsymbol{p>1}$, та розбігається у випадку $\boldsymbol{p\le 1}$).

Ознака Даламбера. Якщо для знакосталого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho\begin{cases}\rho<1, \text{ то ряд збігається}\\ \rho>1, \text{ то ряд розбігається}\\ \rho=1, \text{ то ознака не працює, нічого про збіжність}\\ \qquad \text{цього ряду сказати не можна.}\end{cases}$$

Ознака Коші. Якщо $a_n\ge 0\ \left(n\in N\right)$ і

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho, \text{ то }\begin{cases}\rho<1 \text{ ряд збігається}\\ \rho>1 \text{ ряд розбігається}\\ \rho=1 \text{ нічого про збіжність ряду сказати не можна.}\end{cases}$$

Ознака Раабе. Якщо $a_n>0\ \left(n\in N\right)$ і

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\rho, \text{ то }\begin{cases}\rho<1 \text{ ряд збігається}\\ \rho>1 \text{ ряд розбігається}\\ \rho=1 \text{ нічого сказати про збіжність ряду не можна.}\end{cases}$$

Інтегральна ознака Коші. Нехай задано знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члени якого монотонно спадають до нуля. Нехай існує монотонно спадна функція $f\left(x\right)$ така, що її значення при $x=n$ збігається з a_n, тобто $f\left(n\right)=a_n$. Тоді, якщо збігається невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f\left(x\right)dx$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, якщо цей інтеграл розбігається, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1.4. Типові приклади.

Приклад 1. Скласти формулу загального члена u_n та знайти u_{n+1} для заданого числового ряду:

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{15}+\frac{8}{75}+\ldots$

Розв'язання.

Складемо формули окремо для чисельника та знаменника даних дробів. Послідовність чисельників $2,5,8,\ldots$ складає арифметичну прогресію з першим членом 2 та різницею 3, отже, з урахуванням формули загального члену арифметичної прогресії $a_n=a_1+d(n-1)$ маємо $2+3\cdot(n-1)$ = $3n-1$. Послідовність знаменників $3,15,75,\ldots$ є геометричною прогресією з першим членом 3 та знаменником 5, отже, за формулою загального члену геометричної прогресії $b_n=b_1q^{n-1}$ $=3\cdot 5^{n-1}$. Таким чином, загальний член ряду задається формулою $a_n=\frac{3n-1}{3\cdot 5^{n-1}}$.

Вираз u_{n+1}, можна отримати з формули загального члена шляхом заміни змінної n на $n+1$, отже,

$$a_{n+1}=\frac{3(n+1)-1}{3\cdot 5^{(n+1)-1}}=\frac{3n+2}{3\cdot 5^{n}}.$$

2) $\frac{1!\cdot 1}{2}+\frac{4!\cdot 4}{2\cdot 5}+\frac{7!\cdot 9}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots$

Розв'язання.

Чисельник дробу, що представляє загальний член ряду, складається з двох множників, перший з яких є факторіалом члена арифметичної прогресії з першим членом 1 та різницею 3, отже, його можна визначити за формулою $(3n-2)!$. Послідовність інших множників чисельника $1,4,9,\ldots$ відповідає формулі n^2. Знаменник кожного з дробів є добутком попереднього знаменника та нового множника, який складає з існуючими арифметичну прогресію з першим членом 2 та різницею 3. Таким чином, послідовність нових множників відповідає формулі $3n-1$, а весь знаменник має вигляд $2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)$. Таку послідовність будемо надалі називати факторіальним добутком. Отже, формулою загального члена ряду є рівність

$$u_n=\frac{(3n-2)!\cdot n^2}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}.$$

Тоді $u_{n+1}=\frac{(3(n+1)-2)!\cdot(n+1)^2}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3(n+1)-1)}=\frac{(3n+1)!\cdot(n+1)^2}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}$.

Зауваження. Для факторіального добутку доцільно при побудові формули для u_{n+1} підкреслити наявність всіх множників, які відповідають попередньому члену ряду.

Приклад 2. З'ясувати за допомогою означення, чи буде збіжним числовий ряд, та за умови позитивної відповіді знайти суму ряду.

1) $\frac{3}{2}+\frac{3}{14}+\frac{3}{98}+\ldots$.

Загальний член ряду задається формулою $u_n=\frac{1}{2\cdot 7^{n-1}}$, отже, послідовність часткових сум має вигляд $S_n=\frac{3}{2}+\frac{3}{14}+\frac{3}{98}+\ldots+\frac{3}{2\cdot 7^{n-1}}$. Це сума n членів геометричної прогресії з першим членом $\frac{3}{2}$ та знаменником $\frac{1}{7}$, яка обчислюється за допомогою формули

$$S_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7}{4}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right).$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{4}\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)=\frac{7}{4}$, отже, ряд збігається, а його сума $S=\frac{7}{4}$.

2) $\frac{3}{2}+\frac{8}{2}+\frac{13}{2}+\ldots$ **.**

Загальний член ряду має вигляд: $u_n=\frac{5n-2}{2}$, отже, послідовність частинних сум обчислюється за формулою

$$S_n=\frac{3}{2}+\frac{8}{2}+\frac{13}{2}+\ldots+\frac{5n-2}{2}=\frac{1}{2}\left(3+8+13+\ldots+(5n-2)\right).$$

Вираз $\left(3+8+13+\ldots+(5n-2)\right)$– сума n членів арифметичної прогресії з першим членом 3 та знаменником **5**, отже,

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot 3+5(n-1)}{2}\cdot n\right)=\frac{5n^2+n}{4}.$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+n}{4}=\infty$, тобто ряд є розбіжним.

Приклад 3. З'ясувати за допомогою ознак збіжності, чи буде збіжним числовий ряд.

1) $\frac{3}{2}+\frac{7}{12}+\frac{11}{22}+\ldots$

Розв'язання.

Загальний член ряду задається формулою $u_n=\frac{4n-1}{10n-8}$. Це неправильний раціональний дріб (степінь чисельника дорівнює степеню знаменника), отже, доцільно скористатися необхідною умовою збіжності.

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-1}{10n-8}=\frac{2}{5}\neq 0$. За необхідною умовою збіжності ряд розбігається.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n^2+5n}{\sqrt[3]{n^5+5}}$.

Розв'язання.

Степінь чисельника $k=2$ більший за степінь знаменника $s=\frac{5}{3}$, отже, доцільно скористатися необхідною умовою збіжності.

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2+5n}{\sqrt[3]{n^5+5}}=\infty\neq 0$. Ряд розбігається.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(2n-1)$.

Розв'язання.

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n-1)$ не існує, отже, за необхідною умовою збіжності ряд розбігається.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{5n^5+7}$.

Розв'язання.

Загальний член ряду є правильним раціональним дробом.(Степінь чисельника $k=1$ менший за степінь знаменника $s=5$). Такий ряд можна досліджувати за ознакою порівняння у граничній формі. Оберемо ряд для порівняння: $b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-k}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5-1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. Цей ряд називається рядом Діріхле, та є збіжним (показник степеня $p=4>1$) . Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{5n^5+7}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{5n^5+7}\cdot\frac{n^4}{1}=\frac{1}{5}\neq 0;\infty\,.$$

Згідно з граничною ознакою порівняння досліджуваний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{5n^5+7}$ також є збіжним.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi/\sqrt{n}\right).$

Розв'язання.

Оберемо для порівняння з заданим рядом ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/\sqrt{n}$, який є рядом Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, що розбігається, оскільки $p=\frac{1}{2}<1.$

Тоді, згідно з ознакою порівняння в граничній формі :

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\pi/\sqrt{n}\right)}{1/\sqrt{n}}=\pi\neq 0,\infty$ (використана формула $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$)

дістанемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi/\sqrt{n}\right)$ також розбігається.

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n}}$.

Розв'язання.

Оскільки при $n\to\infty$ $a_n==\frac{1}{2^n\sqrt{n}}\to 0$, то необхідна умова збіжності виконана. Візьмемо зручний для порівняння з даним ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Маємо $a_n=\frac{1}{2^n\sqrt{n}}$, $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{2^n\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$, тобто $a_n<b_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ розбігається, тому не визначає поведінку початкового ряду. Це означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ вибраний для порівняння невдало. Розглянемо інший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/2^n$. Члени цього ряду утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію ($q=1/2<1$), ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ збігається. Внаслідок нерівності $\frac{1}{2^n\sqrt{n}}<\frac{1}{2^n}$ із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ випливає, що початковий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n}}$ теж збігається.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{5n^2+1}}{(2n+7)(3n-1)}.$

Розв'язання.

Скористаємося граничною ознакою порівняння . Оберемо допоміжний ряд $b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-k}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$, який є рядом Діріхле та є збіжним, оскільки показник ступеня $p = \frac{4}{3} > 1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5n^2+1}}{(2n+7)(3n-1)} : \frac{1}{n^{4/3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5n^2+1}}{(2n+7)(3n-1)}\cdot\frac{n^{4/3}}{1} = \frac{\sqrt[3]{5}}{6} \neq 0;\infty.$$

Згідно з граничною ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{5n^2+1}}{(2n+7)(3n-1)}$ також збігається.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+7}}$.

Розв'язання.

Загальний член ряду містить арктангенс нескінченно малого аргументу, отже, за допомогою граничної ознаки порівняння можна щонайменше позбутися оберненої тригонометричної функції. Оберемо ряд для порівняння. За теоремою про еквівалентність нескіченно малих функцій маємо:

$$arctg\,\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+7}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+7}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}.$$

Порівняємо досліджуваний ряд з узагальненим гармонійним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$, який є розбіжним, оскільки показник степеня $p = \frac{3}{4} < 1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} arctg\,\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+7}} : \frac{1}{n^{3/4}} = 1 \neq 0;\infty.$$

Згідно з граничною ознакою порівняння досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+7}}$ також розбігається.

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(2n+1)}{n^4}$.

Скористаємося тим, що для досить великих значень змінної логарифм степеневої функції буде меншим за будь-який додатний степінь.

$$\ln(2n+1) < n;$$

$$\frac{\ln(2n+1)}{n^4} < \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ збігається, оскільки показник степеня $p=3>1$, отже, згідно ознаки порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(2n+1)}{n^4}$ також буде збіжним.

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log_2(n^2+7)}{\sqrt[3]{n^2}}$

Скористаємося тим фактом, що для досить великих значень змінної логарифм степеневої функції буде більшим за одиницю.

$\log_2(n^2+7)>1;$

$$\frac{\ln(n^2+7)}{n^{2/3}}>\frac{1}{n^{2/3}}\ .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ розбігається, оскільки показник степеня $p=\frac{2}{3}<1$, отже, згідно з ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log_2(n^2+7)}{\sqrt[3]{n^2}}$ також буде розбіжним.

Зауваження. Якщо логарифмічна функція розташована у знаменнику, для її оцінювання доцільно скористатися нерівністю $\frac{1}{n^p}<\frac{1}{\ln n}<1$.

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3^n}$.

Розв'язання.

До загального члена ряду входить показникова функція, тому використуємо ознаку Даламбера.

$$a_n=\frac{2n+5}{3^n}\ ,\quad a_n=\frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}=\frac{2n+7}{3^{n+1}}.$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{3^{n+1}}:\frac{2n+5}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2n+5}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{2n+5}=\frac{1}{3}<1.$$

За ознакою Даламбера ряд збігається.

12) $\frac{1!}{2}+\frac{3!}{2\cdot 5}+\frac{5!}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots.$

Розв'язання.

Побудуємо формулу загального члена ряду. Чисельники дробів є факторіалами чисел $1, 3, 5, \ldots$, які складають арифметичну прогресію з першим членом 1 та різницею 2, тобто відповідають формулі $a_n=2n-1$. Знаменники дробів є факторіальними добутками, останні множники яких обчислюються за формулою $3n-1$. Тоді загальний член ряду має вигляд $a_n = \dfrac{(2n-1)!}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

У цьому випадку також доцільно скористатися ознакою Даламбера.

$$a_{n+1} = \frac{(2(n+1)-1)!}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3(n+1)-1)} = \frac{(2n+1)!}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}$$

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)} : \frac{(2n-1)!}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!\cdot 2n\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}\cdot\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{(2n-1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot(2n+1)}{3n+2} = \infty .$$

За ознакою Даламбера ряд розбігається.

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{n!}$.

Розв'язання.

Загальний член ряду містить факторіал, отже, застосуємо ознаку Даламбера.

$$a_n = \arcsin\frac{1}{n!}\ ,\ a_{n+1} = \arcsin\frac{1}{(n+1)!}.$$

Скористуємось теоремою про еквівалентність нескінченно малих функцій: $\arcsin x \sim x$ при $x\to 0$.

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{(n+1)!} : \arcsin\frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

За ознакою Даламбера ряд збігається.

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots 2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$.

Розв'язання.

Загальний член ряду містить факторіальні добутки, тому скористаємося ознакою Даламбера:

$$a_n = \frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots 2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)},\quad a_{n+1} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots 2n(2(n+1))}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2(n+1)-1)}.$$

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots 2n(2(n+1))}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2(n+1)-1)}\cdot\frac{1\cdot3\cdot6\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot 2n} = 1$$

Спроба використати ознаку Даламбера для дослідження наданого ряду не дала результату. Розіб'ємо загальний член ряду на множники:

$$a_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

Помітимо, що кожен з множників буде більшим за одиницю, отже, справджується нерівність $a_n > \dfrac{2n}{2n-1}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{2n-1}$ буде розбіжним за необхідною умовою збіжності $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{2n-1} = 1 \neq 0\right)$, тоді, згідно з ознакою порівняння, досліджуваний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$ також буде розбіжним.

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots 2n}$.

Розв'язання.

Як і у попередньому прикладі, ознака Даламбера призведе до результату $D=1$. Знову скористаємося ознакою порівняння.

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots 2n} = 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}.$$

Легко помітити, що кожний з множників $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{2n-1}{2n-2}$ більший за одиницю.

Тоді $a_n > \dfrac{1}{2n}$. Гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ розбігається, отже, за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots 2n}$ також буде розбіжним.

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{7n+1}{2n+5}\right)^n$.

Розв'язання.

Загальний член ряду є степенево-показниковою функцією, отже, можна скористатися радикальною ознакою Коші.

$$K = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{7n+1}{2n+5}\right)^n\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7n+1}{2n+5} = \frac{7}{2} > 1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд розбігається.

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^{2n}(n+1)}$.

Розв'язання.

Скористаємося радикальною ознакою Коші .

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln^{2n}(n+1)}\right]^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^2(n+1)}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0<1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд збігається.

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

Розв'язання.

Скористаємося радикальною ознакою Коші . При обчисленні K використаємо другу важливу границю $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right]^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e>1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд розбігається.

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Розв'язання.

Спроба використати радикальну ознаку Коші призведе до результату $K=1$. Скористаємося необхідною умовою збіжності.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0.$$

Ряд розбігається.

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, де p – деяке стале число.

Для дослідження даного ряду використаємо інтегральну ознаку Коші. Функція $f(x)$ відшукується просто: достатньо в загальному члені ряду замінити n на x, тобто $u(x)=1/x^p$. $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}$, $a>0$.

Розв'язання. Розглянемо три випадки:

1) $p>1$, тоді $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_a^b x^{-p}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_a^b=\frac{1}{-p+1}\times$

$\times\lim_{b\to\infty}\left(b^{-p+1}-a^{-p+1}\right)=\frac{1}{-p+1}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-\frac{1}{a^{p-1}}\right)=\frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$, так як $p>1$, то $p-1>0$ і $\frac{1}{b^{p-1}} \to 0$ при $b \to \infty$. Таким чином при $p>1$ інтеграл $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ збігається і дорівнює $\frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$.

2) $p<1$, тоді $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^{b} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^{b} x^{-p}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_a^b = \frac{1}{-p+1} \times$
$\times \lim\limits_{b\to\infty}\left(b^{-p+1} - a^{-p+1}\right) = \infty$,

так як $p<1$, то $-p+1>0$ і $b^{-p+1} \to \infty$ при $b \to \infty$. Таким чином інтеграл $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ розбігається.

3) $p=1$, тоді $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^{b} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \ln x\Big|_a^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln b - \ln a|\right) = \infty$.

При $p=1$ інтеграл $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ розбігається.

Таким чином, ряд вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збігається при $p > 1$ та розбігається, якщо $p \leq 1$.

23) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Розв'язання.

Загальний член ряду задається за допомогою функції $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$. Ця функція неперервного аргументу для $x \geq 2$ набуває додатних значень та є спадною. Обчислимо невласний інтеграл першого роду від цієї функції та скористаємося інтегральною ознакою Коші.

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\beta\to+\infty} \int\limits_2^{\beta} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left\{ \ln x = t,\ \frac{dx}{x} = dt,\ \left| \begin{matrix} x=2, t=\ln 2 \\ x=\beta,\ t=\ln\beta \end{matrix} \right. \right\} =$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} 2\sqrt{t}\,\Bigg|_{\ln 2}^{\ln\beta} = 2\lim_{\beta\to+\infty}\left(\sqrt{\ln\beta} - \sqrt{\ln 2}\right) = \infty.$$

Інтеграл є розбіжним, отже, ряд також розбігається.

Приклад 4**.** Знайти суму ряду, якщо вона існує.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n-2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

Розв'язання.

Загальний член послідовності часткових сум ряду має вигляд

$$S_n = \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}\right) +$$
$$+\left(\sqrt{6} - 2\sqrt{5} + \sqrt{4}\right) + \ldots + \left(\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}\right) + \left(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right) +$$
$$+\left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}.$$

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) = \{\infty - \infty\} =$

$=$ (домножемо і поділемо два останні доданки на їх суму) $=$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(1 - \sqrt{2} + \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \sqrt{2} + \frac{(n+2-n-1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}\right) = 1 - \sqrt{2}.$$

2) $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$.

Розв'язання.

Загальний член послідовності часткових сум ряду має вигляд:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Кожний доданок $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ є раціональним дробом, який можна розкласти на суму простіших раціональних дробів за методом невизначених коефіцієнтів, а саме:

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1} = \frac{A(3n+1) + B(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 = A(3n+1) + B(3n-2)$. Ця рівність буде тотожністю, якщо коефіцієнти при n і вільні члени зліва і справа будуть однакові, тобто получимо систему рівнянь для знаходження A і B.

$$\begin{cases} 3D + 3B = 0 \\ A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B = -\dfrac{1}{3}, \\ A = \dfrac{1}{3} \end{matrix},$$

тоді $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{3n-2} - \dfrac{\frac{1}{3}}{3n+2} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2} - \dfrac{1}{3n+1}\right).$

Звідси $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} =$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+...+\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right).$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$.

Приклад 5. Розглянемо два ряди з невід'ємними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, які розбігаються. Що можна сказати про збіжність рядів: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$?

Розв'язання.

а) $\min(a_n,b_n)\le b_n$, $\min(a_n,b_n)\le a_n$

Якщо ряд з більшими членами розбігається, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$ може збігатися і може розбігатися.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)\ge b_n$ і $\max(a_n,b_n)\ge a_n$, якщо ряд з меншими членами розбігається, то згідно з ознакою порівняння і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ розбігається.

Приклад 6. Розглянемо два числових ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$, що збігаються. Довести, що збігаються й ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum\frac{|a_n|}{n}$.

Розв'язання.

Доведемо нерівність для будь яких чисел a і b.

$$(|a|-|b|)^2\ge 0 \Rightarrow a^2+b^2\ge 2|a||b|=|ab|<\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right).$$

Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ збігаються, то збігається ряд (за властивістю 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$. Він знакододатний. Ми довели, що $|a_n b_n| \le a_n^2 + b_n^2$, тоді за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$. Тепер доведемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + b_n\right)^2$ збігається.

$\left(a_n + b_n\right)^2 = a_n^2 + 2b_n a_n + b_n^2 \le a_n^2 + b_n^2 + 2|b_n a_n|$.

Тепер розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 + 2|b_n a_n|$ – він збігається, оскільки ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n a_n|$ збігаються, тоді за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + b_n\right)^2$ – збігається.

Тепер розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$. Нехай $b_n = \frac{1}{n}$, тоді $|b_n a_n| = \frac{|a_n|}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігаються і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$.

1.5. Завдання для самостійної роботи

З’ясувати за допомогою означення, чи буде збіжним числовий ряд, та за умови позитивної відповіді знайти суму ряду.

1. $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{7}{3} + \ldots$ 2. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \ldots$ 3. $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{3}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{13} - \sqrt{8}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{18} - \sqrt{13}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{13}} + \ldots$

З’ясувати за допомогою ознак збіжності, чи буде збіжним числовий ряд.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{3n+5}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+4}{\sqrt{2n-1}}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\, n^3$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt[3]{n}$ 9. $\frac{1}{3} + \frac{5}{10} + \frac{9}{17} + \ldots$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+1}{3n^2+1}$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{5n^2+7}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(2n+1)(3n-1)}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{5n^3-4}$ 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(4n+3)}{\sqrt{n+1}}$ 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3(2n+1)}{n^2+1}$

16. $\frac{1}{1}+\frac{5}{4}+\frac{9}{9}+\ldots$ 17. $\frac{2}{1\cdot\sqrt{3}}+\frac{5}{8\cdot\sqrt{4}}+\frac{8}{27\cdot\sqrt{5}}+\ldots$

18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln n}}{n}$ 19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-arctg\, n}}{n^2+1}$ 20. $\frac{1}{2\ln^3 2}+\frac{1}{3\ln^3 3}+\frac{1}{4\ln^3 4}+\ldots$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$ 22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$ 23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(2n-1)!}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{1}{3^n}$ 25. $\frac{2}{1}+\frac{5}{3}+\frac{10}{9}+\ldots$ 26. $\frac{1}{1}+\frac{3!}{1\cdot 4}+\frac{5!}{1\cdot 4\cdot 7}+\ldots$

27. $\arcsin 1+\arcsin\frac{1}{2!}+\arcsin\frac{1}{3!}+\ldots$ 28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\ln^n(n+1)}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\left(\frac{5n+3}{n}\right)^n}$ 30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$ 31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+7}{3n+1}\right)^n$

1.6. Відповіді

1. Розбігається. **2.** Збігається , $\boldsymbol{S=\frac{3}{4}}$. **3.** Збігається , $\boldsymbol{S=\frac{1}{\sqrt{3}}}$. **4.** За необхідною умовою розбігається . **5.** За необхідною умовою розбігається . **6.** За необхідною умовою розбігається . **7.** За необхідною умовою розбігається . **8.** За необхідною умовою розбігається . **9.** За необхідною умовою розбігається . **10.** За граничною ознакою порівняння розбігається. **11.** За граничною ознакою порівняння збігається. **12.** За граничною ознакою порівняння розбігається. **13.** За граничною ознакою порівняння збігається. **14.** За ознакою порівняння розбігається. **15.** За ознакою порівняння збігається. **16.** За граничною ознакою порівняння розбігається. **17.** За граничною ознакою порівняння збігається. **18.** За інтегральною ознакою Коші ряд розбігається. **19.** За інтегральною ознакою Коші ряд збігається. **20.** За інтегральною ознакою Коші ряд збігається. **21.** За ознакою Даламбера ряд розбігається. **22.** За ознакою Даламбера ряд збігається. **23.** За ознакою Даламбера ряд збігається. **24.** За ознакою Даламбера ряд збігається. **25.** За ознакою Даламбера ряд збігається. **26.** За ознакою Даламбера ряд розбігається. **27.** За ознакою Даламбера ряд збігається. **28.** За радикальною ознакою Коші ряд збігається. **29.** За радикальною ознакою Коші ряд збігається. **30.** За радикальною ознакою Коші ряд розбігається. **31.** За радикальною ознакою Коші ряд збігається.

1.7. Задачі підвищеної складності

Приклад 1. Довести, що ряд оберненої членам арифметичної прогресії розбігається.

Розв'язання.

Розглянемо ряд чисел деякої арифметичної прогресії за властивостю $a_1,\ a_1+d, a_1+2d,\ \ a_1+3d,..., a_1+d(n-1),\ \ a_1+dn.$ Ряд, утворений оберненими членами арифметичної прогресії, має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1+dn}$.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{a_n+dx}dx=\lim_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{1}{a_n+dx}dx=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\ln|a_n+dx|\Big|_1^A=\infty.$$

Інтеграл розбігається, то і ряд розбігається.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)...\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right).$$

Розв'язання.

Застосуємо ознаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)...\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)...\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+3}}\right)=\sqrt{2}-1<1\Rightarrow \text{ ряд збігається.}$$

Приклад 3. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Розв'язання.

Загальний член ряду містить степенево-показникову функцію, тому застосуємо радикальну ознаку Коші. $K=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{n}}}{2+\frac{1}{n}}=$$

$=\Bigg\{$обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{2}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln n^{\frac{2}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{2}{n}\ln n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{2\ln n}{n}}}=$ (застосуємо правило Лопіталя) $=e^{\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{n}{2}}}=e^0=1\Big\}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ ряд збігається.

Приклад 4. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Розв'язання.

Перевіримо, чи виконується необхідна ознака збіжності числових рядів.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{\left(n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{n^n\left(n+\frac{1}{n^2}\right)^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}=\Big\{\text{обчислимо окремо границю чисельника і знаменика:}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln n^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n}}=(\text{застосуэмо правило Лопіталя})=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\ (\text{застосувати другу визначну границю})=$$

$$=e^0=1\Big\}\Rightarrow\ \text{ряд розбігається.}$$

Приклад 5. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty}nx\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$.

Розв'язання.

$a_n=nx\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$. Розглянемо докладніше вираз

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{1+x^2+\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2 2\alpha}{1+x^2+\cos^2 2\alpha}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin^2 n\alpha}{1+x^2+\cos^2 n\alpha}.$$

Зробимо оцінку множника $\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}=f(\alpha)$. При будь-якому x ця функція періодична, відносно змінної α, період її $T=\frac{\pi}{k}$, і обмежена

$$\le 0\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}\le\frac{1}{1+x^2}.$$

Найбільше і найменше значення множника $\dfrac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$ можна знайти по схемі знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{k}\right]$, зрозуміло, що: $0 \le \sin^2 k\alpha \le 1$, і коли $\sin^2 k\alpha = 0$, то $\cos^2 k\alpha = 1$, якщо $\sin^2 k\alpha = 1$, то $\cos^2 k\alpha = 0$.

Розв'яжемо рівняння $\sin^2 k\alpha = 1$.

$$\alpha = \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi}{k} = \frac{(1+2n)\pi}{2k} \Rightarrow f\left(\frac{\pi(1+2n)}{2k}\right) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} \le \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} < 1 \text{ для всіх } x \ne 0.$$

Тоді $nx\prod_{k=1}^{n} \dfrac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} \le nx\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} nx\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^n}$ збігається. Для доведення цього скористуємось ознакою Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x \cdot \left(1+x^2\right)^4}{\left(1+x^2\right)^{n+1} \cdot nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{1+x^2} < 1 \text{ для всіх } x \ne 0.$$

Розглянемо поведінку цього ряду в точці $x = 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} 0$, він збіжний, тому ряд збігається для всіх x і для всіх α.

Приклад 6. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n-1}}{\left(2n^2+n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$.

Розв'язання.

Скористуємось радикальною ознакою Коші.

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{\left(2n^2+n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{n-1}{n}}}{\left(2n^2+n+1\right)^{\frac{n+1}{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-\frac{1}{n}}}{\left(\sqrt{2n^2+n+1}\right)^{1+\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2+n+1}} \cdot \frac{n^{-\frac{1}{n}}}{\left(\sqrt{2n^2+n+1}\right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2+n+1}} \cdot \left(n\sqrt{2n^2+n+1}\right)^{-\frac{1}{n}} =$$

$=$ {окремо обчислимо границю першого множника і другого, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{2n^2+n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{2n^2+n+1}\right)^{-\frac{1}{n}}=\left\{\infty^0\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^4+n^3+n^2}\right)^{-\frac{1}{n}}=$
$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{1}{n}\ln\sqrt{2n^4+n^3+n^2}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(2n^4+n^3+n^2\right)}{n}}$ = (скористуємось правилом Лопіталя) = $=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+3n^2+2n}{2n^4+n^3+n^2}}=e^0=1$. Оскільки існує границя кожного множника, то границя добутку дорівнює добутку границь } = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1,\Rightarrow$ ряд збігається.

Приклад 7. Дослідити ряд на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{2^n+3^n}$.

Розв'язання.

Скористуємось ознакою Даламбера

$D=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^5}{2^{n+1}+3^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n+3^n}{n^5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^5}{n^5}\cdot\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=$ {чисельник і знаменник другого дробу поділимо на 3^{n+1}} = $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^5}{n^5}\cdot\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=$

{границя першого множника дорівнює 1, другого $\dfrac{1}{3}$, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$ } = $\dfrac{1}{3}<1$, ряд збігається.

Приклад 8. Дослідити ряд на збіжність $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\ldots$. Вказівка $\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання.

$\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}$; $\quad\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\dfrac{\pi}{4}}=\sqrt{2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2\cdot 2\sin^2\dfrac{\pi}{8}}=2\sin\dfrac{\pi}{8}$,

$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\dfrac{\pi}{4}}}=\sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)}}=\sqrt{2-\sqrt{2\cdot 2\cos^2\dfrac{\pi}{8}}}=$

$=\sqrt{2-2\cos\dfrac{\pi}{8}}=2\sin\dfrac{\pi}{16}$,

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{8}}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{16}}=2\sin\frac{\pi}{32}.$$

Тоді $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+...=2\cos\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{8}+$

$$+2\sin\frac{\pi}{16}+2\sin\frac{\pi}{32}+...=2\cos\frac{\pi}{4}+2\sum_{n=3}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}.$$

Скористуємось ознакою Даламбера.

$D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}=\{\frac{0}{0}$, тому скористуємось правилом Лопіталя$\}$ =

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\pi\cdot 2^{-n-1}\ln 2(-1)}{\sin\frac{\pi}{2^n}\cdot\pi\cdot 2^{-n-1}\ln 2(-1)}=\frac{1}{2}<1$, ряд збігається.

Приклад 9**.** Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ розбіжний.

Розв'язання.

Застосуємо ознаку порівняння.

Розглянемо функцію $y=x^{\frac{1}{x}}$, область визначення $x>0$. Знайдемо область значень цієї функції. Знайдемо екстремуми, $y'=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}\right)'=\left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)'=$

$=e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$, знайдемо критичні точки: $1-\ln x=0$, $x=e$, точка максимуму.

$f(e)=e^{\frac{1}{e}}>1$. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\left\{0^{\infty}\right\}=0$.

З графіку видно, що починаючи з деякого $x>e$ $\ln x>x^{\frac{1}{x}}\Rightarrow\frac{1}{\ln x}<\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}}$.

Тому $\frac{1}{n\ln n}<\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. Розглянемо ряд, він розбігається за інтегральної ознаки Коші, так як $\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{n\ln n}dx=\ln|\ln x|\Big|_2^{\infty}=\infty$. Таким чином ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ розбігається.

Приклад 10. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$ на збіжність.

*Розв'язання***.** Застосуємо ознаку порівняння. $n>\ln n$ (видно з графіків функцій $y=x$ і $y=\ln x$), тому $n^2-n<n^2-\ln n\Rightarrow\frac{1}{n^2-n}>\frac{1}{n^2-\ln n}$.

Розглянемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Розглянемо збіжність $\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2-x}dx$. Скористуємось ознаками збіжності невластивих інтегралів: знайдемо $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2-x}}{x^2}=1\neq 0$. Якщо ця границя існує і не дорівнює нулю, то ці інтеграли ведуть себе однаково, це означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$ збігається.

Приклад 11. Чи збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$.

Розв'язання.

З'ясовувати збіжність ряду будемо за допомогою ознаки порівняння: $n!<n^n\Rightarrow\ln n!=\ln+\ln 2+...+\ln n<n\ln n\Rightarrow\frac{1}{\ln n!}>\frac{1}{n\ln n}$.

Розглянемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$, за інтегральною ознакою Коші цей ряд розбігається.

Тоді і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$ розбігається.

Приклад 12. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}$, де x_n – додатні корені

*Розв'язання.*Рівняння $x=\operatorname{tg}x$ має безліч коренів. $x_n\in\left(\frac{\pi}{2}+\pi(n-1);\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$. Звідси $x_n>\frac{\pi}{2}+\pi(n-1)\geq 1$ і тоді $\frac{1}{x_n^2}\leq\frac{1}{n^2}$. А ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, це означає, що і ряд $\sum\frac{1}{x^2}$ збігається.

Приклад 13. Дослідити на збіжність ряди а) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$,

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\pi n}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання.

а) $\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}<\sqrt{x}$, тоді $\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}<\int_{0}^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx$. $\int_{0}^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{3/2}}$.

$\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx<\frac{2}{3}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ збігається, тому і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$ збігається.

б) $\frac{\sin^2 x}{x}>\sin^2 x$ для всіх $x>1$, звідси $\int_{\pi n}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx>\int_{\pi n}^{(n+1)\pi}\sin^2 xdx$,

$\int_{\pi n}^{(n+1)\pi}\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int_{\pi n}^{(n+1)\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)_{\pi n}^{\pi(n+1)}=$

$\frac{1}{2}\left(\pi(n+1)-\pi n-\frac{1}{2}\sin 2\pi(n+1)+\frac{1}{2}\sin 2\pi n\right)=\frac{1}{2}\pi$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}$ розбігається, так як

$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\neq 0$. Звідси за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\pi n}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ розбігається.

в) $\frac{nn!}{(2n)!}$ $\frac{(n+1)(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!n(n!)}=\frac{(n+1)^2}{n(2n+2)(2n+1)}<0<1$.

Приклад 14. Дослідити збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}$.

Розв'язання.

$\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}<\frac{n\cdot n!}{(2n)!}$.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot n!}{(2n)!}$, застосуємо ознаку Даламбера:

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!n(n!)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!(n+1)(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)n(n!)}=$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1$, ряд збігається, тому початковий ряд також збігається.

Приклад 15. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k}{n^{\alpha}}$.

Розв'язання.

Задачу розв'яжемо за допомогою ознаки порівняння.

$$a_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k}{n^{\alpha}} = \frac{\ln^2 1 + \ln^2 2 + ... + \ln^2 n}{n^{\alpha}} < \frac{n \ln^2 n}{n^{\alpha}} \{\text{для } m \geq 3 \ \ln n > 1, \text{ тому}\}$$

$< \dfrac{n}{n^{\alpha-1}} = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ збігається, якщо $\alpha - 1 > 1$, тобто ряд збігається для $\alpha > 2$. Звідси випливає, що початковий ряд збігається

Приклад 16. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$.

Розв'язання.

Скористуємось ознаками порівняння. Для того, щоб підібрати ряд для порівняння, зробимо ряд перетворень:

$a_n = \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^{\alpha}} = \dfrac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\right)}{n^{\alpha}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\right)}$ (це ми робимо, щоб визначити степінь a_n) $= \dfrac{4}{n^{\alpha}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\right)}$. Тоді для порівняння беремо ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha + \frac{1}{2}}}.$$

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n^{\alpha}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\right)} \cdot \dfrac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{1} = 4$. Тоді ці ряди ведуть себе однаково.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ збігається, якщо $\alpha + \dfrac{1}{2} > 1$, тобто $\alpha > \dfrac{1}{2}$, і розбігається, якщо $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$.

Приклад 17. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}\right)$.

Розв'язання.

Скористуємось ознаками порівняння. Для того щоб підібрати ряд для порівняння, визначимо степінь $a_n = \sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}$. Для цього звільнимось від ірраціональності.

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}\right)\left(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b}\right)}{\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b}} = \frac{n+a-\sqrt{n^2+n+b}}{\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b}} =$$

$$= \frac{\left(n+a-\sqrt{n^2+n+b}\right)\left(n+a+\sqrt{n^2+n+b}\right)}{\left(n+a-\sqrt[4]{n^2+n+b}\right)\left(n+a+\sqrt{n^2+n+b}\right)} =$$

$$= \frac{(n+a)^2 - \left(n^2+n+b\right)}{\left(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b}\right)\left(n+a+\sqrt{n^2+n+b}\right)} =$$

$$= \frac{n(2a-1) + a^2 - b}{\left(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b}\right)\left(n+a+\sqrt{n^2+n+b}\right)}.$$

Степінь цього виразу дорівнює $\dfrac{n}{n \cdot n^{\frac{1}{2}}}$, якщо $2a-1 \neq 0$ і $\dfrac{n}{n \cdot n^{\frac{1}{2}}}$, якщо $2a-1=0$.

Якщо $a = \dfrac{1}{2}$, то ряд для порівняння має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, він розбігається і

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(n(2a-1)+a^2-b\right)n^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b}\right)\left(n+a+\sqrt{n^2+n+b}\right)} = 2a-1 \neq 0,$$ тому ці ряди ведуть себе однаково, тобто наш ряд розбігається. Якщо $a = \dfrac{1}{2}$, то для порівняння беремо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, тоді він збігається, а

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(a^2-b\right)n^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b}\right)\left(n+a+\sqrt{n^2+n+b}\right)} = a^2 - b \neq 0,$$

звідси випливає, що наш ряд теж збігається.

Приклад 18. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n + b}{c \ln n + d}}$.

Розв'язання.

Перевіримо чи виконується достатня ознака $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}} =$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{\cancel{n}}}{\frac{c}{\cancel{n}}}} = e^{\frac{a}{c}} \neq 0 \Rightarrow$ ряд розбігається.

Приклад 19. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{\left(2+\sqrt{1}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)...\left(2+\sqrt{n}\right)}$.

Розв'язання.

Якщо застосуємо ознаку Даламбера, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, тоді застосуємо ознаку Раабе.

Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt{n!}\cancel{\left(2+\sqrt{1}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)...\left(2+\sqrt{n}\right)}\left(2+\sqrt{n+1}\right)}{\cancel{\left(2+\sqrt{1}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)...\left(2+\sqrt{n}\right)}\sqrt{(n+1)!}}\right)-1=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n!}\left(2+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n!}\sqrt{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(2+\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+1}}-1\right)=$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}} = 2 > 1,$ ряд збігається.

Приклад 20. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{n}\right)^{n^3}$.

Розв'язання.

Скористуємось ознакою Коші.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{\alpha}{n}\right)^{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{n}\right)^{n2} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{n}}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}} =$$

$= \{$застосуємо другу визначну границю$\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{n}\right)^{-\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{n}}}\right)^{-\sin^2\frac{\alpha}{n}\frac{n^2}{2}} =$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{\sin^2\frac{\alpha}{n}\cdot n^2\cdot\frac{\alpha^2}{n^2}}{2\cdot\frac{\alpha^2}{n^2}}} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} < 1$, якщо $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ ряд збігається. Якщо $\alpha = 0$, то ряд розбігається, так як загальний член має ряду при $n\to\infty$ не наближається до нуля.

Приклад 21**.** Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$, $a>0$, $b>0$.

Розв'язання.

В чисельнику і знаменнику загального члена ряду стоять степеневі функції. Тому будемо користуватися ознакою порівняння.

Для цього підберемо такий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, щоб $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\delta\neq 0$.

Розглянемо $a_n=\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}=\frac{n^{2n}}{(n+a)^n(n+b)^n(n+a)^b(n+b)^a}=$

(поділимо чисельник і знаменник на n^{2n}) $=\frac{1}{\frac{(n+a)^n}{n^n}\frac{(n+a)^n}{n^n}(n+a)^b(n+b)^a}=$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\left(1+\frac{a}{n}\right)^n(n+a)^b(n+b)^a}.$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a=e^a,\ \ \lim_{n\to\infty}\left(+\frac{b}{n}\right)^n=e^b\right)\approx\frac{1}{e^{a+b}n^{a+b}}.$$

Таким чином ми підібрали ряд з яким будемо порівнювати наш ряд, це ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{a+b}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}\cdot n^{a+b}}{(n+a)^{n+a}(n+b)^{n+b}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a+b}}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\left(1+\frac{a}{n}\right)^n(n+a)^b(n+b)^a}=\frac{1}{e^{a+b}}\neq 0.$$

А ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a+b}}$ збігається, коли $a+b>1$ і розбігається при $a+b\leq 1$. При таких же умовах збігається і розбігається наш початковий ряд.

Приклад 22. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ на збіжність.

Розв'язання.

Застосуємо ознаку порівняння.

$a_n=1-\cos\frac{\pi}{n}=\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{2n}$, $\sin x<x$ для всіх $x>0$, тоді

$a_n = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{2n} < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, тому збігається і вихідний ряд.

Приклад 23. Чи збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{-1}$, якщо $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ для $n \geq 3$.

Розв'язання.

Застосуємо ознаку порівняння. Члени послідовності u_n зростають $\Rightarrow$ $u_{n-2} < u_{n-1} \Rightarrow u_n \leq 2u_{n-1}$, $u_n \geq \frac{3}{2}u_{n-1}$, що можна довести методом математичної індукції. Ця нерівність виконується для $n = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_3 \geq \frac{3}{2}u_2$. Нехай ця нерівність виконується для $u_n : u_n \geq \frac{3}{2}u_{n-1}$, $u_{n-1} \leq \frac{2}{3}u_n$. Доведемо, що вона виконується і для u_{n+1}.

$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} > u_n + \frac{2}{3}u_n = \frac{5}{3}u_n < \frac{3}{2}u_n$. $\frac{u_{n-1}^{-1}}{2} \leq u_n^{-1} \leq \frac{2}{3}u_{n-1}^{-1}$. Кожний член

Розглянемо послідовність $\overline{u_n} = \frac{3}{2}u_{n-1}$, $\overline{\overline{u_n}} = 2u_{n-1}$. Це геометричні прогресії $\overline{u_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, $\overline{\overline{u_n}} = 2^n$, тоді $\sum_{n-1}^{\infty} u_n^{-1}$ мажорується сумою x геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, що збігається.

Приклад 24. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n!}{n^{\alpha}}$ на збіжність.

Розв'язання.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}$.

Для $\alpha < 0$ ряд розбігається, тому що не виконується необхідна ознака збіжності $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n^{\alpha}} = \infty$. Розглянемо випадок, коли $\alpha > 0$. Застосуємо ознаку порівняння. $\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n < n\ln n$, тому $\frac{\ln n!}{n^{\alpha}} < \frac{n\ln n}{n^{\alpha}} = \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

$$\int_1^{\infty} x^{1-\alpha}\ln x dx = \begin{cases} u=\ln x \\ dv = x^{1-\alpha}dx \end{cases} \left| \begin{matrix} du=\frac{1}{x}dx \\ \\ v=\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{\alpha}\ln x\cdot x^{1-\alpha}\Big|_1^{\infty} + \frac{1}{\alpha}\int_1^{\infty}\frac{1}{x}x^{-\alpha}dx =$$

$$= \ln x\cdot x^{1-\alpha}\Big|_1^{\infty} + \frac{1}{\alpha}\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\Big|_1^{\infty} = \left\{ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\pi}} = \left\{ \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha-2}} = \right.\right.$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha>2 \\ 1, \text{ якщо } \alpha=2 \end{cases}, \left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{-\alpha x^{\alpha}} = 0 \\ \alpha>1 \end{matrix}\right\}, \text{ тому ряд } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} \text{ збігається для } \alpha\ge 2.$$

2. ЗНАКОЗМІННІ ЧИСЛОВІ РЯДИ

2.1. Деякі загальні властивості

Знакозмінними числовими рядами називають ряди, в яких деякі члени ряду додатні числа, деякі відмінні.

Абсолютна та умовна збіжність. Нехай задано знакозмінний ряд

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n+\cdots, \tag{1}$$

члени якого змінюють знак за довільним законом. Розглянутий вище знакопочережний ряд (5) – це окремий випадок ряду (9).

Припустимо, що збігається знакододатний ряд, складений з модулів чисел a_n:

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|+\cdots \tag{2}$$

Тоді ряд (1) теж збігається, його збіжність при цьому називають **абсолютною**. Може виявитися також, що ряд (2) розбігається, а ряд (1) збігається. У цьому випадку кажуть, що ряд (1) **збігається умовно**.

В рядах, які збігаються умовно, не можна переставляти нескінченну кількість членів, оскільки може змінитися сума ряду і навіть може утворитися розбіжний ряд.

Наприклад, розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^n\frac{1}{n}$. Цей ряд збігається умовно і суму його позначимо через S.

Переставимо члени цього ряду, розмістимо після кожного доданого члена два від’ємних. Отримаємо ряд $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-...$.

Позначимо часткові суми ряду $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+$ через S_n, а другого ряду через σ_n.

Тоді $S_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $S_4=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$, $S_6=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{37}{60}$,
$\sigma_3=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$, $\sigma_6=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$, $\sigma_9=\frac{7}{24}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{37}{120}$, …

Звідси, $\sigma_3=0,5S_2$, $\sigma_6=0,5S_4$, $\sigma_9=0,5S_6$ і взагалі можна довести, що $\sigma_{3m}=0,5S_{2m}$. Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{3m}=0,5\lim\limits_{n\to\infty}S_m=0,5S$.

Таким чином послідовність часткових сум другого ряду з номерами, які кратні трьом, мають границю $0,5S$. Далі знайдемо

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_{3m+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\sigma_{3m}+\frac{1}{2m+1}\right)=0,5S \quad \text{і}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_{3m+2}=\lim_{m\to\infty}\left(\sigma_{3m}+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{4m+2}\right)=0,5S.$$

Ми показали, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_m$ існує, це означає, що другий ряд збігається, але сума його дорівнює половині суми першого ряду.

Для знакозмінних рядів окремо виділяються ряди знакопочережні, тобто ряди $a_1-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^{n-1}a_n+...$. (3)

Для знакопочережних рядів використовують **ознаку Лейбніця**:

якщо в знакопочережному ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, де при будь якому n $a_n>0$, члени ряду за абсолютною величиною монотонно спадають, тобто $a_1>a_2>...>u_n>u_{n+1}>...$, і $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (4) , то ряд (3) збігається, його сума додатна і не перевищує першого члена ряду.

Доведення. Утворимо часткову суму S_n, що складається з парної кількості членів (n = 2m, m = 1, 2,…), і запишемо її двома способами:

$$S_{2m}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2m-1}-a_{2m}); \qquad (5)$$

$$S_{2m}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-a_{2m}. \qquad (6)$$

Згідно з (5) вирази, що містяться у дужках, додатні. Тому в силу (5) $S_{2m}>0$, а в силу (6) $S_{2m}<a_1$, тобто $0<S_{2m}<a_1$. Як видно з (5), із збільшенням m величина S_{2m} монотонно зростає. Оскільки $S_{2m}<a_1=const$, то існує скінченна границя $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S\le a_1$. Ця границя задовольняє нерівності $0<S\le a_1$. Для часткової суми S_n, що містить непарну кількість членів ряду (3), маємо

$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$. При $m \to \infty$ $a_{2m+1} \to 0$, тому $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Отже, незалежно від парності n $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ та $0 < S \le a_1$. Саме це і стверджує сформульована вище теорема Лейбніца. Аналогічно доводиться, що при виконанні умови (4) ряд $-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$ збігається, його сума S задовольняє нерівності $-a_1 \le S < 0$, тобто $|S| \le u_1$. Часткові суми S_n збіжного ряду (5) ведуть себе так, як показано на рис.3. Вони коливаються навколо суми ряду S із зникаючою амплітудою.

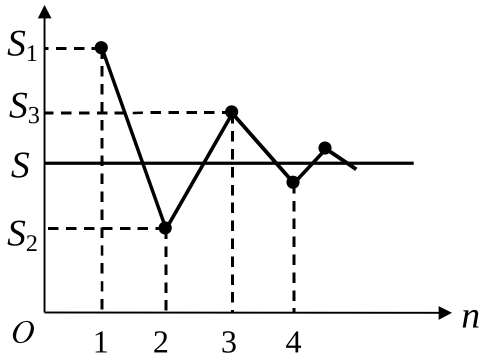


Рис. 3.

Ознака Абеля. Знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збігається, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і послідовність b_n монотонно обмежена.

2.2. Типові задачі

Приклад 1. З'ясувати, чи буде заданий ряд розбіжним, абсолютно або умовно збіжним.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\sqrt{n+1}}{n^3}$

Члени заданого ряду мають різні знаки. Дослідимо цей ряд на абсолютну збіжність.

$$|a_n| = \left| \frac{\sin\sqrt{n+1}}{n^3} \right| \le \frac{1}{n^3}$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ збігається (оскільки показник степеня $p = 2 > 1$). Згідно з ознакою порівняння знакододатний ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n+1}}{n^3}$ також збігається, отже знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n+1}}{n^3}$ збігається абсолютно.

2) $\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{6}{13}-\ldots$

Розв'язання.

Знаки членів ряду чергуються та відповідають залежності $(-1)^{n+1}$. Загальний член ряду задається формулою $a_n=(-1)^{n+1}\frac{2n}{4n+1}$.

Перевіримо, чи виконуються умови теореми Лейбніца.

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n+1}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

За необхідною умовою збіжності ряд розбігається.

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{11}}-\ldots$

Розв'язання.

Загальний член ряду задається формулою $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}$.

Перевіримо, чи виконуються умови теореми Лейбніця.

1) $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}=0$;

2) $|a_1|=\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$, $|a_2|=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$, $|a_3|=\frac{1}{\sqrt[3]{11}}$, …

$$|a_1|>|a_2|>|a_3|>\ldots,|a_n|=\frac{1}{\sqrt[3]{2n+5}}>|a_{n+1}|=\frac{1}{\sqrt[3]{2n+7}}.$$

За теоремою Лейбніця ряд збігається.

Дослідимо відповідний знакододатний ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{5n-1}}$.

Оберемо ряд для порівняння: $\frac{1}{\sqrt[3]{5n-1}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{5n}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{1}{n^{1/3}}$.

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}$ розбігається (оскільки показник степеня $p=\frac{1}{3}<1$).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{5n-1}}:\frac{1}{n^{1/3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\neq 0.$$

Згідно з граничною ознакою порівняння знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{5n-1}}$ також розбігається, отже , ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{5n-1}}$ збігається умовно.

Зауваження. Умова спадності може виконуватися не з першого члена ряду.

4) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\ldots.$

Розв'язання.

Загальний член ряду задається формулою $a_n=(-1)^{n+1}\frac{4n-1}{3^n}$.

Перевіримо, чи виконуються умови теореми Лейбніца.

1) $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-1)'}{(3^n)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3^n\ln 3}=0$;

2) $|a_1|=\frac{1}{2}$, $|a_2|=\frac{3}{4}$, $|a_3|=\frac{5}{8}$, $|a_4|=\frac{7}{16}\ldots$

$|a_1|<|a_2|$, $|a_2|>|a_3|>|a_4|>\ldots$, $|a_n|>|a_{n+1}|$, оскільки функція $f(x)=\frac{2x-1}{2^x}$ є монотонно спадною для $x>2$ ($f'(x)=\frac{2-(2x-1)\ln 2}{2^x}<0$).

За теоремою Лейбніца ряд збігається.

Дослідимо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{3^n}$. Скористаємося для цього ознакою Даламбера.

$$a_n=\frac{4n-1}{3^n}\ ,\ a_n=\frac{4(n+1)-1}{3^{n+1}}=\frac{4n+1}{3^{n+1}}.$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}:\frac{2n-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2n-1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}<1.$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{3^n}$ збігається, отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4n-1}{3^n}$ збігається абсолютно.

Зауваження. У останньому прикладі можна обмежитися дослідженням ряду з модулів, оскільки при абсолютній збіжності автоматично забезпечується збіжність за Лейбніцем.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$.

Розв'язання.

Дослідимо ряд з модулів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$. Скористаємося для цього ознакою Даламбера.

$$a_n=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!},$$

$$a_{n+1}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)\cdot(3(n+1)-2)}{(2(n+1)+1)!}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)\cdot(3n+1)}{(2n+3)!}.$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)\cdot(3n+1)}{(2n+3)!}:\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)\cdot(3n+1)}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)}{(2n+2)\cdot(2n+3)}=0<1.$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$ збігається, отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{(2n+1)!}$ збігається абсолютно.

Зауваження. Якщо при дослідженні ряду з модулів за радикальною ознакою Коші або за ознакою Даламбера з'ясовано, що цей ряд розбігається, то можна зробити висновок, що буде розбіжним і знакозмінний ряд, оскільки в таких випадках ($\boldsymbol{K>1}$ або $\boldsymbol{D>1}$) не виконується необхідна умова збіжності.

2.3. Задачі підвищеної складності

Приклад 1. Довести збіжність ряду $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots$ і знайти їх суму.

Розв'язання.

$$1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots+=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^n}.$$

Цей ряд знакопочережний. Розглянемо ряд, складений із модулів членів нашого ряду, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$. Застосуємо узагальнену ознаку Даламбера: $a_{n+1}=\frac{2(n+1)+1}{2^{n+1}}=\frac{2n+3}{2^{n+1}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$, ряд збігається, це означає, що вихідний ряд збігається абсолютно.

Для того, щоб знайти суму ряду складемо послідовність часткових сум.

$S_n=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}-\frac{7}{2^3}+\ldots+\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^n}=$ (кожний доданок, починаючи з другого, розкладемо в суму $-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$, $\frac{5}{2^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{4}{2^2}$ і т. д.) $=$

$$=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{(-1)^k}{2^k}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)+\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{(-1)^k}{2^k}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{(-1)^k}{2^k}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{(-1)^k}{2^k}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}\right.+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{(-1)^k}{2^k}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)\right)+\ldots+\left(\frac{(-1)^k}{2^k}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}+\frac{(-1)^k}{2^k}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{(-1)^n}{2^n}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}\right).$$

Кожний вираз в дужках позначимо $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}\ldots$ $S_n^{(k+1)}\ldots S_n^{(4)}$.

$S_n^{(1)}$ – це перша строчка, геометрична прогресія, перший член якої b_1 дорівнює 1, а $q=\left(-\frac{1}{2}\right)$, членів $n+1$.

Формула знаходження суми n членів геометричної прогресії має вигляд $S_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

Тому $S_n^{(1)}=\frac{\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)$.

$S_n^{(2)}$ – це сума чисел, які стоять в другій дужці, це сума двох однакових геометричних прогресій, у яких $b_1=-\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$, число членів - n.

$S_n^{(2)}=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)$... оскільки $(-1)^n=-(-1)^{n+1}$.

$S_n^{(k+1)}$ – це теж сума двох однакових геометричних прогресій, у яких $b_1=\frac{(-1)^k}{2^k}$, $q=-\frac{1}{2}$, число членів $n-k+1$, сума двох цих прогресій дорівнює $S_n^{(k+1)}=\frac{4}{3}\frac{(-1)^k}{2^k}\left(1-\frac{(-1)^{n-k+1}}{2^{n-k+1}}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^k}{2^k}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)$, і нарешті остання дужка $S_n^{(n)}=2\frac{(-1)^n}{2^n}$.

Тоді $S_n=S_n^{(1)}+S_n^{(2)}+\ldots+S_n^{k+1}+\ldots+S_n^{(n)}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)+$

$+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)+\ldots+\frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^k}{2^k}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)+\ldots+2\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)+$

$$+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)+2\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)+\frac{4}{3}\left(\frac{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)}{1+\frac{1}{2}}\right)+$$

$$+2\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)+\frac{4}{9}\left(-1+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)+2\frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Знайдемо тепер суму цього ряду.

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)+\frac{4}{9}\left(-1+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)+2\frac{(-1)^n}{2^n}\right)=$$

$$=\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}=0\right\}=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}.$$

Приклад 2. Знайти суму ряду $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$.

Вказівка. Застосувати формулу $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$, де C – стала Ейлера і $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

Розв'язання.

Розглянемо часткову суму парного числа членів ряду.

$$S_2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{2}{2}-\frac{2}{4}-\frac{2}{6}-\ldots-\frac{2}{2n}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=$$

= (застосуємо формулу із вказівки) = $C+\ln 2n+\varepsilon n-\left(C+\ln n+\varepsilon n\right)=$

$$=\cancel{C}+\ln 2n+\varepsilon_{2n}-\cancel{C}-\ln n-\varepsilon_n=\ln\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}+\varepsilon_n-\varepsilon_n.$$

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n\right)=\ln 2.$$

Тепер розглянемо часткову суму непарного числа членів

$S_{2n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}=$ (сума парного числа членів ми тільки що знайшли) $=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n+\frac{1}{2n+1}$, тому

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2.$$

Таким чином, часткові суми як парного, так і непарного числа членів мають однакову границю $\ln 2$.

Приклад 3. Знайти суму ряду $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+...$.

Розв'язання.

Це знакозмінний ряд, кожний третій член якого - від'ємний.

Розглянемо часткову суму членів число яких кратне 3.

$$S_{3m}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+...+\frac{1}{2^{3m-3}}+\frac{1}{2^{3m-2}}-\frac{1}{2^{Sm-1}}.$$

Додамо суму модулів всіх членів, які від'ємні, та віднімемо їх, сума не зміниться.

$$S_{3m}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{3m-3}}+\frac{1}{2^{3m-2}}+\frac{1}{2^{Sm-1}}-\frac{2}{2^2}-\frac{2}{2^3}-...-\frac{2}{2^{3m-4}}-\frac{2}{2^{3m-1}}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{3m-3}}+\frac{1}{2^{3m-2}}+\frac{1}{2^{Sm-1}}\right)-2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{2}{2^{3m-1}}\right)=$$

$=$ { в перших дужках стоїть геометрична прогресія, $b_1=1$, $q=\frac{1}{2}$, число членів $3m-1$, її сума дорівнює $\frac{1-\frac{1}{2^{3m}}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)$, в других дужках стоїть геометрична прогресія, $b_1=\frac{1}{2^2}$, $q=\frac{1}{2^3}$, число членів m, її сума дорівнює $\frac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{4\cdot 7}\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)$} $=2\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)-\frac{4}{7}\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)$.

$$S=\lim_{m\to\infty}\left(2\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)-\frac{4}{7}\left(1-\frac{1}{2^{3m}}\right)\right)=2-\frac{4}{7}=1\frac{3}{7}.$$

Тепер розглянемо суму члені числа $3m+1$ і $3m+2$.

$S_{3m+1} = S_{3m} + \frac{1}{2^{3m}}$, $\lim\limits_{m\to\infty}\left(S_{3m} + \frac{1}{2^{3m}}\right) = 1\frac{3}{7}$.

$S_{3m+2} = S_{3m} + \frac{1}{2^{3m+1}} + \frac{1}{2^{3m+2}}$, $\lim\limits_{m\to\infty}\left(S_{3m} + \frac{1}{2^{3m+1}} + \frac{1}{2^{3m+2}}\right) = 1\frac{3}{7}$.

Всі ці границі однакові, тому $S = 1\frac{3}{7}$.

Приклад 4. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

Розв'язання.

Це ряд знакочережний, застосуємо ознаку Лейбніца.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{(n+1)\sqrt[100]{n}} = 0$., ряд збігається.

Тепер перевіримо, як він збігається. Розглянемо ряд, утворений із модулів членів цього ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)\sqrt[100]{n}}$. Застосуємо ознаку порівняння.

Для порівняння оберемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{(n+1)\sqrt[100]{n}}\cdot\frac{\sqrt[100]{n}}{1} = 1 \neq 0$. Звідси випливає, що ці ряди ведуть себе однаково.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ розбігається. Тому наш ряд збігається умовно.

Приклад 5. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{\sqrt[n^2]{n}}$.

Розв'язання.

Цей ряд знакочережний. Застосуємо ознаку Лейбніца.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n^2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\frac{1}{n^{\frac{1}{n^2}}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2}\ln n} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}} =$ { застосуємо правило Лопіталя } $=$

$= e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2n}} = e^0 = 1$. Ряд розбігається.

Приклад 6. Скільки членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$ належить взяти, щоб одержати його суму з точністю до $\varepsilon = 10^{-6}$.

Розв'язання.

Цей ряд знакопочережний, за ознакою Лейбніца він збігається, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<0$. За ознакою Лейбніца модуль суми ряду не перевищує першого члена ряду, тому потрібне число N (де N – номер останнього члена ряду), для того, щоб знайти суму ряду заданої точності, знаходимо з нерівності $\frac{1}{\sqrt{\left(N+1\right)^2+1}}<\frac{1}{10^6}$. Розв'яжемо цю нерівність. Оскільки обидві частини нерівності додатні, то із нашої нерівності випливає, що $\sqrt{\left(N+1\right)^2+1}>10^6\Rightarrow\left(N+1\right)^2+1>10^{12}\Rightarrow\left(N+1\right)^2>10^{12}-1\Rightarrow\left|N+1\right|>\sqrt{10^{12}-1}$, так як N – натуральне число, то $N+1>\sqrt{10^{12}-1}\Rightarrow N>\sqrt{10^{12}-1}-1$. Найменше натуральне число, яке задовольняє цій нерівності 10^6, тому $N>10^6$.

3. ДІЇ З РЯДАМИ

3.1. Додавання рядів

За ознакою $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\pm b_n\right)$.

Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ збігаються, то вірні рівності

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\lambda a_n+Mb_n\right)=\lambda\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+M\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, де λ і M – довільні числа.

3.2. Добуток рядів (правило Коші). Під добутком двох рядів розуміється третій ряд, загальний член якого має вигляд: $C_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1$.

Але $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ вірно, коли один ряд збігається, а другий збігається абсолютно, або всі три ряди збігаються.

Приклад 1. Що можна сказати про суму двох рядів, із яких а) один ряд збігається, а другий розбігається; б) обидва ряди розбігаються.

Розв'язання.

а) Ряд розбігається; б) може збігатись і може розбігатись.

Приклад 2. Знайти суму двох рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right).$$

Розв'язання.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)$ збігається, тому що він є сумою двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ збігається за ознакою Даламбера, а $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ за ознакою Лейбніця, другий збігається за такими ж ознаками.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}+\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right)=$$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{n^3}(1-1)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^{n+1}}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}$, а це сума нескінченої геометричної прогресії з першим членом $b_1=\frac{1}{9}$, $q=\frac{1}{3}$.

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{6},\qquad 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}=4\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{2}.$$

Приклад 3. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$.

Розв'язання.

Цей ряд є сумою двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$, які є геометричними прогресіями.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{4}$, тому $S=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Приклад 4. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n}{2^n}$.

*Розв'язання***.**

$\cos\frac{2\pi n}{3}=1-2\sin\frac{2\pi n}{3}=$ **(**n – числа натуральні, тому всі вони поділяються на числа кратні 3, тобто $n=3k$, або не кратні $n=3k$, тоді всі числа n можна задати таким чином: $n = \left[\begin{array}{l} 3k-2 \\ 3k-1 \\ 3k \end{array}\right.$, при $k \in N$, $\sin\frac{3k\pi}{3} = 0$,

$\sin\frac{3k\pi - \pi}{3} = \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{3k\pi - 2\pi}{3} = \sin\left(k\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, а

$$\sin^2\frac{2\pi n}{3} = \left\{\begin{array}{l} \frac{4}{3}, - \text{якщо } n \neq 3k \\ 0, \quad \text{якщо } n = 3k \end{array}\right) = \left\{\begin{array}{l} 1, \text{якщо } n = 3k \\ -\frac{1}{2}, \text{якщо } n = 3k-2, \text{ або } n = 3k-1. \end{array}\right.$$

Ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n-2}}$ знакосталі, збігаються, тому в них можна переставляти місцями доданки, сума не зміниться, оскільки кожен з них уявляє собою нескінченну геометричну прогресію з $|q| < 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n}{2^n} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3k-1}} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3k-2}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{8}} - \frac{1}{2}\frac{2^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{8}} - \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{8}}{7} - \frac{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{8}}{7} - \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{7} = -\frac{2}{7}.$$

Приклад 5.

Відомо, що $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Розв'язання.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots =$ (додамо доданки $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} + \ldots$ і віднімемо їх) $= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} + \ldots\right) =$ (сума ряду в перших дужках відома, а в сумі, яка стоїть в других дужках винесемо за дужку $2^{\frac{1}{2}}$, получимо

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}+\ldots\right)=\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6})\qquad=$$

$$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{3\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}.$$

4. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

4.1. Збіжність функціональних рядів

Розглянемо послідовність функцій $\{u_n(x)\}, n\geq 1$. Вираз вигляду

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

називається ***функціональним рядом***.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ є ***збіжним в точці*** $x=x_0$, якщо збігається числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$, та ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n(x_0)\right|$.

Область збіжності. Множина всіх значень аргументу x, для яких функції $u_1(x),\ u_2(x)$, ... визначені, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігається, називається ***областю збіжності*** цього ряду.

Сума $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)=S_n(x)$ називається ***n*-ю *частинною сумою*** ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, а її границя $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$ – ***сумою*** цього ряду. Різницю $S(x)-S_n(x)=R_n(x)$ називають ***залишком*** ряду.

Область збіжності функціонального ряду можна знайти за ознакою Даламбера або радикальною ознакою Коші.

Ознака Даламбера. Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ є ***абсолютно збіжним*** для тих значень аргументу ***x***, для яких справджується нерівність

$$D(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1\ .$$

Якщо $D(x)>1$, ряд є ***розбіжним*** , а поведінка функціонального ряду при тих значеннях аргументу, для яких $D(x)=1$, потребує окремого дослідження.

Ознака Коші. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ є ***абсолютно збіжним*** для тих значень аргументу ***x*** , для яких справджується нерівність

$$K(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|u_n(x)\right|}<1 \ .$$

Якщо $K(x)>1$, ряд є ***розбіжним*** , а поведінка функціонального ряду при тих значеннях аргументу, для яких $K(x)=1$, потребує окремого дослідження.

Рівномірна збіжність. Послідовність функцій $f_n(x)$ називається **рівномірно збіжною** до функції $f(x)$ на проміжку X , якщо $V_\xi>0\exists N=N(\xi)$ (яке залежить от ε не залежить від x) таке, що $V_n>N(\xi)$ виконується нерівність $\left|f_n(x)-f(x)\right|<0$ одночасно для всіх $\in X$.Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називається **рівномірно збіжним** на множині X, якщо рівномірно збігається на цій множині послідовність його часткових сум.

Ознака Вейерштраса. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігається абсолютно й рівномірно на множині X , якщо існує числовий ряд $C_1+C_2+...+C_n+...$, який збігається, і такий, що $\left|u_n(x)\right|\le C_n$ при $x\in X$ $(n\in N)$.

Ознака Абеля. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ збігається рівномірно на множині X , якщо 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ збігається рівномірно на множині X ; 2) функції $b_n(x)$ обмежені у сукупність і при кожному x утворюють монотонну послідовність.

Властивості функціональних рядів:

а) сума ряду, що рівномірно збігається і містить тільки неперервні функції, неперервна;

б) якщо функціональний ряд збігається рівномірно на кожному $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ і існують границі $\lim_{x\to a}u_n(x)=A_n$ $(n\in N)$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ збігається і виконується рівність $\lim_{x\to a}\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to a}u_n(x)\right]$;

в) якщо члени ряду, що збігається, неперервно діференційовні при $a<x<b$ і ряд похідних $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ збігається рівномірно на інтервалі (a,b), тоді $\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ при $x\in(a,b)$;

г) якщо члени ряду неперервні і цей ряд збігається рівномірно на $[a,b]$, тоді $\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$.

4.2. Задачі підвищеної складності

Приклад 1. Знайти область збіжності (абсолютну і умовну) ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

Розв'язання.

Нехай $\frac{1-x}{1+x}=t$, тоді ряд буде виглядати так $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}t^n$.

Застосуємо ознаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|t|^{n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{|t|^n}=|t|$.

За ознакою Даламбера ряд збігається для t, для яких $|t|<1$, розбігається для $|t|>1$. Точки $t=\pm1$ розглянемо окремо.

В точці $t=-1$ ряд має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. Цей числовий ряд розбігається.

В точці $t=1$ ряд має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$, він знакопочережний, і за ознакою Лейбніця збігається, але ряд складений із модулів цього ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ розбігається, це означає, що в точці $t=1$ ряд збігається умовно. Область збіжності ряду $-1<t\le1$. Повертаємось до старої змінної $-1<\frac{1-x}{1+x}\le1$.

Розв'яжемо цю систему нерівнянь.

$$\begin{cases}\dfrac{1-x}{1+x}\le 1\\ \dfrac{1-x}{1+x}>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1-x-1-x}{1+x}\le 0\\ \dfrac{1-x+1+x}{1+x}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-2x}{1+x}\le 0\\ \dfrac{2}{1+x}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x\le 0\\ 1+x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x>-1\end{cases}\Rightarrow x\in[0;\infty)$$

Але в точці $x=0$ ряд збігається умовно, а для $x\in(0;\infty)$ він збігається абсолютно.

Приклад 2. Знайти область збіжності (абсолютну і умовну) ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

Розв'язання.

Позначимо $\frac{2x}{1+x^2}=t$, тоді ряд буде мати вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}t^n$.

Застосуємо ознаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)t^{n+1}2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)(2n+2)\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)t^n}\right|=|t|.$$

Для $|t|<1$ ряд збігається, $|t|>1$ – розбігається, а для $|t|=1$ треба дослідити збіжність ряду окремо при $t=1$ і $t=-1$.

Розглянемо точку $|t|=1$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}$. Застосуємо ознаку Раабе для знакодатнього ряду. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\cancel{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}}{\cancel{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}}\cdot\frac{\cancel{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\,(2n-2)}{\cancel{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\,(2n+1)}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1+\frac{1}{2n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$$ ряд розбігається.

Розглянемо точку $t=-1$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}$. Застосуємо ознаку Лейбніця.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}=0$, оскільки число множників прямує до нескінченності, кожний множник менш за одиницю, а добуток чисел менших за одиницю завжди менший найменшого множника.

Отже, для всіх $|t|<1$ ряд збігається абсолютно, а в $t=-1$ – умовно. Тепер вернемося до старих змінних $-1\le\frac{2x}{1+x^2}<1$. Розв'яжемо цю систему нерівностей

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{1+x^2}<1\\ \dfrac{2x}{1+x^2}\geq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x<1+x^2\\ 2x\geq -1+x^2\end{cases}\text{ (тому що } 1+x^2>0 \text{ для всіх } x\text{)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1>0\\ x^2+1+2x\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1)^2>0\\ (x+1)^2\geq 0\end{cases}$$ Розв'язком цієї системи є всі x, крім $x=1$.

Отже ряд збігається абсолютно при $|x|\neq 1$ і збігається умовно при $x=-1$.

Приклад 3. Знайти область збіжності (абсолютну і умовну) ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Розв'язання.

x^{2n} для всіх x додатне число, коли $x\geq 0$, то $x^n=|x|^n$, коли $x<0$, то $x^n=(-1)^n|x|^n$.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}$. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Знайдемо

$$\int_1^{\infty}\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}dn=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}dn=\begin{cases}|x|^n=t & t_1=|x|\\ |x|^n\ln|x|dn=dt & t_2=0\begin{cases}0, \text{ якщо } |x|<1\\ \infty, \text{ якщо } |x|>1\end{cases}\end{cases}.$$

Розглянемо випадок, коли $|x|<1$.

$$\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}dn=\lim_{A\to\infty}\int_{|x|}^{0}\frac{dt}{\ln|x|\left(1+t^2\right)}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\ln|x|}\operatorname{arctg}t\Big|_{|x|}^{0}=-\frac{1}{\ln|x|}\operatorname{arctg}|x|,$$ тобто

інтеграл збігається для всіх $|x|<1$, $x\neq 0$.

Розглянемо випадок, коли $|x|>1$. Тоді

$$\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}dn=\lim_{A\to\infty}\int_{|x|}^{\infty}\frac{dt}{\ln|x|\left(1+t^2\right)}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\ln|x|}\operatorname{arctg}t\Big|_{|x|}^{\infty}=\frac{1}{\ln|x|}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}|x|\right),$$

тобто інтеграл збігається.

Тепер дослідимо збіжність ряду для $x=0$, $x=\pm 1$.

а) $x=0$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}0$ збігається.

б) $x=\pm 1$, тоді ряд має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ або $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}$.

У цих рядів $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=0$, тобто в цих точках ряд розбігається.

Отже, ряд збігається абсолютно у всіх x, для яких $|x|\neq 1$, в точках $x=\pm 1$ ряд розбігається.

Приклад 4. Користуючись ознакою Вейерштраса, довести рівномірну збіжність в наступних функціональних рядах:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<\infty$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0\le x<\infty$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)$, $\frac{1}{2}\le|x|\le 2$.

Розв'язання.

а) Знайдемо такий числовий ряд, який збігається, для якого $\left|u_n(x)\right|\le C_n$ для всіх x. $\frac{1}{x^2+n^2}<\frac{1}{n^2}$ для всіх $x\in(-\infty;\infty)$, а числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається.

б) Розглянемо $f(x)=\frac{x}{1+n^4x^2}$. Знайдемо найбільше значення цієї функції, для цього знайдемо похідну $f'(x)=\frac{1+n^4x^2-x\cdot 2xn^4}{1+n^4x^2}=\frac{1-x^2n^4}{1+n^4x^2}$. Знайдемо критичні точки: $1-x^2n^4=0$, $x^2=\frac{1}{n^4}$, $x=\pm\frac{1}{n^2}$. Але нам треба дослідити ряд для $x\in[0;\infty)$, тому нас цікавить тільки точка $x=\frac{1}{n^2}$. Похідна $f'\left(\frac{1}{n^2};+\varepsilon\right)<0$, а $f'\left(\frac{1}{n^2};-\varepsilon\right)>0$, звідси витікає, що $x=\frac{1}{n^2}$ – точка максимуму. $f\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\frac{1}{n^2}}{1+n^4\cdot\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2n^2}$, тобто на інтервалі $x\in[0;\infty)$ $\frac{x}{1+n^4x^2}\le\frac{1}{2n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ збігається для всіх x, це означає, ряд збігається рівномірно.

в) Треба довести, що ряд збігається рівномірно на проміжках $x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};2\right]$. Розглянемо проміжок $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$. Знайдемо найбільше і найменше значення функції $f(x)=x^n+x^{-n}$ на проміжку $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

$$f'(x)=nx^{n-1}-nx^{-n-1}=n\left(x^{n-1}-\frac{1}{x^{n+1}}\right)=\frac{n\left(x^{2n}-1\right)}{x^{n+1}}.$$

Знайдемо критичні точки, для цього розв'яжемо рівняння $\frac{n\left(x^{2n}-1\right)}{x^{n+1}}=0\Rightarrow x^{2n}-1=0\Rightarrow x=\pm 1$. Знайдемо $f(2)=2^n+2^{-n}=2^n+\frac{1}{2^n}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^n}+2^n$, $f(1)=2$, тому для всіх $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$ функція $f(x)<2^n+\frac{1}{2^n}$. Тоді $\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)<\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(2^n+2^{-n}\right)$.

Розглянемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)$. Застосуємо ознаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\left(2^{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\sqrt{(n+1)!}\cdot n^2\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)!}\cdot n^2}\right)\left(\frac{2^{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}}}{2^n+\frac{1}{2^n}}\right)=$$ (поділимо чисельник і знаменник на 2^n) $=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)!}\cdot n^2}\right)\left(\frac{2+\frac{1}{2^{2n+1}}}{1+\frac{1}{2^{2n}}}\right)=$ (границя першого множника існує і дорівнює нулю, так як степінь чисельника дорівнює 2, а степінь знаменника $2\frac{1}{2}$, границя другого множника дорівнює 2) $=0<1$.

Ряд збігається, звідси витікає, що функціональний ряд збігається рівномірно.

Тепер розглянемо поведінку ряду на проміжку $x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$. Для від'ємних x вираз x^n+x^{-n} можна записати у вигляді $x^n+x^{-n}=(-1)^n\left(|x|^n+|x|^{-n}\right)$. Тому, якщо ми розглянемо поведінку ряду складеного із модулів членів ряду, то він буде мати вигляд такий самий, як і для $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Тому на цьому проміжку ряд буде також збігатися рівномірно.

Приклад 5. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

Розв'язання.

Функціональні ряди, що збігаються рівномірно, можна почленно диференціювати і почленно інтегрувати. Тому можна спробувати підібрати таку функцію, похідна якої, або інтеграл якої в точці x_0 буде співпадати з нашим числовим рядом.

Розглянемо функцію $f(x)=3^{-nx}$. $f'(x)=-n3^{-nx}\ln 3$, $f''(x)=+n^2 3^{-nx}\ln^2 3$. Тому розглянемо ряд $\frac{1}{\ln^2 3}\sum_{n=1}^{\infty}3^{-nx}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-nx}$ збігається рівномірно, це геометрична прогресія, $l_1=3^{-x}$, $q=3^{-x}$, тому $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-nx}=\frac{3^{-x}}{1-3^{-x}}=\frac{\frac{1}{3^x}}{1-\frac{1}{3^x}}=\frac{1}{3^x-1}$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot 3^{-n}=\frac{1}{\ln^2 3}\left(\frac{1}{3^x-1}\right)''\Bigg|_{x=1}=\left(\left(\frac{1}{3^x-1}\right)'=\frac{-3^x\ln 3}{\left(3^x-1\right)^2},\ \left(\frac{1}{3^x-1}\right)''=\right.$$

$$\left.=\frac{-3^x\ln^2 3\left(3^x-1\right)^2+2\left(3^x-1\right)3^{2x}\ln^2 3}{\left(3^x-1\right)^4}=\frac{\ln^2 3\cdot 3^x\cancel{\left(3^x-1\right)}\left(-3^x+1+2\cdot 3^x\right)}{\left(3^x-1\right)^{\cancel{4}\,3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cancel{\ln^2 3}}\cdot\frac{\cancel{\ln^2 3}\cdot 3(-3+1+2\cdot 3)}{(3-1)^3}=\frac{3}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

Розв'язання.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, оскільки кожний ряд збігається. Другий ряд – це нескінчена геометрична прогресія, у якої $b_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$. Для першого $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2^n}$ підберемо функціональний ряд, який збігається рівномірно. Розглянемо функцію $f(x)=2^{-nx}$, $f'(x)=-n2^{-nx}\ln 2$. Розглянемо функціональний ряд $\frac{-2}{\ln 2}\sum_{n=1}^{\infty}2n^{-nx}=$ (це геометрична прогресія, у якої $b_1=\frac{1}{2^x}$, $q=\frac{1}{2^x}$, він збігається рівномірно) $=\frac{-2}{\ln 2}\cdot\frac{\frac{1}{2^x}}{1-\frac{1}{2^x}}=\frac{1}{2^x-1}\cdot\frac{2}{\ln 2}$. Знайдемо похідну від цієї суми ряду.

$$\left(\frac{-2}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2^x-1}\right)' = \frac{-2}{\ln 2}\cdot\frac{-2^x\ln 2}{\left(2^x-1\right)^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2^n} = \frac{-2}{\ln 2}\left(\frac{-2\ln 2}{\left(2-1\right)^2}\right) = 4.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \left(b_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n} = 4-1 = 3$.

5. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-a\right)^n$ називається степеневим. Радіус збіжності знаходиться за формулою $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ або $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

Основні властивості степеневого ряду.

1) Сума степеневого ряду усередині інтервалу збіжності $x\in\left(-R;R\right)$ є неперервна функція.

2) Степеневий ряд можна почленно диференціювати в будь-якій точці його інтервалу збіжності $x\in\left(-R;R\right)$, і можна почленно інтегрувати на інтервалі збіжності $x\in\left(-R;R\right)$, тобто

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + ...\right)dx = \int_{x_1}^{x_2} a_0dx + \int_{x_1}^{x_2} a_1xdx + ... + \int_{x_1}^{x_2} a_nx^ndx + ...$$

3) Дії зі степеневими рядами.

Всередині інтервалу збіжності $\left|x-a\right| < B$ маємо:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-a\right)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(x-a\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \pm b_n\right)\left(x-a\right)^n$.

б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-a\right)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(x-a\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(x-a\right)^n$,

де $C_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_nb_0$.

в) $\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-a\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} na_n\left(x-a\right)^{n-1}$.

г) $\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-a\right)^n\right]dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x-a\right)^{n+1}$.

У випадках в) і г) інтервал збіжності одержаного ряду збігається з інтервалом збіжності вихідного ряду.

5.1.Типові задачі

Приклад 1. З’ясувати, чи буде степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n^3}}$ збігатися у точці $x=4$.

Розв’язання:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-3)^n}{\sqrt{n^3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{\sqrt{n^3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Це знакододатний числовий ряд, який буде збіжним ($p=\frac{3}{2}>1$).

Приклад 2. Знайти інтервал збіжності ряду:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\cdot x^n}{n}$.

Розв’язання.

Для даного ряду $a_n=\frac{6^n}{n}$; $a_{n+1}=\frac{6^{n+1}}{n+1}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{6^n}{n}:\frac{6^{n+1}}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{6^n}{n}\cdot\frac{n+1}{6^n\cdot 6}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{6^n}{6^n\cdot 6}\cdot\frac{n+1}{n}\right|=\frac{1}{6}.$$

Інтервал збіжності ряду $-\frac{1}{6}<x<\frac{1}{6}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}\cdot(x+4)^n}{5^n}$

Розв’язання:

Для даного ряду $x_0=-4$, $a_n=\frac{\sqrt{n+2}}{5^n}$, $a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+3}}{5^{n+1}}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+2}}{5^n}:\frac{\sqrt{n+3}}{5^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+2}}{5^n}\cdot\frac{10^n\cdot 10}{\sqrt{n+3}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^n\cdot 5}{5^n}\cdot\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}}\right|=5.$$

Інтервал збіжності ряду $-4-5<x<-4+5$, або $-9<x<1$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot(x-5)^n}{(2n+1)!}$.

Розв'язання.

Для даного ряду $x_0 = 5$, $a_n = \dfrac{3^n}{(2n+1)!}$, $a_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(2n+3)!}$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{(2n+1)!} : \frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n+3)!}{3^n\cdot 3}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)}{(2n+1)!\cdot 3}\right| = \infty .$$

Таким чином, ряд буде збіжним, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!(x+7)^n}{6^n}$.

Розв'язання.

Для даного ряду $x_0 = -7$, $a_n = \dfrac{n!}{6^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{6^{n+1}}$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{6^n} : \frac{(n+1)!}{6^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{6^n}\cdot\frac{6^n\cdot 6}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\cdot 6}{n!(n+1)}\right| = 0$$

Таким чином, ряд буде збіжним, якщо $x = -7$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{3n-1}}{n\cdot 8^n}$.

Розв'язання.

Це ряд з пропуском степенів, тому скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n(x) = \frac{(x+1)^{3n-1}}{n\cdot 8^n} \ , \ u_{n+1}(x) = \frac{(x+1)^{3n+2}}{(n+1)\cdot 8^{n+1}};$$

$$D(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{3n+2}}{(n+1)\cdot 8^{n+1}} : \frac{(x+1)^{3n-1}}{n\cdot 8^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{3n+2}}{(n+1)\cdot 8^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 8^n}{(x+1)^{3n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^3}{8^{n+1}}\cdot\frac{n}{(n+1)}\right| = \frac{|x+1|^3}{8}.$$

Нерівність $D(x) < 1$ виконується, якщо

$$\frac{|x+1|^3}{8}<1 \Rightarrow |x+1|^3<8 \Rightarrow |x+1|<2 \Rightarrow -2<x+1<2.$$

Таким чином, інтервалом збіжності ряду буде $(-3;1)$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{5n}}{n^n}$.

Розв'язання.

Це ряд з пропуском степенів, тому скористаємося ознакою Коші:

$$K(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^{5n}}{n^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^5}{n}=|x|^5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Нерівність $K(x)<1$ виконується для будь-якого значення $\boldsymbol{x}$, отже, ряд буде збіжним для $x\in(-\infty;+\infty)$.

8) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,(x+3)^{2n-1}$.

Розв'язання

Це ряд з пропуском степенів, тому скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n(x)=n!\,(x+3)^{2n-1}\ ,\ u_{n+1}(x)=(n+1)!\,(x+3)^{2n+1};$$

$$D(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(x+3)^{2n+1}}{n!\,(x+3)^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(n+1)(x+3)^2\right|.$$

Нерівність $K(x)<1$ справджується, лише якщо $x+3=0$, отже, ряд буде збіжним тільки для $x=-3$.

Приклад 3. Знайти область збіжності степеневого ряду.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{8^n\ \sqrt[6]{n}}$.

Розв'язання.

Для заданого ряду $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{8^n\ \sqrt[6]{n}}$, $a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}}{8^{n+1}\ \sqrt[6]{n+1}}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{8^n\ \sqrt[6]{n}}:\frac{(-1)^{n+2}}{8^{n+1}\ \sqrt[6]{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{8\ \sqrt[6]{n+1}}{\sqrt[6]{n}}=8.$$

Інтервал збіжності ряду задається умовою $-8<x<8$. Дослідимо поведінку ряду на границях цього інтервалу.

$$x=-8:\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-8)^n}{8^n\ \sqrt[6]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overbrace{(-1)^{n+1}(-1)^n}^{(-1)^{2n+1}=-1}8^n}{8^n\ \sqrt[6]{n}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}.$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}$ є розбіжним $\left(p=\frac{1}{6}<1\right)$, отже, степеневий ряд при $x=-8$ розбігається.

$$\boldsymbol{x=8}:\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}8^n}{8^n\ \sqrt[6]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n}}.$$

Це ряд Лейбніця. Перевіримо, чи виконуються умови відповідної теореми.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}=0$;

2) $|u_1|=1$, $|u_2|=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, $|u_3|=\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$, …

$|u_1|>|u_2|>|u_3|>\ldots,\ |u_n|>|u_{n+1}|$.

За теоремою Лейбніца ряд є збіжним, тобто при $x=8$ степеневий ряд збігається.

Таким чином, областю збіжності досліджуваного ряду є $(-8;8]$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x-7)^{2n-1}}{n}$.

Розв'язання.

Якщо необхідно дослідити поведінку ряду за степенями $x-x_0$ на границях інтервалу збіжності, доцільно ввести допоміжну змінну $t=x-x_0$ та розшукувати область збіжності отриманого ряду за новою змінною.

$$t=x-7;\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\,t^{2n-1}}{n}.$$

Це ряд з пропуском степенів, тому скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{5^n\,t^{2n-1}}{n},\quad u_{n+1}=\frac{5^{n+1}\,t^{2n+1}}{n+1};$$

$$D(t)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}\,t^{2n+1}}{n+1}:\frac{5^n\ t^{2n-1}}{n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}\,t^{2n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{5^n\ t^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|5t^2\cdot\frac{n}{n+1}\right|=5t^2.$$

Нерівність $D(t)<1$ виконується, якщо

$$5t^2<1\Rightarrow t^2<\frac{1}{5}\ \Rightarrow |t|<\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}}<t<\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Дослідимо поведінку ряду на границях інтервалу збіжності.

$$t=-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\,(-1)^{2n-1}}{n\,5^{\frac{2n-1}{2}}}=-\sqrt{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Гармонійний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є розбіжним, отже , степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\ t^{2n-1}}{n}$ розбігається при $t=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$t=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\,5^{\frac{2n-1}{2}}}=\sqrt{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Гармонійний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є розбіжним, отже , степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\ t^{2n-1}}{n}$ розбігається при $t=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Таким чином, область збіжності ряду задається умовою

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}<t<\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ \text{або}\ -\frac{1}{\sqrt{5}}<x-7<\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ 7-\frac{1}{\sqrt{5}}<x<7+\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{n+1}}{4^n\cdot\sqrt[9]{n^2}}$.

Розв'язання.

Введемо нову змінну $t = x - 5$ та знайдемо область збіжності отриманого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{4^n \cdot \sqrt[9]{n^2}}$.

Для цього ряду $a_n = \frac{1}{4^n \sqrt[9]{n^2}}$, $a_{n+1} = \frac{1}{4^{n+1} \sqrt[9]{(n+1)^2}}$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{4^n \sqrt[9]{n^2}} : \frac{1}{4^{n+1} \sqrt[9]{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1} \sqrt[9]{(n+1)^2}}{4^n \sqrt[9]{n^2}}\right| =$$

$$= 4 \lim_{n\to\infty} \sqrt[9]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2} = 4.$$

Інтервалом збіжності допоміжного ряду буде $-4 < t < 4$. Дослідимо поведінку ряду на границях інтервалу.

$$t = -4 \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^{n+1}}{4^n \cdot \sqrt[9]{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^{n+1}}{4^n \cdot \sqrt[9]{n^2}} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[9]{n^2}}.$$

Це знакопочережний ряд. Перевіримо, чи виконуються умови теореми Лейбніця.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[9]{n^2}} = 0$;

2) $|u_1| = 1$, $|u_2| = \frac{1}{\sqrt[9]{4}}$, $|u_3| = \frac{1}{\sqrt[9]{9}}$, …

$|u_1| > |u_2| > |u_3| > \ldots, \ |u_n| > |u_{n+1}|$.

За теоремою Лейбніця ряд є збіжним, тобто при $t = -4$ степеневий ряд збігається.

$$t = 3 \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{4^n \cdot \sqrt[9]{n^2}} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[9]{n^2}}.$$

Узагальнений гармонійний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[9]{n^2}}$ є розбіжним $\left(p = \frac{2}{9} < 1\right)$, отже, степеневий ряд при $t = 4$ розбігається.

Таким чином, область збіжності допоміжного ряду визначається наступним чином: $-4 \le t < 4$.

Тоді область збіжності основного ряду задається нерівністю

$-4 \le x - 5 < 4$, або $-1 \le x < 9$.

Отже, область збіжності заданого ряду – це проміжок $[-1;9)$.

5.2. Завдання для самостійної роботи

1) З'ясувати, чи буде степеневий ряд **1.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+1)3^n}$ збігатися у точці $x_0=2$.

2) Знайти інтервал збіжності ряду:

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)3^n}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(2n+1)^2\cdot x^n$; **4.** $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot x^n$;

5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}\cdot 5^n}$; **6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$.

3) Знайти область збіжності ряду:

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$; **8.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}$; **9.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$; **11.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}\cdot x^n$; **12.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^n}$; **14.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$; **15.** $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$; **17.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$; **18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$;

19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^{3n}}{\sqrt{n+7}}$; **20.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+4)^{2n}}{4^n\cdot(3n+1)^3}$.

5.3. Відповіді

1. Ряд збігається за ознакою Лейбніца.

2. $(-3;3)$; **3.** $(-1;1)$; **4.** $x=0$; **5.** $(-2;8)$; **6.** $(2;4)$;

7. $[-2;2)$; **8.** $(-\infty;+\infty)$; **9.** $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; **10.** $(-\infty;+\infty)$;

11. $(-4;4)$; **12.** $(-2;2)$; **13.** $(-e;e)$; **14.** $(2;8]$; **15.** $x=-3$;
16. $(-2;4)$; **17.** $(-7;-3)$; **18.** $[-3;1]$; **19.** $[1;2)$; **20.** $[-6;-2]$.

5.4. Задачі підвищеної складності

Приклад 1. Знайти інтервал збіжності і дослідити поведінку в граничних точках інтервалу збіжності наступних рядів: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$,

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0,\, b>0)$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

Розв'язання.

а) Знайдемо радіус збіжності за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$,

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+(-1)2^n}{n}\cdot\frac{n+1}{3^{n+1}+(-1)^{n+1}2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3^n+(-1)^n2^n}{3\cdot3^n-(-1)^n2^n\cdot2}=$ (границя першого множника дорівнює 1, а чисельник і знаменник другого множника прямує до нескінченності, щоб розкрити цю невизначеність поділимо чисельник і знаменник другого множника на 3^n) = $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3-(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot2}=$

$=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=\frac{1}{3}$, $n\to\infty$. Тоді ряд збігається для всіх $-\frac{1}{3}<x+1<\frac{1}{3}$. Розглянемо поведінку ряду на границях проміжку збіжності, коли $x+1=\frac{1}{3}$ і $x+1=-\frac{1}{3}$.

Розглянемо випадок $x+1=\frac{1}{3}$. В цій точці ряд має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n2^n}{n\cdot3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n\cdot3^n}+\frac{(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}.$$

Перший ряд розбіжний, а другий збіжний, тому в точці $x+1=-\frac{1}{3}$ ряд розбігається.

Розглянемо випадок $x+1=-\frac{1}{3}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n 2^n}{n(-1)^n 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{n}$. Перший ряд збігається умовно, а другий знакододатний ряд збігається, це означає, що ряд збігається умовно.

Отже, ряд збігається $-\frac{1}{3}<x+1<\frac{1}{3}\Rightarrow-\frac{4}{3}<x<-\frac{2}{3}$, в точці $x=-\frac{2}{3}$ він розбігається, а в точці $x=-\frac{4}{3}$ збігається умовно.

б) Знайдемо радіус збіжності:

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n!)^2(2n)!}\,(2n+1)(2n+2)}{\cancel{(2n)!(n!)^2}\,(n+1)^2}=4$, тому при $x\in(-4;4)$ ряд збігається абсолютно. Розглянемо поведінку ряду в точці $x=4$. Ряд в цій точці має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$. Знайдемо $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n!)^2 4^n (2n+2)!}{(2n)!4^{n+1}((n+1)!)^2}=$

$=\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}=\frac{4n^2+6n+2}{4n^2+8n+4}=\frac{4n^2+8n+4-2n-2}{4n^2+8n+4}=$

$=\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+8n+4}-\frac{2n-2}{4\left(n^2+2n+1\right)}=1-\frac{n-1}{2(n+1)^2}<1$. Це означає, що $a_{n+1}>a_n$ для всіх n, тобто члени ряду монотонно зростають. Це означає, що границя загального члена ряду при $n\to\infty$ не може дорівнювати нулю. В цій точці ряд розбігається. По цій же причині ряд розбігається і в точці $x=-4$.

в) Знайдемо радіус збіжності за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n+b^n}\cdot\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{1}=$ (нехай $a>b$, поділимо чисельник і знаменник на a^n) $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a+\left(\frac{b}{a}\right)^n\cdot\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\left(\frac{b}{a}<1\Rightarrow\left(\frac{b}{n}\right)^n\to 0\right)=a$, якщо $b>1$, то $R=b$, тобто $R=\max(a,b)$. На проміжку $x\in(-a;a)$ ряд збігається абсолютно.

Розглянемо поведінку ряду в точках $x=a$ і $x=-a$. В точці $x=a$ ряд має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=1\neq 0$. Ряд розбігається в точці

$x=-4$, так як границя модулю загального члена ряду також не дорівнює нулю. Ряд в цих точках розбігається.

г) Знайдемо $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{3^{-\sqrt{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\cdot 3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=$ (перший множник при $n\to\infty$ наближається до одиниці, а границю другого знайдемо окремо $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$ = це невизначеність $\infty-\infty$ = $3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^2+1}}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^2+1}}}=3^0=1)$ = 1. Ряд абсолютно збігається на проміжку $x\in(-1;1)$. Розглянемо поведінку ряду в точках $x=\pm1$. Модуль загального члена і при $x=1$ і при $x=-1$ має вигляд $a_n=\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$.

Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{-\sqrt{n}}$ застосуємо ознаку порівнянь $3^{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, це видно з графіків функцій $y=3^{\sqrt{x}}$ і $y=\sqrt{x}$, тоді $\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, тоді $\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n^2+1}}$, а ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n\left(n^2+1\right)}}$ збігається, тому збігається і ряд.

в точці $x=1$, а в точці $x=-1$ ми одержимо знакопочережний ряд, у якого ряд складений із модулів його членів збігається, тому він збігається абсолютно.

д) Знайдемо радіус збіжності за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$.

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{e}$. Ряд збігається на проміжку $x\in\left(-\dfrac{1}{e};\dfrac{1}{e}\right)$.

З'ясуємо, як веде себе ряд в точках $x=\pm\dfrac{1}{e}$.

Ряд в точці $x=\dfrac{1}{e}$ має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$.

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}\right)^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}-\ln e^n\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-n+n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}=$

(Розкладемо функцію $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ в ряд Маклорена, получимо $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{3n^3}+\ldots$) $=$ $e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n+n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\ldots\right)\right)}=$ $e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n+n-\frac{1}{2}+\frac{1}{3n}+\ldots\right)}=$

$=e^{-\frac{1}{2}}\neq 0$. Ряд розбігається. З цієї причини розбігається ряд і в точці $x=-\dfrac{1}{e}$.

е) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!a^{(n+1)^2-n^2}}{n!(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{2n+1}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{2n+1}\cdot 2\ln 2}{1}=\infty$.

Ряд збігається для $x\in(-\infty;\infty)$.

5.5. Розвинення функцій у степеневі ряди

Якщо функція $y=f(x)$ має в точці x_0 похідні будь-якого порядку, цій функції відповідає ряд Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\quad.$$

Степеневий ряд у околі точки $\boldsymbol{x_0=0}$ має назву ряду Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\quad.$$

Наведемо розвинення у ряд Маклорена деяких елементарних функцій та вкажемо інтервали збіжності цих рядів (у точках, що належать інтервалам збіжності, ряди збігаються до значень відповідних функцій у цих точках).

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\qquad -\infty<x<+\infty.$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!};\qquad -\infty<x<+\infty.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}; \qquad -\infty < x < +\infty .$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n; \qquad -1 < x < 1 .$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}; \qquad -1 < x < 1 .$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \qquad -1 < x < 1 .$$

$$\mathrm{arctg}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1}; \qquad -1 < x < 1 .$$

Степеневі ряди мають такі важливі властивості:

а) степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно інтегрувати, якщо проміжок інтегрування належить області збіжності ряду;

б) степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно диференціювати у точках, що належать інтервалу збіжності.

5.6.Типові приклади

Приклад 1. Знайти перші два ненульові члени розвинення у ряд Маклорена функції $y = tg\,5x$.

Розв'язання

Ряд Маклорена має вигляд

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Обчислимо значення заданої функції та декількох її перших похідних при $x_0 = 0$.

$$y = tg\,5x, \quad y(0) = tg\,0 = 0 \; ;$$

$$y' = \frac{5}{\cos^2 5x}, \quad y'(0) = \frac{5}{\cos^2 0} = 5 \; ;$$

$$y''=\frac{50\sin 5x}{\cos^3 5x},\quad y''=\frac{50\sin 0}{\cos^3 0}=0\quad;$$

$$y'''=50\ \frac{5\cos 5x\cdot\cos^3 5x-\sin 5x\cdot 3\cos^2 5x(-5\sin 5x)}{\cos^6 5x}=250\ \frac{3-2\cos^2 5x}{\cos^4 3x},$$

$$y'''(0)=250\ \frac{3-2\cos^2 0}{\cos^4 0}=250.$$

Тоді розвинення функції має вигляд

$$y=0+\frac{5}{1!}x+0+\frac{250}{3!}x^3+\ldots,$$

$$y\approx 5x+\frac{125}{3}x^3.$$

Приклад 2. Розвинути у ряд Тейлора в околі точки $x_0=-1$ поліном $P(x)=-x^3+2x$.

Розв'язання.

Знайдемо значення многочлена та його похідних при $x_0=-1$.

$$P(x)=P(-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\ldots\quad.$$

$$P(-1)=-(-1)^3+2\cdot(-1)=-1\quad;$$

$$P'(x)=-3x^2+2\ ,\qquad P'(-1)=-3\cdot(-1)^2+2=-1\ ;$$

$$P''(x)=-6x\ ,\qquad P''(-1)=-6\cdot(-1)=6;$$

$$P'''(x)=-6\ ,\qquad P'''(-1)=-6\ ;$$

$$P^{(4)}(x)=P^{(5)}(x)=\ldots\equiv 0\ .$$

$$P(x)=-1+\frac{-1}{1!}(x+1)^1+\frac{6}{2!}(x+1)^2+\frac{-6}{3!}(x+1)^3=$$

$$=-1-(x+1)+3(x+1)^2-(x+1)^3.$$

Приклад 3. Розкласти функцію у ряд Маклорена за допомогою табличних розвинень. Вказати інтервал збіжності отриманого ряду:

1) $y=\sin\dfrac{x^3}{7}$.

Розв'язання.

Скористуємось розкладанням в ряд Маклорена функції

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Для даної функції маємо:

$$\sin\frac{x^3}{7} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x^3}{7}\right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!\,7^{2n-1}}\,x^{6n-3};.$$

Отже, $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!\,7^{2n-1}}\,x^{6n-3}$.

Табличний ряд буде збігатися при $x \in (-\infty; +\infty)$, отже, побудований ряд буде збіжним при $x \in (-\infty; +\infty)$.

2) $y = x^3 e^{-5x^2}$.

Розв'язання.

Для спрощення обчислень використуєьо заміну змінної

$$e^{-5x^2} = \{-5x^2 = t\} = e^t = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5x^2)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n!}\,x^{2n}.$$

Домножимо отриманий ряд на x^3

$$y = x^3 \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n!}\,x^{2n}\right);\; y = x^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n!}\,x^{2n+3}\;.$$

Табличний ряд буде збігатися при $t \in (-\infty; +\infty)$, отже, побудований ряд буде збіжним при $x \in (-\infty; +\infty)$.

3) $y = x^2 \ln(1 - 3x^4)$

$$\ln(1 - 3x^4) = \{\; t = -3x^4\} = \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-3x^4)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{(-1)^{n+1}(-1)^n}^{(-1)^{2n+1}=-1} 3^n x^{4n}}{n} =$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{4n}}{n}$$

$$y=x^2\cdot\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{4n}}{n}\right).$$

Отже , маємо $y=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{4n+2}}{n}$.

Інтервал збіжності відповідного табличного ряду визначається нерівністю $|t|<1$, отже, побудований ряд абсолютно збігається, якщо

$$\left|-3x^4\right|<1 \;\Rightarrow\; \left|3x^4\right|<1 \;\Rightarrow\; \left|x^4\right|<\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; |x|<\sqrt[4]{\frac{1}{3}} .$$

Таким чином, інтервалом збіжності побудованого ряду буде $\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\ ;\ \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$.

4) $y=x^3\ln\left(7+5x^2\right)$.

Розв'язання.

Для того, щоб скористатись табличними розвиненями, зробимо низку перетворень заданої функції:

$$\ln\left(7+5x^2\right)=\ln\left[7\left(1+\frac{5x^2}{7}\right)\right]=\ln 7+\ln\left(1+\frac{5x^2}{7}\right)=$$

$$=\left\{t=\frac{5x^2}{7}\right\}=\ln 7+\ln(1+t)=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n}=$$

$$=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{5x^2}{7}\right)^n}{n}=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^n x^{2n}}{7^n n};$$

$$y=x^3\left(\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^n x^{2n}}{7^n n}\right);$$

Отже, остаточно розкладення заданої функції в ряд Маклорена задається формулою: $y=x^3\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^n x^{2n+3}}{7^n n}$.

Інтервал збіжності застосованого табличного ряду визначається нерівністю $|t|<1$, отже, побудований ряд абсолютно збігається, якщо

$$\left|\frac{5x^2}{7}\right|<1 \;\Rightarrow\; \left|x^2\right|<\frac{7}{5} \;\Rightarrow\; |x|<\sqrt{\frac{7}{5}} \;.$$

Таким чином, інтервалом збіжності побудованого ряду буде $\left(-\sqrt{\frac{7}{5}}\;;\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$.

5) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(1+4x^2\right)^2}}$

Розв'язання.

Задану функцію можна записати у вигляді $y=(1+5x)^{-2/3}$ та скористатись табличним розвиненням у біноміальний ряд для $m=-\dfrac{2}{3}$.

Спочатку запишемо вказане табличне розвинення та зробимо низку спрощень:

$$(1+t)^{-\frac{2}{3}} = 1+\frac{-\frac{2}{3}}{1!}+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)}{2!}+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)\left(-\frac{2}{3}-2\right)}{3!}+\cdots$$

$$+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)\left(-\frac{2}{3}-2\right)\ldots\left(-\frac{2}{3}-n+1\right)}{n!}t^n+\cdots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)\left(-\frac{2}{3}-2\right)\ldots\left(-\frac{2}{3}-n+1\right)}{n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)\ldots\left(\frac{1-3n}{3}\right)}{n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\;2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{3^n\,n!}t^n .$$

Повернемося до заданої функції:

$$\left(1+4x^2\right)^{-2/3}=\left\{t=4x^2\right\}=(1+t)^{-2/3}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\;2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{3^n\,n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\;2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{3^n\,n!}\left(4x^2\right)^n=$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \;\; 2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)\cdot 4^n}{3^n \; n\,!} \;\; x^{2n};$$

$$y = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \;\; 2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)\cdot 4^n}{3^n \; n\,!} \;\; x^{2n}.$$

Інтервал збіжності застосованого табличного ряду визначається нерівністю

$\boldsymbol{|t|<1}$, отже, побудований ряд абсолютно збігається, якщо

$$\left|4x^2\right|<1 \;\;\Rightarrow\;\; |x|<\frac{1}{2}.$$

Таким чином, інтервалом збіжності побудованого ряду буде $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

6) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[4]{6+5x^3}}$.

Розв’язання

Запишемо задану функцію у вигляді $y=x^3\cdot\left(6+11x^3\right)^{-\frac{1}{4}}$ та застосуємо табличне розвинення у біноміальний ряд для $m=-\dfrac{1}{4}$.

Спочатку запишемо вказане табличне розвинення:

$$(1+t)^{-\frac{1}{4}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}-1\right)\left(-\frac{1}{4}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{4}-n+1\right)}{n\,!}t^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{9}{4}\right)\ldots\left(\frac{3-4n}{4}\right)}{n\,!}t^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \, 1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{4^n \; n\,!}t^n.$$

Повернемося до заданої функції:

$$\left(6+11x^5\right)^{-\frac{1}{4}} = \left[6\cdot\left(1+\frac{11x^5}{6}\right)\right]^{-\frac{1}{4}} = \left\{\, t=\frac{11x^5}{6}\right\} = 6^{-\frac{1}{4}}\cdot(1+t)^{-\frac{1}{4}} =$$

$$=6^{-\frac{1}{4}}\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \, 1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{4^n \; n\,!}t^n\right]=$$

$$=6^{-\frac{1}{4}}\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 1\cdot5\cdot9\ldots(4n-3)}{4^n\ n!}\cdot\left(\frac{11x^5}{6}\right)^n\right]=$$

$$=6^{-\frac{1}{4}}\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 1\cdot5\cdot9\ldots(4n-3)\cdot5^n}{24^n\cdot n!}\cdot x^{5n}\right];$$

$$y=x^3\cdot6^{-\frac{1}{4}}\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 1\cdot5\cdot9\ldots(4n-3)\cdot11^n}{24^n\cdot n!}\cdot x^{5n}\right];$$

$$y=6^{-\frac{1}{4}}\cdot x^3+6^{-\frac{1}{4}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 1\cdot5\cdot9\ldots(4n-3)\cdot5^n}{24^n\cdot n!}\cdot x^{5n+3}.$$

Інтервал збіжності застосованого табличного ряду визначається нерівністю $|t|<1$, отже, побудований ряд абсолютно збігається, якщо

$$\left|\frac{11x^5}{6}\right|<1\ \Rightarrow\ \left|x^5\right|<\frac{6}{11}\ \Rightarrow\ |x|<\sqrt[5]{\frac{6}{11}}.$$

Таким чином, інтервалом збіжності побудованого ряду буде $\left(-\sqrt[5]{\frac{6}{11}};\sqrt[5]{\frac{6}{11}}\right)$.

Приклад 3. Розвинути в степеневий ряд функцію $y=\frac{1}{x^2}$ в околі точки $x_0=-3$.

Розв'язання.

Задачу можна розв'язати двома способами, причому результати будуть однакові.

<u>1 спосіб.</u> Ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$y(x)=y(-3)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{(n)}(-3)}{n!}(x+3)^n.$$

Обчислимо у точці $x_0=-3$ значення заданої функції та її кількох похідних, та спробуємо знайти закономірність, якій вони підкоряються.

$y=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$; $\qquad y(-3)=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{3^2}$;

$y'=-2x^{-3}$; $\qquad y'(-3)=-\frac{2}{(-3)^3}=\frac{2}{3^3}$;

$$y'' = -2\cdot(-3)x^{-4} = 2\cdot 3\cdot x^{-4}\ ; \qquad y''(-3) = \frac{2\cdot 3}{(-3)^4} = \frac{2\cdot 3}{3^4};$$

$$y''' = 2\cdot 3\cdot(-4)x^{-5} = -2\cdot 3\cdot 4x^{-5}\ ; \quad y'''(-3) = -\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(-3)^5} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{3^5}.$$

Легко помітити, що значення похідних є додатними дробами, чисельники яких мають факторіальними добутками, а знаменники є степенями основи **3.** Аналіз цих виразів приводить до висновку, що шукані значення похідних можна обчислити за формулою

$$y^{(n)}(-3) = \frac{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n+1)}{3^{n+2}}.$$

Тоді ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$y(x) = \frac{1}{3^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 3\cdot \ldots (n+1)}{3^{n+2}\cdot n!}(x+3)^n;$$

$$y(x) = \frac{1}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n+2}}(x+3)^n.$$

Обчислимо радіус збіжності отриманого ряду.

$$a_n = \frac{n+1}{3^{n+2}}, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{3^{n+3}},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{3^{n+2}} : \frac{n+2}{3^{n+3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}\cdot\frac{3^{n+3}}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^{n+2}\cdot 3}{3^{n+2}\cdot(n+1)} = 3.$$

Тоді ряд абсолютно збігається, якщо $|x+3| < 3$.

Таким чином, інтервал збіжності задається умовою $x \in (-6\,;\,0)$.

2 спосіб. Використаємо табличне розвинення у ряд Маклорена. Для цього виконаємо заміну змінної $z = x - x_0$ та перетворимо функцію до вигляду, який дозволяє використати вказане розвинення.

$$y = \frac{1}{x^2} = \begin{Bmatrix} z = x+3; \\ x = z-3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(z-3)^2} = \frac{1}{(3-z)^2} = \frac{1}{\left[3\left(1-\frac{z}{3}\right)\right]^2} = \frac{1}{9}\cdot\left(1-\frac{z}{3}\right)^{-2} =$$

$$= \left\{t = -\frac{z}{3}\right\} = \frac{1}{9}\cdot(1+t)^{-2}\ ;$$

$$(1+t)^{-2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)\ldots(-2-n+1)}{n!}t^{n} =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-3)(-4)\ldots(-1-n)}{n!}t^{n} =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)}{n!}t^{n} =1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(n+1)t^{n}$$

$$y=\frac{1}{9}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(n+1)t^{n}\right]=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(n+1)\left(-\frac{z}{3}\right)^{n}=$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+1)(-1)^{n}}{3^{n}}z^{n}=\frac{1}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}z^{n}=$$

$$=\frac{1}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}(x+3)^{n} .$$

Таким чином, шукане розвинення має вигляд

$$y=\frac{1}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}(x+3)^{n} .$$

Інтервал збіжності застосованого табличного ряду визначається нерівністю $|t|<1$, отже, побудований ряд абсолютно збігається, якщо

$$\left|-\frac{z}{3}\right|<1 \quad\Rightarrow\quad |z|<3 \quad\Rightarrow\quad |x+3|<3 \quad\Rightarrow\quad -6<x<0 \quad .$$

Таким чином, інтервалом збіжності побудованого ряду буде $(-6\ ;0\ )$.

Приклад 4. Розкласти в степеневий ряд функцію $y=\cos\frac{\pi x}{10}$ в околі точки $x_0=5$.

Розв'язання.

Як і у попередньому прикладі застосуємо для розв'язання задачі два способи.

<u>1 спосіб.</u> Ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$y(x)=y(5)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{(n)}(5)}{n!}(x-5)^{n} .$$

Обчислимо у точці $x_0=5$ значення заданої функції та її кількох похідних, та спробуємо знайти закономірність, якій вони підкоряються.

$$y=\cos\frac{\pi x}{10} \quad , \qquad\qquad y(5)=\cos\frac{\pi\cdot 5}{10}=\cos\frac{\pi}{2}=0;$$

$$y' = -\sin\frac{\pi x}{10}\cdot\frac{\pi}{10}\ , \qquad y'(5) = -\sin\frac{\pi\cdot 5}{10}\cdot\frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{10};$$

$$y'' = -\cos\frac{\pi x}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^2, \qquad y''(5) = -\cos\frac{\pi\cdot 5}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 = 0;$$

$$y''' = \sin\frac{\pi x}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^3\ , \qquad y'''(5) = \sin\frac{\pi\cdot 5}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 = \frac{\pi^3}{10^3};$$

$$y^{(4)} = \cos\frac{\pi x}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^4, \qquad y^{(4)}(5) = \cos\frac{\pi\cdot 5}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0;$$

$$y^{(5)} = -\sin\frac{\pi x}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\ , \qquad y^{(5)}(5) = -\sin\frac{\pi\cdot 5}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 = -\frac{\pi^5}{10^5}.$$

Легко помітити, що парні похідні дорівнюють **0**, а значення непарних є знакозмінними дробами, чисельники яких є степенями основи $\boldsymbol{\pi}$, а знаменники – степенями основи **10.** Аналіз цих виразів приводить до висновку, що шукані значення похідних можна обчислити за формулою

$$y^{(2k-1)}(5) = (-1)^k\cdot\frac{\pi^{2k-1}}{10^{2k-1}}.$$

Тоді ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot\pi^{2k-1}}{10^{2k-1}\cdot(2k-1)!}(x-5)^{2k-1}.$$

Знайдемо інтервал збіжності ряду за допомогою ознаки Даламбера:

$$u_k(x) = \frac{(-1)^k\cdot\pi^{2k-1}}{10^{2k-1}\cdot(2k-1)!}(x-5)^{2k-1},$$

$$u_{k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1}\cdot\pi^{2k+1}}{10^{2k+1}\cdot(2k+1)!}(x-5)^{2k+1};$$

$$D(x) = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_{k+1}(x)}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\cdot\pi^{2k+1}\cdot(x-5)^{2k+1}}{10^{2k+1}\cdot(2k+1)!} : \frac{(-1)^k\cdot\pi^{2k-1}\cdot(x-5)^{2k-1}}{10^{2k-1}\cdot(2k-1)!}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\pi^2\cdot(x-5)^2}{10^2\cdot 2k\cdot(2k+1)}\right| = 0.$$

Нерівність $D(x)<1$ виконується для будь-якого значення x, отже, ряд буде збіжним для $x\in(-\infty;+\infty)$.

2 спосіб. Використаємо табличне розвинення у ряд Маклорена. Для цього виконаємо заміну змінної $z=x-x_0$ та перетворимо функцію до вигляду, який дозволяє використати вказане розвинення.

$$y=\cos\frac{\pi x}{10}=\left\{\begin{matrix} z=x-5 \\ x=z+5 \end{matrix}\right\}=\cos\frac{\pi(z+5)}{10}=\cos\left(\frac{\pi z}{10}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi z}{10}=$$

$$=\left\{t=\frac{\pi z}{10}\right\}=-\sin t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\cdot\left(\frac{\pi z}{10}\right)^{2n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}\cdot(2n-1)!}\cdot(x-5)^{2n-1}.$$

Таким чином, шукане розвинення має вигляд

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}\cdot(2n-1)!}\cdot(x-5)^{2n-1}.$$

Табличний ряд буде збігатися при $t\in(-\infty;+\infty)$, отже, побудований ряд буде збіжним при $x\in(-\infty;+\infty)$.

Приклад 5. Розвинути в степеневий ряд функцію $y=8^{-x}$ в околі точки $x_0=3$.

Розв'язання.

1 спосіб. Ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$y(x)=y(3)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n.$$

Обчислимо у точці $x_0=2$ значення заданої функції та її кількох похідних, та спробуємо знайти закономірність, якій вони підкоряються.

$$y=8^{-x}, \qquad y(3)=8^{-3}=\frac{1}{512};$$

$$y'=8^{-x}\ln 8\cdot(-1)=-8^{-x}\ln 8, \qquad y'(3)=-8^{-3}\ln 8=-\frac{1}{512}\ln 3;$$

$$y''=-8^{-x}\ln^2 8\cdot(-1)=8^{-x}\ln^2 8, \qquad y''(3)=8^{-2}\ln^2 8=\frac{1}{512}\ln^2 8;$$

$$y''' = 8^{-x}\ln^3 8\cdot(-1) = -8^{-x}\ln^3 8 \quad , \qquad\qquad y'''(3) = -8^{-2}\ln^3 8 = -\frac{1}{512}\ln^3 8 .$$

Аналіз цих виразів приводить до висновку, що шукані значення похідних можна обчислити за формулою

$$y^{(n)}(3) = \frac{(-1)^n}{512}\ln^n 8 \ .$$

Тоді ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$y = \frac{1}{512} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln^n 8}{512\cdot n!}(x-3)^n \ .$$

Обчислимо радіус збіжності отриманого ряду.

$$a_n = \frac{(-1)^n \ln^n 8}{512\cdot n!} \ , \ a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\ln^{n+1} 8}{512\cdot (n+1)!} \ ,$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left| \frac{(-1)^n \ln^n 8}{512\cdot n!} : \frac{(-1)^{n+1}\ln^{n+1} 512}{512\cdot (n+1)!} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left| \frac{(-1)^n \ln^n 8}{512\cdot n!}\cdot\frac{512\cdot (n+1)!}{(-1)^{n+1}\ln^{n+1} 8} \right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\ln 8} = \infty .$$

Таким чином, ряд буде збіжним при $x\in(-\infty\,;+\infty)$.

2 спосіб. Використаємо табличне розвинення у ряд Маклорена. Для цього виконаємо заміну змінної $z = x - x_0$ та перетворимо функцію до вигляду, який дозволяє використати вказане розвинення.

$$y = 8^{-x} = \begin{Bmatrix} z = x-3 \\ x = z+3 \end{Bmatrix} = 8^{-(z+3)} = 8^{-z-3} = 8^{-3}\cdot 8^{-z} = \frac{1}{512}\cdot\left(e^{\ln 8}\right)^{-z} = \frac{1}{512}\cdot e^{-z\ln 8} =$$

$$= \{t = -z\ln 8\} = \frac{1}{512}e^t = \frac{1}{512}\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right) = \frac{1}{512}\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-z\ln 8)^n}{n!}\right) =$$

$$= \frac{1}{512} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^n\cdot \ln^n 8}{512\cdot n!} = \frac{1}{512} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\ln^n 8}{512\cdot n!}(x-3)^n \ .$$

Таким чином, шукане розвинення має вигляд

$$y = \frac{1}{512} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\ln^n 8}{512\cdot n!}(x-3)^n \ .$$

Табличний ряд буде збігатися при $t\in(-\infty\,;+\infty)$, отже, побудований ряд буде збіжним при $x\in(-\infty\,;+\infty)$.

Приклад 6. Записати у вигляді ряду інтеграл зі змінною верхньою границею $\int\limits_0^x x^2\cos x^3dx$.

Розв'язання.

Розкладемо підінтегральну функцію у ряд Маклорена

$f(x)=x^2\cos x^3$.

$$\cos x^3=\left\{t=x^3\right\}=\cos t=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,t^{2n}}{(2n)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(x^3\right)^{2n}}{(2n)!}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^{6n}}{(2n)!}\ ,$$

$$f(x)=x^2\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^{6n}}{(2n)!}\right)\ ;\quad f(x)=x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^{6n+2}}{(2n)!}\ .$$

Отриманий ряд збігається на всій множині дійсних чисел, отже, його можна почленно інтегрувати у будь-якому скінченному проміжку. Тоді з урахуванням того, що $\int x^kdx=\dfrac{x^{k+1}}{k+1}+C$, маємо

$$\int\limits_0^x x^2\cos x^3dx=\int\limits_0^x\left(x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^{6n+2}}{(2n)!}\right)dx=\int\limits_0^x x^2\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x\frac{(-1)^n\,x^{6n+2}}{(2n)!}\,dx=$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\left.\frac{x^{6n+3}}{6n+3}\right|_0^x=\frac{x^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3\cdot(2n+1)!}\cdot x^{6n+3}\ .$$

Легко помітити, що отримане розвинення відповідає функції $y=\dfrac{1}{3}\sin x^3$, яка є первісною для підінтегральної функції.

Приклад 7. Записати у вигляді ряду інтеграл зі змінною верхньою границею $\int\limits_0^x\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Розв'язання.

Запишемо ряд Маклорена для підінтегральної функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}=\left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{2}}=\left\{t=x^3\right\}=(1+t)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}t^{n}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{1-2n}{2}\right)}{n!}t^{n}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^{n}\cdot n!}t^{n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^{n}\cdot n!}x^{3n}.$$

Як відомо, інтервалом збіжності отриманого ряду є $(-1;1)$, крім того, можна показати за допомогою теореми Лейбніца, що цей ряд збігається також, якщо $x=1$, отже, цей ряд можна почленно інтегрувати, якщо проміжок інтегрування повністю належить множині $(-1;1]$.

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}=\int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^{n}\cdot n!}x^{3n}\right)dx=$$

$$=\int_0^x dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^{n}\cdot n!}x^{3n}\,dx=$$

$$=x\Big|_0^x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^{n}\cdot n!}\cdot\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\Bigg|_0^x=$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^{n}\cdot n!\cdot(3n+1)}x^{3n+1}.$$

5.7. Задачі підвищеної складності

Приклад 1. Розвинути в степеневий ряд функцію $y=\ln\left(x^2-3x+2\right)$ в околі точки $x_0=4$.

Розв'язання.

Побудуємо шуканий ряд за допомогою табличних розвинень у ряд Маклорена. Для цього виконаємо заміну змінної $z = x - x_0$ та перетворимо функцію до вигляду, який дозволяє використати вказане розвинення.

$$\ln\left(x^2 - 3x + 2\right) = \begin{Bmatrix} z = x - 4 \\ x = z + 4 \end{Bmatrix} = \ln\left[(z+4)^2 - 3(z+4) + 2\right] = \ln\left(z^2 + 5z + 6\right) =$$

$$= \ln\left[(z+3)\cdot(z+2)\right] = \ln(z+3) + \ln(z+2).$$

$$\ln(z+3) = \ln\left[3\cdot\left(1+\frac{z}{3}\right)\right] = \ln 3 + \ln\left(1+\frac{z}{3}\right) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\left(\frac{z}{3}\right)^n =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}\cdot z^n \quad ; \quad \left|\frac{z}{3}\right| < 1 \quad ; \quad |\,z\,| < 3.$$

$$\ln(z+2) = \ln\left[2\cdot\left(1+\frac{z}{2}\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{z}{2}\right) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^n =$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}\cdot z^n \quad ; \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \quad ; \quad |\,z\,| < 2.$$

Тоді

$$\ln\left(x^2 - 3x + 2\right) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}\cdot z^n + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}\cdot z^n =$$

$$= \ln 3 + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}\right)\cdot z^n = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n + 3^n}{n\cdot 6^n}\cdot z^n =$$

$$= \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n + 3^n}{n\cdot 6^n}\cdot (x-4)^n .$$

Умовами збіжності допоміжних рядів були нерівності $|\,z\,| < 2$ та $|\,z\,| < 3$, тоді отриманий ряд буде збігатися, якщо

$$\begin{cases} |\,z\,| < 2 \\ |\,z\,| < 3 \end{cases} \Rightarrow \quad |\,z\,| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad |\,x-4\,| < 2.$$

Остаточно $\quad y = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n + 3^n}{n\cdot 6^n}\cdot (x-4)^n \quad , \quad x \in (2;6).$

Приклад 2. Розкласти в степеневий ряд функцію $y = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$ в околі точки $x_0 = 1$.

Розв'язання.

Побудуємо шуканий ряд за допомогою табличних розвинень у ряд Маклорена. Для цього виконаємо заміну змінної $\boldsymbol{z = x - x_0}$ та перетворимо функцію до зручного для розкладання вигляду.

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \left\{\begin{matrix} z = x - 1 \\ x = z + 1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{(z+1)^2 - (z+1) - 2} = \frac{1}{z^2 + z - 2} = \frac{1}{(z+2)\cdot(z-1)} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{(z+2)\cdot(z-1)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1} \quad ; \right.$$

$$1 = A(z-1) + B(z+2) \quad ;$$

$$z = 1: \quad 1 = A\cdot 0 + B\cdot 3 \quad , \ B = \frac{1}{3} \quad ;$$

$$z = -2: \quad 1 = A\cdot(-3) + B\cdot 0 \quad , \ A = -\ \frac{1}{3} \quad ;$$

$$\left. \frac{1}{(z+2)\cdot(z-1)} = \frac{-\frac{1}{3}}{z+2} + \frac{\frac{1}{3}}{z-1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right) = -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2+z}\right).$$

Запишемо необхідне для подальшого розв'язування задачі табличне розкладання.

$$(1+t)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)\ldots(-1-n+1)}{n!} t^{\,n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-2)(-4)\ldots(-n)}{n!} t^{\,n} = 1 + \sum_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\boldsymbol{n}} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}\,!} \boldsymbol{t}^{\,\boldsymbol{n}} = 1 + \sum_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty} (-1)^{\boldsymbol{n}} \ \boldsymbol{t}^{\,\boldsymbol{n}} .$$

Отримуємо

$$\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ (-z)^{\,n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{\,n} \quad ; \quad |\,z\,| < 1.$$

$$\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ \left(\frac{z}{2}\right)^{n}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ \frac{z^{\,n}}{2^{\,n+1}};$$

$$\left|\frac{z}{2}\right| < 1; \quad |\,z\,| < 2.$$

$$\frac{1}{x^2-x-2}=-\frac{1}{3}\cdot\left[\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}z^n+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}\ \right]=-\frac{1}{3}\cdot\left[\ \frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n\ \right]=$$

$$=-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\cdot 2^{n+1}}\right)z^n\ =-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{3\cdot 2^{n+1}}\right)\cdot(x-1)^n\ ;$$

$$\begin{cases}|\,z\,|<2\\ |\,z\,|<1\end{cases}\ \Rightarrow\ \ |\,z\,|<1\ \ \Leftrightarrow\ \ |\,x-1\,|<1.$$

Остаточно $y=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{3\cdot 2^{n+1}}\right)\cdot(x-1)^n$, $x\in(0;2)$.

Приклад 3. Розкласти функцію $f(x)=\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ в ряд Маклорена.

Розв'язання.

Для того, щоб розкласти функцію в ряд Маклорена, треба знайти загальну формулу похідної n-го порядку. Ця задача часто буває дуже важкою. Тому треба спробувати звести функцію в суму функцій, розклад яких ми знаємо.

Іноді функція, яку ми хочемо розкласти є похідною, або інтегралом от табличної функції, розклад якої ми знаємо. Розкладемо нашу функцію в суму. Для цього спочатку розкладемо на множники знаменник $1+x-2x^2$. Для цього знайдемо корені рівняння $2x^2-x-1=0$: $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$. Тому

$$-2x^2+x+1=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1).$$

Тепер розкладемо функцію $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ в суму методом розкладання раціонального дробу на найпростіші дроби.

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{x+\frac{1}{2}}+\frac{B}{x-1}\right)=-\frac{1}{2}\frac{A(x-1)+B\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}\Rightarrow$$

$\Rightarrow A(x-1)+B\left(x+\frac{1}{2}\right)=x$ (многочлени є рівними, якщо коефіцієнти при однакових степенях рівні, або їх значення при одному і тому ж x_0 рівні) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} x=1- & \frac{3}{2}B=1 \\ x=-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}A=-\frac{1}{2}\end{array}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l} B=\frac{2}{3}, \\ A=\frac{1}{3}.\end{array}$$

Тому $\frac{x}{1+x-2x^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{2}{3}}{x-1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+2x}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-x}\right)=$

$=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+2x}-\frac{1}{1-x}\right)=$ (скористуємось формулою розкладання функцій $\frac{1}{1+x}$ і $\frac{1}{1-x}$ в ряд Маклорена: $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$) $=$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 2^n-1\right)x^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-(-1)^n 2^n\right)x^n.$$

Область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n$ дорівнює $|2x|<1$, а ряду $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ – $|x|<1$, тому область збіжності їх суми $|x|<\frac{1}{2}$.

Приклад 4**.** Розкласти в ряд Маклорена наступні функції:

а) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$; б) $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$;

в) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$.

Розв'язання.

а) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=$ (дивись формулу V) $=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n}=$ (Область збіжності цих рядів $-1<x\le 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$) $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}-$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^n x^{n+1}}{n(n+1)}=$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

б) $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x=\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

Функції $\ln(1+x)$ і $\ln(1-x)$ – табличні. Розкладемо функцію $\operatorname{arctg}x$ в ряд.

$$\operatorname{arctg} x=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int x^{2n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}.$$ Тоді

$$f(x)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n x^n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Розглянемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}x^n}{n}=\left((-1)^{2n-1}=-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots=2x+\frac{2x^3}{3}+\ldots=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Тому

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2x+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^9}{9}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\sum\frac{x^{4n-1}}{4n-1}.$$

Область збіжності $x\in(-1;1)$. Це видно із того, що область збіжності ряду для $\ln(1+x)$ є $-1<x\le 1$, для $\ln(1+x)$ є $-1\le x<1$, для $\operatorname{arctg} x$ є $-1<x<1$.

в) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$. Знайдемо похідну цієї функції:

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}\right)'=\frac{\dfrac{-2(1+4x)-(2-2x)4}{(1+4x)^2}}{1+\left(\dfrac{2-2x}{1+4x}\right)^2}=\frac{-10}{20x^2+5}=\frac{-2}{1+4x^2}=\frac{-2}{1+(2x)^2}.$$

Цю функцію розкладемо за формулою $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. Звідси

$\frac{-2}{1+(2x)^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n}x^{2n}$, ми розклали в ряд Маклорена похідну, тепер

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)=C+\int f'(x)dx=C-2\sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n 2^{2n}x^{2n}dx=C-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=$$

$$=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Оскільки $f(0)=\operatorname{arctg}2$, тоді в нашому випадку $C=\operatorname{arctg}2$, тому $f(x)=\operatorname{arctg}2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1}$. Функція $\frac{1}{1-x}$ розкладається в ряд Маклорена, який збігається на інтервалі $-1<x<1$, тому $\frac{1}{1+(2x)^2}$ розкладається в ряд Маклорена, який збігається на інтервалі $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. Область визначення функції $\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$ $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};\infty\right)$. Ми при інтегруванні ряду підбирали C з того, що $f(0)=\operatorname{arctg}2$, тому знайшли розклад функції $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$ в ряд Маклорена, область збіжності якого $x\in\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$, а можна перевірити, що кінцевий ряд збігається і в точці $\frac{1}{2}$.

Приклад 5. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Підказка: розгляньте функцію $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

Розв'язання.

Іноді суму числового ряду можна знайти, якщо підібрати функцію, яка розкладається в ряд Маклорена, або в ряд Тейлора, і похідна або інтеграл від неї в якійсь точці x_0 співпадає з тим числовим рядом, суму якого нам треба знайти.

Розкладемо функцію $f(x)=\operatorname{arctg}x$ в ряд Маклорена.

$$\operatorname{arctg}x=C+\int\frac{1}{1+x^2}dx=C+\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

В точці $x=0$ $\operatorname{arctg}0=0$, тому $C=0$, так як сума ряду в точці $x=0$ дорівнює нулю. Отже, $\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Область збіжності цього ряду $x\in(-1;1]$, тоді $\operatorname{arctg}1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Тобто $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

Якщо рахувати члени ряду від $n=k$, а хочемо здвинути початок рахунку $n=k+\alpha$, то в формулу загального члена ряду замість n підставляємо $n-\alpha$. Наш ряд починався рахуватися при $n=0$, а ми хочемо передвинути початок рахунку з $n=1$, тому в загальний член ряду ми підставили $n-1$, а $(-1)^{n-1}=(-1)^{n+1}$.

Приклад 6. Розкласти функцію $f\left(x\right)=\ln\frac{1}{2+2x+x^2}$ по цілим додатним степеням бінома $\left(x+1\right)$.

Розв'язання.

Нам треба розкласти функцію $f\left(x\right)$ в ряд Тейлора по степеням $x+1$. Це можна зробити з відомими розкладами деяких функцій в ряд Маклорена, якщо функцію зможемо записати так, щоб можна було ввести нову змінну $\left(x+1\right)=t$, так, щоб ми получили функцію, розклад якої в ряд Маклорена нам відомий.

$\ln\frac{1}{2+2x+x^2}=-\ln\left(2+2x+x^2\right)=-\ln\left(1+\left(1+x\right)^2\right)$. Розклад в ряд Маклорена: ми знаємо функцію $\ln\left(1+x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}x^n}{n}$.

Тоді $-\ln\left(1+\left(1+x\right)^2\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}\left(1+x\right)^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\left(1+x\right)^{2n}}{n}$.

Область збіжності ряду Маклорена для функції $\ln\left(1+x\right)$ $-1<x\le 1$. Тоді область збіжності для нашого ряду $-1<\left(1+x\right)^2\le 1$. Це система нерівностей $\begin{cases}\left(1+x\right)^2\ge -1\\ \left(1+x\right)^2\le 1\end{cases}$, перша нерівність виконується при $x\in\left(-\infty;\infty\right)$, а друга для $-1\le 1+x\le 1$.

Звідси область збіжності $-2\le x\le 0$.

Приклад 7. Розкласти функцію $f\left(x\right)=\frac{x}{x^2-5x+6}$ в ряд Тейлора по степеням $x-5$.

Розв'язання.

Розкладемо $\frac{x}{x^2-5x+6}$ на суму простіших дробів.

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A\left(x-3\right)+B\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}\Rightarrow A\left(x-3\right)+B\left(x-2\right)=x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} x=3 & B=3 \\ x=2 & -A=2,\;\; A=-2. \end{array}$$

Тоді

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{-2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{-2}{\left(x-5\right)+3}+\frac{3}{\left(x-5\right)+2}=\frac{-2}{3\left(1+\frac{x-5}{3}\right)}+\frac{3}{2\left(1+\frac{x-5}{2}\right)}=$$

$=$ (ми знаємо розклад функції $\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$) $= -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-5)^n}{2^n}=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-5)^n\left(-\frac{2}{3^{n+1}}+\frac{3}{2^{n+1}}\right)$. Область збіжності для першого ряду $-1<\frac{x-5}{3}<1$, для другого $-1<\frac{x-5}{2}<1$, тому область збіжності суми є розв'язком системи нерівностей:

$$\begin{cases}-1<\dfrac{x-5}{3}<1\\[2mm] -1<\dfrac{x-5}{2}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3<x-5<3\\[2mm] -2<x-5<2\end{cases}\Rightarrow -2<x-5<2\Rightarrow x\in(3;7).$$

5.8. Завдання для самостійної роботи

1. Знайти перші три ненульові члени розвинення у ряд Маклорена функції $y=2^x\cos x$.

2. Розвинути у ряд Тейлора в околі точки $\boldsymbol{x_0=2}$ поліном $\boldsymbol{P(x)=x^4-x+3}$.

Записати розвинення функції у ряд Маклорена. Вказати інтервал збіжності отриманого ряду.

3. $y=x^7e^{-4x^2}$. **4.** $y=x^3\cos\frac{10x^5}{7}$. **5.** $y=x^{10}\sin\frac{2x^3}{5}$.

6. $y=x^8\ln(1+7x^4)$. **7.** $y=\ln(7-3x^8)$. **8.** $y=\frac{x^3}{(1+3x^4)^2}$.

9. $y=\frac{1}{\sqrt{9+7x^3}}$.

Записати розвинення функції у ряд Тейлора в околі заданої точки. Вказати інтервал збіжності отриманого ряду.

10. $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x+3}}$, $x_0=-2$. **11.** $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$, $x_0=-7$.

12. $y=\ln(3+x)$, $x_0=1$. **13.** $y=e^{2x}$, $x_0=-3$.

14. $y=\cos 3x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$. **15.** $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+8}}$, $x_0=-2$.

16. $y=\ln\dfrac{5-x}{3+x},\quad x_0=1$**.**

Записати у вигляді ряду інтеграл зі змінною верхньою границею .

17. $\int\limits_0^x x^3e^{-5x^2}dx.$ **18.** $\int\limits_0^x \ln(2-9x)dx.$ **19.** $\int\limits_0^x \dfrac{dx}{\sqrt[3]{8+x^5}}$**.**

Відповіді.

1. $y\approx 1+\ln 2\cdot x+\dfrac{\ln^2 2-1}{2}x^2$**.**

2. $P(x)=17+31\,(x-2)+24\,(x-2)^2+8\,(x-2)^3+(x-2)^4$**.**

3. $y=x^7+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4^n}{n!}x^{2n+7}\quad,\quad x\in(-\infty;+\infty)$**.**

4. $y=x^3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n10^{2n}}{7^{2n}\,(2n)!}x^{5n+3}\quad,\quad x\in(-\infty;+\infty)$**.**

5. $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{5^{2n-1}\,(2n-1)!}x^{6n+7}\quad,\quad x\in(-\infty;+\infty)$**.**

6. $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\,7^n}{n}x^{4n+8}\quad,\quad x\in\left(-\sqrt[4]{\dfrac{1}{7}}\,;\sqrt[4]{\dfrac{1}{7}}\right)$**.**

7. $y=\ln 7-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{7^n\,n}x^{8n}\quad,\quad x\in\left(-\sqrt[8]{\dfrac{7}{3}}\,;\sqrt[8]{\dfrac{7}{3}}\right)$**.**

8. $y=x^3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)3^n\,x^{4n+3}\quad,\quad x\in\left(-\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}\,;+\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}\right)$**.**

9. $y=\dfrac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n1\cdot3\ldots(2n-1)}{3\cdot9^n\cdot2^n\,n!}x^{3n}\quad,\quad x\in\left(-\sqrt[3]{\dfrac{9}{7}}\,;\sqrt[3]{\dfrac{9}{7}}\right)$**.**

10. $y=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n1\cdot5\cdot9\ldots(4n-3)}{4^n\,n!}(x+2)^n\quad,\quad x\in(-3;-1)$**.**

11. $y=-\dfrac{1}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{2\cdot24^n\cdot n!}(x+7)^n\quad,\quad x\in(-15;1)$**.**

12. $y=\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4^n\cdot n}(x-1)^n\quad,\quad x\in(-3;5)$**.**

13. $y = e^{-6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-6} \cdot 2^{n}}{n!}(x+3)^{n} \quad , \quad x \in (-\infty\,;\,+\infty)$.

14. $y = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 9^{n}}{(2n)\,!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n} \quad , \quad x \in (-\infty\,;\,+\infty)$.

15. $y = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{3 \cdot 8^{n} \cdot n!}(x+2)^{2n} \quad , \quad x \in (-4\,;0)$.

16. $y = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n} + (-1)^{n+1}}{6^{n} \cdot n}(x-1)^{n} \quad , \quad x \in (-1\,;3)$.

17. $I = \frac{1}{4}x^{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \cdot 5^{n}}{n\,! \cdot (2n+4)} x^{2n+4}$.

18. $I = x \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{n}}{2^{n} \cdot n\,(n+1)} x^{n+1}$.

19. $I = \frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} 1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}{2 \cdot 24^{n} \cdot n! \cdot (5n+1)} x^{5n+1}$.

6. ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ

6.1. Наближене обчислення значень функцій та визначених інтегралів

Для наближеного обчислення значень функцій необхідно побудувати розвинення шуканої функції у степеневий ряд, який є збіжним для відповідного значення аргументу. Далі отриманий числовий ряд наближено замінюється його частинною сумою так, щоб залишковий член ряду не перевищував за абсолютним значенням заданої точності.

Приклад 1. Записати у вигляді збіжного числового ряду $\ln 0{,}76$.

Розв'язання

Перепишемо число $\ln 0{,}76$ у вигляді: $\ln 0{,}76 = \ln(1 - 024)$

Можна вважати, що шукана величина є значенням функції $y = \ln(1+x)$ при $x = -0{,}24$:

$$\ln 0{,}76 = \ln(1+x)\Big|_{x=-0{,}24}.$$

Запишемо розвинення в ряд Маклорена логарифмічної функції

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n}}{n} \quad , \qquad -1 < x < 1.$$

Значення аргументу $x = -0{,}24$ належить області збіжності наведеного ряду, отже, шукане значення функції можна отримати у вигляді числового ряду підстановкою вказаного значення у степеневий ряд:

$$\ln 0{,}76 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-0{,}24)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n\left(\frac{6}{25}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{6^n}{5^{2n} \cdot n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{5^{2n} \cdot n}.$$

Приклад 2. Записати у вигляді збіжного числового ряду $\ln 19$.

Розв'язання

Якщо представити шукане значення у вигляді $\ln 19 = \ln(1+x)\Big|_{x=18}$ то скористатися розкладанням функції $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена буде неможливим, оскільки $x = 18$ не належить області збіжності відповідного ряду.

Запишемо аргумент функції у вигляді дробу

$$19 = \frac{1+x}{1-x}\ ; \quad 19(1-x) = 1+x\ ; \quad 20x = 18\ ; \quad x = 0{,}9.$$

Таким чином, можна вважати, що

$$\ln 19 = \ln \frac{1+x}{1-x}\Bigg|_{x=0{,}9}.$$

Представимо логарифм дробу у вигляді степеневого ряду:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots\right) -$$

$$-\left(\frac{-x}{1} - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} + \frac{(-x)^5}{5} - \frac{(-x)^6}{6} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}}{2n-1}\ , \quad -1 < x < 1.$$

Тоді $$\ln 19 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \cdot 0{,}9^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 9^{2n-1}}{(2n-1) \cdot 10^{2n-1}}.$$

Приклад 3. Записати у вигляді збіжного числового ряду $\sqrt[4]{1{,}7}$.

Розв'язання

Можна вважати, що шукана величина є значенням функції $y = (1+x)^{1/4}$ при $x = 0{,}7$:

$$\sqrt[4]{1{,}7} = (1+x)^{1/4}\Big|_{x=0{,}7}.$$

Запишемо розкладання в ряд Маклорена цієї функції.

$$(1+x)^{1/4} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n\,!}x^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)\ldots\left(\frac{5-4n}{4}\right)}{n\,!}x^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\,(-3)\,(-7)\ldots(5-4n)}{4^n\cdot n\,!}x^n \qquad ,-1<x<1.$$

Значення аргументу $x=0{,}7$ належить області збіжності наведеного ряду, отже, шукане значення функції можна отримати у вигляді числового ряду підстановкою вказаного значення у степеневий ряд:

$$\sqrt[4]{1{,}7} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\,(-3)\,(-7)\ldots(5-4n)}{4^n\cdot n\,!}\left(\frac{7}{10}\right)^n =1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\,(-3)\,(-7)\ldots(5-4n)}{40^n\cdot n\,!}\cdot 7^n .$$

Ряд можна записати також у такій формі:

$$\sqrt[4]{1{,}7} =1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{-1\cdot 3\cdot 7\ldots(4n-5)}{40^n\cdot n\,!}\cdot 7^n .$$

Приклад 4. Записати у вигляді збіжного числового ряду $\sqrt[3]{17}$.

Розв'язання

Спроба представити шукане значення у вигляді $\sqrt[3]{17}=(1+x)^{1/3}\Big|_{x=17}$ є недоцільною, оскільки $x=17$ не належить області збіжності біноміального ряду, отже, використання цього розвинення неможливе.

Порівняємо значення аргумента кореня третього степеня з відповідними (третіми) степенями натуральних чисел:

$1^3=1$, $2^3=8$, $3^3=27$; $8<17<27$.

Тоді можна представити аргумент кореня у вигляді

$$17=27-10=27\left(1-\frac{10}{27}\right),$$

який надає можливість скористатися табличним розвиненням:

$$\sqrt[3]{17}=\sqrt[3]{27\left(1-\frac{10}{27}\right)}=3\cdot\sqrt[3]{\left(1-\frac{10}{27}\right)}=3\cdot(1+x)^{1/3}\Big|_{x=-10/27} .$$

Запишемо відповідне табличне розвинення

$$(1+x)^{1/3} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n\,!}x^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\ldots\left(\frac{4-3n}{3}\right)}{n\,!}x^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\,(-2)\,(-5)\ldots(4-3n)}{3^n\cdot n\,!}x^n \;,\quad -1<x<1.$$

Значення аргументу $x=-\dfrac{10}{27}$ належить області збіжності наведеного ряду, отже, шукане значення функції можна отримати у вигляді числового ряду підстановкою вказаного значення у отримане рокладання:

$$\sqrt[3]{17}\;=3\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\,(-2)\,(-5)\ldots(4-3n)}{3^n\cdot n\,!}\cdot\left(-\frac{10}{27}\right)^n\right)=$$

$$=3+\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot(-1)^n\,\frac{1\,(-2)\,(-5)\ldots(4-3n)\cdot 10^n}{3^{4n}\cdot n\,!}.$$

Ряд можна також записати у такій формі:

$$\sqrt[3]{17}\;=3+\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot(-1)^n\,\frac{1\,(-2)\,(-5)\ldots(4-3n)\cdot 10^n}{3^{4n}\cdot n\,!}.$$

Приклад 5. Записати у вигляді збіжного числового ряду $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Розв'язання

Скористуємося алгоритмом розв'язання попередньої задачі:
Оскільки $8<9<27$, то запишемо

$$9=8+1=8\left(1+\frac{1}{8}\right),$$

який надає можливість скористатися табличним розвиненням:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8\left(1+\frac{1}{8}\right)}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{8}\right)}}=\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{3}}\Bigg|_{x=\frac{1}{8}}\;.$$

Запишемо відповідне табличне розвинення

$$(1+x)^{-\frac{1}{3}}\;=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)}{n\,!}x^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)\ldots\left(\frac{2-3n}{3}\right)}{n\,!}x^n =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{3^n\cdot n\,!}x^n \;,\quad -1<x<1.$$

Значення аргументу $x=\frac{1}{8}$ належить області збіжності наведеного ряду, отже, шукане значення функції можна отримати у вигляді числового ряду підстановкою вказаного значення у отримане розвинення:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}}=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{3^n\cdot n!}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^n\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{2\cdot3^n\cdot n!}\cdot\frac{1}{8^n}$$

Приклад 6. Обчислити $arctg\frac{1}{2}$ з точністю $\varepsilon=0{,}001$.

Розв'язання.

Представимо шукане значення у вигляді збіжного числового ряду.

$$arctg\frac{1}{2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1};$$

$$arctg\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot8}+\frac{1}{5\cdot32}-\frac{1}{7\cdot128}-\frac{1}{9\cdot512}+\cdots\approx$$

$$\approx0{,}5-0{,}0417+0{,}0063-0{,}0011=0{,}4635\approx0{,}464.$$

Залишковий член цього ряду з чергуванням знаків за абсолютним значенням не перевищує першого відкинутого члена ряду, отже,

$|R_4|<|u_5|=0{,}0002<0{,}001.$

Приклад 7. Обчислити $\cos^2 9^\circ$ з точністю $\varepsilon=0{,}001$.

Розв'язання.

Представимо шукане значення у вигляді збіжного числового ряду.

$$\cos^2 9^\circ=\frac{1}{2}(1+\cos18^\circ)=\frac{1}{2}(1+\cos x)\Big|_{x=\frac{\pi}{10}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\pi^{2n}}{2\cdot(2n)!\cdot10^{2n}};$$

$$\cos^2 9^\circ=1-\frac{\pi^2}{2\cdot10^2\cdot2!}+\frac{\pi^4}{2\cdot10^4\cdot4!}-\frac{\pi^6}{2\cdot10^6\cdot6!}+\cdots\approx$$

$$\approx1-0{,}0247+0{,}0002-\ldots\approx1-0{,}0247=0{,}9753\approx0{,}975$$

Залишковий член цього ряду з чергуванням знаків за абсолютним значенням не перевищує першого відкинутого члена ряду, отже,

$|R_2|<|u_3|=0{,}0002<0{,}001.$

Зауваження. При обчисленні значень тригонометричних функцій використовується радіанна міра аргументів.

Приклад 8. Обчислити $\ln 0{,}9$ з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$.

Розв'язання

Представимо шукане значення у вигляді збіжного числового ряду.

$$\ln 0{,}9 = \ln(1+x)\Big|_{x=-0{,}1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-0{,}1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 10^n} =$$

$$= -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \cdots\right).$$

Цей ряд на відміну від попередніх є знакосталим, тому необхідно застосувати іншу методику оцінки залишкового члена ряду.

Припустимо, що для забезпечення заданої точності треба залишити k членів ряду. Тоді залишковий член ряду відповідає умові

$$|R_k| = \frac{1}{(k+1) \cdot 10^{k+1}} + \frac{1}{(k+2) \cdot 10^{k+2}} + \frac{1}{(k+3) \cdot 10^{k+3}} + \cdots <$$

$$< \frac{1}{(k+1) \cdot 10^{k+1}} + \frac{1}{(k+1) \cdot 10^{k+2}} + \frac{1}{(k+1) \cdot 10^{k+3}} + \cdots =$$

$$< \frac{1}{(k+1) \cdot 10^{k+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(k+1) \cdot 10^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-0{,}1} =$$

$$= \frac{1}{9\,(k+1)10^k}.$$

Оберемо $k = 2$. Тоді $|R_2| < \frac{1}{9 \cdot 3 \cdot 10^2} = \frac{1}{2700} \approx 0{,}00037$. Очевидно, що обраної кількості членів ряду недостатньо для досягнення заданої точності. Візьмемо $k = 3$. В цьому випадку $|R_3| < \frac{1}{9 \cdot 4 \cdot 10^3} = \frac{1}{36000} \approx 0{,}000028$, тобто $|R_3| < \varepsilon = 0{,}0001$.

Тоді $\ln 0{,}9 \approx -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1}{3 \cdot 10^3}\right) = -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{3000}\right) \approx$

$$\approx -(0{,}1 + 0{,}005 + 0{,}00033) = -0{,}10533 \approx -0{,}1053.$$

Також розвинення в ряд Маклорена використовується при обчисленні визначених інтегралів. Якщо визначений інтеграл не має елементарної первісної або її відшукування трудомістке, то у багатьох випадках доцільно підінтегральну функцію розвинути у степеневий ряд, а потім цей ряд в області його збіжності почленно проінтегрувати, та обчислити отриманий вираз із заданою точністю.

Приклад 8. Обчислити $\int\limits_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$ з точністю $\varepsilon = 0{,}001$.

Розв'язання.

Запишемо розвинення у ряд Маклорена підінтегральної функції $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

$$e^{-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}; \quad f(x) = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+2}.$$

Цей ряд збігається на всій множині дійсних чисел.
Маємо

$$\int\limits_0^1 x^2 e^{-x^2} dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+2} \right) dx = \int\limits_0^1 x^2\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+2}\, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (2n+3)}.$$

$$\int\limits_0^1 x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{1! \cdot 5} + \frac{1}{2! \cdot 7} - \frac{1}{3! \cdot 9} + \frac{1}{4! \cdot 11} - \frac{1}{5! \cdot 13} + \cdots \approx$$

$$\approx 0{,}3333 - 0{,}2 + 0{,}0714 - 0{,}0185 + 0{,}0038 - 0{,}0006 + \ldots \approx$$

$$\approx 0{,}3333 - 0{,}2 + 0{,}0714 - 0{,}0185 + 0{,}0038 = 0{,}1900.$$

Залишковий член цього ряду з чергуванням знаків за абсолютним значенням не перевищує першого відкинутого члена ряду, отже,

$$|R_5| < |u_6| = 0{,}0006 < 0{,}001.$$

Приклад 9. Обчислити $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$ з точністю $\varepsilon = 0{,}001$

Розв`язання.

Скористуємось розвиненням в ряд Маклорена функції $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ Замінивши у цьому розвиненні x на x^2, отримаємо:

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{120 \cdot 11} - \cdots \right)\bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \cdots \approx 0{,}3333 - 0{,}0238 = 0{,}3095 \approx 0{,}310.$$

Оскільки ряд знакопочережний, то викликану його обривом похибку легко оцінити:

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{1}{1320} < 0{,}001.$$

Приклад 10. Знайти $\int\limits_0^{0,5} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^3}}$ з точністю $\varepsilon = 0{,}001$.

Розв`язання.

Скористуємося стандартним розвиненням в ряд Маклорена:

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Замінивши x на x^3, дістанемо

$$\left(1+x^3\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^9 + \cdots$$

Інтегрування здійснюється по відрізку [0; 0,5], тому $|x| < 1$ та $\left|x^3\right| < 1$ також. Підставимо в інтеграл отримане розвинення в ряд:

$$I = \int\limits_0^{0,5} x\left(1 - \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8}x^6 - \frac{5}{16}x^9 + \cdots\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{10} + \frac{3}{64}x^8 - \frac{5}{176}x^{11} + \cdots\right)\Bigg|_0^{0,5} =$$

$$= \frac{(0{,}5)^2}{2} - \frac{(0{,}5)^5}{10} + \frac{3\cdot(0{,}5)^8}{64} - \cdots \approx 0{,}125 - 0{,}0031 = 0{,}1219 \approx 0{,}122.$$

Похибка, яку викликає обрив ряду, не перевищує числа $\frac{3\cdot(0{,}5)^8}{64} < 2\cdot 10^{-4} < 0{,}001$.

Приклад 11. Обчислити $\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ з точністю $\varepsilon = 0{,}001$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ не визначена при $x = 0$, але $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \ne \infty$, отже, функція є інтегровною на проміжку $[\,0\,;0{,}5\,]$. Запишемо розвинення у ряд Маклорена підінтегральної функції .

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n-1}.$$

Отриманий ряд збігається, якщо $x \in (-1;1\,]$, отже його можна почленно інтегрувати на проміжку $[\,0\,;0{,}5\,]$.

$$\int\limits_0^{0,5}\frac{\ln(1+x)}{x}dx = \int\limits_0^{0,5}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n-1}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{0,5}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n-1}dx =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{n}\Bigg|_0^{0,5}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cdot 0{,}5^n;$$

$$\int_0^{0,5}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2\cdot 2^2}+\frac{1}{3^2\cdot 2^3}-\frac{1}{4^2\cdot 2^4}+\frac{1}{5^2\cdot 2^5}-\frac{1}{6^2\cdot 2^6}+\cdots\approx$$

$$\approx 0{,}5-0{,}0625+0{,}0139-0{,}0039+0{,}0012-0{,}0004+\ldots\approx$$

$$\approx 0{,}5-0{,}0625+0{,}0139-0{,}0039+0{,}0012=0{,}4487\approx 0{,}449.$$

Залишковий член цього ряду з чергуванням знаків за абсолютним значенням не перевищує першого відкинутого члена ряду, отже,

$$|R_5|<|u_6|=0{,}0004<0{,}001.$$

Завдання для самостійної роботи

Записати значення функції у вигляді збіжного числового ряду

1. $\sqrt[7]{e}$ **2.** $\sin 10^\circ$ **3.** $\ln 1{,}5$

4. $\ln 0{,}6$ **5.** $\ln 8$ **6.** $\sqrt{1{,}5}$

7. $\sqrt[6]{0{,}8}$ **8.** $\sqrt[3]{70}$ **9.** $\sqrt[5]{30}$

Обчислити значення функції з заданою точністю

10. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ **,** $\varepsilon=0{,}001.$ **11.** $\sqrt{68}$ **,** $\varepsilon=0{,}001.$

12. $\ln 2{,}25$ **,** $\varepsilon=0{,}01$ (скористатися тим, що $2{,}25=1{,}5^2$).

Обчислити визначений інтеграл з заданою точністю

13. $\int_0^{\pi/4}\sin x^2dx$ **,** $\varepsilon=0{,}001$ **14.** $\int_0^{0,25}\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ **,** $\varepsilon=0{,}00001$ **.**

Відповіді.

1. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\cdot 7^n}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\pi^{2n-1}}{(2n-1)!\cdot 18^{2n-1}}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}$ **4.** $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 5^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 7^{2n-1}}{(2n-1)\cdot 9^{2n-1}}$ **6.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1(-1)(-3)\ldots(3-2n)}{4^n\cdot n!}$

7. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1\cdot 5\cdot 11\ldots(6n-7)}{30^n\cdot n!}$ **8.** $4+\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\frac{1(-2)(-5)\ldots(4-3n)}{32^n\cdot n!}$

9. $2+\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\frac{-1\cdot 4\cdot 9\ldots(5n-6)}{80^n\cdot n!}$

10. 0,607 **11.** 8,246 **12.** 0,81 **13.** 0,157 **14.** 0,24951

6.2. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Для наближеного інтегрування диференціальних рівнянь розв'язок відповідної задачі Коші розшукують у вигляді розвинення в степеневий ряд в околі початкової точки $x = x_0$, тобто будують ряд Тейлора або Маклорена, коефіцієнти якого обчислюють використовуючи початкові умови для перших членів отриманого ряду та шляхом диференціювання для отримання наступних.

Якщо диференціальне рівняння є лінійним, застосовується також метод невизначених коефіцієнтів, який дозволяє побудувати низку рекурентних формул, а іноді навіть знайти правило для обчислення будь-якого коефіцієнта ряду.

Приклад 1. Знайти перші три ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

$$y' = x - y^2 \ , \ y(0) = 0 .$$

Розв'язання.

Запишемо шукане розвинення у степеневий ряд в околі початкової точки $x_0 = 0$, тобто ряд Маклорена для функції y:

$$y = y(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Обчислимо за допомогою диференціального рівняння значення декількох похідних шуканої функції.

$$y(0) = 0;$$

$$y'(0) = 0 - 0^2 = 0;$$

$$y'' = 1 - 2y \cdot y',$$

$$y''(0) = 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = 1;$$

$$y''' = -2(y' \cdot y' + y \cdot y'') = -2(y')^2 - 2y \cdot y'',$$

$$y'''(0) = -2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \ ;$$

$$y^{(4)} = -2 \cdot 2y'y'' - 2(y' \cdot y'' + y \cdot y''') = -6y' \cdot y'' - 2y \cdot y''' \ ,$$

$$y^{(4)}(0) = -6 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \ ;$$

$$y^{(5)} = -6(y'' \cdot y'' + y' \cdot y''') - 2\left(y' \cdot y''' + y \cdot y^{(4)}\right) = -6(y'')^2 - 8y' \cdot y''' - 2y \cdot y^{(4)},$$

$$y^{(5)}(0) = -6 \cdot 1^2 - 8 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = -6;$$

$$y^{(6)} = -6 \cdot 2y'' \cdot y''' - 8 \cdot \left(y'' \cdot y''' + y' \cdot y^{(4)}\right) - 2 \cdot \left(y' \cdot y^{(4)} + y \cdot y^{(5)}\right) =$$

$$= -20y'' \cdot y''' - 10 \cdot y' \cdot y^{(4)} - 2 \cdot y \cdot y^{(5)},$$

$$y^{(6)}(0) = -20 \cdot 1 \cdot 0 - 10 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot (-6) = 0;$$

$$y^{(7)} = -20\left(y''' \cdot y''' + y'' \cdot y^{(4)}\right) - 10 \cdot \left(y'' \cdot y^{(4)} + y' \cdot y^{(5)}\right) - 2 \cdot \left(y' \cdot y^{(5)} + y \cdot y^{(6)}\right) =$$

$$= -20\cdot\left(y'''\right)^2 - 30\cdot y''\cdot y^{(4)} - 12\cdot y'\cdot y^{(5)} - 2\cdot y\cdot y^{(6)},$$

$$y^{(7)}(0) = -20\cdot 0^2 - 30\cdot 1\cdot 0 - 12\cdot 0\cdot(-6) - 2\cdot 0\cdot 0 = 0;$$

$$y^{(8)} = -20\cdot 2\cdot y'''\cdot y^{(4)} - 30\cdot\left(y'''\cdot y^{(4)} + y''\cdot y^{(5)}\right) - 12\cdot\left(y''\cdot y^{(5)} + y'\cdot y^{(6)}\right) -$$

$$-12\cdot\left(y''\cdot y^{(5)} + y'\cdot y^{(6)}\right) - 2\cdot\left(y'\cdot y^{(6)} + y\cdot y^{(7)}\right) =$$

$$= -70\cdot y'''\cdot y^{(4)} - 42\cdot y''\cdot y^{(5)} - 14\cdot y'\cdot y^{(6)} - 2\cdot y\cdot y^{(7)},$$

$$y^{(8)}(0) = -70\cdot 0\cdot 0 - 42\cdot 1\cdot(-6) - 14\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 0 = 252.$$

Тоді $y = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{-6}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \frac{0}{7!}x^7 + \frac{252}{8!}x^8 + \ldots,$

$$y \approx \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{160}x^8.$$

Приклад 2. Знайти перші три ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

$$y' = x^2 - y^2, \; y(1) = -1.$$

Розв'язання.

У даному випадку $x_0 = 1$, тому розв'язок диференціального рівняння будемо розкладати в ряд Тейлора за формулою:

$$y = y(1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n.$$

Обчислимо за допомогою диференціального рівняння значення декількох похідних шуканої функції, таким чином, щоб отримати три ненульові члени.

$$y(1) = -1;$$

$$y'(1) = 1^2 - (-1)^2 = 0;$$

$$y'' = 2x - 2y\cdot y',$$

$$y''(1) = 2\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 0 = 2;$$

$$y''' = 2 - 2\left(y'\cdot y' + y\cdot y''\right) = 2 - 2\left(y'\right)^2 - 2y\cdot y'',$$

$$y'''(1) = 2 - 2\cdot 0^2 - 2\cdot(-1)\cdot 2 = 6.$$

Тоді $y = -1 + \frac{0}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + \ldots,$

$$y \approx -1 + (x-1)^2 + (x-1)^3.$$

Приклад 3. Знайти перші три ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

$$y'' = xy\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=1.$$

Розв'язання.

Запишемо шукане розвинення у степеневий ряд в околі початкової точки $x_0 = 0$, тобто ряд Маклорена для функції y:

$$y = y(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Обчислимо за допомогою диференціального рівняння та початкових умов значення похідних шуканої функції, таким чином, щоб отримати три ненульові члени ряду.

$$y(0) = 0;$$

$$y'(0) = 1;$$

$$y''(0) = 0 \cdot 0 = 0;$$

$$y''' = 1 \cdot y + x \cdot y' = 1 + xy';$$

$$y'''(0) = 0 + 0 \cdot 1 = 0;$$

$$y^{(4)} = y' + 1 \cdot y' + x \cdot y'' = 2y' + xy'';$$

$$y^{(4)}(0) = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2;$$

$$y^{(5)} = 2y'' + 1 \cdot y'' + x \cdot y''' = 3y'' + xy''';$$

$$y^{(5)}(0) = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0;$$

$$y^{(6)} = 3y''' + 1 \cdot y''' + x \cdot y^{(4)} = 4y''' + xy^{(4)};$$

$$y^{(6)}(0) = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0;$$

$$y^{(7)} = 4y^{(4)} + 1 \cdot y^{(4)} + x \cdot y^{(5)} = 5y^{(4)} + xy^{(5)};$$

$$y^{(7)}(0) = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 10 .$$

Тоді $y = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \frac{10}{7!}x^7 + \ldots,$

$$y \approx x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 .$$

Задачі підвищеної складності

Приклад 1. Знайти розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

$$y'' + y' = e^x \ , \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1.$$

Розв'язання.

Запишемо шукане розвинення у вигляді ряду з невизначеними коефіцієнтами, знайдемо його похідні та підставимо ці ряди у диференціальне рівняння та початкові умови (права частина рівняння також повинна бути записаною у вигляді ряду).

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots,$$

$$y' = a_1 + a_2 \cdot 2x + a_3 \cdot 3x^2 + a_4 \cdot 4x^3 + a_5 \cdot 5x^4 + \ldots,$$

$$y'' = a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2x + a_4 \cdot 4 \cdot 3x^2 + a_5 \cdot 5 \cdot 4x^3 + a_6 \cdot 6 \cdot 5x^4 + \ldots \ ,$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad .$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots = 0 \ ;$$

$$y'(0) = 1 \quad \Rightarrow a_1 + a_2 \cdot 2 \cdot 0 + a_3 \cdot 3 \cdot 0 + \ldots = 1 \ ;$$

$$\left(a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2x + a_4 \cdot 4 \cdot 3x^2 + a_5 \cdot 5 \cdot 4x^3 + a_6 \cdot 6 \cdot 5x^4 + \ldots\right) +$$

$$+ \left(a_1 + a_2 \cdot 2x + a_3 \cdot 3x^2 + a_4 \cdot 4x^3 + a_5 \cdot 5x^4 + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

$$\left(a_2 \cdot 2 + a_1\right) + \left(a_3 \cdot 3 \cdot 2 + a_2 \cdot 2\right) x + \left(a_4 \cdot 4 \cdot 3 + a_3 \cdot 3\right) x^2 +$$

$$+ \left(a_5 \cdot 5 \cdot 4 + a_4 \cdot 4\right) x^3 + \left(a_6 \cdot 6 \cdot 5 + a_5 \cdot 5\right) x^4 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \quad .$$

Порівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної $\boldsymbol{x}$ та отримаємо рекурентну послідовність рівностей:

$$a_0 = 0 \ ;$$

$$a_1 = 1 \ ;$$

$$a_2 \cdot 2 + a_1 = 1 \ , \qquad\qquad a_2 = \frac{1}{2}\left(1 - a_1\right) = 0 \ ;$$

$$a_3 \cdot 3 \cdot 2 + a_2 \cdot 2 = \frac{1}{1!}, \qquad a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2}\left(\frac{1}{1!} - 2a_2\right) = \frac{1}{3!};$$

$$a_4 \cdot 4 \cdot 3 + a_3 \cdot 3 = \frac{1}{2!}, \qquad a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3}\left(\frac{1}{2!} - 3a_3\right) = \frac{1}{4 \cdot 3}\left(\frac{1}{2!} - \frac{3}{3!}\right) = 0;$$

$$a_5 \cdot 5 \cdot 4 + a_4 \cdot 4 = \frac{1}{3!}, \qquad a_5 = \frac{1}{5 \cdot 4}\left(\frac{1}{3!} - 4a_4\right) = \frac{1}{5 \cdot 4}\left(\frac{1}{3!} - 0\right) = \frac{1}{5!};$$

$$a_6 \cdot 6 \cdot 5 + a_5 \cdot 5 = \frac{1}{4!}, \qquad a_6 = \frac{1}{6 \cdot 5}\left(\frac{1}{4!} - 5a_5\right) = \frac{1}{6 \cdot 5}\left(\frac{1}{4!} - \frac{5}{5!}\right) = 0; \quad \ldots$$

Можна довести, що коефіцієнти ряду задаються залежностями

$$a_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)!}, \quad a_{2k} = 0.$$

Тоді шуканий ряд має вигляд

$$y = 1 \cdot x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \ldots .$$

Легко помітити, що отриманий розв’язок може бути записаний у вигляді

$$y = sh\,x, \text{ де } sh\,x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$$

Приклад 2. Знайти розвинення у степеневий ряд розв’язку задачі Коші

$$y'' + y = 1, \; y(0) = 2, \; y'(0) = 0.$$

Розв’язання.

Запишемо шукане розвинення, знайдемо його похідні та підставимо отримані ряди у диференціальне рівняння та початкові умови.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots,$$

$$y' = a_1 + a_2 \cdot 2x + a_3 \cdot 3x^2 + a_4 \cdot 4x^3 + a_5 \cdot 5x^4 + \ldots,$$

$$y'' = a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2x + a_4 \cdot 4 \cdot 3x^2 + a_5 \cdot 5 \cdot 4x^3 + a_6 \cdot 6 \cdot 5x^4 + \ldots .$$

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots = 2;$$

$$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow a_1 + a_2 \cdot 2 \cdot 0 + a_3 \cdot 3 \cdot 0 + \ldots = 0;$$

$$\left(a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2x + a_4 \cdot 4 \cdot 3x^2 + a_5 \cdot 5 \cdot 4x^3 + a_6 \cdot 6 \cdot 5x^4 + \ldots\right) +$$

$$+\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots\right)=1,$$

$$\left(a_2\cdot 2+a_0\right)+\left(a_3\cdot 3\cdot 2+a_1\right)x+\left(a_4\cdot 4\cdot 3+a_2\right)x^2+$$

$$+\left(a_5\cdot 5\cdot 4+a_3\right)x^3+\left(a_6\cdot 6\cdot 5+a_4\right)x^4+\ldots=1\ .$$

Отримаємо рекурентну послідовність рівностей

$$a_0=2\ ;$$

$$a_1=0\ ;$$

$$a_2\cdot 2+a_0=1\ , \qquad a_2=\frac{1}{2}\left(1-a_0\right)=-\frac{1}{2}\ ;$$

$$a_3\cdot 3\cdot 2+a_1=0\ , \qquad a_3=-\frac{1}{3\cdot 2}a_1=0\ ;$$

$$a_4\cdot 4\cdot 3+a_2=0\ , \qquad a_4=-\frac{1}{4\cdot 3}a_2=-\frac{1}{4\cdot 3}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4!}\ ;$$

$$a_5\cdot 5\cdot 4+a_4=0\ , \qquad a_5=-\frac{1}{5\cdot 4}a_3=0\ ;$$

$$a_6\cdot 6\cdot 5+a_4=0\ , \qquad a_6=-\frac{1}{6\cdot 5}a_4=-\frac{1}{6\cdot 5}\cdot\frac{1}{4!}=-\frac{1}{6!};\quad \ldots$$

Можна довести, що коефіцієнти ряду задаються залежностями

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k)!},\quad a_{2k-1}=0.$$

Тоді шуканий ряд має вигляд

$$y=2-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\ldots\quad .$$

Легко помітити, що отриманий розв’язок може бути записаний у вигляді

$$y=1+\cos x.$$

Приклад 3. Знайти розвинення у степеневий ряд розв’язку задачі Коші $y'+2xy=x^2+2x+1/2, \qquad y(0)=2$.

Розв`язання.

Розв’язок даного диференціального рівняння будемо шукати у вигляді рядя Маклорена. Підставивши у ДР початкову умову, тобто $x = 0$, $y = 2$, знайдемо $y'(0)=1/2$. Продиференціюємо ДР за x: $y''+2y+2xy'=2x+2$. Звідси при $x = 0$ випливає

$y''(0) = -2y(0) + 2 = -2\cdot 2 + 2 = -2$. Отриману вище рівність із змінними величинами продиференціюємо ще раз та підставимо $x = 0$:

$$y''' + 2y' + 2y' + 2xy'' = 2, \quad y'''(0) + 4y'(0) = 2, \quad y'''(0) = 2 - 4y'(0) = 0.$$

Повторимо процедуру:

$$y^{(4)} + 6y'' + 2xy''' = 0, \qquad y^{(4)}(0) = -6y''(0) = 12;$$
$$y^{(5)} + 8y''' + 2xy^{(4)} = 0, \qquad y^{(5)}(0) = -8y'''(0) = 0;$$
$$y^{(6)} + 10y^{(4)} + 2xy^{(5)} = 0, \qquad y^{(6)}(0) = -10y^{(4)}(0) = -120;$$
$$y^{(7)} + 12y^{(5)} + 2xy^{(6)} = 0, \qquad y^{(7)}(0) = -12y^{(5)}(0) = 0;$$
$$y^{(8)} + 14y^{(6)} + 2xy^{(7)} = 0, \qquad y^{(8)}(0) = -14y^{(6)}(0) = 14\cdot 120;$$
$$y^{(9)} + 16y^{(7)} + 2xy^{(8)} = 0, \qquad y^{(9)}(0) = -16y^{(7)}(0) = 0;$$
$$y^{(10)} + 18y^{(8)} + 2xy^{(9)} = 0, \qquad y^{(10)}(0) = -18y^{(8)}(0) = -18\cdot 14\cdot 120.$$

Знайдені числа підставиьо у формулу $\quad y = y(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Маємо

$$y(x) = 2 + \frac{1/2}{1!}x - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{4!}x^4 - \frac{120}{6!}x^6 + \frac{14\cdot 120}{8!}x^8 - \frac{18\cdot 14\cdot 120}{10!}x^{10} + \cdots;$$

$$y(x) = 1 + \frac{x}{2} + \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \cdots\right) = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{j!}.$$

Застосувавши узагальнену ознаку Даламбера, можна переконатися в тому, що цей ряд збігається на всій числовій осі. Сумою ряду є функція $y = 1 + \frac{x}{2} + e^{-x^2}$, яка і являє собою шуканий частинний розв`язок заданого диференціального рівняння.

Завдання для самостійної роботи

Знайти перші три ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

1. $y' - y\sin x + y = 1$ **,** $y(0) = 1$**.**

2. $y'' = x\,y' - y + 1$ **,** $y(0) = 0$ **,** $y'(0) = 1$**.**

Знайти розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

3. $y'' - y = 1$, $y(0) = 0$, $\boldsymbol{y'(0) = 1}$

4. $y'' - y' = \sin x - \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

Відповіді

1. $y \approx 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$.

2. $y \approx x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

3. $y = x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \ldots + \dfrac{1}{k!}x^k + \ldots$; $y = e^x - 1$.

4. $y = 2 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{6!}x^6 + \ldots + \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \ldots$; $y = 1 + \cos x$.

7. РЯДИ ФУР'Є

7.1. Основні поняття та формули

Функція $y = f(x)$ на проміжку $(-\pi;\pi)$ задовольняє умовам Діріхле, якщо:

1. Вона на ньому неперервна, або має скінченне число точок розриву I роду;
2. Проміжок $(-\pi;\pi)$ можна розбити на скінченне число частин так, щоб в кожній частині функція змінювалась монотонно. Це рівносильно тому, щоб на проміжку $(-\pi;\pi)$ функція мала скінченне число екстремумів;
3. Існують скінченні граничні значення функції $f(-\pi+0)$ та $f(\pi-0)$.

Якщо визначена на проміжку $(-\pi;\pi)$ періодична функція з періодом $T = 2\pi$ задовольняє умовам Діріхле, то іі можна розкласти в тригонометричний ряд за формулою

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

який називається рядом Фур'є. Сума цього ряду дорівнює

1) у внутрішніх точках проміжка $(-\pi;\pi)$, в яких $f(x)$ неперервна, значенню функції $f(x)$;
2) $\dfrac{1}{2}\big(f(x-0) + f(x+0)\big)$ в усіх точках розриву;
3) $\dfrac{1}{2}\big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big)$ на кінцях проміжку.

Якщо ж функція $f(x)$ неперервна на всьому проміжку $(-\pi;\pi)$ та її значення на кінцях цього проміжку рівні між собою, то сума тригонометричного ряду функції $f(x)$ у всіх точках проміжку $(-\pi;\pi)$, включаючи його кінці, дорівнює $f(x)$.

Коефіцієнти ряду a_n та b_n в загальному випадку обчислюються за формулами:

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,.}$$

Можна навести означення тригонометричного ряду для періодичної функції з довільним періодом. Окремі формули будуть для парних та непарних функцій. Всі ці дані представлені у вигляді таблиці.

Період **Парність**	$T=2\pi;\ x\in(-\pi;\pi)$	$T=2l;\ x\in(-l;l)$
Загального вигляду $f(-x)\neq\pm f(x)$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$ $a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx$ $a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ $b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$
Парна $f(-x)=f(x)$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ $a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)dx$ $a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$ $a_0=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)dx$ $a_n=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$

Непарна $f(-x)=-f(x)$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ $b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$

У процесі обчислення коефіцієнтів Фур'є часто застосовуються деякі відомі математичні формули та факти. Наведемо їх.

Формули перетворення добутків тригонометричних формул в суму

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

Важливі властивості тригонометричних функцій

$\sin 0=\sin\pi=0$ $\qquad$ $\sin\pi n=\sin(-\pi n)=0$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\qquad$ $\sin(\alpha\pm\pi n)=(-1)^n\sin\alpha$

$\cos 0=1 \qquad \cos\pi=-1$ $\qquad$ $\cos\pi n=\cos(-\pi n)=(-1)^n$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha\pm\pi n)=(-1)^n\cos\alpha$

Деякі формули інтегрування

$$\int_a^b \cos kx\,dx=\frac{1}{k}\sin kx\Big|_a^b \qquad \int_a^b \sin kx\,dx=-\frac{1}{k}\cos kx\Big|_a^b$$

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$$

7.2. Розвинення в ряди Фур'є 2π-періодичних функцій

Розглянемо деяку ***2π***-періодичну функцію $f(x)$, неперервну, або таку, що на відрізку $[-\pi;\pi]$ має скінчене число точок розриву першого роду.

Функціональний ряд виду $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, коефіцієнти якого обчислюються за формулами

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\; a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

називається рядом Фур'є функції $f(x)$. Цей ряд збігається для будь-якого значення $\boldsymbol{x}$, у всіх точках неперервності функції сума ряду $S(x)=f(x)$, а в точках розриву сума ряду дорівнює півсумі лівосторонньої та правосторонньої границь функції $f(x)$:

$$S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Якщо ***2π***-періодична функція ***f(x)*** є парною ($f(-x)=f(x)$), то вона розкладається в ряд Фур'є тільки за косинусами:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ де } \quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Непарна ***2π***- періодична функція ***f(x)*** розкладається в ряд Фур'є тільки за синусами:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad \text{де} \quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Приклад 1. Побудувати ряд Фур'є для заданої функції

1) $y=2-x,\;\; x\in(-\pi;\pi)$; $y(x+2\pi)=y(x)$.

Розв'язння.

Функція задовольняє умовам Діріхле, тому її можна розкласти у тригонометричний ряд. Перевіримо функцію на парність, непарність:

$y(-x)=2-(-x)=2+x\neq \pm y(x)$,

тобто це функція загального виду, отже, ряд Фур'є цієї функції має вигляд

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2-x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(2x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(2(\pi+\pi)-\frac{1}{2}\left(\pi^2-(-\pi)^2\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(4\pi-\frac{1}{2}\left(\pi^2-\pi^2\right)\right)=4;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2-x)\cos nx\,dx=\left\{\begin{matrix}u=2-x & du=-dx\\ dv=\cos nx dx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((2-x)\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx(-dx)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left((2-\pi)\underbrace{\sin n\pi}_{0}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(2+\pi)\underbrace{\sin(-n\pi)}_{0}\right)+\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=-\frac{1}{\pi n^2}\underbrace{(\cos\pi n-\cos(-\pi n))}_{0}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2-x)\sin nx\,dx=\left\{\begin{matrix}u=2-x & du=-dx\\ dv=\sin nx dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((2-x)\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx(-dx)\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\left((2-\pi)\cos\pi n-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(2+\pi)\underbrace{\cos(-n\pi)}_{\cos n\pi}\right)-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos n\pi(2-\pi-2-\pi)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n^2}\left(\underbrace{\sin nx}_{0}-\underbrace{\sin(-nx)}_{0}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^n.$$

Таким чином, ряд Фур’є має вигляд

$$y(x)=\frac{4}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{n}\sin nx=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{n}\sin nx.$$

Приклад 2. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y=f(x)$.

1) $f(x)=2x-3$, $x\in[-\pi,\pi]$

Ряд Фур'є: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+bn\sin nx$,

де $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$; $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$; $b_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-3)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}-3x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\cancel{\pi^2}-3\pi-\cancel{\pi^2}-3\pi\right)=\frac{-6\pi}{\pi}=-6.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-3)\cos nxdx=\begin{pmatrix}2x-3=u & 2dx=du\\ \cos nxdx=dv & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(2x-3)\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(2\pi-3)\sin n\pi}{n}+\frac{(-2\pi-3)\sin n\pi}{n}+\frac{2}{n^2}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-\cos n\pi)=0.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-3)\sin nxdx=\begin{pmatrix}2x-3=u & 2dx=du\\ \sin nxdx=dv & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{(2x-3)\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left[-(2\pi-3)\cos n\pi+(-2\pi-3)\cos n\pi\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{2\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(-4\pi\cos n\pi+\frac{2}{n}(\sin n\pi+\sin n\pi)\right)=-\frac{4}{n}\cos n\pi=-\frac{4}{n}(-1)^n=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 4}{n}.$$

Ряд Фур'є має вид:

$$(2x-3)\sim-3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 4}{n}\sin nx.$$

Приклад 3. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію з періодом 2π: $f(x)=\pi+x$, $x\in[-\pi,\pi]$.

Розв'язання.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\frac{(\pi+x)^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=2\pi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos nxdx=\begin{pmatrix} u=x+\pi & du=dx \\ dv=\cos nxdx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x+\pi}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi\sin n\pi}{n}-0\cdot\sin(-n\pi)+\frac{\cos nx}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right]=\frac{1}{\pi}\left(0+\frac{\cos n\pi}{n^2}-\frac{\cos n\pi}{n^2}\right)=0.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin nxdx=\begin{pmatrix} u=x+\pi; & du=dx \\ dv=\sin nxdx; & v=\frac{1}{n}\cos nx\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x+\pi}{n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos nx+0\cdot\cos(-n\pi)+\frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)=-\frac{1}{n}\frac{2\pi(-1)^n}{n}=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

$$f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Приклад 4. Розвинути в ряд Фур'є функцію $y=\cos\frac{3x}{5}$, $x\in(-\pi;\pi)$; $y(x+2\pi)=y(x)$

Розв'язання.

$$y(-x)=\cos\frac{3\cdot(-x)}{5}=\cos\frac{3x}{5}=y(x),$$

тобто функція є парною, а її ряд Фур'є має вигляд

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}y(x)dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{3x}{5}dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{5}{3}\cdot\sin\frac{3x}{5}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{10}{3\pi}\cdot\left(\sin\frac{3\pi}{5}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)=$$

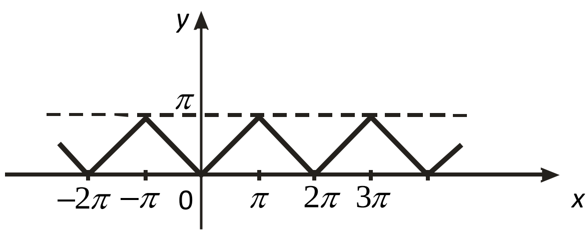
$$=\frac{10}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{5};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{3x}{5}\cdot\cos nx\,dx=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{3x}{5}+nx\right)+\cos\left(\frac{3x}{5}-nx\right)\right)dx=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{(3+5n)x}{5}+\cos\frac{(3-5n)x}{5}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{3+5n}\sin\frac{(3+5n)x}{5}\bigg|_0^{\pi}+\frac{5}{3-5n}\sin\frac{(3-5n)x}{5}\bigg|_0^{\pi}\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{5}{3+5n}\left(\sin\frac{(3+5n)\pi}{5}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)+\frac{5}{3-5n}\left(\sin\frac{(3-5n)\pi}{5}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{5}{3+5n}\sin\left(\frac{3\pi}{5}+\pi n\right)+\frac{5}{3-5n}\sin\left(\frac{3\pi}{5}-\pi n\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{5}{3+5n}\sin\frac{3\pi}{5}\cdot(-1)^n+\frac{5}{3-5n}\sin\frac{3\pi}{5}\cdot(-1)^n\right]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\cdot 5\cdot\sin\frac{3\pi}{5}\cdot(-1)^n\left(\frac{1}{3+5n}+\frac{1}{3-5n}\right)=\frac{5}{\pi}\sin\frac{3\pi}{5}\cdot(-1)^n\,\frac{6}{9-25n^2}$$
$$=\frac{30\cdot(-1)^n}{\pi\left(9-25n^2\right)}\sin\frac{3\pi}{5}.$$

Отже, $$y(x)=\frac{5}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{30\cdot(-1)^n}{\pi\cdot\left(9-25n^2\right)}\sin\frac{3\pi}{5}\cdot\cos nx.$$

3) Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)=|x|$, $x\in[-\pi;\pi]$.

Функція $f(x)$ – **парна** і розкладається в ряд Фур'є по косинусам.



$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\pi$$
.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right]=\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos n\pi-\cos 0\right)=\frac{2}{\pi n^2}\left(\left(-1\right)^n-1\right).$$

Таким чином, $a_0=\pi$, $a_1=-\frac{4}{\pi\cdot 1^2}$, $a_2=0$, $a_3=-\frac{4}{\pi\cdot 3^2}$, $a_4=0$, $a_5=-\frac{4}{\pi\cdot 5^2}$.

Ряд Фур'є має вигляд:

$$f\left(x\right)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+...+\frac{\cos\left(2n-1\right)x}{\left(2n-1\right)^2}+...\right].$$

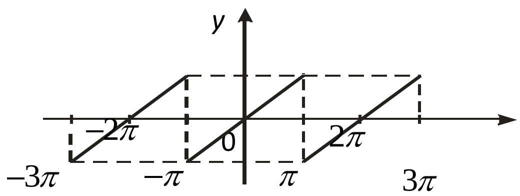
Якщо $f\left(x\right)$ – непарна функція, то $a_0=0$, $a_n=0$, і ряд Фур'є має вигляд:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\sin nx dx.$$

Приклад 5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f\left(x\right)=x$, $-\pi<x<\pi$.

Розв'язання.

Функція непарна.



$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx=\begin{pmatrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin nx dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{pmatrix}=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\pi\left(-1\right)^n=\left(-1\right)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Ряд Фур'є:

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},$$

або в розгорнутому виді:

$$x=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-...\right].$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти ряд Фур'є для функцій

1. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\ , & -\pi\le x<0\\ 1\ , & 0<x\le\pi\end{cases}\quad ,\quad f(x+2\pi)=f(x)\ .$

2. $f(x)=|\ x\ |, -\pi<x<\pi\ ,\ \ f(x+2\pi)=f(x)\ \ .$

Відповіді

1. $f(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^{n}\right)\sin nx.$

2. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}-1}{n^{2}}\cos nx.$

7.3. Ряди Фур'є 2*l*- періодичних функцій

Якщо *f (x)* є функцією періоду 2*l*, її розвинення в ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

де коефіцієнти обчислюються за формулами

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Для парних функцій формули мають вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\ a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

а для непарних –

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\ ,\ b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Зразки розв'язання задач

1) $y = 3x - 2\pi \quad , \quad x \in (-4\pi \,; 4\pi) \,; \quad y(x+8\pi) = y(x)$

Функція є періодичною з періодом $2l = 8\pi$, отже, $l = 4\pi$.

$y(-x) = 3\cdot(-x) - 2\pi = -3x - 2\pi \neq \pm y(x)$ – функція загального вигляду,

отже, $\quad y = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{n \cancel{\pi} x}{4\cancel{\pi}} + b_n \sin\dfrac{nx}{4}$.

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-4\pi}^{4\pi} y(x)dx = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-4\pi}^{4\pi}(3x-2\pi)dx = \frac{1}{4\pi}\left(3\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi} - 2\pi\cdot x\Big|_{-4\pi}^{4\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\left(16\pi^2 - 16\pi^2\right) - 2\pi\cdot(4\pi + 4\pi)\right) = \frac{1}{4\pi}(-2\pi)\cdot 8\pi = -4\pi\,;$$

$$a_n = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-4\pi}^{4\pi} y(x)\cos\frac{nx}{4}dx = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-4\pi}^{4\pi}(3x-2\pi)\cos\frac{nx}{4}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = 3x - 2\pi & du = 3\cdot dx \\ dv = \cos\dfrac{nx}{4}dx & v = \dfrac{4}{n}\sin\dfrac{nx}{4} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left((3x-2\pi)\cdot\frac{4}{n}\sin\frac{nx}{4}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi} - \frac{4}{n}\cdot 3\int\limits_{-4\pi}^{4\pi}\sin\frac{nx}{4}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{n}\cdot(3x-2\pi)\sin\frac{nx}{4}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi} - \frac{12}{n}\cdot\left(-\frac{4}{n}\right)\cdot\cos\frac{nx}{4}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{n}\cdot\left(10\pi\underbrace{\sin\frac{n\cdot 4\pi}{4}}_{0} - (-14\pi)\underbrace{\sin\frac{n\cdot(-4\pi)}{4}}_{0}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{48}{n^2}\cdot\underbrace{\left(\cos\frac{n\cdot 4\pi}{4} - \cos\frac{n\cdot(-4\pi)}{4}\right)}_{0}\right) = 0\,;$$

$$b_n = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-4\pi}^{4\pi} y(x)\sin\frac{nx}{4}dx = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-4\pi}^{4\pi}(3x-2\pi)\sin\frac{nx}{4}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = 3x - 2\pi & du = 3\cdot dx \\ dv = \sin\dfrac{nx}{4}dx & v = -\dfrac{4}{n}\cos\dfrac{nx}{4} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left((3x-2\pi)\cdot\left(-\frac{4}{n}\right)\cos\frac{nx}{4}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi} - \left(-\frac{4}{n}\right)\cdot 3\int\limits_{-4\pi}^{4\pi}\cos\frac{nx}{4}dx\right) =$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{4}{n}\cdot(3x-2\pi)\cos\frac{nx}{4}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi}+\frac{12}{n}\cdot\frac{4}{n}\cdot\sin\frac{nx}{4}\Bigg|_{-4\pi}^{4\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{4}{n}\cdot\left(10\pi\cdot\cos\frac{n\cdot 4\pi}{4}-(-14\pi)\cos\frac{n\cdot(-4\pi)}{4}\right)+\right.$$

$$=-\frac{4}{4\pi n}\cdot\left(10\pi\cdot\cos n\pi+14\pi\cdot\underbrace{\cos(-n\pi)}_{\cos n\pi}\right)=-\frac{1}{\pi n}\cdot 24\pi\cos n\pi=\frac{24}{n}\cdot(-1)^{n+1}.$$

Остаточно $\quad y(x)=\dfrac{-4\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{24\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{nx}{4}$.

Приклад 2. Розкласти задану функцію в ряд Фур'є:

$$\boldsymbol{y=\begin{cases}2x-1,\ x\in(-3;0)\\ 3;\ x\in(0;3)\end{cases};\quad y(x+6)=y(x).}$$

Розвязання.

Функція є періодичною з періодом $2l=6$, отже, $l=3$. Очевидно, що функція є ні парною, ні непарною, отже,

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}+b_n\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}y(x)dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)dx+\int_{0}^{3}3\cdot dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)dx=2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-3}^{0}-x\Big|_{-3}^{0}=0-9-(0+3)=-12,$$

$$I_2=\int_{0}^{3}3dx=3x\Big|_{0}^{3}=9-0=0,$$

$$a_0=\frac{1}{3}(-12+9)=-1;$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}y(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-3}^{0}3\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix}u=2x-1 & du=2\cdot dx\\ dv=\cos\dfrac{n\pi x}{3}dx & v=\dfrac{3}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(2x-1)\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}-\frac{3}{n\pi}\cdot 2\int_{-3}^{0}\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{3}{n\pi}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}-\frac{6}{n\pi}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}-(-7)\underbrace{\sin\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}}_{0}\right)+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos 0-\cos\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}\right)=$$

$$=\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\cos 0}_{1}-\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}\right)=\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right),$$

$$I_2=\int_0^3 3\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx=3\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3=\frac{9}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi\cdot 3}{3}-\sin 0\right)=0,$$

$$a_n=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right)+0\right]=\frac{6}{n^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right);$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}y(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{-3}^{0}3\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right],$$

$$I_1=\int_{-3}^{0}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\left\{\begin{matrix} u=2x-1 & du=2\cdot dx \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & v=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(2x-1)\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}-\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot 2\int_{-3}^{0}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}+\frac{6}{n\pi}\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-3}^{0}=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1\cdot\cos 0-(-7)\cdot\cos\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}\right)+\frac{18}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\sin 0}_{0}-\underbrace{\sin\frac{n\pi\cdot(-3)}{3}}_{0}\right)=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-1+7\cdot\underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n}\right)=\frac{3}{n\pi}\cdot\left(1-7\cdot(-1)^n\right),$$

$$I_2=\int_0^3 3\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx=3\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3=-\frac{9}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi\cdot 3}{3}-\cos 0\right)=$$

$$=-\frac{9}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\frac{9}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right),$$

$$b_n=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3}{n\pi}\cdot\left(1-7\cdot(-1)^n\right)+\frac{9}{n\pi}\cdot\left(1-(-1)^n\right)\right]=\frac{1}{n\pi}\cdot\left(4-10\cdot(-1)^n\right).$$

Таким чином, ряд має вигляд

$$y(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{1}{n\pi}\left(4-10\cdot(-1)^n\right)\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Приклад 3 . Розкласти задану функцію в ряд Фур'є: $y=\sin 6x$,

$x\in\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$; $y\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=y(x)$.

Розв'язання.

Функція має період $2l=\frac{2\pi}{3}$, отже, $l=\frac{\pi}{3}$.

$y(-x)=\sin 6(-x)=-\sin 6x=-y(x)$ – функція непарна, тобто її ряд Фур'є має

вигляд $y=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\pi/3}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin 3nx.$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$b_n=\frac{2}{\pi/3}\int_0^{\pi/3}y(x)\sin 3nx\,dx=\frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}\sin 6x\cdot\sin 3nx\,dx=$$

$$=\frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}\frac{1}{2}[\cos(6x-3nx)-\cos(6x-3nx)]dx=$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}[\cos(3x(2-n))-\cos(3x(2+n))]dx=$$

$$=\frac{3}{\pi}\left[\frac{1}{3(2-n)}\sin(3x(2-n))\Big|_0^{\pi/3}-\frac{1}{3(2+n)}\sin(3x(2+n))\Big|_0^{\pi/3}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2-n}\left(\sin\left(3\frac{\pi}{3}(2-n)\right)-\sin 0\right)-\frac{1}{2+n}\left(\sin\left(3\frac{\pi}{3}(2+n)\right)-\sin 0\right)\right]=0.$$

Отриманий результат справджується для $n\neq 2$, оскільки застосування відомої формули з таблиці інтегралів можливо лише, якщо $n-2\neq 0$.

Окремо обчислимо коефіцієнт b_2:

$$b_2=\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\underbrace{\cos 0}_{1}-\cos 12x\right]dx=\frac{3}{\pi}\left[x\,\Big|_0^{\pi/3}-\frac{1}{12}\sin 12x\Big|_0^{\pi/3}\right]=$$

$$=\frac{3}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{3}-0\right)-\frac{1}{12}\left(\sin\frac{12\pi}{3}-\sin 0\right)\right]=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3}=1.$$

Таким чином, $y=1\cdot\sin(2\cdot 3x)$, або $y=\sin 6x$.

Отриманий результат є очікуваним, оскільки функція $y(x)$ співпадає з однією з функцій системи, за якою будується розвинення.

Приклад 4. Розвинути в ряд Фур'є функцію з періодом $2l=2$ $f(x)=x-1$, задану на інтервалі $-1<x\le 1$.

Розв'язання.

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\int_{-1}^{1}(x-1)dx=\left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_{-1}^{1}=-2.$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}(x-1)\cos n\pi x dx=\int_{-1}^{1}x\cos n\pi dx-\int_{-1}^{1}\cos n\pi x dx=\left.\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\right|_{-1}^{1}-$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{\sin n\pi x}{n\pi}dx-\left.\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right|_{-1}^{1}=\left.\frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\right|_{-1}^{1}=0.$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}(x-1)\sin n\pi x dx=\int_{-1}^{1}x\sin n\pi x dx-\int_{-1}^{1}\sin n\pi x dx=$$

$$=-\left.\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\right|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{\cos n\pi x}{n\pi}+\left.\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right|_{-1}^{1}=-\frac{1}{n\pi}\left[\cos n\pi+\cos(-n\pi)\right]+$$

$$+\left.\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right|_{-1}^{1}+\frac{1}{n\pi}\left[\cos n\pi-\cos(-n\pi)\right]=-\frac{2(-1)^n}{n\pi}.$$

$a_0=-2$, $a_n=0$, $b_1=\frac{2}{1\cdot\pi}$, $b_2=-\frac{2}{2\pi}$, $b_3=\frac{2}{3\pi}$, …

Ряд Фур'є:

$$-1+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-...\right].$$

Приклад 5. На проміжку $[-4;4]$ періодичну з періодом $T=8$ функцію *y=f(x)* задано графічно. Розкласти її в ряд Фур'є.

Розв'язання.

Період функції 2l=8, отже, півперіод l=4. Графік є симетричним відносно осі Oy, тому функція парна та розкладається в ряд Фур'є за косинусами:

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\frac{n\pi x}{4}.$$

Задамо функцію аналітично. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(0;1)$ та $M_2(1;4)$.

Користуючись рівнянням $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, маємо

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{4-1}; \qquad x = \frac{y-1}{3}; \qquad y - 1 = 3x.$$

Таким чином, $y = 3x + 1$ для $x \in [\,0\,;1\,]$.

Якщо $x \in (1\,;3\,)$, то $y = 2$; при $x \in [3\,;4\,]$ $y = 0$.

Остаточно $y = \begin{cases} 3x+1\,,\; x \in [\,0\,;1\,] \\ 2,\; x \in (1\,;3) \\ 0,\; x \in [3\,;4\,] \end{cases}$.

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l y(x)dx = \frac{2}{4}\left(\int_0^1 (3x+1)dx + \int_1^3 2dx + \int_3^4 0dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 3xdx + \int_0^1 dx + 2x\Big|_1^3\right) = \frac{1}{2}\left(3\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 + 2\,(3-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\left(1^2 - 0^2\right) + (1-0) + 4\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 5\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{2} = \frac{13}{4};$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l y(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{4}\left(\int_0^1 (3x+1)\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx + \int_1^3 2\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_3^4 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx\right) = \left\{\begin{matrix} u = 3x+1 & du = 3dx \\ dv = \cos\frac{n\pi x}{4}dx & v = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4} \end{matrix}\right\} =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left.(3x+1)\cdot\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\right|_0^1-\int_0^1\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\cdot 3\,dx+2\cdot\left.\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\right|_1^3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n\pi}\left((3\cdot 1+1)\cdot\sin\frac{n\pi}{4}-1\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}\right)-\frac{12}{n\pi}\cdot\left.\left(-\frac{4}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}\right)\right|_0^1+\right.$$

$$\left.+\frac{8}{n\pi}\left(\sin\frac{3n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{n\pi}\left(4\cdot\sin\frac{n\pi}{4}+\frac{12}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)+2\left(\sin\frac{3n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{6}{n\pi}\right).$$

$$y=\frac{13}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{6}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{4}\ .$$

Зауваження. Також цілком коректною є задача побудови ряду Фур'є для функції, яку задано лише на скінченому проміжку $[-l;\,l\,]$. Треба лише зауважити, що застосовувати отримане розвинення можна виключно для значень аргументу із зазначеного проміжку.

Завдання для самостійної роботи

Знайти ряд Фур'є для функцій .

1. $f(x)=x\,,-2<x\le 2\,,\quad f(x+4)=f(x)$.

2. $f(x)=\begin{cases}1\ , & -1\le x<0\\ x\ , & 0<x\le 1\end{cases}\quad,\quad f(x+2)=f(x)$

Відповіді

1. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{2}$.

2. $f(x)=\dfrac{3}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos n\pi x-\dfrac{1}{\pi n}\sin n\pi x$.

7.4. Ряди Фур'є для функцій, заданих на проміжку $[0;l]$

Якщо функцію $y=f(x)$ задано на проміжку $[0;l]$, то її визначення можна доповнити для проміжку $[-l;0)$, та побудувати розвинення отриманої функції в ряд Фур'є.

У випадку, коли функцію продовжено на проміжку $[-l;0)$ парним образом, отримують розвинення заданої на $[0;l]$ функції за косинусами:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\quad x\in[0;l],$$

де $a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Якщо продовження є непарним, отримують розвинення заданої функції за синусами:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad x\in[0;l],$$

де $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$

Аналогічно будується розвинення в ряд Фур'є функцій, заданих на проміжку $[-l;0]$.

Приклад 1. Побудувати розвинення в ряд Фур'є функції $y=x-\pi$, $x\in[0;2\pi]$

а) за синусами;

б) за косинусами.

Розв'язання.

а) Функцію задано на проміжку $[0;2\pi]$, отже, $l=2\pi$. Розвинення в ряд Фур'є за синусами має вид

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{nx}{2}.$$

Обчислимо коефіцієнти цього ряду.

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}y(x)\sin\frac{nx}{2}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin\frac{nx}{2}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x-\pi & du=dx \\ dv=\sin\frac{nx}{2}dx & v=-\frac{2}{n}\cos\frac{nx}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left(x-\pi\right)\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}-\left(-\frac{2}{n}\right)\int_0^{2\pi}\cos\frac{nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\cdot(x-\pi)\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}+\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\cdot\left(\pi\cdot\cos\frac{n\cdot 2\pi}{2}-(-\pi)\underbrace{\cos 0}_{1}\right)+\frac{4}{n^2}\cdot\left(\underbrace{\sin\frac{n\cdot 2\pi}{2}}_{0}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\cdot(\pi\cdot\cos n\pi+\pi)=-\frac{2}{n}\cdot\left((-1)^n+1\right)=\frac{2}{n}\cdot\left((-1)^{n+1}-1\right).$$

Остаточно $\quad x-\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot\left((-1)^{n+1}-1\right)}{n}\sin\frac{nx}{2},\ x\in[0;2\pi].$

б) Розвинення функції в ряд Фур'є за косинусами має вигляд

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\frac{nx}{2}.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi}-\pi\cdot x\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(4\pi^2-4\pi^2\right)-\pi\cdot(2\pi-0)\right)=\frac{1}{\pi}(-\pi)\cdot 2\pi=-2\pi\ ;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cos\frac{nx}{2}dx=\left\{\begin{matrix} u=x-\pi & du=dx \\ dv=\cos\frac{nx}{2}dx & v=\frac{2}{n}\sin\frac{nx}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((x-\pi)\cdot\frac{2}{n}\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n}\int_{-4\pi}^{4\pi}\sin\frac{nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}\cdot(x-\pi)\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n}\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\cdot\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}\cdot\left(\pi\underbrace{\sin\frac{n\cdot 2\pi}{2}}_{0}-(-\pi)\underbrace{\sin 0}_{0}\right)+\frac{4}{n^2}\left(\cos\frac{n\cdot 2\pi}{2}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4}{n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{4}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Таким чином,

$$y = -\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2}\cdot\cos\frac{nx}{2},\ x\in[0;2\pi].$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. Т. 2: М: – ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 810 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т.: Т. 2: – М: – Интеграл-Пресс, 2004. – 544 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: – М.: Оникс, 2006. – 416 с.
5. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный и др. – М.: АЙРИС-пресс, 2009. – 592 с.
6. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай и др. – К.: Вища шк., 1978. – 696 с.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1990. – 624 с.
8. Садовничий В.А. Задачи студенческих математических олимпиад / В.А. Садовничий, А.А. Григорьян, С.В. Конягин. – М.: МГУ, 1987. – 310 с.
9. Садовничий В.А. Задачи студенческих олимпиад по математике / В.А. Садовничий, А.С. Подколузин. – М.: Наука, 1978. – 207 с.

Навчальне видання

Т.С. Кагадій, І.В. Щербина, О.Д. Онопрієнко

РЯДИ: ТЕОРІЯ, ПРИКЛАДИ, РОЗВ'ЯЗАННЯ

Навчальний посібник

Видано в редакції авторів

Підписано до друку_________Формат 60ч84/16

Умовно-друк. арк. 8. Тираж 25 прим.

Папір офсетний. Зам. №______

Підготовлено до друку та видруковано

у Дніпровському державному аграрно-економічному університеті

49600, Дніпро, вул. Сергія Єфремова, 25

Телефони: (056) 713-51-75, 713-51-57