

## АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ МЕЖИ МІЦНОСТІ ЗРАЗКІВ ГІРСЬКИХ ПОРІД КЛИНОВОЇ ФОРМИ РУЙНУВАННЯ ПРИ ЛІНІЙНОМУ РОЗПОДІЛІ КОНТАКТНИХ НОРМАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ

<sup>1</sup>Васильєв Л.М., <sup>1</sup>Васильєв Д.Л., <sup>2</sup>Малич М.Г.

<sup>1</sup>Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України, <sup>2</sup>Національна металургійна академія України

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПРЕДЕЛА ПРОЧНОСТИ ОБРАЗЦОВ ГОРНЫХ ПОРОД КЛИНОВОЙ ФОРМЫ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ЛИНЕЙНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОНТАКТНЫХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

<sup>1</sup>Васильев Л.М., <sup>1</sup>Васильев Д.Л., <sup>2</sup>Малич Н.Г.

<sup>1</sup>Інститут геотехнічної механіки ім. Н.С. Полякова НАН України, <sup>2</sup>Національна металургійна академія України

## ANALYTICAL METHOD FOR CALCULATING THE STRENGTH LIMIT OF ROCK SPECIMENS OF WEDGE FORM OF DESTRUCTION AT LINEAR DISTRIBUTING OF CONTACT NORMAL TENSIONS

<sup>1</sup>Vasyliiev L.M., <sup>1</sup>Vasyliiev D.L., <sup>2</sup>Malych M.H.

<sup>1</sup>Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poljakov of NAS of Ukraine, <sup>2</sup>National Metallurgical Academy of Ukraine

**Анотація.** Приведено аналітичний метод розрахунку параметрів діаграм «напруження – деформація» призматичних зразків при їх клиновій формі руйнування на основі розподілу контактних напружень Л. Прандтля з використанням експериментальних значень чотирьох показників властивостей гірських порід: межі опору на зсув, коефіцієнтів внутрішнього і контактного тертя, модуля пружності. які простими способами можуть бути встановлені експериментально в умовах гірничих підприємств, де результати розрахунку можуть бути оперативно використані. У основу методу взята теорія локального руйнування гірських порід по лініях ковзання, яка розроблена авторами. Теорія дозволяє визначити поточні значення нормальних напружень у вершині тріщини в процесі її розвитку. За критерій міцності прийнятий критерій міцності Кулона, доповнений авторами шляхом обліку контактної тертя зразків гірських порід. Закономірності розподілу нормальних напружень від контактної тертя раніше встановлені Є.П. Унковим і Л. Прандтлем. Закономірність Є.П. Ункова була використана авторами раніше для розробки методу розрахунку межі міцності зразків гірських порід згаданої форми руйнування. В даній статті в основу приведенного методу покладемо метод Л. Прандтля. Для визначення межі міцності необхідно було розробити метод розрахунку параметрів діаграм «нормальна напруження – подовжня деформація». Був підтверджений факт, що напруження, при якій утворюється тріщина, не є межею міцності. Межею міцності при клиновій формі руйнування зразків є максимальне значення напруження на позамежній гілці діаграми «напруження – деформація». Деякі позамежні криві мають скидання напружень, якій підтверджуються експериментальними наглядом. У момент скидання виникають площини у вигляді так званого зуба текучості, утворення яких ми пояснюємо падінням напруження на опуклій частині лінії ковзання. В середній частині позамежної кривої скачок підвищення напружень свідчать про зміцнення зразків, які не одержали поки що теоретичного обґрунтування. Це явище ми пояснюємо переходом процесу руйнування з опуклої частини лінії ковзання на увігнуту. Зіставлення розрахункових меж міцності призматичних зразків, одержаних по законах розподілу контактних нормальних напружень, по експоненціальному – Є.П. Ункова і по лінійному – Л. Прандтля свідчить про їх практичну ідентичність.

**Ключові слова:** гірська порода, межа міцності, руйнування, тріщина, діаграма «напруження – деформація»

**Вступ.** Однією з важливих інформаційних характеристик, необхідних для керування напружено-деформованим станом масиву гірських порід, є межа міцності і залишкова міцність зразків, що визначаються за діаграмами «нормальне напруження-подовжня деформація» їх позамежного руйнування. Діаграма описується математичної зв'язком між двома параметрами – подовжніми напруженнями  $\sigma_c$  і деформаціями  $\epsilon$  і зображуються позамежними кривими. Ці параметри

знімаються на спеціальних пресах, які є в окремих НДІ, на Україні в ІГТМ, Криворізькому технічному університеті. Але вони вимагають висококваліфікованого обслуговування і знаходяться далеко від споживача, де якраз і потрібна оперативна інформація про властивості гірських порід. Отже, існує потреба в розробці аналітичного методу розрахунку меж і залишкової міцності зразків при знанні показників властивостей гірських порід, які визначаються більш простими способами, доступними для гірських підприємств.

Відомо, що при одноосьовому стисканні зразка правильної геометрії утворюється клинова форма руйнування зразків, найбільш поширена з п'яти загальновідомих (рис. 1).

У нашій статті [1] розроблено аналітичний метод побудови діаграм «нормальне напруження-поздовжня деформація» і визначення меж міцності на підставі експоненціального закону контактних нормальних і дотичних напружень Е.П. Унксова, отриманого з рішення одного диференціального і алгебраїчного рівнянь [2]. Цей метод піддається фахівцями в галузі міцності матеріалів критиці в силу пікоподібного навантаження. Проведемо порівняння розрахунку меж міцності зразка для клинової форми руйнування (рис. 1) на базі іншого, лінійного закону контактних нормальних навантажень Л. Прандтля [2], отриманого на основі більш строгих підходів механіки деформованого тіла, на вирішенні двох диференціальних і одного алгебраїчного рівнянь. Розподіл нормальних напружень на контактній площині по Л. Прандтля описується рівнянням

$$\sigma_{y_i} = \sigma_{y_0} \left( 1 + \frac{2fx}{h} \right), \quad (1)$$

де  $\sigma_{y_0}$  – нормальне напруження в кутовій точці;  $f$  – коефіцієнт контактного тертя;  $x$  – абсциса розглянутої точки в зразку;  $h$  – висота зразка.

Коефіцієнт, що дорівнює двом, означає дві симетричні половини зразка.

**Методика.** Визначення міцності зразків при клиновій формі руйнування представляється можливим проводити за такою методикою, в основі якої покладена теорія ліній ковзання (ЛК). У даній статті прийнято більш чітко по порівнянням до статті [1] позначення: ЛК  $\xi$  і  $\zeta$  мають напрямок зверху вниз, ЛК  $\eta$  і  $\eta'$  – знизу вверх. У міру розвитку тріщини по ЛК частина матеріалу виходить з-під навантаження. При знанні в кожен момент значення координат вершини тріщини можна визначити несучу частину матеріалу зразка, яка дорівнює первісній площі останнього за вирахуванням частини, що вийшла з-під навантаження. Частина зразка, що вийшла з-під навантаження, визначається за значеннями абсциси



Рисунок 1 – Зразок клинової форми руйнування за Л.І. Бароном

вершини тріщини на ЛК як  $x = n \cdot \Delta h \cdot \text{ctg } \alpha$ , де  $n$  – число шарів по ординаті  $y$ ,  $\alpha$  – кут нахилу ЛК  $\xi$  в вершині тріщини щодо осі  $Ox$ ,  $\Delta h$  – висота шару. При знанні напружень у вершині тріщини, її координат і закономірності розподілу контактних напружень на несучій частини зразка можна побудувати діаграму «нормальне напруження - поздовжня деформація» з використанням чотирьох показників властивостей гірських порід: межі опірності зрушенню, коефіцієнтів внутрішнього і зовнішнього тертя, модуля пружності.

На рис. 2 показана схема ЛК зразка, на якому позначені:  $a_1$  – довжина зразка, м;  $h$  – висота зразка, м;  $\alpha$  – кут нахилу ЛК  $\xi$ , рад.;  $k$  – опір породи зрушенню, Па;  $\tau_k$  – дотичні напруження від контактного тертя, Па.

На верхній лівій половині зразка контактні дотичні напруження  $\tau_k$  мають позитивний знак, а нижній – негативний. На правій половині їх знаки мають протилежні значення. Відзначимо, що під дією вертикального навантаження за рахунок нерівномірної поперечної деформації зразок набуває опуклої форми. Тому в кутах зразка може бути застосовано правило парності дотичних напружень. Особливістю клиновий форми є перетин ЛК вертикальної осі симетрії зразка і вихід її на протилежну половину контактної площини, внаслідок чого знаки дотичних напружень на вході і на виході ЛК мають по знаку однакове значення. Тому ЛК складається з двох різнорідних частин: опуклої і увігнутої. В першу чергу, необхідно визначитися, в якому напрямку буде розвиватися тріщина: зверху вниз по ЛК  $\xi'$  або  $\xi$ , або знизу вгору по ЛК  $\eta'$  або  $\eta$ . Тріщина починає розвиватися в напрямку меншого значення необхідного навантаження, по коротшій гілці ЛК, тому що вона має менший кут повороту в порівнянні з довгою. Опір матеріалу зсуву  $k$  направлено проти напрямку ЛК, як показано на рисунку. Сутність завдання не змінюється, якщо будемо розглядати розвиток тріщини по схемі (рис. 2), починаючи з верхньої горизонтальної половини зразка. Уявімо собі, що спочатку тріщина утворюється в точці  $d'$ . Так більш наочно. Для цього випадку нами розроблена програма на ЕОМ на основі методу ітерацій.

Наведемо шляхом інтегрування формули (1) значення питомого зусилля  $p$  на кожній частині, наприклад, ЛС  $\xi'$  при  $x \geq 0,5a_1$  і при  $x \leq 0,5a_1$  з урахуванням виходу площі зразка з-під навантаження у міру розвитку тріщини. В подальшому з

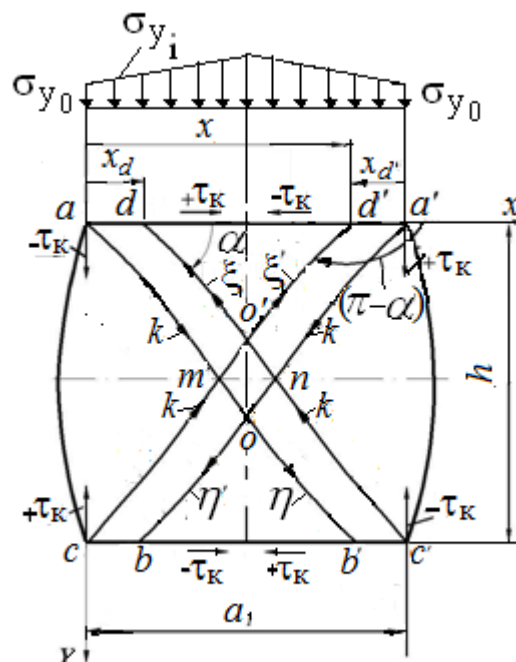


Рисунок 2 – Схема ЛК при клиновій формі руйнування

використанням значення питомого зусилля визначатимемо величину деформації – один з параметрів діаграми «нормальне напруження-деформація» за формулою

$$\varepsilon = \frac{P}{E}, \quad (2)$$

де  $E$  – модуль пружності породи.

Тепер отримаємо кінцеві формули для всього циклу розвитку тріщини (рис. 2) для побудови діаграми «напруження -деформація» за законом розподілу Л. Прандтля.

Врахуємо, що при  $x \geq 0,5a_1$   $x\xi' = a_1 - x$ . При розвитку тріщини при  $x \geq 0,5a_1$  матеріал в лівій половині зразка при  $x \leq 0,5a_1$  зберігає свою цілісність. Визначимо на підставі формули (1) при  $x \leq 0,5a_1$  суму нормальних напружень – силу, що діє на лівій половині контактної поверхні

$$P = \int_0^{0,5a_1} \sigma_y (1 + 2fx/h) \cdot dx = 0,5\sigma_y (1 + 0,5fa_1/h). \quad (3)$$

Далі шляхом інтегрування формули (1) на гілці  $x \geq 0,5a_1$ , використавши формулу (3) і значення площадки, яка не вийшла з-під навантаження, знаходимо питома зусилля на зразках

$$p = \sigma_{y\xi'} \frac{(x_{\xi'} + x'_d) + (x_{\xi'} + x'_d)^2 \frac{f}{h} + 0,5 \left( 1 + 0,5 \frac{fa_1}{h} \right)}{0,5 + x_{\xi'} + x'_d}, \quad (4)$$

де  $\sigma_{y\xi'}$  – нормальне напруження в вершині тріщини;  $x_{\xi'}$  – абсциса вершини тріщини при її розвитку;  $x'_d$  – абсциса точки  $d'$ .

Аналогічно при розвитку тріщини на частини гілки  $x \leq 0,5a_1$  знаходимо

$$p = \sigma_{y\xi'} \frac{x + x_d + \frac{f}{h}(x^2 + x_d^2)}{x + x_d}. \quad (5)$$

Для визначення напруження  $\sigma_{y\xi'}$  скористаємося методом, викладеним в статті [1]. За умови  $x \geq 0,5a_1$ , дотичні напруження на вертикальній осі симетрії в точці  $x = 0,5$  дорівнюють нулю в силу зміни в ній спрямування цих напружень. Тоді систему розрахунку напружень  $\sigma_{y\xi'}$  для ЛК  $\xi'$  при:  $x \geq 0,5a_1$ ;  $a = -1$ , (тому що при:  $x \geq 0,5a_1$   $f = -f$ ) слід записати з урахуванням цього положення у вигляді

$$\begin{cases} \sigma_{y\xi} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{k_n (1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi'}^2}) \cdot \exp(a2\mu \cdot \beta_{\xi'})}{1 - \sin \rho} - k_o \right); \\ k_o = \frac{(\mu\sigma_{y\xi} + k_n)(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi'}^2})}{(1 + \sin \rho)}, \end{cases} \quad (6)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт внутрішнього тертя;  $\rho = \arctg \mu$  – кут внутрішнього тертя, рад;  $k_n$  – межа опору матеріалу зсуву в вершині тріщини, Па;  $\beta_{\xi'}$  – кут повороту ЛК  $\xi'$  від контактної площини в вершині тріщини, рад;  $k_o$  – ефективні дотичні напруження згідно відомої теорії міцності Кулона в точці  $O'$  (рис. 2), Па.

$$b_{\xi'} = -\frac{f \cdot \sigma_y \left(1 - \frac{2Y}{h}\right) \cdot \left(1 + \frac{2f \cdot x_{\xi'}}{h}\right)}{k_n + \mu \sigma_y \cdot \left(1 + \frac{2f \cdot x_{\xi'}}{h}\right)}; \quad \beta_{\xi'} = \frac{1}{2} \arctg \frac{b_{\xi'} \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_{\xi'}^2}},$$

При цьому необхідно дотримуватися умови:  $x_{\xi'} = a_1 - x$ .

Кут нахилу ЛК  $\xi'$  визначається за формулою

$$\alpha_{\xi'} = \frac{3\pi}{4} - \rho/2 + \beta_{\xi'}. \quad (7)$$

Тепер розглянемо розвиток тріщини по ЛК  $\xi'$  при  $x \leq 0,5a_1$ . Напруження визначаються за системою рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_{y_{\xi'}} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{k_n (1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi'}^2}) \cdot \exp(2\mu(\beta_{\xi'} + \beta_c))}{1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi'}^2}} - k_c \right); \\ k_c = \frac{(\mu \sigma_{y_{\xi'}} + k_n) (1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi'}^2})}{(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi'}^2}) \cdot \exp(4\mu\beta_c)}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{де } b_{\xi'} = \frac{f \left(1 - \frac{2Y}{h}\right) \cdot \sigma_{y_{\xi'}} \left(1 + \frac{2f \cdot x_{\xi'}}{h}\right)}{k_n + \mu \sigma_{y_{\xi'}} \left(1 + \frac{2f \cdot x_{\xi'}}{h}\right)}; \quad b_c = -\frac{f \cdot \sigma_{y_{\xi'}}}{k_c + \mu \sigma_{y_{\xi'}}};$$

$\beta_{\xi'}$  і  $\beta_c$  – кути повороту ЛК  $\xi'$  від контактної площини в вершині тріщини і на нижній контактній площині в точці  $c$ , рівні

$$\beta_{\xi'} = \frac{1}{2} \arctg \frac{b_{\xi'} \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_{\xi'}^2}}; \quad \beta_c = \frac{1}{2} \arctg \frac{b_c \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_c^2}}.$$

$k_c$  – ефективні дотичні напруження в точці  $c$  (рис. 2), Па.

Кут нахилу ЛК  $\xi'$  описується формулою (7). При цьому необхідно дотримуватися умови: при  $x \leq 0,5a_1$   $x_{\xi'} = x$ .

На підставі формули (2) з використанням формул (4)-(8) визначаємо поточне значення деформації – параметр діаграми «нормальне напруження – поздовжня деформація». Для визначення другого параметра умовної діаграми – поточного значення нормального напруження  $\sigma_c$  (Па) потрібно значення питомого зусилля

помножити на відношення несучої площадки до первісної площі зразка. Після чого отримаємо:

при  $x \geq 0,5a_1$

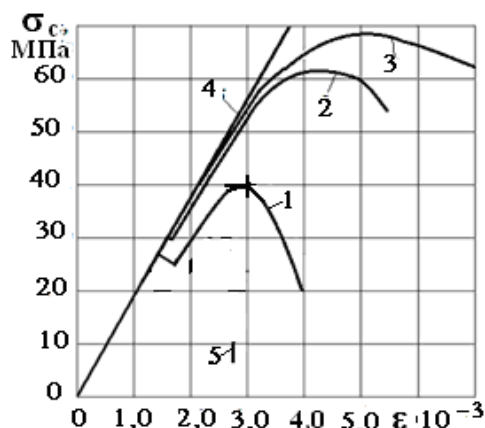
$$\sigma_c = \frac{\sigma_{y\xi'}}{a_1} \left( (x_{\xi'} + x_d) + (x_{\xi'} + x_d)^2 \frac{f}{h} + 0,5 \left( 1 + 0,5 \frac{fa_1}{h} \right) \right); \quad (9)$$

при  $x \leq 0,5a_1$

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{y\xi'}}{a_1} \left( x + x_d + \frac{f}{h} (x^2 + x_d^2) \right). \quad (10)$$

**Результати та їх обговорення.** Тепер за викладеними формулами (2), (9) та (10) побудуємо позамежні криві діаграм «напруження-деформація» кубічного зразка зі сторонами  $a_1 = h = 1.0$  при  $k_n = 10$  МПа,  $f = 0,25$  і різних значеннях кута внутрішнього тертя. На рис. 2 приведені теоретичні діаграми. За зовнішнім виглядом позамежні криві добре узгоджуються з діаграмами, отриманими на пресах при руйнуванні зразків з порід алевроліту і аргілітів [3]. За характером позамежних кривих неважко встановити, що модуль спаду і залишкова міцність зразка залежать від фрикційних параметрів гірських порід. Для підтвердження цього висновку на рис. 3 приведена пряма 5 при нульових значеннях цих параметрів

Аналіз позамежних кривих руйнування свідчить, що деякі криві мають скиди напруження  $\sigma_c$  в момент переходу з опуклою частини ЛК  $\xi'$  на увігнуту. Скиди формують площадки, що нагадують площадки плинності при деформації металів у вигляді так званого *зуба плинності*. Утворення зуба плинності ми пояснюємо падінням напруження на опуклій частині лінії ковзання по типу позамежних кривих при усічено-клиновій формі руйнування зразків. У середній частині позамежні криві мають зміцнення, яке не отримало поки теоретичного обґрунтування. Ми це явище пояснюємо переходом процесу руйнування з опуклою частини ЛК на увігнуту, що характеризується різким зростанням напруження. Одна тріщина розвивається до перетину осі симетрії. Друга (ліва) тріщина, що формує клин, примикає до правої послідовно. Згідно зі спостереженнями Б. Поля [4], в «випробуваннях на стиск косе і кінчне (клинове) руйнування відбувається майже одночасно». З цього можна зробити висновок, що процес формування клина йде з деякою затримкою в часі. Як видно на рис. 3, має місце перегин кривих і лінійність їх закінчується при низьких



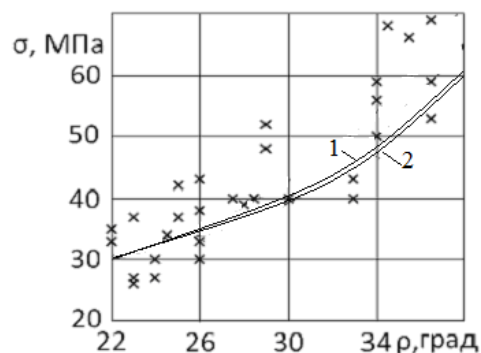
1 –  $\rho = 30$ ; 2 –  $\rho = 38$ ; 3 –  $\rho = 39$ ; 4 – справжня діаграма; 5 –  $\rho = 0$ ;  $\tau_k = 0$   
Рисунок 3 – Діаграми «напруження – деформування» клинової форми руйнування при законі розподілу контактних напружень Л. Прандтля

значеннях  $\sigma_c$ . В.В. Виноградов [3] зазначає, що при конусоподібній (клиновій) формі руйнування і навантаженні понад 70 % максимальної має місце суттєва нелінійність. Від себе додамо, що в позамежній кривій йде так зване зміцнення матеріалу згідно зростаючої кривої з подальшим її спадом. Проведемо зіставлення розрахункових значень меж міцності (рис. 4, крива 1) при  $k_n = 10,0$  МПа і  $f = 0,25$  з експериментальними даними, запозиченими з кадастру [5], перерахованими під  $k_n = 10,0$  МПа і порівняємо їх з кривою 2, отриманою за експоненціальним розподілом контактних напружень за Е.П. Унксовим [1]. На підставі рис. 4 можна встановити, що зіставлення розрахункових меж міцності призматичних зразків, отриманих за законами розподілу контактних нормальних напружень: за експонентним – Є.П. Унксова і за лінійним – Л. Прандтля свідчить про їх практичну ідентичність.

У статті [1] проведено визначення ступеня достовірності методу розрахунку межі міцності при експоненційному законі розподілу контактних нормальних напружень Е.П. Унксова. Збіжність розрахункових даних з експериментальними, запозиченими з кадастру [5], склала 82,1 %. Відносна похибка розрахунку дорівнює 0,14, коефіцієнт варіації – 0,147 при надійності результатів для 17 дослідів в 98 %, що свідчить про хорошу збіжність згідно з рекомендаціями ГОСТу [6] по допустимій достовірності теорії з експериментом. Приблизно таку ж достовірність забезпечує розроблений метод розрахунку межі міцності на підставі лінійного розподілу Л. Прандтля.

**Висновки.** 1. Розроблено аналітичний метод розрахунку діаграм «напруження – деформація» клинової форми руйнування призматичних зразків гірських порід при законі розподілу контактних напружень Л. Прандтля з використанням чотирьох показників їх властивостей ( $k_n$  – міцності матеріалу зсуву,  $f$  і  $\mu$  – коефіцієнтів контактного і внутрішнього тертя,  $E$  – модуля пружності), доступних для експериментального визначення в лабораторіях виробничих підприємств простими технічними засобами. За максимальним і мінімальним значенням нормальних напружень позамежних кривих діаграм можуть бути визначені значення межі і залишкової міцності зразків.

2. Позамежні криві теоретичних діаграм за зовнішнім виглядом відповідають експериментальним. Деякі позамежні криві мають скиди напружень, що підтверджуються експериментальними спостереженнями. У момент скидання виникають так звані площадки плинності у вигляді так званого зуба плинності, утворення яких ми пояснюємо падінням напруження на опуклій частині лінії ковзання. У середній частині позамежні криві мають криві зміцнення, які не отримали поки теоретичного обґрунтування. Ми це явище пояснюємо переходом



при розподілі контактних напружень: 1 – за Унксовим; 2 – за Прандтлем  
Рисунок 4 – Залежності меж міцності від кута внутрішнього тертя при клиновій формі руйнування

процесу руйнування з опуклої частини на увігнуту, що характеризується різким зростанням напруження.

3. В процесі побудови позамежних кривих представляється можливим визначення міцності призматичних зразків при їх одноосовому стисканні. Зіставлення розрахункових меж міцності призматичних зразків, отриманих за законами розподілу контактних нормальних напружень за експонентним Е.П. Унксова і за лінійним Л. Прандтля свідчить про їх практичну ідентичність. У статті [1] проведено визначення ступеня достовірності методу розрахунку межі міцності при експоненційному законі розподілу контактних нормальних напружень Е.П. Унксова. Збіжність розрахункових даних з експериментальними, запозиченими з кадастру [5], склала 82,1 %. Відносна похибка розрахунку дорівнює 0,14, коефіцієнт варіації – 0,147 при надійності результатів для 17 дослідів в 98 %, що свідчить про хорошу збіжність згідно з рекомендаціями ГОСТу [6], по допустимій достовірності теорії з експериментом. Приблизно таку ж достовірність забезпечує розроблений метод розрахунку межі міцності на підставі лінійного розподілу нормальних напружень Л. Прандтля.

4. У перспективі планується перевірка методу при інших формах руйнування (діагональної, поздовжньої і вибухоподібної).

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Васильев Л.М., Васильев Д.Л. Аналитический метод построения диаграмм «напряжение-деформация» образцов горных пород при их клиновидной форме разрушения / Известия ВУЗов. Горный журнал. 2013. № 7. С. 80 -87.
2. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением. М.: Машиностроение, 1967. 423 с.
3. Виноградов В.В. Геомеханика управления состоянием массива вблизи горных выработок. К.: Наук. думка, 1989. 190 с.
4. Польш Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения. Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 336-520.
5. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. М.: Недра, 1975. 277 с.
6. ГОСТ 21153.2-88. Порода горные. Методы определения предела прочности при одноосном сжатии. М.: Госстандартиздат, 1988. 84 с.

#### REFERENCES

1. Vasiliev, L.M. and Vasiliev, D.L. (2013), "Analytical method for constructing stress-strain diagrams of rock samples with their wedge-shaped fracture", *Izvestiya VUZov. Gornyy zhurnal*, no. 7, pp. 80-87.
2. Storozhev, M.V. and Popov, Ye.A. (1967), *Teoriya obrabotki metallov davleniyem* [Theory of metal forming by pressure], Mashinostroyeniye, Moscow, USSR.
3. Vinogradov, V.V. (1989), *Geomekhanika upravleniya sostoyaniyem massiva vblizi gornyykh vyrabotok* [Geomechanics of rock mass control near mine workings], Naukova dumka, Kiev, USSR.
4. Pol, B. (1975), *Makroskopicheskiye kriterii plasticheskogo techeniya i khrupkogo razrusheniya. Razrusheniye. T. 2* [Macroscopic criteria of plastic flow and brittle fracture. Destruction. Vol. 2], Mir, Moscow, USSR.
5. *Spravochnik (kadastr) fizicheskikh svoystv gornykh porod* [Reference (cadastre) of physical properties of rocks] (1975), Nedra, Moscow, USSR.
6. Ministry of Coal Industry of the USSR (1988), *GOST 21153.2-88. Porody gornyye. Metody opredeleniya predela prochnosti pri odnoosnom szhatii* [GOST 21153.2-88. Rocks. Methods for determination of axial compression strength], Goststandardizdat, Moscow, USSR.

#### Про авторів

**Васильєв Леонід Михайлович**, доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України (ІГТМ НАН України), м. Дніпро, Україна, [leonid1937@gmail.com](mailto:leonid1937@gmail.com)

**Васильєв Дмитро Леонідович**, доктор технічних наук, старший науковий співробітник, Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України (ІГТМ НАН України), м. Дніпро, Україна, [DLVasylyev@nas.gov.ua](mailto:DLVasylyev@nas.gov.ua)

**Маліч Микола Григорович**, кандидат технічних наук, доцент, Національна Металургійна Академія України, м. Дніпро, Україна.

#### About the authors

**Vasyliiev Leonid Mykhailovych**. Doctor of Technical Sciences (D.Sc.) Professor, Leading Researcher in Department of Pressure Dynamics Control in Rocks, Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poljakov of National Academy of Science of

Ukraine, Dnipro, Ukraine, [veonid1937@gmail.com](mailto:veonid1937@gmail.com)

**Vasyliiev Dmytro Leonidovych**, Doctor of Technical Sciences (D.Sc.) Senior Researcher in Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poljakov of National Academy of Science of Ukraine, Dnipro, Ukraine, [DLVasylyev@nas.gov.ua](mailto:DLVasylyev@nas.gov.ua)

**Malich Mykola Hryhorovych**, Candidate of Technical Sciences (Ph.D.), National Metallurgical Academy of Ukraine, Dnipro, Ukraine.

**Аннотация.** Приведён аналитический метод расчёта параметров диаграмм «напряжение – деформация» призматических образцов при их клиновидной форме разрушения на основе распределения контактных напряжений Л. Прандтля с использованием экспериментальных значений четырёх показателей свойств горных пород: предела сопротивления сдвигу, коэффициентов внутреннего и внешнего трения, модуля упругости, которые простыми способами могут быть установлены экспериментально в условиях горных предприятий, где результаты расчёта могут оперативно использованы. В основу метода положена разработанная авторами теория локального разрушения горных пород по линиям скольжения. Теория позволяет определить текущие значения нормальных напряжений в вершине трещины в процессе её развития. В качестве критерия прочности принят критерий прочности Кулона, дополненный авторами путём учёта контактного трения. Закономерности распределения нормальных напряжений от контактного трения ранее установлены Е.П. Унковым и Л. Прандтлем. Закономерность Е.П. Ункова была использована авторами ранее для разработки метода расчёта предела прочности образцов горных пород упомянутой формы разрушения. В данной статье в основу метода положен метод Л. Прандтля. Для определения предела прочности необходимо было разработать метод расчёта параметров «диаграмм нормальное напряжение – продольная деформация». Был подтверждён факт, что напряжение, при котором образуется трещина, не является пределом прочности. Пределом прочности при клиновидной форме разрушения образцов является максимальное значение нормального напряжения на запредельной ветви диаграммы «напряжение – деформация». Некоторые запредельные кривые имеют сбросы напряжений, подтверждающиеся экспериментальными наблюдениями. В момент сброса возникают площадки в виде так называемого зуба текучести, образование которых мы объясняем падением напряжения на выпуклой части линии скольжения. В средней части запредельные кривые имеют скачки напряжений, свидетельствующие об упрочнении образцов, не получившие пока теоретического обоснования. Мы это явление объясняем переходом процесса разрушения с выпуклой части линии скольжения на вогнутую. Сопоставление расчётных пределов прочности призматических образцов, полученных по законам распределения контактных нормальных напряжений, по экспоненциальному – Е.П. Ункова и по линейному – Л. Прандтля свидетельствует об их практической идентичности.

**Ключевые слова:** горная порода, предел прочности, разрушение, трещина, диаграмма «напряжение–деформация»

**Abstract.** An analytical method for calculating the parameters of the “stress – deformation” diagrams of prismatic samples with their wedge-shaped destruction is presented based on the distribution of the L. Prandtl contact stresses with using experimental values of four indicators of rock properties: shear resistance limit, internal and external friction coefficients, elastic modulus, which can be determined experimentally by simple methods in mining enterprises, where the calculation results can be promptly used. The method is based on the theory of local destruction of rocks along sliding lines developed by the authors. The theory makes it possible to determine the current values of the normal stresses at the crack tip during its development. As a strength criterion, the Coulomb strength criterion was adopted, supplemented by the authors by taking into account contact friction. The regularities of the distribution of normal stresses from contact friction were previously established by E.P. Unkov and L. Prandtl. The regularity of E.P. Unkov was used by the authors earlier to develop a method for calculating the strength limit of rock samples of the mentioned form of destruction. In this paper, the method is based on the method of L. Prandtl. To determine the strength limit, it was necessary to develop a method for calculating the parameters of “normal stress – longitudinal deformation” diagrams. The fact is confirmed that the stress at which the crack is formed is not the limit strength. The limit strength in the case of wedge-shaped destruction of the samples is the maximum value of the normal stress on the out-of-limit branch of the “stress- deformation” diagram. Some exorbitant curves have stress discharge, which are confirmed by experimental observations. At the moment of discharge, areas appear in the form of a so-called yield tooth, the formation of which we explain by the stresses discharge on the convex part of the slip line. In the middle part, the out-of-limit curves have stress jumps, which indicate the strengthening of the samples, which have not yet received any theoretical justification. We explain this phenomenon by the transition of the destruction process from the convex part of the slip line to the concave one. Comparison of the calculated strength limit of prismatic samples obtained according to the laws of distribution of contact normal stresses, exponential – by E.P. Unkov and linear – by L. Prandtl testifies to their practical identity.

**Keywords:** rock, strength limit, destruction, crack, “stress – deformation” diagram

*Стаття надійшла до редакції 16.02.2021*