100-річчю Дніпровського Державного Аграрно-економічного університету 70-річчю кафедри теоретичної механіки, опору матеріалів та матеріалознавства присвячується

ЗЕМЛЕРОБСЬКА МЕХАНІКА



ДДАЕУ

AGRICULTURAL MECHANICS

Dedicated to the 100th anniversary of the Dnipro State Agrarian and Economic University

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Дніпровський державний аграрно-економічний університет

А.С. Кобець, А.Г. Дем'яненко, О.Ю. Береза, О.А. Глонь, І.О. Горошко,
В.О. Гурідова, В.В. Девін, С.В. Зданевич, Д.В. Клюшник,
М.М. Науменко

ЗЕМЛЕРОБСЬКА МЕХАНІКА

Том 2

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОЇ МЕХАНІКИ

Під загальною редакцією А.С. Кобця

Дніпро
«Свідлер А.Л»
2022

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Dnipro State Agrarian and Economic University

A.S. Kobets, A.G. Demianenko, O.YU. Bereza, O.A. Glon, I.O. Goroshko,
V.O. Guridova, V.V. Devin, S.V. Zdanevych, D.V. Klyushnyk,
M.M. Naumenko

AGRICULTURAL MECHANICS

Volume 2

THEORETICAL FUNDAMENTALS AGRICULTURAL MECHANICS

Dnipro
«Svidler A.L.»
2022

УДК 678.4.06
352

352 Землеробська механіка. Т. 2. Теоретичні основи сільськогосподарської механіки / А.С. Кобець, А.Г. Дем'яненко, О.Ю. Береза, О.А. Глонь, І.О. Горошко, В.О. Гурідова, В.В. Девін, С.В. Зданевич, Д.В. Клюшник, М.М. Науменко – Дніпро, "Свідлер А.Л", 2022. – 712 с.

ISBN 978-617-627-173-4

У другому томі розглядаються теоретичні основи сільськогосподарської механіки, які складаються з основ теоретичної механіки, механіки матеріалів і конструкцій (опору матеріалів), теорії механізмів і машин та матеріалознавства. Наведено основні теоретичні положення, основи розрахунків елементів конструкцій і деталей машин широкого спектру застосування, як промислового, так і сільськогосподарського призначення, на міцність, жорсткість та стійкість. Розглянуто багато практичних прикладів, які охоплюють різноманітні проблеми землеробської механіки. Логіка побудови і методика висвітлення має сприяти засвоєнню теоретичного матеріалу, його застосуванню на практиці та допомогти здобувачам усіх трьох ступенів вищої інженерно-технологічної освіти, як у навчальному процесі, так і у подальшій науковій роботі.

In the second volume the theoretical backgrounds of agricultural mechanics that is built on theoretical mechanics, the mechanics of materials and structures, the theory of mechanisms and machines, and the science of materials are considered. The main theoretical principles of structural design and modelling approaches to estimating of strength, rigidity and stability of elements of mechanical structures and machine parts of a wide variety applications in both industrial and agricultural machinery are formulated. The theoretical foundations are illustrated by the many practical examples for different engineering problems of agricultural mechanics. The structure of materials of the monography makes studying process more comfortable, helps students of all three levels of higher engineering and technological education to be more effective in further engineering or scientific work.

Рекомендовано до видання Вченою радою Дніпровського державного аграрно-економічного університету Міністерства освіти і науки України, протокол № 6 від 31 березня 2022 р.

Рецензенти: В.О. Горик, д-р техн. наук, професор
С.В. Ракша, д-р техн. наук, професор
В.Б. Говоруха, д-р фіз.-мат. наук, професор

ISBN 978-617-627-173-4

© А.С. Кобець, А.Г. Дем'яненко, О.Ю. Береза, О.А. Глонь, І.О. Горошко, В.О. Гурідова, В.В. Девін, С.В. Зданевич, Д.В. Клюшник, М.М. Науменко

ПЕРЕДМОВА

Сучасні вимоги до проектування, виробництва, експлуатації машин і обладнання, до розробки технологій в промисловості та агровиробництві потребують високої кваліфікації майбутніх інженерів, технологів як з фахових дисциплін, так і фундаментальних дисциплін природничо-наукової підготовки, які закладають фундамент та технічну базу їх компетентності. Майбутні фахівці повинні самостійно вирішувати усі виникаючи на виробництві питання, пов'язані з використанням передового досвіду експлуатації сільськогосподарської техніки, знарядь та засобів, розробки новітніх технологій, бути здатними і готовими приймати відповідні рішення по виникаючим в АПВ технічним проблемам.

Сільськогосподарська механіка, як комплекс природничо-наукових загально-технічних дисциплін, є теоретичною та науковою основою для вивчення, створення і грамотної експлуатації сучасної техніки будь-якого призначення. Опанувавши та використовуючи її закони, принципи та методи, фахівці зможуть розробляти, досліджувати та вдосконалювати конструкції машин, знарядь, обладнання та фахово їх експлуатувати.

Другий том «Теоретичні основи сільськогосподарської механіки» монографії «Землеробська механіка» призначений сприяти якісній підготовці кваліфікованих, компетентних спеціалістів АПВ, здатних забезпечити самостійне розв'язування багатьох інженерних задач і проблем, пов'язаних зі створенням, раціональним використанням та вдосконаленням техніки АПВ відповідно до сучасних умов роботи та будуть корисними здобувачам усіх трьох ступенів вищої освіти, як у навчальному процесі, так і у подальшій науковій роботі. Безумовно вчасною і корисною буде наявність електронної версії по нормативним дисциплінам, які викладає кафедра теоретичної механіки, опору матеріалів та матеріалознавства.

Теоретичні основи сільськогосподарської механіки містять наступні частини, які мають прямий і зворотній зв'язок, а саме, основи:

- теоретичної механіки;
- механіки матеріалів і конструкцій (опору матеріалів);
- теорії механізмів та машин;
- матеріалознавства.

Теоретична механіка розглядає загальні закони рівноваги та механічного руху матеріальних об'єктів та є однією з фундаментальних дисциплін фізико-математичного циклу та науковою базою усіх галузей сучасної техніки будь-якого призначення, у тому числі й сільськогосподарського.

Механіка матеріалів і конструкцій розглядає інженерні методи розрахунків елементів конструкцій, інженерних споруд та деталей машин на міцність, жорсткість та стійкість.

Теорія механізмів і машин розглядає типові механізми машин, їх структурний, кінематичний аналіз, загальні принципи побудови, роботи та експлуатації.

Матеріалознавство розглядає властивості матеріалів, способи їх зміни, критерії вибору матеріалів для конкретних деталей машин і знарядь АПВ для досягнення ними необхідних експлуатаційних параметрів.

Монографія містить лише теоретичні основи, більш повно та детально відповіді на деякі конкретні питання можна знайти у наведеній основній та рекомендованій літературі до кожної частини.

В кожній частині формули та рисунки мають подвійну нумерацію: перша цифра відповідає номеру глави, друга – порядковому номеру формули чи рисунка в главі. Посилання на деяку формулу чи рисунок будуть йти в межах однієї частини, якщо не сказано інше.

Другий том монографії «Теоретичні основи сільськогосподарської механіки» рекомендовано вченою радою Дніпровського аграрно-економічного університету як навчальний посібник для здобувачів усіх трьох рівнів вищої інженерно-технологічної освіти.

Користуючись нагодою, коллектив авторів висловлює щиру вдячність О.А. Глонь, І.О. Горошко за допомогу у підготовці першої частини, а В.В. Девіну

та О.І. Литвинову за участь у підготовці третьої частини другого тому монографії.

Автори вдячні доктору технічних наук, професору О.В. Горику, доктору технічних наук, професору С.В. Ракші та доктору фізико-математичних наук, професору В.Б. Говорусі за цінні зауваження, зроблені при рецензуванні другого тому «Теоретичні основи сільськогосподарської механіки» монографії «Землеробська механіка».

Автори дякують М.П. Гончаренко та С.Г. Пустовгаровій за допомогу у підготовці рукопису.

Всі зауваження та побажання читачів будуть прийняті авторами з вдячністю.

FOREWORD

Modern requirements to the designing, manufacturing, exploiting of machinery and equipment, for the development of technology in industry and agricultural production demand of highly qualified future engineers and technologists in both professional and fundamental disciplines of natural sciences, that forms a basis and technical preset of their competence. Future specialists should solve all issues in according to the best practices of agricultural machinery, by using modern implements and tools, new technologies, also they have to be ready and willing to make appropriate decisions on technical problems arising in agricultural industry.

Agricultural mechanics, as a suite of natural and technical disciplines, is a theoretical and scientific basis for the research, development and effective exploitation activities of new modern technological equipment of wide purpose. By mastering and using its laws, principles and methods, the future mechanical engineers will be able to develop, research and improve the design of machines, tools, equipment and operate them professionally.

«The Theoretical Foundations of Agricultural Mechanics» is the second volume of the monography «Agricultural Mechanics» are developed to provide a strong background of engineers for agricultural industry with ability to solve a wide-variety engineering tasks and problems related to effective applications and improvements of agricultural machinery in a modern high-intensive loads and extremal working conditions. They will be useful to students of all three educational levels during educational process and in their further scientific work.

Theoretical foundations of agricultural mechanics contains parts with forward and backward references between them, namely, the fundamentals of:

- theoretical mechanics;
- mechanics of materials and structures (resistance of materials);
- theory of mechanisms and machines;
- materials science.

Theoretical mechanics considers the general laws of equilibrium and mechanical motion of material objects and is one of the fundamental disciplines of the physical and mathematical cycle and the scientific basis of all branches of modern technologies for wide purpose, including agricultural industry.

Mechanics of materials and structures studies engineering methods of structural analysis of engineering facilities and machine parts to estimate their strength, rigidity and stability.

Theory of mechanisms and machines considers the typical mechanisms of machines, their structural, kinematic analysis, general principles of designs, operation and exploitation.

Materials science studies the properties of materials, ways to change them, the criteria for selecting materials for specific parts of machines and tools of agricultural industry to achieve the necessary properties.

Volume II provides only theoretical foundations. For details and advances for specific questions ones should address to recommended literature for each part.

The monograph formulas and pictures have got a hierarchical two-level enumeration where the fist level number respects to chapter and the second one is a sequential number of the respective item within its chapter. The references to the formulas and pictures correspond to the items in the same chapter unless otherwise stated.

Volume II of the monography «Theoretical foundations of agricultural mechanics» was recommended by Academic Council of Dnipro State Agrarian and Economic University as a textbook for students of all three levels of higher engineering and technological education.

Taking this opportunity, the team of authors expresses their sincere gratitude to O.A. Glon, I.O. Goroshko for assistance in preparing of materials of the first part, and V.V. Devin and O.I. Litvinov for their help in the preparation of the third part of the second volume of the monograph.

The authors are grateful to Doctor of Technical Sciences, Professor O.V. Gorik, to Doctor of Technical Sciences, Professor S.V. Raksha and Doctor of Physical and

Mathematical Sciences, Professor V.B. Govorukha for their remarks made during the review of the monograph.

The authors express their gratitude to M.P. Goncharenko and S.G. Pustovgarova for their assistance in preparing of the manuscript.

All comments and wishes of readers will be accepted with gratitude.

ЧАСТИНА І. ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Теоретична механіка є однією з фундаментальних загально-наукових дисциплін фізико-математичного циклу. Історія розвитку теоретичної механіки показує, що вона є однією з наукових основ усіх галузей сучасної техніки і технологій, зокрема, і сільського господарства. Механіка, як «мистецтво побудови машин» формує, розвиває і спрямовує творчу інтуіцію вчених, інженерів та технологів на створення нових машин і технологій, фахову експлуатацію, удосконалення та модернізацію існуючих.

Матеріал викладений у традиційній послідовності розділів: статика, кінематика, динаміка, принципи механіки (елементи аналітичної механіки). Така послідовність дозволяє плавно підвести читача до сприйняття образів теоретичної механіки та розчленити на окремі складові великий об'єм матеріалу, що полегшує засвоєння знань і їх використання на практиці. Розділи «статика» і «кінематика» можна безболісно міняти місцями, що дуже часто практикується з тих чи інших міркувань. Основною метою даної частини монографії є надання основ, суті теоретичної механіки, не переобтяжуючи читача надмірними подробицями, але не втрачаючи при цьому розуміння основних понять, законів та принципів.

Предмет теоретичної механіки. Теоретична механіка – одна із основних наук про природу і навколишній світ. Предметом досліджень цієї науки є механічний рух – вічний і нескінченний у своїх проявах. Під *механічним рухом* розуміють найпростіший рух матерії, який зводиться до зміни положення фізичних тіл у просторі з часом. Для визначення загальних законів механічного руху теоретична механіка широко використовує апарат вищої математики, зокрема векторну алгебру, аналітичну геометрію, диференціальне, інтегральне числення, теорію диференціальних рівнянь тощо.

Основною метою курсу теоретичної механіки у програмі інженерної підготовки фахівців інженерно-технологічних спеціальностей є вміння описувати мовою математики не лише механічний рух і рівновагу, але й

немеханічні явища та процеси, що відбуваються у різних середовищах (твердих, рідких, газоподібних і їх сумішах), та в різних областях знань (хімії, біології, електротехніці тощо). *Записати рівняння руху чи рівноваги, встановити основні закономірності і дати їм належне тлумачення – ось ті компетентності та кваліфікація, яку прагне надати майбутньому інженерові теоретична механіка*.

Теоретична механіка, як фундаментальна фізико-математична дисципліна, є науковою базою для багатьох дисциплін інженерної механіки, до яких найперше належать механіка матеріалів і конструкцій (опір матеріалів), будівельна механіка, теорія машин і механізмів, деталі машин, сільськогосподарські машини, машини і обладнання АПВ, харчових виробництв, а також гідравліка, газова динаміка, теорія пружності, теорія пластичності, теорія стійкості, теорія автоматичного регулювання та багатьох інших дисциплін. Виходячи з характеру задач, які розв'язує теоретична механіка, її прийнято ділити на три розділи: статику, кінематику, динаміку.

Статика вивчає необхідні і достатні умови рівноваги матеріальних тіл під дією прикладених сил та методи перетворення одних систем сил в інші, що еквівалентні їм.

Кінематика розглядає геометричні властивості руху тіл незалежно від сил, що спричиняють цей рух.

Динаміка вивчає загальні закони механічного руху тіл під дією прикладених до них сил.

Основні поняття та закони механіки. Якщо об'єктами дослідження загальної механіки є будь-які реальні тіла – тверді або деформівні, газоподібні, рідкі, сипучі тощо, то теоретична механіка досліджує закономірності руху ідеалізованих тіл: матеріальної точки, системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла (скорочено: точки, системи, тіла).

Матеріальна точка і абсолютно тверде тіло являють собою деякі абстрактні моделі фізичних тіл. Це вносить значні спрощення у вивчення механічного руху реальних матеріальних об'єктів і дає можливість встановити найбільш загальні

закони руху, справедливі для всіх матеріальних тіл незалежно від їх фізичних властивостей. *Матеріальна точка* – це фізичне тіло певної маси, розмірами якого можна знехтувати.

Система матеріальних точок – це така сукупність точок, у якій положення і рух кожної окремої точки залежать від положення і руху інших точок системи (тобто положення і рух усіх точок взаємозв'язані).

Абсолютно тверде тіло – це тіло, в якому відстані між будь-якими двома його точками залишаються незмінними.

В основу теоретичної механіки, яку називають класичною або ньютоновою механікою, покладено закони Галілея-Ньютона. Загальні положення і закони класичної механіки були сформульовані стосовно руху *вільних* (ізольованих) матеріальних точок і тіл. Перший закон механіки відкритий Галілео Галілеєм (1564–1642), але в сучасному своєму вигляді цей закон, разом з двома іншими законами механіки, вперше був опублікований Ісааком Ньютоном (1643–1727) у його знаменитій праці «Математичні принципи натуральної філософії», а тому ми знаємо ці закони як три основні закони Ньютона.

ПЕРШИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА (закон інерції): *Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки інші тіла або сили не виведуть її з цього стану.*

ДРУГИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА (основний закон механіки): *Добуток маси точки на її прискорення дорівнює вектору рівнодійної всіх сил, що діють на точку:*

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Другий закон Ньютона називають «основним законом механіки» тому, що його відкриття дало змогу складати диференціальні рівняння руху фізичних тіл. З цього закону випливають загальні теореми динаміки, на його основі побудована вся класична і аналітична механіка.

ТРЕТІЙ ЗАКОН НЬЮТОНА (закон рівності дії і протидії): *Взаємодія двох тіл рівна за величиною і протилежна за напрямом.* Цей закон іноді формулюють

так: *На будь-яку дію тіла виникає рівна і протилежно напрямлена протидія іншого тіла.*

ГЛАВА 1. СТАТИКА

1.1. Предмет і задачі статики

Статика *– це розділ теоретичної механіки, який вивчає перетворення систем сил та умови рівноваги тіл під дією сил.* Виходячи з цього, статика розглядає дві основні задачі:

1) складання (або розкладання) сил і приведення систем сил, що діють на тіло, до найпростішого вигляду;

2) визначення необхідних і достатніх умов рівноваги тіл під дією прикладених до них сил.

Наукові основи статики і гідростатики закладені грецьким ученим Архімедом (287–212 рр. до н.е.). Він виклав теорію рівноваги важеля, що перебуває під дією паралельних сил (Павловський, 2004), створив учення про центр ваги тіл, а також дослідив рівновагу тіл, що плавають у рідині.

У геометричну статику значний внесок зробили французькі вчені П. Варіньон (1654–1722) і Л. Пуансо (1777–1859).

Основоположником аналітичної статики є великий французький математик і механік Ж. Лагранж (1736–1813). Подальший розвиток аналітичної статики пов'язаний з ім'ям великого російського математика і механіка М.В. Остроградського (1801–1861). В обґрунтуванні аксіоматики статики значну роль відіграли Л. Ейлер (1707–1783), М.Є. Жуковський (1847–1921), С.О. Чаплигін (1869–1942), В.Г. Імшенецький (1832–1892), О.І. Сомов (1815–1876).

Значний внесок у розвиток графостатики зробив В.Л. Кирпичов (1845–1913) – перший ректор НТУУ «КПІ».

1.2. Сили і системи сил. Аксіоми статики

У статиці основним об'єктом досліджень є сила.

Сила – це міра механічної взаємодії між тілами, яка визначає інтенсивність і напрям цієї взаємодії. Поняття сили в механіці має наукову цінність тому, що її можна виміряти. За одиницю сили в технічній системі одиниць (МКГСС) приймається кілограм сили (кгс або кГ), в міжнародній системі одиниць (СІ) – ньютон (Н), а в абсолютній фізичній системі (СГС) – дина (дин). Крім цих основних одиниць є ще похідні (масштабні): кілоньютон (1 кН = 10^3 Н) та тонна сили (1 тс = 10^3 кГ).

Крім величини (модуля) сила характеризується напрямом та точкою прикладання. Отже, сила – величина векторна.

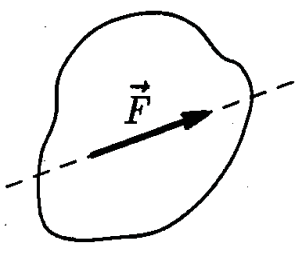


Рис. 1.1

Однак слід відзначити дуже важливу особливість сили, що діє на *абсолютно тверде тіло*. Оскільки тверде тіло під дією сили не деформується, то точка прикладання сили не має суттєвого значення, і дія сили на тіло не зміниться, якщо цю силу прикласти в іншій точці, яка лежить на *лінії дії сили*. Лінія дії сили – це та лінія, вздовж якої можемо рухати (ковзати) вперед чи назад вектор сили (рис. 1.1). Таким чином, сила в теоретичній механіці є *ковзним вектором*, тобто характеризується величиною, напрямом і лінією дії. Умовно сили будемо позначати прописними літерами латинського алфавіту, над якими ставиться стрілка або рисочка як знак вектора (наприклад, $\vec{F}$). Модуль сили позначатимемо буквою без знака вектора.

Коли на одне тіло чи точку діє кілька сил, то їх сукупність називають *системою сил*. Якщо одну систему сил можна замінити іншою системою сил, і стан тіла при цьому не зміниться, то такі дві системи називають *еквівалентними*. Якщо систему сил можна замінити однією силою, еквівалентною даній системі,

то таку силу називають *рівнодійною*. Якщо ж рівнодійна системи сил дорівнює нулеві, то таку систему сил називають *урівноваженою*.

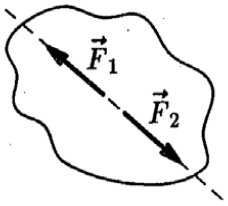


Рис. 1.2

В основу статики покладено декілька очевидних істин, які називають аксіомами і відображають властивості сил, що діють на тіло.

Аксіома 1 (про дві сили): дві сили, що діють на тіло, врівноважуються тільки тоді, коли вони рівні за модулем, протилежні за напрямом і діють вздовж однієї прямої (рис. 1.2).

Аксіома 2 (про паралелограм сил): рівнодійна двох сил, що перетинаються, дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах (рис. 1.3).

Аксіома 3 (про звільнення від в'язей): механічний стан твердого тіла не зміниться, якщо відкинути в'язі і замінити їх дію реакціями.

Аксіома 4 (про накладання нових в'язей): рівновага твердого тіла не порушиться, якщо накласти на нього нові в'язі.

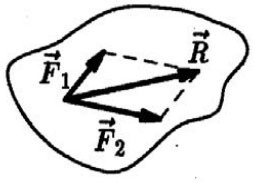


Рис. 1.3

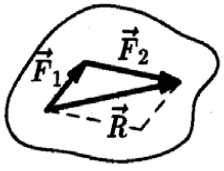


Рис. 1.4

Аксіома 5 (про затвердіння): якщо тіло, що деформується, перебуває у рівновазі, то його рівновага не порушиться, коли воно затвердіє.

Аксіома 6: стан твердого тіла не зміниться, якщо до сил, що діють на нього, додати (або відняти) врівноважену систему сил.

З другої аксіоми можемо зробити такі *висновки*:

1) будь-яку силу можна розкласти на дві складові сили;

2) рівнодійна двох сил, що перетинаються, є замикаючою стороною силового трикутника (рис. 1.4);
3) будь-яку кількість сил, що перетинаються в одній точці, можна звести до рівнодійної сили, яка буде замикаючою стороною силового багагокутника.

Якщо положення і рух даного тіла визначається іншими тілами, то ці тіла будуть для даного тіла опорами або в'язями. *В'язі – це тіла, що обмежують вільність руху даного тіла*. Оскільки класична ньютонова механіка була розроблена для вивчення руху небесних тіл, вільних від в'язей, то для використання законів Ньютона для невільних тіл їх умовно звільнюють від в'язей, застосувавши третю аксіому статики.

Теорема про три непаралельні сили. *Якщо тіло знаходиться у рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.*

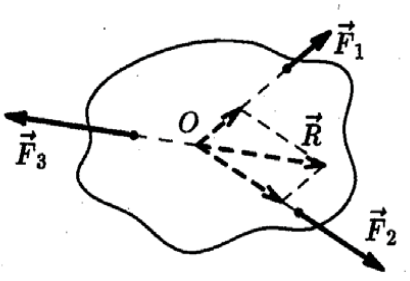


Рис. 1.5

Цей висновок неважко одержати з першої і другої аксіом статики. Перенесімо дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ вздовж їх ліній дії в точку перетину O (рис. 1.5) і складімо їх, згідно з другою аксіомою, а потім врівноважимо, згідно з першою аксіомою, одержану рівнодійну третьою силою $\vec{F}_3$.

1.3. Типи в'язей та їх реакції

При розв'язуванні задач про рівновагу невільних тіл широко застосовують аксіому про звільнення від в'язей. Відкидаючи в'язь, її дію заміняють силою, яку називають реакцією в'язі. ***Реакція в'язі*** *– це сила, що діє на дане тіло з боку в'язі* (тобто протидія в'язі на дію даного тіла). Таким чином, необхідно знати характер дії тієї чи іншої в'язі та напрям її реакції.

Роль в'язей (опор) на практиці виконують різні тіла і конструкції, основними з яких є:

1) ***нитка*** (шнур, трос, ланцюг, ремінь) – утримує тіло лише в напрямі свого натягу $\vec{T}$ (рис. 1.6);

2) ***ребро*** (кут, вістря) – реакція перпендикулярна до тіла або до дотичної до нього в точці контакту (рис. 1.7);

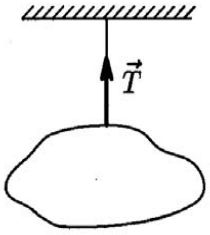


Рис. 1.6

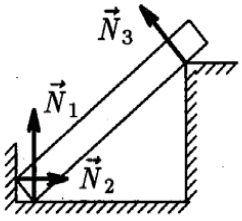


Рис. 1.7

3) ***ідеально гладенька поверхня*** (або каток) обмежує рух тіла лише у напрямі, перпендикулярному до поверхні, і дозволяє рухатись у всіх інших напрямах. Реакцією гладенької поверхні є одна сила $\vec{N}$, направлена перпендикулярно до цієї поверхні або до дотичної у точці контакту тіла з поверхнею (рис. 1.8). У техніці до опори на ідеально гладеньку поверхню прирівнюється опора на катках (рис. 1.9). Реакція катка направлена перпендикулярно до поверхні, по якій котиться каток;

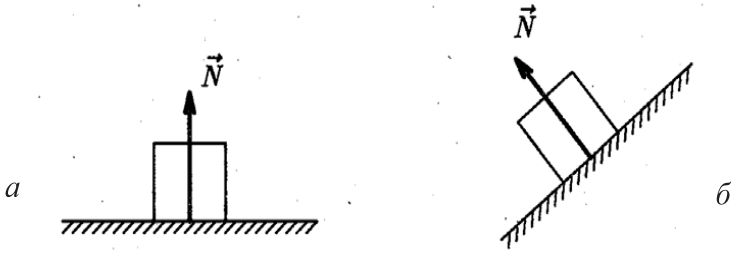
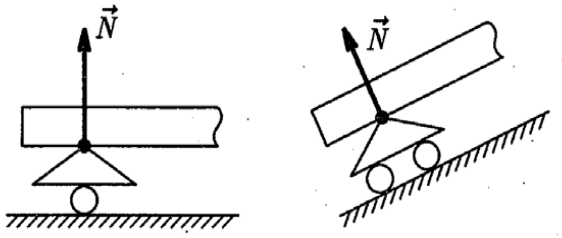


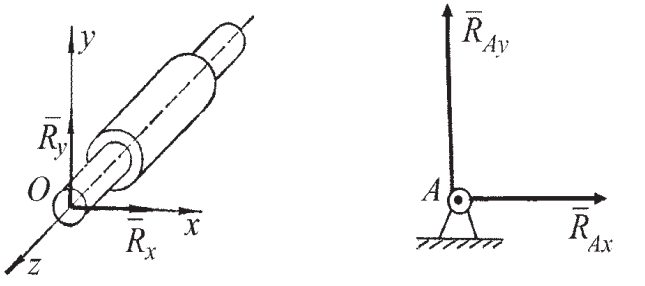
Рис. 1.8



а *б*

Рис. 1.9

4) ***циліндричний шарнір*** (підшипник) – конструкція, яка складається з нерухомого стержня (осі шарніра) і обойми (втулки), що може обертатись навколо стержня. Тіло, з'єднане з рухомою втулкою, може вільно рухатись вздовж осі шарніра *Oz*, але зустрічає протидію у напрямі осей *Ox* і *Oy* (рис. 1.10,*а*).



а *б*

Рис. 1.10

Таким чином, реакція циліндричного шарніра має дві складові $\vec{R}_x$ і $\vec{R}_y$, які лежать у площині, перпендикулярній до осі шарніра. Модуль реакції визначають за теоремою Піфагора $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}$. Схематично циліндричний шарнір найчастіше зображують у вигляді, показаному на рис. 1.10,*б*;

5) ***сферичний шарнір*** – дозволяє тілу, зв'язаному з обоймою, вільно обертатись навколо шарніра, але перешкоджає рухатись поступально у всіх трьох напрямах простору (обмежує три степені вільності тіла) і має три складові реакції $\vec{R}_x,\vec{R}_y,\vec{R}_z$ (рис. 1.11);

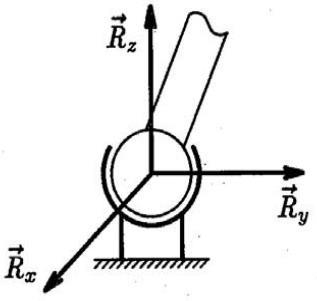


Рис. 1.11

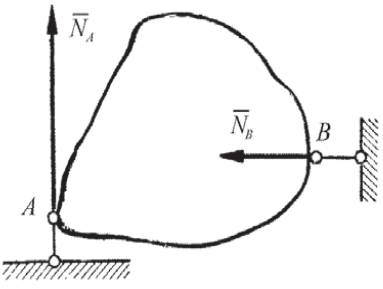


Рис. 1.12

6) ***ідеальний стержень*** (невагомий стержень з шарнірами на кінцях) – протидіє лише у напрямі своєї осі або у напрямі, що з'єднує шарніри на кінцях стержня у випадку криволінійного стержня (рис. 1.12), тобто має одну реакцію $\vec{N}$.

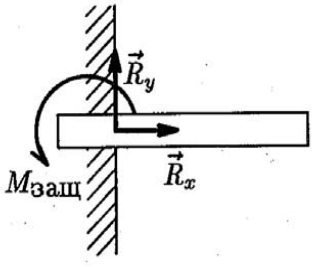


Рис. 1.13

7) ***жорстке защемлення балки (консоль)*** – виключає будь-яке переміщення балки у площині – і поступальне, і обертальне. Реакція жорсткого защемлення має дві взаємно перпендикулярні складові $\vec{R}_x$ і $\vec{R}_y$ та момент защемлення $\vec{M}_{защ}$, який протидіє повороту балки в даній площині (рис. 1.13).

1.4. Класифікація сил і систем сил

Прикладені до матеріальних точок, твердих тіл і систем матеріальних точок сили в теоретичній механіці розрізняють за їх характером та орієнтацією у просторі.

Сили поділяються на:

- активні сили і реакції в'язей;
- зосереджені і розподілені;

- внутрішні і зовнішні сили.

Системи сил розрізняють в залежності від їх просторової і взаємної орієнтації на:

- плоскі та просторові;
- збіжні, паралельні та довільні.

До *активних* сил належать всі сили, що діють на тіло, окрім реакцій в'язей.

Зосередженою силою називається сила, прикладена до тіла в одній будь-якій його точці. *Розподіленими* силами називаються сили, що діють на всі точки поверхні чи об'єму тіла. Однак у теоретичній механіці всі розподілені сили замінюються зосередженими, прикладеними в одній точці (наприклад, сила ваги тіла, що являє собою розподілену по об'єму тіла силу, прикладається у так званому *центрі ваги*).

Зовнішніми силами називають сили, які діють на тверде тіло або на систему матеріальних точок з боку інших тіл. *Внутрішніми силами* називаються сили взаємодії між частинками одного тіла або між точками однієї системи.

Збіжною системою сил називають таку систему сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, а *паралельною системою* – коли лінії дії сил паралельні між собою. У всіх інших випадках ми маємо справу з *довільними системами сил.*

Якщо у збіжної системи сил всі сили лежать в одній площині, то таку систему сил називають *збіжною плоскою системою сил*, а якщо збіжні сили орієнтовані у просторі, то говоримо про *збіжну просторову систему сил.* Аналогічно називають плоску систему паралельних або просторову систему паралельних сил, довільну плоску чи довільну просторову систему сил.

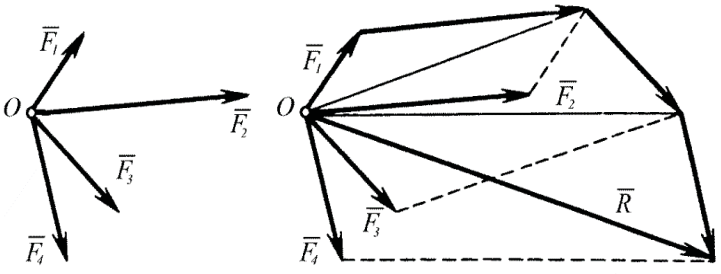
1.5. Система збіжних сил. Умови рівноваги

Однією з задач статики є перетворення систем сил, внаслідок чого дана система сил замінюється іншою системою чи силою, еквівалентною даній. Розглянемо у цьому плані збіжну просторову систему сил (рис. 1.14,*а*). З другої

аксіоми про рівнодійну двох сил, лінії дії яких перетинаються, ми зробили очевидний висновок, що коли маємо систему з декількох збіжних сил, то їх рівнодійна знаходиться за правилом векторного додавання і являє собою замикаючу сторону силового багатогокутника. Рівнодійна $\vec{R}$ для *n* збіжних сил (рис. 1.14,*б*) дорівнює

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n \qquad \text{або} \qquad \vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \tag{1.1}$$

Тут $k = 1, 2, ..., n$, де n – кількість сил системи.



а *б*

Рис. 1.14

Отже, збіжна система сил зводиться до однієї сили – *рівнодійної* $\vec{R}$, яка дорівнює векторній сумі всіх сил системи.

Розкладемо вектор рівнодійної $\vec{R}$ на компоненти по декартових осях координат:

$$\vec{R} = \vec{i}R_x + \vec{j}R_y + \vec{k}R_z. \tag{1.2}$$

Тут $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні орти координатних осей; R_x, R_y, R_z – проекції вектора $\vec{R}$ на координатні осі.

У проекціях на декартові осі координат вираз (1.1) набуває вигляду

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \qquad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \qquad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}, \tag{1.3}$$

де $\sum F_{kx}, \sum F_{ky}, \sum F_{kz}$ – суми проекцій всіх сил на координатні осі.

Для аналітичного визначення модуля рівнодійної R маємо формулу

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \tag{1.4}$$

Другою (основною) задачею статики є з'ясування необхідних умов, яким повинна задовольняти система сил, щоб тіло перебувало у стані рівноваги. Визначимо ці умови для збіжної системи сил.

Якщо при побудові силового многокутника виявиться, що кінець вектора останньої n-ої сили збігається з початком вектора першої сили, тобто силовий многокутник буде замкнутим, то рівнодійна такої системи сил дорівнює нулю. У цьому випадку дія збіжної системи сил на тіло еквівалентна нулю і ми можемо записати

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0. \tag{1.5}$$

Таким чином, *геометричною (або векторною) умовою рівноваги збіжної системи сил* є умова рівності нулю її рівнодійної. Можемо сформулювати й таке правило: *для рівноваги збіжної системи сил необхідно і достатньо, щоб силовий багатокутник був замкнутий*.

Проекції виразу (1.5) на декартові осі координат дають нам аналітичні умови рівноваги збіжної просторової системи сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0. \tag{1.6}$$

Вони читаються так: для рівноваги збіжної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на три координатні осі дорівнювала нулю.

Іноді рівняння рвноваги (1.6) записують скорочено:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0.$$

Якщо всі сили збіжної системи сил діють в одній площині, то для рівноваги збіжної плоскої системи сил необхідна рівність нулю проекцій всіх сил на дві координатні осі:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \tag{1.7}$$

Умови (1.6.) і (1.7) називають ***аналітичними умовами рівноваги збіжної системи сил*** і застосовують при розв'язуванні задач статики для визначення невідомих сил і реакцій в'язей.

1.6. Система паралельних сил. Пара сил

Системи паралельних сил, як і збіжні системи, є окремим випадком довільних систем сил. У залежності від просторової орієнтації, системи паралельних сил поділяють на плоскі і просторові. У цьому розділі ми розглянемо способи перетворення (додавання) двох паралельних сил, направлених в один бік та в різні боки.

Сили направлені в один бік. Розглянемо систему двох паралельних сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, прикладених у точках A і B твердого тіла (рис. 1.15) і направлених в один бік. Для визначення рівнодійної цих сил і точки її прикладання зробимо так: прикладемо у точках A і B дві сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, рівні за величиною і протилежні за напрямом (від цього стан тіла, згідно з шостою аксіомою статики, не зміниться). Склавши попарно сили $\vec{F}_1$ і $\vec{P}_1$ та $\vec{F}_2$ і $\vec{P}_2$, одержимо їх рівнодійні $\vec{Q}_1$ та $\vec{Q}_2$, лінії дії яких перетинаються у точці O.

Скориставшись властивістю сили як ковзного вектора, перенесемо сили $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$ у точку O, а потім розкладемо їх на дві їхні попередні складові $\vec{F}_1$ і $\vec{P}_1$ та $\vec{F}_2$ і $\vec{P}_2$. Отже, прикладені в точці O сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$ взаємно зрівноважуються, а направлені в один бік сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ будуть мати рівнодійну, модуль якої дорівнює сумі модулів цих сил

$$R = F_1 + F_2. \tag{1.8}$$

Лінія дії рівнодійної $\vec{R}$ перетинає відрізок AB у точці C, яка ділить цей відрізок на частини, обернено пропорційні модулям сил

$$\frac{AC}{BC}=\frac{F_2}{F_1}. \tag{1.9}$$

Таким чином, *рівнодійна двох паралельних сил, направлених в один бік, за модулем дорівнює сумі модулів цих сил, направлена в той же бік, що й сили, і ділить відстань між точками прикладання сил на відрізки, обернено пропорційні силам.*

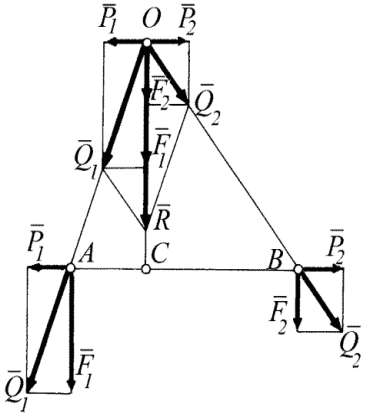


Рис. 1.15

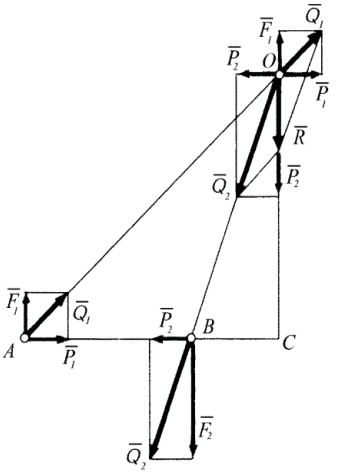


Рис. 1.16

Сили направлені в різні боки. Для визначення рівнодійної двох паралельних сил, направлених у різні боки, скористаємось попереднім прийомом: введемо дві зрівноважені сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$ (рис. 1.16), складемо їх з даними силами $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, прикладеними в точках *A* і *B*, а потім перенесемо їх рівнодійні $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$ у точку *O*. Розклавши сили $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$ на їх попередні складові, одержимо дві зрівноважені сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$ та дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, прикладені в точці *O* і направлені по одній прямій у різні боки.

Модуль їх рівнодійної дорівнює різниці модулів складових сил

$$R=F_2-F_1, \tag{1.9}$$

якщо сила $F_2>F_1$.

Лінія дії отриманої рівнодійної сили $\vec{R}$ перетинає продовження відрізка AB у точці C, а відстані точок A і B від точки C обернено пропорційні модулям сил:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{F_2}{F_1}. \tag{1.10}$$

Таким чином, *рівнодійна двох паралельних сил, направлених у різні боки, за модулем дорівнює різниці модулів цих сил, направлена в бік більшої сили та ділить відстань між точками прикладання даних сил зовнішнім чином на частини, обернено пропорційні модулям сил.*

Система двох рівних паралельних сил, направлених у різні боки (пара сил). Розглянемо випадок визначення рівнодійної двох паралельних сил, рівних за модулем і направлених у різні боки (так званої *пари сил)*:

$$F_1=F_2, \qquad \vec{F}_1 \,||\, \vec{F}_2. \tag{1.11}$$

Повторивши всю процедуру попереднього випадку визначення рівнодійної паралельних сил, ми переконаємося у тому, що одержані сили $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$ також рівні і паралельні між собою, лінії їх дії не перетинаються, а *модуль рівнодійної пари сил дорівнює нулю*:

$$R=F_1-F_2=0. \tag{1.12}$$

Однак дія пари сил на тіло не нульова і викликає обертальний рух тіла. Мірою обертальної дії пари сил служить *момент пари*, величина якого *дорівнює добутку модуля однієї із сил пари на плече:*

$$M(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=F_1h=F_2h. \tag{1.13}$$

Плечем називають найкоротшу відстань (перпендикуляр) між лініями дії сил пари $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 1.17).

Напрям обертання, створюваний парою сил, визначає знак момента пари: якщо пара сил обертає тіло проти годинникової стрілки – момент додатній, якщо за годинниковою стрілкою – від'ємний.

Отже, момент пари сил має величину і напрям, а тому є векторною величиною.

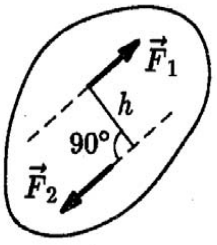


Рис. 1.17

Вектор момента пари сил перпендикулярний до площини, в якій лежить пара, і направлений у той бік, звідки обертання тіла, здійснюване парою, відбувається проти годинникової стрілки.

На рис. 1.18 показано дві пари сил, які діють в одній площині і мають протилежно направлені вектори моментів.

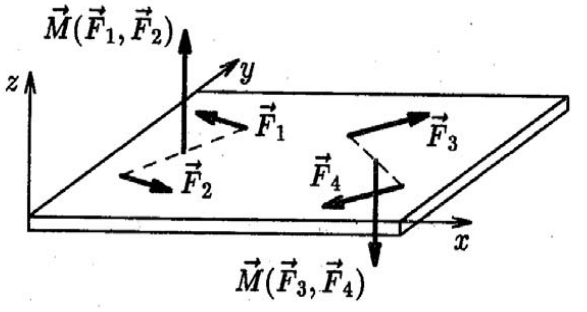


Рис. 1.18

Основні властивості пар сил:

1. Пару сил, не змінюючи її дії на тіло, можна переносити куди завгодно в площині, в якій лежить пара.

2. Пару сил, не змінюючи її дії на тіло, можна переносити у паралельну площину.

3. У парі сил, не змінюючи величини її момента, можна відповідно змінювати модулі сил і довжину плеча (тобто зменшувати сили, збільшуючи довжину плеча і навпаки).

4. Дві пари сил з рівними моментами еквівалентні.

5. Декілька пар сил, що *лежать в одній площині,* можна замінити однією еквівалентною парою з моментом, що дорівнює *алгебраїчній сумі* моментів цих пар.

6. Декілька пар сил, що *лежать у різних площинах,* можна замінити однією еквівалентною парою з моментом, рівним *векторній сумі* моментів цих пар.

Приведені властивості пар сил являють собою окремі теореми, які ми приводимо без доведення. З їх доведеннями можна познайомитись у повних курсах теоретичної механіки (Литвинов та ін., 2013).

Виходячи з перших двох властивостей пар сил, маємо зробити висновок про те, що *вектор момента пари є вільним вектором*, який зберігає лише свою направленість і може переноситись паралельно самому собі у будь-яку точку.

Виходячи з останньої (шостої) властивості пар сил, можемо дійти висновку, що векторну суму моментів декількох пар, довільно розміщених у просторі, можна замінити однією еквівалентною (рівнодійною) парою сил з моментом, рівним векторній сумі моментів окремих пар:

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k. \tag{1.14}$$

Якщо на тіло діють кілька пар сил, і момент рівнодійної пари дорівнює нулю

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k = 0, \tag{1.15}$$

то тіло під дією даної системи пар сил перебуває у рівновазі.

Отже, *для рівноваги системи пар сил, що діють на тіло, необхідно і достатньо, щоб момент рівнодійної пари дорівнював нулю.*

1.7. Момент сили відносно точки

Обертання тіла можна викликати не лише парою сил, але й окремою силою, коли одну із точок тіла закріпити нерухомо.

Величина момента сили $\vec{F}$ *відносно центра O дорівнює добутку модуля даної сили на плече h*:

$$M_O(\vec{F}) = Fh. \tag{1.16}$$

Плечем сили називають перпендикуляр, опущений із точки O на лінію дії сили або найкоротша відстань між точкою *O* і лінією дії сили (рис. 1.19).

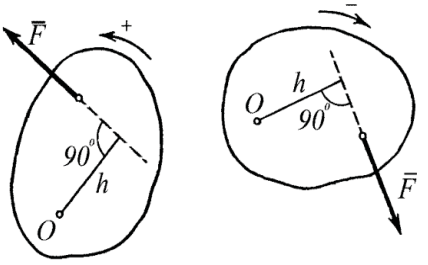


Рис. 1.19

Знак момента сили відносно точки визначають, як і у випадку пари сил, напрямом обертання тіла навколо точки *O*: при обертанні проти годинникової стрілки – знак «плюс», за годинниковою стрілкою – «мінус». Отже момент сили відносно точки, як і момент пари сил, має величину і напрям, а тому є векторною величиною.

Вектор момента сили відносно точки перпендикулярний до площини, в якій лежать дана точка і сила, і направлений у той бік, звідки обертання тіла під дією сили відбувається проти годинникової стрілки.

Визначення моменту сили як векторного добутку. Наведене вище визначення момента сили відносно точки як алгебраїчної величини, рівної добутку модуля сили на плече і взятої зі знаком «плюс» чи «мінус» в залежності від напряму обертання, влаштовує нас у випадку, коли сили, що діють на тіло, лежать в одній площині. Якщо система сил довільна і просторова, то для характеристики обертальної дії всіх сил на тіло потрібно враховувати площину дії кожної сили. Це буде легко зробити, якщо визначити момент сили відносно точки як векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного із центра моментів до точки прикладання сили, і сили $\vec{F}$. Крім того, таке визначення момента сили відносно точки знадобиться нам у подальшому вивченні теоретичної механіки (у динаміці) як найзручніше і найкомпактніше.

Запишемо вираз для момента сили $\vec{F}$ відносно точки *O* як векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного із точки *O* до точки прикладання сили, і вектора сили $\vec{F}$ (рис. 1.20):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (1.18)$$

Модуль цього векторного добутку

$$\vec{M}_O(F) = rF\sin\alpha = Fh. \tag{1.19}$$

Тут $r\sin\alpha = h$ – плече сили; α – кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$.

Отже ми одержали таке ж визначення модуля момента сили відносно точки, як і у формулі (1.17) і цим довели правомірність векторного запису момента сили відносно точки.

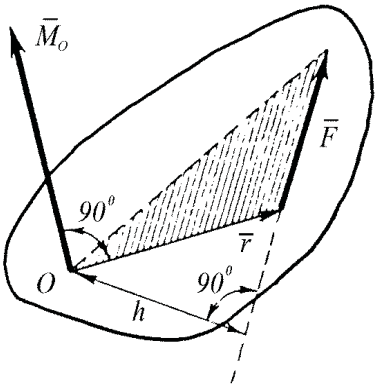


Рис. 1.20

Таким чином, *вектор момента сили відносно точки дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з даної точки до точки прикладання сили, на вектор сили $\vec{F}$*. Напрям вектора момента сили визначається за правилом векторного добутку, тобто він перпендикулярний до площини, в якій лежать точка і сила, і направлений у той бік, звідки поворот першого вектора $\vec{r}$ до другого вектора $\vec{F}$ здіснюється проти годинникової стрілки найкоротшим шляхом.

Вектор момента сили відносно точки $\vec{M}_O$ можемо розкласти на компоненти по декартових осях координат

$$\vec{M}_O = \vec{i}M_x + \vec{j}M_y + \vec{k}M_z. \tag{1.20}$$

Тут M_x, M_y, M_z – проекції момента $\vec{M}_O$ на координатні осі.

Формула (1.18) дозволяє визначити момент $\vec{M}_O$ аналітично, розкривши визначник

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \tag{1.21}$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні орти; x, y, z – координати точки прикладання сили; F_x, F_y, F_z – проекції сили на осі координат.

Із визначника (1.21) для проекцій момента сили маємо такі вирази:

$$M_x = yF_z - zF_y; \quad M_y = zF_x - xF_z; \quad M_z = xF_y - yF_x. \tag{1.22}$$

Модуль момента сили відносно точки O знаходимо за формулою

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \tag{1.23}$$

Проекції M_x, M_y, M_z являють собою моменти сили $\vec{F}$ відносно координатних осей Ox, Oy, Oz. Вміння визначати моменти сил відносно координатних осей є необхідним для складання рівнянь рівноваги при розв'язуванні задач на просторові системи сил. Однак користуватись формулами (1.22) для цих цілей досить незручно, а тому розглянемо набагато простіший спосіб визначення момента сили відносно осі.

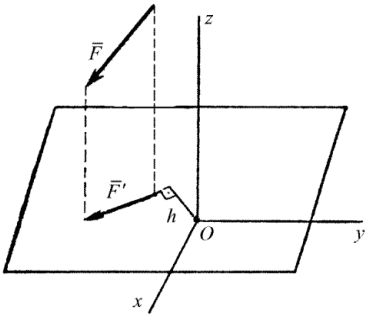


Рис. 1.21

Момент сили відносно осі. Якщо момент сили відносно деякого центра O викликає обертальний рух тіла навколо цього центра, то момент сили відносно осі викликає, зрозуміло, обертання тіла навколо даної осі. При цьому задача визначення *плеча сили відносно осі* дещо складніша, ніж визначення плеча сили відносно точки, але врешті решт зводиться до останнього. Пояснимо це на прикладі (рис. 1.21).

Щоб знайти плече сили $\vec{F}$ відносно осі Oz, спроектуємо силу $\vec{F}$ на площину Oxy, перпендикулярну до осі Oz, а саму вісь Oz також спроектовуємо на цю ж площину. В результаті одержимо проекцію сили $\vec{F}'$ і точку O (початок координат). А далі з точки O опускаємо перпендикуляр на лінію дії проекції сили $\vec{F}'$. Це й буде шукане нами плече сили відносно осі.

Модуль момента сили відносно осі знайдемо як добуток модуля проекції сили $\vec{F}'$ на плече h:

$$M_z(\vec{F}) = \pm F'h. \tag{1.24}$$

Знак момента визначається, як і раніше, в залежності від напряму обертання тіла навколо осі під дією даної сили: якщо обертання здійснюється проти годинникової стрілки – знак «плюс», якщо за стрілкою – «мінус».

Таким чином, момент сили відносно осі дорівнює добутку проекції сили на площину, яка перпендикулярна до даної осі, на плече. Плечем є перпендикуляр, опущений з початку координат на лінію дії проекції сили.

При достатніх практичних навиках розв'язування задач операцію проектування сил на ту чи іншу площину можна проминути завдяки просторовій уяві, яку свого часу мав дати студентам курс нарисної геометрії.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю у двох випадках:

1) якщо сила паралельна осі (проекція сили $\vec{F}' = 0$);

2) якщо сила перетинає вісь (плече $h = 0$).

1.8. Довільна система сил

Довільною системою сил називається сукупність прикладених до твердого тіла сил, лінії дії яких орієнтовані довільно у просторі.

Приведення до одного центру. Розглядаючи збіжну систему сил, ми переконалися, що цю систему можна замінити однією рівнодійною силою, яка дорівнює векторній сумі всіх сил, що входять у систему.

Систему паралельних сил також можна привести або до рівнодійної сили, або до пари сил.

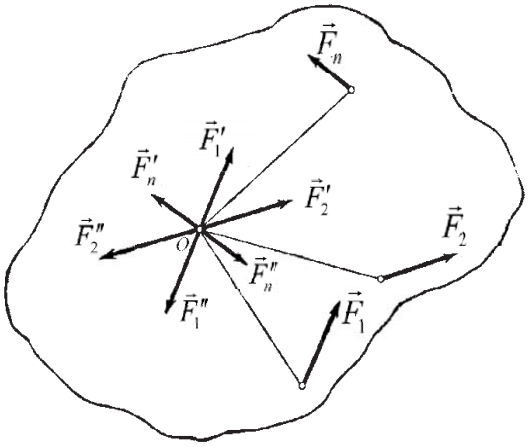


Рис. 1.22

Спробуємо спростити прикладену до абсолютно твердого тіла довільну систему сил, привівши всі сили до одного заданого центра O (рис. 1.22). Почнемо з сили $\vec{F}_1$, перенісши її паралельно самій собі у точку O і позначивши перенесену силу $\vec{F}_1'$. Однак, щоб стан тіла при цьому не змінився, прикладемо у точці O силу $\vec{F}_1''$, яка урівноважить силу $\vec{F}_1'$. Дві паралельні, рівні за модулем і протилежні за напрямом сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_1''$ ми можемо трактувати як пару сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_1''$), а силу $\vec{F}_1'$, прикладену в точці O, – як перенесену в точку O силу $\vec{F}_1$.

Повторивши аналогічну операцію переносу до центра O сил $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$, одержимо пучок сил $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \vec{F}_3', \ldots, \vec{F}_n'$, прикладених у точці O (збіжну систему сил), і систему пар сил з моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3, \ldots, \vec{M}_n$, яку отримали внаслідок проведених операцій переносу. Векторна сума всіх збіжних сил дасть рівнодійну або так званий *головний вектор* $\vec{R}$ *системи*, прикладений у точці O, а векторна сума моментів всіх приєднаних пар сил дасть *головний момент системи* $\vec{M}_O$.

Таким чином, *довільну систему сил можна звести до однієї рівнодійної сили (головного вектора), прикладеній у центрі приведення і рівній векторній сумі всіх сил системи, та до однієї пари сил (головного момента) з моментом, рівним векторній сумі моментів усіх приєднаних пар:*

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k' ; \qquad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k, \vec{F}_k'').$$ (1.25)

Головний момент системи приєднаних пар сил можна розглядати і як векторну суму моментів всіх вихідних сил відносно центра O:

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k).$$ (1.26)

Модулі векторів $\vec{R}$ і $\vec{M}_O$ визначаються з формул

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} ; \qquad M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} .$$ (1.27)

З'ясуємо тепер, як позначиться на головному векторі і головному моменті зміна положення центра приведення довільної системи сил.

Цілком очевидно, що головний вектор $\vec{R}$ не залежить від положення центра приведення, а головний момент буде залежати, тому що зміняться плечі сил. При цьому головний момент сил відносно нового центра приведення зміниться на величину, рівну моменту попереднього головного вектора системи відносно нового центра:

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{M}_{O_1}(\vec{R}).$$ (1.28)

Тут $\vec{M}_O$ і $\vec{M}_{O_1}$ – головні моменти даної системи сил відносно попереднього центра O і нового центра O_1, а $\vec{M}_{O_1}(\vec{R})$ – момент головного вектора $\vec{R}$ відносно нового центра приведення, який визначається за формулою

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{R}) = \overrightarrow{OO_1} \times \vec{R}.$$ (1.29)

При приведенні довільної системи сил до заданого центра можуть мати місце такі випадки:

1) головний вектор $\vec{R} \neq 0$, а головний момент $\vec{M}_O = 0$ (під дією такої системи сил тіло рухається поступально);

2) головний вектор $\vec{R} = 0$, а головний момент $\vec{M}_O \neq 0$ (під дією такої системи тіло обертається);

3) головний вектор $\vec{R}=0$ і головний момент $\vec{M}_O=0$ (під дією такої системи сил тіло знаходиться у рівновазі);

4) головний вектор $\vec{R}\neq 0$ і головний момент $\vec{M}_O\neq 0$, причому можуть бути такі три окремі випадки: $\vec{R}\parallel\vec{M}_O$; $\vec{R}\perp\vec{M}_O$ і $\vec{R}$ утворює кут α з вектором $\vec{M}_O$ (під дією такої системи сил тіло здійснює складний рух, який зводиться або до так званого силового гвинта, або до плоско-паралельного руху).

Умови рівноваги довільної системи сил. З результатів приведення довільної системи сил до головного вектора і головного момента ми бачимо, що тверде тіло перебуватиме у рівновазі лише тоді, коли і головний вектор $\vec{R}$, і головний момент $\vec{M}_O$ системи дорівнюватимуть нулеві, тобто

$$\vec{R}=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k=0;\qquad \vec{M}_O=\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_O(\vec{F}_k)=0. \tag{1.30}$$

Проектуючи ці рівності на декартові осі координат, запишемо ***аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил*** у вигляді шести рівнянь (відповідно до шести степеней вільності тіла у просторі):

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}F_{kx}=0; && \sum_{k=1}^{n}M_x(\vec{F}_k)=0;\\
&\sum_{k=1}^{n}F_{ky}=0; && \sum_{k=1}^{n}M_y(\vec{F}_k)=0;\\
&\sum_{k=1}^{n}F_{kz}=0; && \sum_{k=1}^{n}M_z(\vec{F}_k)=0.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Тут F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекції сил на координатні осі; M_x, M_y, M_z – моменти сил відносно цих осей.

Ці умови читаються так: *для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю і суми моментів усіх сил відносно цих осей дорівнювали нулю.*

Якщо всі сили довільної системи діють в одній площині, то *аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил* зводяться до запису трьох рівнянь (відповідно до трьох степенів вільності тіла на площині):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) = 0. \tag{1.32}$$

Тут $\sum M_z(\vec{F}_k)$ – момент всіх сил відносно осі, перпендикулярної до площини *Oxy*, в якій діють сили, і може бути проведена із будь-якої точки площини. А тому цей вираз ми можемо замінити визначенням суми моментів усіх сил відносно *будь-якої точки площини*. При розв'язуванні задач статики за таку точку (центр моментів) потрібно вибирати ту точку площини, через яку проходять лінії дії найбільшої кількості *невідомих* сил чи реакцій в'язей – це спрощує розв'язок системи рівнянь.

Таким чином, *для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на дві взаємно перпендикулярні осі дорівнювала нулю і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини дорівнювала нулю.*

Відзначимо, що рівняння рівноваги (1.32) плоскої довільної системи сил можна подати у різній формі, а саме: можна скласти два рівняння моментів відносно двох будь-яких точок A і B та одне рівняння проекцій сил на вісь

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \tag{1.33}$$

можна скласти три рівняння моментів відносно трьох точок, які не лежать на одній прямій

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(F_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_B(F_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_C(F_k) = 0. \tag{1.34}$$

Іноді доводиться розв'язувати задачі на рівновагу складних конструкцій – системи кількох тіл. У таких випадках застосовується *метод перерізів* у точках з'єднання тіл, який дозволяє розглядати рівновагу кожного окремого тіла

системи, відкинувши при цьому всі інші тіла і замінивши їх дію реакціями тих в'язей, які з'єднують ці тіла.

1.9. Рівновага при наявності сил тертя

Із досвіду ми знаємо, що при спробі рухати одне тіло по поверхні другого в площині їх дотику виникає сила опору цьому рухові.

Припущення про в'язь у вигляді ідеально гладенької поверхні, яке ми розглядали раніше, не відповідає реальній дійсності, тому що навіть при найретельнішій обробці контактуючих поверхонь залишається деяка шорсткість, яка обумовлює силу опору при відносному русі одного тіла по поверхні іншого. Цю силу називають силою тертя ковзання (або сухим тертям).

Тертя ковзання вперше експериментально вивчав французський фізик Амонтон (1663–1705), який довів, що *сила тертя* у досить широких границях *не залежить від площі контактуючих поверхонь.* Закони тертя були сформульовані майже через сто років пізніше Кулоном (1736–1806), і тому тертя ковзання часто називають кулоновим (Булгаков, 2007).

Припущення про абсолютну твердість тіл у теоретичній механіці також не відповідає дійсності, оскільки досвід показує, що при контакті рухомих тіл (наприклад, при коченні колеса по дорозі) внаслідок їх деформації виникає опір цьому рухові, який називають тертям кочення.

Близьке по природі як до тертя ковзання, так і до тертя кочення, є тертя крутіння (або вертіння), яке виникає при загвинчуванні, свердлінні і являє собою досить складний процес.

Вивчення рівноваги тіл з урахуванням сил опору звичайно зводиться до розгляду граничного положення рівноваги, коли сили тертя досягають свого найбільшого значення.

Тертя ковзання. Величина сили сухого тертя $\vec{F}_{тр}$ пропорційна степені шорсткості контактуючих поверхонь (пари тертя) і нормальному тиску N (тобто силі, яка притискує поверхні тіл одна до одної):

$$F_{тр} = fN. \tag{1.35}$$

Степінь шорсткості характеризується *безрозмірним* коефіцієнтом тертя f, що визначається експериментально: або з допомогою динамометра, яким вимірюється сила тертя $\vec{F}_{тр}$, або як тангенс кута нахилу поверхонь при граничній рівновазі (в момент переходу тіла від спокою до руху).

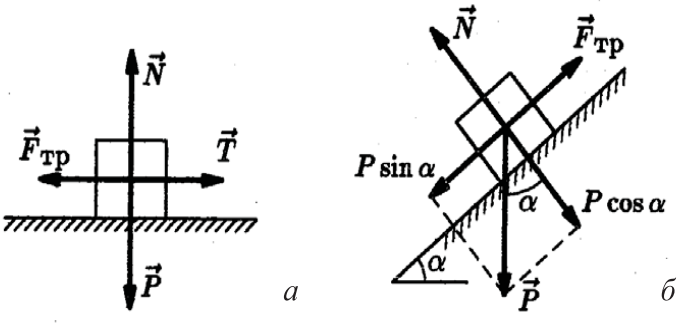


Рис. 1.23

На рис. 1.23,*а* тіло перебуває у граничній рівновазі під дією чотирьох сил: вага тіла $\vec{P}$ урівноважується реакцією опорної поверхні $\vec{N}$, а сила натягу пружинного динамометра $\vec{T}$ – силою тертя $\vec{F}_{тр}$. Коефіцієнт тертя знайдемо так:

$$f = \frac{F_{тр}}{N} \qquad \text{або} \qquad f = \frac{T}{P}. \tag{1.36}$$

На рис. 1.23,*б* тіло вагою $\vec{P}$ лежить на похилій площині. Якщо цю силу ваги розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові $P\sin\alpha$ і $P\cos\alpha$, то у випадку граничної рівноваги

$$N = P\cos\alpha, \qquad F_{тр} = P\sin\alpha.$$

Отже, коефіцієнт тертя

$$f = \frac{F_{тр}}{N} = \frac{P\sin\alpha}{P\cos\alpha} \qquad \text{або} \qquad f = \operatorname{tg}\alpha \tag{1.37}$$

дорівнює тангенсу кута нахилу площини при граничній рівновазі тіла.

Однак слід зауважити, що в обох цих експериментах коефіцієнт тертя буде дещо завищений, тому що ми його визначали під час переходу тіла від спокою до руху. Але із досвіду пересування важких предметів нам добре відомо, що набагато важче зрушити тіло з місця, ніж потім пересувати його. Тобто, коефіцієнт тертя спокою більший за коефіцієнт тертя руху (статичний коефіцієнт тертя більший за динамічний).

Величина коефіцієнта тертя ковзання залежить від матеріалу поверхонь тертя та їх стану (ступеню обробки, температури, вологості) і знаходиться в границях $0 < f < 1$. Наведемо значення коефіцієнта f для деяких пар тертя: сталь по льоду – 0,027; сталь по сталі – 0,15; шкіряний ремінь по чавуну – 0,28; дерево по дереву – 0,54÷0,62.

Тертя кочення. Вище ми описали явище тертя ковзання, яке виникає при відносному переміщенні (ковзанні) одного тіла по поверхні другого. Розглянемо ще одне фізичне явище, яке носить назву «тертя кочення».

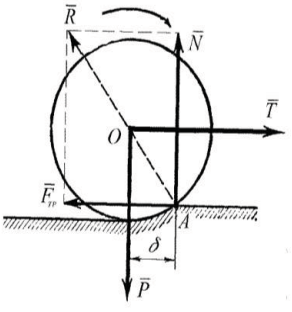


Рис. 1.24

Якщо тверде тіло має форму колеса або катка і котиться по поверхні іншого тіла, то такий рух має виключати проковзування у точці контакту. Тобто сила тертя ковзання повинна бути достатня для того, щоб не допустити проковзування одного тіла (катка) відносно іншого (дороги). Сила тертя ковзання у цьому випадку відіграє позитивну роль.

Якби каток і поверхня, по якій він котиться, були абсолютно твердими, то такий вид переміщення був би ідеальним і не викликав би ніякого опору. Однак опір рухові катка при його коченні все ж виникає, і спричиняється він деформацією катка чи поверхні, по якій каток котиться, або ж обома одночасно.

Для вивчення цього явища, яке називається *тертям кочення,* розглянемо кочення абсолютно твердого катка вагою $\vec{P}$ по поверхні, яка деформується (рис. 1.24). Крім ваги $\vec{P}$, на каток діють тяга $\vec{T}$, сила тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тр}}$ та вертикальна складова реакції поверхні $\vec{N}$. Система цих чотирьох сил утворює дві пари сил $(\vec{T}, \vec{F}_{\text{тр}})$ та $(\vec{P}, \vec{N})$.

Пара сил $(\vec{T}, \vec{F}_{\text{тр}})$ створює обертальний момент у напрямі кочення катка, а пара сил $(\vec{P}, \vec{N})$ – обертальний момент, що протидіє коченню. Момент пари $(\vec{P}, \vec{N})$ характеризує *момент тертя кочення,* який *дорівнює добутку нормального тиску N на коефіцієнт тертя кочення* δ, що являє собою плече пари:

$$M_{\text{тр.кч.}} = N\delta. \tag{1.38}$$

Отже, коефіцієнт тертя кочення δ є *розмірною* величиною (розмірність [м]) і характеризує величину деформації тіл.

Слід нагадати, що при коченні катка по горизонтальній площині нормальний тиск дорівнює вазі тіла ($N = P$), а у випадку кочення по площині, нахиленій під кутом α до горизонту, нормальний тиск менший і залежить від кута нахилу ($N = P\cos\alpha$).

1.10. Центр ваги

На кожну частинку твердого тіла діє сила земного тяжіння, пропорційна масі частинки і прискоренню вільного падіння $\vec{P} = m\vec{g}$. Всі ці сили направлені радіально до центру Землі, тобто перетинаються у цьому центрі. Але на практиці ми вважаємо, що сили ваги, які діють на частинки твердого тіла, паралельні між собою. Таке припущення не позначається на наших інженерних розрахунках тому, що відстані між частинками тіл занадто малі в порівнянні з радіусом земної кулі, який становить близько $R_{\text{Землі}} = 6400$ км.

Сили ваги є розподіленими силами, тобто діють на всі точки об'єму тіла. Оскільки теоретична механіка оперує лише зосередженими силами, то розподілені сили ваги замінюємо рівнодійною силою, яка називається *вагою тіла*, а точка прикладання рівнодійної сил ваги називається *центром ваги тіла*.

Центр ваги тіла не змінює свого положення при вільному русі тіла у просторі. Ця властивість дозволяє експериментально визначати центр ваги неоднорідних плоских тіл складної конфігурації таким чином: достатньо підвісити тіло на нитці в будь-якій його точці і побудувати продовження нитки в тілі (провести вертикаль), а потім підвісити тіло в іншій точці і теж побудувати її продовження. Точка перетину побудованих ліній є центром ваги цього тіла. Центр ваги порожнистих тіл і тіл складної просторової форми може лежати поза межами тіла (наприклад, центр ваги обруча, пустотілого циліндра тощо).

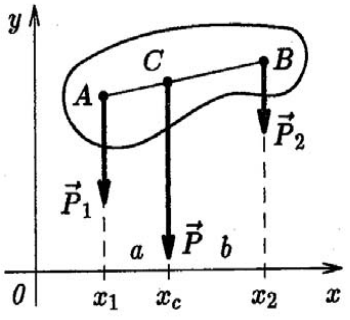


Рис. 1.25

Для аналітичного визначення положення центра ваги скористаємося ***теоремою Варіньйона***, яка стверджує, що *момент рівнодійної сили дорівнює сумі моментів складових сил*.

Доведемо справедливість цієї теореми на такому прикладі. Нехай на тіло в точках *A* і *B* діють дві паралельні сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, що мають рівнодійну (рис. 1.25)

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^{2} \vec{P}_k = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

Рівнодійна $\vec{P}$ прикладена в точці *C*, що ділить відстань між силами обернено пропорційно силам:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC} = \frac{b}{a}, \tag{1.39}$$

звідки $P_1 a = P_2 b.$

Момент рівнодійної сили $\vec{P}$ відносно точки *O* дорівнює

$$M_O(\vec{P}) = Px_c, \tag{1.40}$$

або

$$Px_c = (P_1 + P_2)x_c = P_1(x_1 + a) + P_2(x_2 - b) = P_1x_1 + P_2x_2 + (P_1a - P_2b).$$

Тут x_c – координата точки *C*. Оскільки із (1.39) маємо $P_2b = P_1a$, то вираз в останній дужці цього запису дорівнює нулю, і ми одержимо

$$Px_c = P_1x_1 + P_2x_2, \tag{1.41}$$

що і потрібно було довести згідно з теоремою Варіньйона: момент рівнодійної $\vec{P}$ дорівнює сумі моментів складових сил $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$.

Методом індукції від *n* до *n*+1 неважко показати, що теорема Варіньйона справедлива для будь-якого числа сил, тобто

$$P x_c = \sum_{k=1}^{n} P_k x_k. \tag{1.42}$$

Потрібно зауважити, що теорема Варіньйона справедлива не лише для системи паралельних сил ваги, але й для будь-якої системи сил, яка має рівнодійну.

Із (1.42) знайдемо вираз для аналітичного визначення координати центра ваги тіла по осі *Ox*:

$$x_c = \frac{\sum P_k x_k}{\sum P_k}. \tag{1.43}$$

Повертаючи тіло на чверть оберта так, щоб сили ваги частинок тіла були паралельні іншій осі, одержимо аналогічні вирази для визначення двох інших координат центра ваги тіла

$$y_c = \frac{\sum P_k y_k}{\sum P_k}; \qquad z_c = \frac{\sum P_k z_k}{\sum P_k}. \tag{1.44}$$

Для визначення положення центра ваги тіла у векторній формі (за допомогою радіуса-вектора $\vec{r}_c$) маємо записати

$$\vec{r}_c = \frac{\sum P_k \vec{r}_k}{\sum P_k}. \tag{1.45}$$

Таким чином, ***центром ваги тіла*** *називається незмінно зв'язана з цим тілом точка, в якій прикладена рівнодійна сил ваги частинок даного тіла і координати якої визначаються формулами* (1.43), (1.44) *і* (1.45).

У випадку однорідних тіл вага P_k будь-якої *k*-ої частинки тіла пропорційна об'єму V_k цієї частинки, а вага всього тіла пропорційна об'єму V тіла:

$$P_k = \gamma V_k, \quad \text{а} \quad P = \gamma V.$$

Тут γ – вага одиниці об'єму.

Підставляючи ці значення P_k і $P = \sum P_k$ у формули для визначення координат центра ваги, ми бачимо, що спільний множник γ в чисельнику і в знаменнику виноситься за знак суми і скорочується. У результаті одержимо формули для визначення центра ваги тіла як центра ваги об'ємів

$$x_c = \frac{\sum V_k x_k}{\sum V_k}; \quad y_c = \frac{\sum V_k y_k}{\sum V_k}; \quad z_c = \frac{\sum V_k z_k}{\sum V_k}. \tag{1.46}$$

Шляхом аналогічних міркувань легко встановити залежність між вагою однорідної пластинки і її площею *S*

$$x_c = \frac{\sum S_k x_k}{\sum S_k}; \quad y_c = \frac{\sum S_k y_k}{\sum S_k}; \quad z_c = \frac{\sum S_k z_k}{\sum S_k}, \tag{1.47}$$

а також між вагою однорідного тонкого стержня (лінії) і його довжиною *L*:

$$x_c = \frac{\sum L_k x_k}{\sum L_k}; \quad y_c = \frac{\sum L_k y_k}{\sum L_k}; \quad z_c = \frac{\sum L_k z_k}{\sum L_k}. \tag{1.48}$$

Додатково слід вказати деякі способи визначення положення центра ваги, які застосовуються на практиці:

1) *Спосіб симетрії.* Якщо однорідне тіло має площину, вісь чи центр симетрії, то його центр ваги лежить відповідно на площині, на осі чи в центрі симетрії.

2) *Спосіб розбивання (поділу) на частини.* Якщо тіло можна поділити на скінченну кількість таких частин, положення центра ваги яких відоме, то координати центра ваги всього тіла можна безпосередньо визначити із формул (1.43) і (1.44). Якщо ж тіло має отвори (вирізи, порожнини), то в цих формулах вагу (об’єм, площу) отвору віднімаємо.

ГЛАВА 2. КІНЕМАТИКА

2.1. Предмет і задачі кінематики

Кінематика *– це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних об'єктів незалежно від сил, що спричинюють цей рух.* Матеріальними об'єктами, рух яких будемо вивчати в кінематиці, є матеріальна точка і абсолютно тверде тіло.

У кінематиці розглядаються дві основні задачі:

1) встановлення математичних залежностей (закону руху) для визначення переміщення точки або тіла відносно вибраної системи координат;

2) визначення кінематичних характеристик руху точки або тіла (траєкторії, швидкості та прискорення) у вибраній системі координат.

Рух точки вважається заданим, якщо вказано спосіб визначення її положення у просторі в кожний момент часу. Існує кілька способів визначення руху точки. У кожному випадку розв'язування технічної задачі ми вибираємо для себе найбільш зручну і просту систему відліку, яка найкоротшим шляхом приведе до вирішення нашої проблеми. Зараз ми докладно розглянемо три основні способи визначення руху точки – векторний, координатний і натуральний.

2.2. Кінематика точки. Векторний спосіб визначення руху точки

Векторний спосіб дуже зручний при теоретичних викладках, зокрема доведеннях теорем своєю наочністю, простотою і компактністю запису. Крім того, він є базовим для визначення кінематичних характеристик руху при застосуванні інших способів. Але векторний спосіб непридатний для безпосередніх розрахунків, і кожного разу потрібно переходити до координатного чи натурального способу визначення руху.

Нехай точка M рухається в просторі по деякій траєкторії (рис. 2.1). При цьому зауважимо, що траєкторією називається геометричне місце положень точки під час її руху. Положення нашої точки M в кожен момент часу можемо фіксувати відносно деякої нерухомої точки O відрізком OM, який безперервно змінює як свою довжину, так і напрям. Цей відрізок домовились називати *радіусом-вектором* точки M і позначати $\vec{r}$. Отже, радіус-вектор є функцією часу, а тому встановивши математично залежність

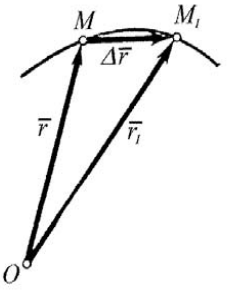


Рис. 2.1

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t), \tag{2.1}$$

ми визначимо закон руху точки у векторній формі.

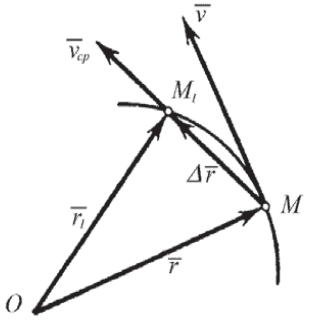


Рис. 2.2

Величиною, яка дозволяє кількісно оцінити пройдений точкою шлях за одиницю часу, є швидкість. Тобто швидкість – це фізична величина, що показує, в якому напрямі та на яку відстань перемістилась наша точка у просторі за одиницю часу. Швидкість має величину і напрям, а тому є вектором.

Якщо за час $\Delta t = t_2 - t_1$ радіус-вектор змінився на величину $\Delta\vec{r}$, то середньою швидкістю точки за час Δt буде векторна величина

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

Вектор $\vec{v}_{\text{ср}}$ направлений так само, як і вектор $\Delta\vec{r}$, тобто по хорді MM_1 (рис. 2.2). Зменшуючи проміжок часу Δt, можемо одержати значення миттєвої швидкості точки

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \qquad \text{або} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2.3}$$

Отже, при векторному способі визначення руху *швидкістю точки є похідна по часу від радіуса-вектора.*

При прямуванні $\Delta t \to 0$ напрям вектора миттєвої швидкості $\vec{v}$ буде збігатись з дотичною до траєкторії точки в даний момент часу.

Другою фізичною величиною, що характеризує рух точки, є прискорення, яке показує зміну швидкості точки з часом. Якщо при переміщенні з положення M в положення M_1 за час Δt швидкість точки змінилася на величину $\Delta \vec{v}$, то відношення приросту вектора швидкості $\Delta \vec{v}$ до проміжку часу Δt називається середнім прискоренням точки.

При прямуванні $\Delta t \to 0$ отримаємо миттєве прискорення точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{2.4}$$

Отже, *прискорення точки при векторному способі визначення руху дорівнює похідній по часу від вектора швидкості* або другій похідній від радіуса-вектора $\vec{r}$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{2.5}$$

Якщо траєкторія точки – пряма лінія, то вектор прискорення збігається з напрямом вектора швидкості при прискореному русі точки та протилежний йому при сповільненому русі. Коли ж траєкторія точки криволінійна, то вектор миттєвого прискорення $\vec{a}$ буде направлений у бік увігнутості траєкторії під деяким кутом до вектора швидкості $\vec{v}$.

2.3. Координатний спосіб визначення руху точки

Нехай точка O (рис. 2.3) є початком нерухомої системи координат з одиничнми сталими ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Тоді радіус-вектор точки M можемо виразити через його проекції x, y, z:

$$\vec{r}\,(t) = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \qquad (2.6)$$

Положення точки в кожен момент часу буде визначеним, якщо будуть відомі координати точки

$$x = x\,(t); \qquad y = y\,(t); \qquad z = z\,(t). \qquad (2.7)$$

Функції (2.7) називаються рівняннями руху або *законом руху точки в координатній формі.*

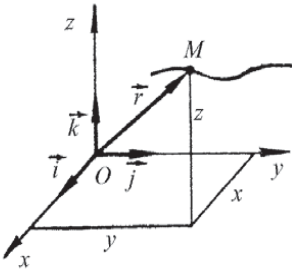


Рис. 2.3

Швидкість точки при координатному способі визначимо через компоненти радіуса-вектора точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z), \qquad (2.8)$$

або

$$\vec{v} = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt}. \qquad (2.9)$$

Похідні $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, $v_y = \dfrac{dy}{dt}$, $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ являють собою проекції вектора швидкості $\vec{v}$ на координатні осі.

Рівність (2.9) можемо переписати таким чином

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z, \qquad (2.10)$$

а модуль швидкості визначити з формули

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (2.11)$$

Напрям вектора швидкості визначається за напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{v},\vec{i}) = \frac{v_x}{|\vec{v}|}; \quad \cos(\vec{v},\vec{j}) = \frac{v_y}{|\vec{v}|}; \quad \cos(\vec{v},\vec{k}) = \frac{v_z}{|\vec{v}|}. \tag{2.12}$$

Прискорення точки знаходимо аналогічно формулам (2.8)–(2.10):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\,\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}\,\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}\,\frac{dv_z}{dt},$$

або

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z. \tag{2.13}$$

Тут $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{v_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $a_z = \frac{v_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$ – проекції вектора прискорення $\vec{a}$ на координатні осі.

Модуль прискорення знаходимо, як і модуль швидкості, з формули

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2.14}$$

Напрям вектора прискорення $\vec{a}$ також визначається за напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{a},\vec{i}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\vec{a},\vec{j}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\vec{a},\vec{k}) = \frac{a_z}{a}. \tag{2.15}$$

Крім декартової системи координат, для визначення руху точки по колу в площині *Oxy* застосовуються полярні координати, а для визначення руху в тривимірному просторі – циліндричні та сферичні координати.

У полярних координатах потрібно визначити полярний радіус ρ і полярний кут φ як функції часу

$$\rho = \rho(t); \qquad \varphi = \varphi(t). \tag{2.16}$$

У циліндричних координатах до цих двох параметрів додається третя координата по осі *Oz*. Законом руху будуть такі рівняння

$$\rho = \rho(t); \qquad \varphi = \varphi(t); \qquad z = z(t). \tag{2.17}$$

Перехід від декартових осей до полярних і циліндричних нескладний:

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{2.18}$$

При визначенні закону руху в сферичних координатах записуються як функції часу полярний радіус і два кути:

$$r = r(t); \qquad \varphi = \varphi(t); \qquad \theta = \theta(t). \tag{2.19}$$

2.4. Натуральний спосіб визначення руху точки

Натуральний спосіб розробив і широко використовував у своїх дослідженнях Леонард Ейлер (1707–1783). Він відрізняється не тільки простотою, але й достатньою наочністю, а тому застосовується як при теоретичних дослідженнях криволінійного руху, так і при практичних розрахунках. Обов'язковою умовою для застосування натурального способу є наперед відома траєкторія. Найчастіше це є коло радіуса R.

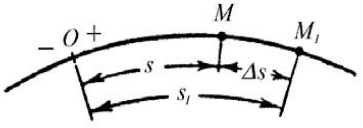


Рис. 2.4

Для визначення положення точки M на дузі траєкторії потрібно вибрати початок відліку O та додатній і від'ємний напрями відліку дугової координати s (рис. 2.4). Тоді положення точки на траєкторії можемо визначити змінною з часом дуговою координатою

$$s = s(t). \tag{2.20}$$

Рівняння (2.20) є *законом руху точки при натуральному способі визначення руху.*

Швидкість руху точки визначається як похідна по часу від радіуса-вектора

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{або} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{2.21}$$

Формула (2.21) містить визначення як модуля, так і напряму швидкості точки. Для визначення напряму вектора швидкості розглянемо рис. 2.5, із якого видно, що при прямуванні $\Delta t \to 0$ модулі величин $\Delta\vec{r}$ і Δs стають майже рівними, тобто

$$\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=1,$$

як границя відношення довжини нескінченно малої хорди до довжини стягнутої нею дуги.

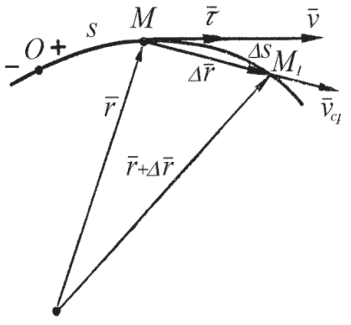


Рис. 2.5

Напрям одиничного вектора $\frac{d\vec{r}}{ds}$ збігається з напрямом дотичної до траєкторії

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{\tau}.$$

Отже, вектор $\vec{\tau}$ є одиничним вектором (ортом), дотичним до траєкторії точки. Повертаючись до виразу (2.21), можемо записати

$$\vec{v}=\vec{\tau}\,\frac{ds}{dt}. \qquad (2.22)$$

Таким чином, *при натуральному способі визначення руху швидкість точки за модулем дорівнює похідній по часу від дугової координати*

$$v=\frac{ds}{dt},$$

а за напрямом збігається з дотичною до дуги траєкторії.

Перейдемо до визначення прискорення точки як похідної від швидкості (2.22):

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\tau}\frac{ds}{dt}).$$

Диференціюючи, маємо:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{ds}{dt}+\vec{\tau}\,\frac{d^2s}{dt^2}. \qquad (2.23)$$

Другий доданок у формулі (2.23) за модулем дорівнює другій похідній по часу від дугової координати $s(t)$ і збігається з напрямом вектора швидкості $\vec{v}$ у випадку прискореного руху точки та протилежний йому при сповільненому русі.

Вираз $d\vec{\tau} / dt$ у першому доданку формули (2.23) перетворимо таким чином:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{2.24}$$

Оскільки одиничний орт $\vec{\tau}$ являє собою вектор зі сталим модулем, то його похідна по скалярному аргументу s являє собою векторну величину, перпендикулярну до $\vec{\tau}$ і направлену до центру кривизни траєкторії (тобто направлена по нормалі $\vec{n}$ до дотичної $\vec{\tau}$). За модулем величина $\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|$ обернена до радіуса кривизни траєкторії ρ:

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}.$$

У результаті замість виразу (2.24) для похідної $d\vec{\tau} / dt$ маємо такий вираз:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{n}\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}. \tag{2.25}$$

Підставляючи (2.25) у формулу (2.23), а також враховуючи, що $\frac{ds}{dt} = v$, а $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, запишемо формулу для визначення прискорення точки:

$$\vec{a} = \vec{n}\frac{v^2}{\rho} + \vec{\tau}\frac{dv}{dt}. \tag{2.26}$$

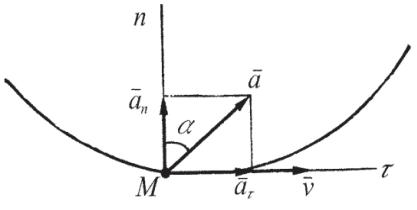


Рис. 2.6

Із формули (2.26) видно, що прискорення точки при натуральному способі визначення руху складається із суми двох взаємно перпендикулярних прискорень: прискорення, направленого по дотичній $\vec{\tau}$ до траєкторії, яке називається дотичним (або тангенціальним) і за модулем дорівнює $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, та прискорення $a_n = v^2 / \rho$, яке називається

нормальним прискоренням і направлене до центру кривизни траєкторії перпендикулярно до дотичного прискорення (рис. 2.6).

Дві складові повного прискорення точки мають не лише абстрактний, але й реальний *фізичний зміст*: тангенціальне прискорення характеризує зміну модуля швидкості з часом, а нормальне прискорення характеризує зміну напряму вектора швидкості.

Якщо точка рухається по прямій, то радіус кривизни $\rho = \infty$ і нормальне прискорення дорівнює нулю. Тобто маємо запам'ятати, що нормальне прискорення виникає лише при криволінійному русі (коли вектор швидкості змінює свій напрям), а тангенціальне прискорення виникає при нерівномірному русі (коли змінюється модуль швидкості).

Формулу (2.26) часто записують у вигляді векторної суми двох прискорень

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \tag{2.27}$$

Тут мається на увазі, що $\vec{a}_n = \vec{n}\dfrac{v^2}{\rho}$; $\vec{a}_\tau = \vec{\tau}\dfrac{dv}{dt}$.

Отже, будемо пам'ятати, що *при натуральному способі визначення руху прискорення точки дорівнює векторній сумі тангенціального і нормального прискорень*.

Оскільки вектори тангенціального і нормального прискорень взаємно перпендикулярні, то модуль повного прискорення точки знаходиться за теоремою Піфагора

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \tag{2.28}$$

Напрям вектора повного прискорення $\vec{a}$ знайдемо через тангенс кута α між вектором повного прискорення $\vec{a}$ і вектором нормального прискорення $\vec{a}_n$ (рис. 2.6):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\vec{a}_\tau|}{|\vec{a}_n|}. \tag{2.29}$$

Порівнюючи координатний і натуральний способи визначення руху точки, які найчастіше застосовуються при розв'язуванні задач механіки, доходимо

висновку, що натуральний спосіб визначення руху точки, розроблений Леонардом Ейлером, менш громіздкий, більш наочний і найбільш повно ілюструє природу руху, а тому його часто називають «природним» способом.

Зв'язок між координатним і натуральним способами визначення руху точки. Якщо рух точки заданий координатним способом (задані координати $x,\ y, z$ як функції часу), а потрібно визначити пройдену точкою відстань, радіус кривизни траєкторії або дотичне чи нормальне прискорення точки, то потрібно мати формули переходу від однієї системи до іншої.

При координатному способі модуль швидкості точки визначається з формули

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \tag{2.30}$$

а при натуральному способі – з формули

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Отже, можемо записати:

$$ds = v\,dt,$$

звідки знайдемо переміщення точки за деякий проміжок часу

$$s = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ dt.$$

Модуль дотичного прискорення дорівнює похідній по часу від модуля швидкості, а тому диференціюючи (2.30), одержимо:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt} + 2v_z^2\frac{dv_z}{dt}\right)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \tag{2.31}$$

або

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v}. \tag{2.32}$$

Ця формула є основною формулою зв'язку між координатним і натуральним способами визначення руху точки.

Модуль нормального прискорення можемо виразити так:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \qquad \text{або} \qquad a_n = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) - a_\tau^2}\,. \tag{2.33}$$

Тут

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{2.34}$$

Для визначення радіуса кривизни траєкторії ρ матимемо формулу

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}}. \tag{2.35}$$

З наведених формул ми бачимо, що перехід від координатного способу визначення руху до натурального не є складним.

Осі натурального тригранника. При натуральному способі визначення руху вектор повного прискорення точки має дві складові – дотичну і нормальну. Одиничний вектор дотичної $\vec{\tau}$ і перпендикулярний до нього одиничний вектор головної нормалі $\vec{n}$ рухаються разом з точкою по траєкторії і є ортами рухомої системи координат, утворюючи так звану стичну площину. У цій площині лежить відрізок криволінійної траєкторії точки.

Побудуємо перпендикулярний до стичної площини одиничний вектор $\vec{b}$, який називається бінормаллю і дорівнює векторному добутку одиничних векторів (ортів) $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$:

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}.$$

Бінормаль $\vec{b}$ є ортом третьої осі рухомої правої прямокутної системи координат $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$, яку називають *натуральним тригранником.*

Грань, що утворюється нормаллю $\vec{n}$ і бінормаллю $\vec{b}$, називається нормальною площиною, а грань, що утворена дотичною $\vec{\tau}$ та бінормаллю $\vec{b}$ – спрямляючою площиною (рис. 2.7).

Вектор $\vec{a}$ повного прискорення точки лежить у стичній площині, а тому його проекція на бінормаль дорівнює нулю:

$$a_b = 0.$$

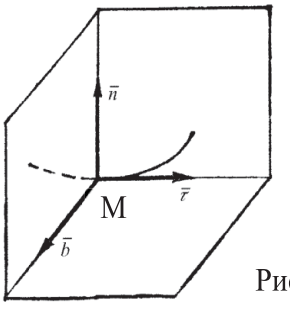


Рис. 2.7

2.5. Рівнозмінний та рівномірний рух точки

Якщо модуль швидкості точки, що рухається по довільній траєкторії, змінюється рівномірно з часом, то ми говоримо про рівнозмінний рух

$$\frac{dv}{dt} = a_\tau = const. \tag{2.36}$$

Перепишемо рівність (2.36) у вигляді

$$dv = a_\tau\, dt$$

і проінтегруємо цей вираз:

$$v = a_\tau t + C_1. \tag{2.37}$$

Далі, представивши $v = ds/dt$ і записавши рівність (2.37) у вигляді

$$ds = (a_\tau t + C_1)\, dt, \tag{2.38}$$

ще раз проінтегруємо і одержимо

$$s = a_\tau \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{2.39}$$

Тут C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначаються із початкових умов руху точки і являють собою початкову швидкість ($C_1 = v_0$) і початкову координату ($C_2 = s_0$).

Таким чином, ми маємо формули, що визначають залежність швидкості точки і пройденого нею шляху від часу при рівнозмінному русі:

$$v = v_0 + a_\tau t; \qquad s = s_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}. \tag{2.40}$$

Слід пам'ятати, що *цими формулами можна користуватися лише у випадку рівнозмінного руху точки*.

Якщо точка рухається *рівномірно,* тобто $a_\tau = 0$ і $v = const$, то значення дугової координати (шляху, пройденого точкою по траєкторії) визначається з формули

$$s = s_0 + vt, \tag{2.41}$$

тобто пройдений точкою шлях пропорційний швидкості руху.

2.6. Кінематика твердого тіла. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним рухом *тіла називається такий рух, при якому довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно самій собі.*

Прикладом такого руху може служити рух кабінок у вертикальній каруселі: незважаючи на те, що траєкторіями окремих точок кабінки є коло, кабінка рухається поступально, і дно кожної кабінки залишається горизонтальним.

При поступальному русі всі точки тіла описують однакові траєкторії. Щоб переконатися у цьому, проведемо в тілі пряму AB (рис. 2.8). Положення точок A і B відносно деякого центра O визначимо радіусами-векторами $\vec{r}_A$ і $\vec{r}_B$. Відрізок

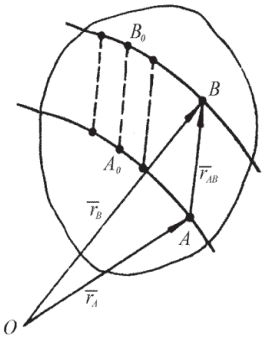


Рис. 2.8

$\overrightarrow{AB} = const$ згідно з припущенням про поступальний рух твердого тіла. Між $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ і $\overrightarrow{AB}$ існує залежність

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}. \tag{2.42}$$

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, то для будь-якого моменту часу траєкторію точки B можна визначити з траєкторії точки A простим зміщенням на сталий вектор $\overrightarrow{AB}$ (і навпаки).

Отже, траєкторії точок тіла при поступальному русі однакові. Якщо ж однакові траєкторії точок тіла, то напрошується висновок, що і швидкості та прискорення всіх точок тіла, що рухається поступально, також однакові.

У цьому неважко переконатися, визначивши похідну по часу від радіусів-векторів $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ і $\overrightarrow{AB}$ у виразі (2.42):

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\vec{AB})}{dt}. \tag{2.43}$$

Оскільки вектор $\overrightarrow{AB} = const$, то $\frac{d(\vec{AB})}{dt} = 0$. Отже,

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}, \quad \text{або} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A. \tag{2.44}$$

Взявши другу похідну від виразу (2.44), переконаємось у рівності прискорень всіх точок тіла, яке здійснює поступальний рух:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A. \tag{2.45}$$

Таким чином, при поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії і рухаються з однаковими швидкостями і прискореннями. Цей висновок у літературі відомий як теорема про траєкторії, швидкості та прискорення точок тіла при поступальному русі і дає можливість описувати рух тіла за рухом однієї його точки. Тому всі закономірності, одержані нами у розділі «кінематика точки», справедливі для вивчення поступального руху тіла (Калетник та ін., 2011).

2.7. Обертання тіла навколо нерухомої осі

Обертальним рухом *тіла навколо нерухомої осі називається рух, при якому принаймні дві його точки лишаються нерухомими.* Пряма, проведена через ці точки, називається *віссю обертання*. Всі інші точки тіла, що не лежать на осі обертання, описують концентричні кола в площині, перпендикулярній до осі.

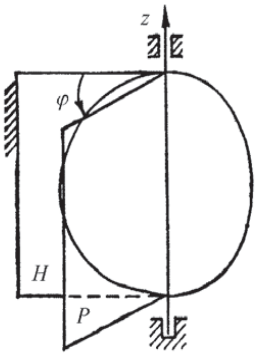


Рис. 2.9

Поворот твердого тіла навколо осі можна визначити єдиним способом – вимірявши двогранний кут φ, який утворюють нерухома півплощина H із незмінно зв'язаною з тілом рухомою півплощиною P (рис. 2.9). Цей кут змінюється з часом

$$\varphi = \varphi(t), \tag{2.46}$$

і визначає *закон обертального руху* тіла навколо нерухомої осі. Кут φ вимірюється у радіанах або в обертах (один повний оберт становить 2π радіан).

Основними кінематичними характеристиками обертального руху тіла є його кутова швидкість ω (омега) і кутове прискорення ε (епсілон). Кутова швидкість ω визначає зміну кута φ з часом. Тобто якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t_0$ тіло здійснює поворот на кут $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$, то середня кутова швидкість дорівнює

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{2.47}$$

При $\Delta t \to 0$ знаходимо миттєву кутову швидкість тіла

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \qquad \text{або} \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{2.48}$$

Таким чином, *кутова швидкість обертання тіла навколо нерухомої осі дорівнює першій похідній по часу від кута повороту*. Кутова швидкість ω вимірюється в радіанах за секунду (рад/сек) або в обертах за хвилину (об/хв). Зв'язок між цими двома одиницями вимірювання здійснюється за формулою переходу від n об/хв до ω рад/сек:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}\,[\text{рад}/\text{сек}]. \tag{2.49}$$

За додатній напрям обертання тіла навколо осі приймається обертання проти годинникової стрілки. Отже, додатнім значенням кутової швидкості буде

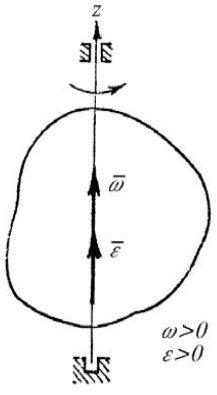


Рис. 2.10

обертання проти годинникової стрілки, якщо дивитись на тіло з боку додатного напряму осі *z*.

Оскільки кутова швидкість має величину (модуль) і напрям, то вона є векторною величиною. *Вектор кутової швидкості* $\vec{\omega}$ *направлений вздовж осі обертання у той бік, звідки це обертання відбувається проти годинникової стрілки* (рис. 2.10).

Зміну величини кутової швидкості з часом характеризує кутове прискорення ε, яке знаходимо аналогічно кутовій швидкості:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \qquad \text{або} \qquad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{2.50}$$

Таким чином, *кутове прискорення тіла при обертанні навколо осі дорівнює першій похідній по часу від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла.*

За одиницю вимірювання кутового прискорення приймають радіан за секунду в квадраті (рад/сек^2). *Вектор кутового прискорення* $\vec{\varepsilon}$ *направлений вздовж осі обертання і збігається з напрямом вектора кутової швидкості* $\vec{\omega}$ *при прискореному обертанні або протилежний* $\vec{\omega}$*, якщо обертання тіла сповільнене* (рис. 2.10).

2.8. Рівномірне і рівнозмінне обертання тіла навколо осі

При рівномірнму обертанні тіла навколо осі кутова швидкість є сталою величиною $\omega = d\varphi / dt = const$. Переписавши цей вираз у вигляді $d\varphi = \omega\, dt$ і проінтегрувавши його, одержимо

$$\varphi = \omega t + C \qquad \text{або} \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{2.51}$$

Тут C – стала інтегрування, яка дорівнює початковому куту повороту тіла φ_0.

Якщо обертання тіла навколо осі рівнозмінне, тобто якщо кутова швидкість обертання наростає або зменшується однаково за однакові проміжки часу, то можемо записати

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = const. \tag{2.52}$$

Розділивши змінні у цьому рівнянні і проінтегрувавши його

$$\int d\omega = \varepsilon \int dt, \tag{2.53}$$

одержимо:

$$\omega = \varepsilon t + C_1 \quad \text{або} \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{2.54}$$

Тут $C_1 = \omega_0$ – початкова кутова швидкість.

Оскільки $\omega = d\varphi / dt$, то можемо записати

$$d\varphi = (\varepsilon t + \omega_0)\, dt, \tag{2.55}$$

Інтегруючи, одержимо

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + \omega_0 t + C_2. \tag{2.56}$$

Тут $C_2 = \varphi_0$ – початковий кут повороту тіла.

Таким чином, у випадку рівнозмінного обертання тіла для визначення кутової швидкості і кута повороту маємо формули:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{2.57}$$

Ці формули аналогічні формулам (2.40), які визначають параметри рівнозмінного руху точки.

2.9. Швидкість точок тіла, що обертається навколо осі. Формула Ейлера

Всі точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, описують навколо цієї осі концентричні кола відповідного радіуса. Розглянемо визначення

кінематичних характеристик руху точок тіла (швидкість і прискорення) через характеристики обертального руху (кутову швидкість і кутове прискорення).

При повороті тіла на деякий кут будь-яка точка цього тіла, що знаходиться на відстані R від осі, описує дугу, довжина якої визначається з формули

$$s = \varphi R, \tag{2.58}$$

де φ – кут повороту тіла в радіанах (пригадаймо, що довжина дуги кола дорівнює $2\pi R$).

Згідно з натуральним способом визначення руху точки, модуль її швидкості знаходиться як перша похідна по часу від дугової координати

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\varphi R) = \frac{d\varphi}{dt} R \tag{2.59}$$

або

$$v = \omega R. \tag{2.60}$$

Отже, *швидкість будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку кутової швидкості ω на радіус R*. Формула (2.60) називається ***формулою Ейлера*** для визначення швидкості будь-якої точки тіла при його обертанні.

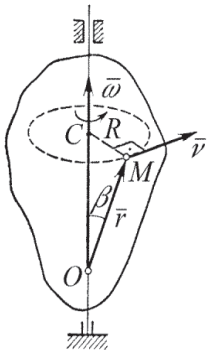


Рис. 2.11

Цю формулу можна представити у векторній формі як векторний добуток двох векторів: вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ і радіус-вектора $\vec{r}$ точки.

Нехай рух точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі (рис. 2.11), визначається радіусом-вектором точки $\vec{r}$. Із прямокутного трикутника OCM радіус обертання R знайдемо як катет, що лежить навпроти кута β, який утворюють вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ і радіус-вектор $\vec{r}$

$$R = |\vec{r}| \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = |\vec{r}| \sin\beta. \tag{2.61}$$

Підставивши значення R у формулу (2.60), для швидкості точки M матимемо вираз:

$$v = \omega r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}). \tag{2.62}$$

Але вираз (2.62) являє собою запис модуля векторного добутку двох векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}||\vec{r}| \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) \tag{2.63}$$

Таким чином, ми переконалися у тому, що для визначення швидкості точки M можемо користуватися виразом

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{2.64}$$

який називають ***формулою Ейлера у векторній формі***.

Напрям вектора швидкості $\vec{v}$ визначається за правилом векторного добутку двох векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$, згідно з яким вектор $\vec{v}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать ці вектори і направлений у той бік, звідки поворот від першого вектора $\vec{\omega}$ до вектора $\vec{r}$ здійснюється проти годинникової стрілки.

Із цього правила виходить, що *вектор швидкості будь-якої точки тіла, що обертається навколо осі, направлений по дотичній до кола, яке описує точка, в бік обертання тіла.*

Зображуючи вектор швидкості на рисунку, потрібно пам'ятати, що *дотичний до кола вектор швидкості* $\vec{v}$ *є перпендикулярний до радіуса кола R* (рис. 2.11).

2.10. Прискорення точок тіла, що обертається

Прискорення точки M тіла, що обертається навколо осі, визначимо як похідну по часу від виразу вектора лінійної швидкості точки $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2.65}$$

Виходячи з того, що $d\vec{\omega} / dt = \vec{\varepsilon}$, а $d\vec{r} / dt = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, для прискорення точки одержимо формулу

$$\vec{a} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad \text{або} \quad \vec{a} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{2.66}$$

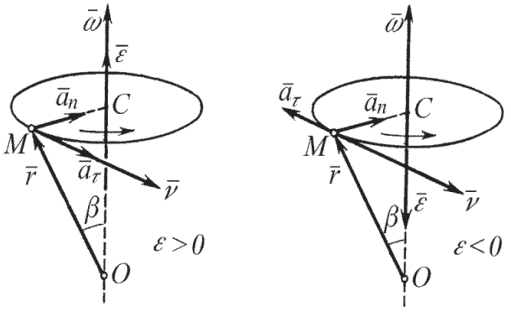


Рис. 2.12

Отже, прискорення точки M тіла, що обертається навколо осі, складається із двох векторних доданків. Згідно з правилом векторного множення, вектор добутку $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ перпендикулярний до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{r}$ (рис. 2.12) і направлений по дотичній до траєкторії точки M, а вектор добутку $\vec{\omega}\times\vec{v}$ перпендикулярний до площини векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{v}$ і направлений від точки M до центру кола C (до осі обертання), тому що саме з боку осі поворот від вектора $\vec{\omega}$ до вектора $\vec{v}$ відбувається проти годинникової стрілки найкоротшим шляхом.

Таким чином, *прискорення будь-якої точки тіла при його обертанні навколо нерухомої осі дорівнює векторній сумі нормального і тангенціального прискорень*:

$$\vec{a}=\vec{a}_n+\vec{a}_\tau, \tag{2.67}$$

причому

$$\vec{a}_\tau=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}; \qquad \vec{a}_n=\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}. \tag{2.68}$$

Модуль дотичного прискорення точки $|\vec{a}_\tau|$ визначається через кутове прискорення тіла і радіус R:

$$|\vec{a}_\tau|=|\vec{\varepsilon}||\vec{r}|\sin\beta \quad \text{або} \quad a_\tau=\varepsilon R. \tag{2.69}$$

Модуль нормального прискорення точки $|\vec{a}_n|$ визначається через квадрат кутової швидкості обертання тіла і радіус R:

$$|\vec{a}_n|=|\vec{\omega}||\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\beta \quad \text{або} \quad a_n=\omega^2 R. \tag{2.70}$$

Наведені вище формули показують, що для визначення прискорення точки тіла, що обертається навколо осі, повністю придатні формули, одержані нами при натуральному способі визначення руху окремої точки. І ці формули ми отримали

б набагато простіше, підставивши вираз лінійної швидкості точки (формула Ейлера) $v = \omega R$ у формулу нормального прискорення точки

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R \tag{2.71}$$

та у формулу дотичного прискорення

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R. \tag{2.72}$$

Модуль повного прискорення точки M тіла при обертанні навколо нерухомої осі знаходиться за теоремою Піфагора $a = \sqrt{a_n^{\,2} + a_\tau^{\,2}}$ і визначається через кутову швидкість і кутове прискорення тіла

$$a = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\varepsilon R)^2} \quad \text{або} \quad a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \tag{2.73}$$

Напрям вектора повного прискорення $\vec{a}$ визначається аналогічно тому, як це робили у випадку визначення напряму прискорення точки при натуральному способі визначення її руху, тобто через тангенс кута α між векторами повного і нормального прискорень (рис. 2.13):

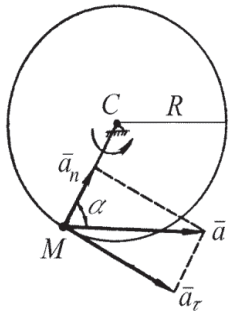


Рис. 2.13

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R}$$

або

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{2.74}$$

2.11. Плоско-паралельний рух твердого тіла

Плоско-паралельним *(або плоским) називається такий рух твердого тіла, при якому всі його точки рухаються паралельно деякій нерухомій площині.* Вивчення цього руху має велике практичне значення, оскільки плоско-паралельний рух здійснюють багатоланкові механізми більшості машин, які працюють в промисловості, зокрема в харчовій та переробній.

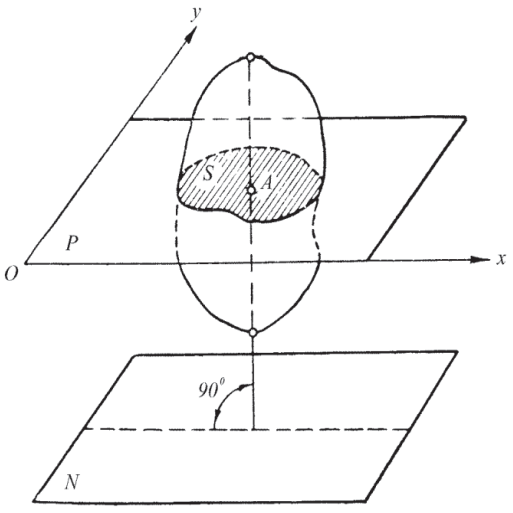


Рис. 2.14

Нехай тверде тіло рухається паралельно деякій нерухомій площині N (рис. 2.14). Спробуємо дещо спростити задачу вивчення такого руху. Для цього перетнемо тіло площиною P, паралельною нерухомій площині N. У результаті перетину одержимо *плоску фігуру* S. Виберемо на цій плоскій фігурі деяку довільну точку A. Неважко переконатися, що всі точки тіла, що лежать вище чи нижче точки A, рухаються відносно площини N так само, як і ця точка. Отже немає сенсу вивчати рух всього тіла відносно нерухомої площини N, а достатньо розглянути рух плоскої фігури S у площині P. Виберемо в цій площині осі Oxy і визначимо закон руху плоскої фігури S у цих осях (рис. 2.15). Якби плоска фігура рухалась тільки поступально, то для визначення її руху достатньо було б визначити рух однієї точки (полюса), наприклад, точки A, тобто потрібно було б записати математично закон зміни координат x і y точки A з часом: $x_A = x(t)$; $y_A = y(t)$.

Однак плоска фігура може ще й обертатись у своїй площині. Для визначення обертального руху необхідно мати закон зміни кута повороту φ з часом. Цей кут домовимось вимірювати між віссю абсцис Ox і довільною прямою AB: $\varphi = \varphi(t)$.

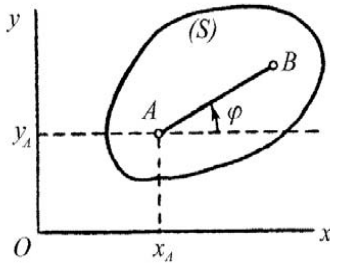


Рис. 2.15

Таким чином, плоско-паралельний рух тіла звівся до розгляду суми двох простіших рухів: поступального руху плоскої фігури разом з полюсом A і обертального руху навколо полюса. Полюсом може бути будь-яка точка плоскої фігури, рух якої відомий або легко може бути визначеним. Характеристики обертального руху фігури (кут повороту, кутова швидкість, кутове прискорення) не залежать від вибору полюса.

Рівняння, що визначають зміну координат полюса і кута повороту з часом

$$x_A = x(t); \qquad y_A = y(t); \qquad \varphi = \varphi(t) \tag{2.75}$$

є *законом плоско-паралельного руху твердого тіла*.

2.12. Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Перейдемо до визначення швидкостей точок плоскої фігури. Для цього існує три способи:

- спосіб полюса;
- спосіб рівності проекцій швидкостей;
- спосіб МЦШ.

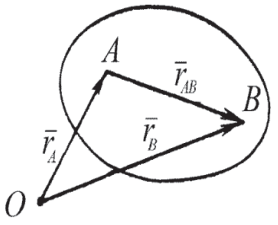


Рис. 2.16

СПОСІБ ПОЛЮСА. Для визначення швидкостей точок плоскої фігури способом полюса звернемося до векторного запису руху будь-якої точки B плоскої фігури (рис. 2.16):

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \tag{2.76}$$

Продиференціювавши цей вираз по часу, одержимо

$$\frac{\vec{r}_B}{dt} = \frac{\vec{r}_A}{dt} + \frac{\vec{r}_{AB}}{dt}, \tag{2.77}$$

або

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B_A}. \tag{2.78}$$

Таким чином, *швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкості поступального руху разом з полюсом і швидкості даної точки при обертанні плоскої фігури навколо полюса.*

Згідно з формулою Ейлера, модуль швидкості точки B при обертанні плоскої фігури навколо полюса A знаходиться із виразу

$$v_{B_A} = \omega\, AB, \tag{2.79}$$

а за напрямом вектор $\vec{v}_{B_A}$ перпендикулярний до радіуса AB і направлений у бік обертання плоскої фігури.

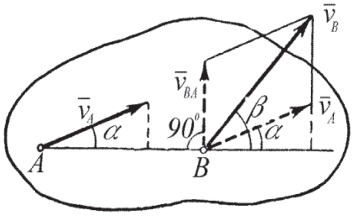


Рис. 2.17

СПОСІБ РІВНОСТІ ПРОЕКЦІЙ ШВИДКОСТЕЙ. Спосіб полюса оперує векторними величинами і незручний для практичних розрахунків, а тому його краще застосовувати у вигляді проекції векторної рівності (2.78) на напрям відрізка AB (рис. 2.17). Проекції векторів $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ на напрям відрізка AB відповідно дорівнюють $\text{пр.}(\vec{v}_A)_{AB} = v_A \cos\alpha$, $\text{пр.}(\vec{v}_B)_{AB} = v_B \cos\beta$, а проекція вектора $\vec{v}_{B_A}$, перпендикулярного до відрізка AB, дорівнює нулю.

Формула (2.78) після проектування швидкостей на напрям відрізка AB має вигляд

$$\text{пр.}(\vec{v}_A)_{AB} = \text{пр.}(\vec{v}_B)_{AB}, \quad \text{або} \quad v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta. \tag{2.80}$$

Таким чином, ми одержали другий спосіб визначення швидкостей точок плоскої фігури – спосіб рівності проекцій швидкостей, який формулюється так: *проекції швидкостей будь-яких двох точок плоскої фігури на напрям відрізка, що з'єднує ці точки, рівні між собою*.

СПОСІБ МЦШ. Найбільш поширеним у практиці способом визначення швидкостей точок плоскої фіруги є *спосіб миттєвого центра швидкостей* (МЦШ). Суть його полягає в тому, що за полюс обираємо точку P площини, швидкість якої в даний момент дорівнює нулю ($v_P = 0$). Проблема лише в тому, щоб знайти цю точку.

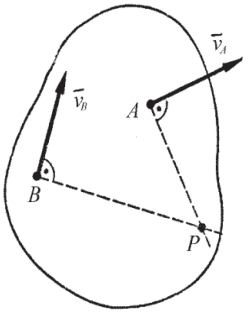


Рис. 2.18

У розділі про обертальний рух тіла навколо нерухомої осі ми встановили, що *вектори швидкостей точок тіла перпендикулярні до їх радіуса обертання.* Отже, щоб знайти точку, навколо якої плоска фігура обертається в дану мить (миттєвий центр обертань або МЦШ), потрібно знати напрями швидкостей хоча б двох її точок, наприклад, точок A і B (рис. 2.18). Провівши з цих точок перпендикуляри до векторів швидкостей $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$, одержимо точку P їх перетину, яка й буде миттєвим центром обертань.

Згідно з формулою Ейлера, швидкості точок A і B при миттєвому обертанні плоскої фігури навколо МЦШ (навколо точки P) будуть такі:

$$v_A = \omega AP; \quad v_B = \omega BP, \tag{2.81}$$

де AP і BP – відстані точок A і B до МЦШ; ω – миттєва кутова швидкість обертання плоскої фігури навколо МЦШ, яка дорівнює

$$\omega = \frac{v_A}{AB} = \frac{v_B}{BP}.$$

Відношення швидкостей v_A і v_B дасть нам цікаву залежність, яка називається *теоремою про МЦШ*

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP} \tag{2.82}$$

і формулюється так: *відношення швидкостей будь-яких двох точок плоскої фігури дорівнює відношенню відстаней цих точок до МЦШ.*

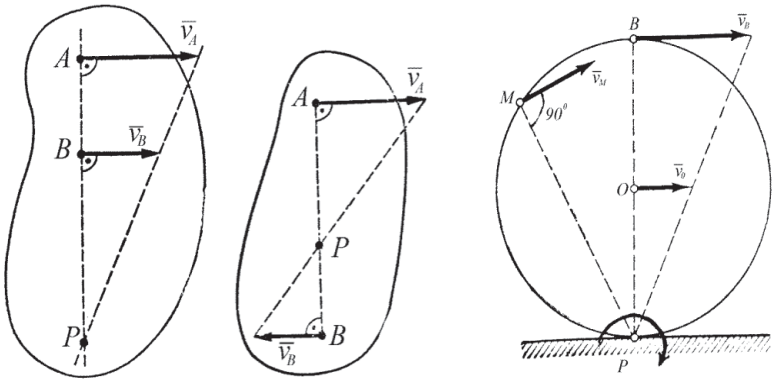
Якщо потрібно визначити швидкість якоїсь іншої точки плоскої фігури (наприклад, точки *C*) при відомому положенні МЦШ, то з'єднуємо цю точку з МЦШ прямою *CP*. Далі проводимо перпендикулярний до цієї прямої вектор $\vec{v}_C$, напрям якого визначається за відомими нам напрямами швидкостей точок *A* і *B* при їх русі навколо МЦШ. Модуль швидкості точки *C* визначимо із теореми про МЦШ:

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{CP}{AP}, \quad \text{звідки} \quad v_C = v_A \frac{CP}{AP}.$$

Випадки визначення положення МЦШ.

При визначенні МЦШ плоскої фігури можуть трапитися кілька випадків, коли положення МЦШ не може бути визначене шляхом побудови перпендикулярів до векторів швидкостей двох точок. Розглянемо ці випадки:

1) Якщо швидкості $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ двох точок *A* і *B* плоскої фігури паралельні між собою, направлені в один бік і перпендикулярні до відрізка *AB* (рис. 2.19,*а*), але нерівні (модуль v_A більший за v_B або навпаки), то МЦШ знаходимо на перетині перпендикуляра до швидкостей точок і прямої, що з'єднує кінці векторів $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$.
2) Якщо швидкості двох точок *A* і *B* паралельні, перпендикулярні до відрізка *AB*, що їх з'єднує, але направлені в різні боки (рис. 2.19,*б*), то МЦШ знаходимо на перетині *AB* з прямою, що з'єднує кінці векторів $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$.
3) Якщо плоска фігура, наприклад, колесо, рухається так, що його контур котиться без проковзування по деякій нерухомій площині (рис. 2.19,*в*), то точка дотику колеса до площини в даний момент має нульову швидкість. Отже, точка *P* дотику контура плоскої фігури до нерухомої площини є миттєвим центром швидкостей. Швидкості всіх інших точок колеса (напр., точки *M*) перпендикулярні до прямої, що з'єднує дану точку з точкою *P*.

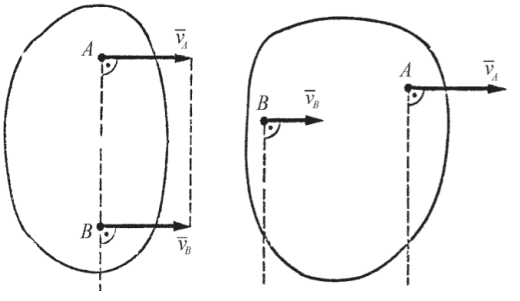


а *б* *в*

Рис. 2.19

Випадки відсутності МЦШ.

Рухаючись плоско-паралельно, тіло іноді здійснює миттєвий поступальний рух. Тобто в дану мить МЦШ знаходиться на нескінченно великій відстані. У цей момент кутова швидкість ω плоскої фігури дорівнює нулю і обертання фігури відсутнє. Розглянемо такі випадки:



а *б*

Рис. 2.20

1) Якщо швидкості $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ точок A і B паралельні, направлені в один бік, перпендикулярні до відрізка AB і рівні за модулем (модуль v_A дорівнює модулю v_B), то провівши пряму, яка з'єднує кінці векторів $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$, переконаємося, що вона ніколи не перетнеться з прямою AB (рис. 2.20,*а*).

2) Якщо швидкості $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ точок A і B паралельні, але пряма AB не перпендикулярна до векторів швидкостей (рис. 2.20,*б*), то побудувавши в точках A і B перпендикуляри до векторів швидкостей, переконаємося, що ці перпендикуляри не перетинаються. Отже, тіло здійснює миттєвий поступальний рух, і швидкості всіх його точок рівні ($v_A = v_B$), а миттєва кутова швидкість $\omega = 0$.

2.13. Прискорення точок плоскої фігури

Для визначення прискорень точок плоскої фігури існує два способи:

- спосіб полюса;
- спосіб МЦП.

СПОСІБ ПОЛЮСА аналогічний до такого ж способу при визначенні швидкостей точок плоскої фігури і полягає в тому, що *прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення полюса і прискорення даної точки при обертанні плоскої фігури навколо полюса*

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B_A}. \tag{2.83}$$

Нагадаємо, що за полюс A вибираємо будь-яку точку плоскої фігури, прискорення якої відоме або легко визначається.

Оскільки траєкторією руху точки B при обертанні плоскої фігури навколо полюса A є коло радіуса AB, то прискорення $\vec{a}_{B_A}$ складається із векторної суми двох взаємно перпендикулярних прискорень – нормального і тангенціального

$$\vec{a}_{B_A} = \vec{a}^{\,n}_{B_A} + \vec{a}^{\,\tau}_{B_A}. \tag{2.84}$$

Таким чином, при визначенні прискорення будь-якої точки плоскої фігури способом полюса необхідно скласти три вектори: вектор прискорення полюса і вектори нормального і тангенціального прискорень даної точки при обертанні фігури навколо полюса:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{B_A} + \vec{a}^{\,\tau}_{B_A}. \tag{2.85}$$

Модуль нормального прискорення визначається через миттєву кутову швидкість обертання плоскої фігури навколо полюса

$$a_{B_A}^{n} = \omega^2 \, AB, \tag{2.86}$$

а модуль дотичного прискорення – через миттєве кутове прискорення

$$a_{B_A}^{\tau} = \varepsilon \, AB. \tag{2.87}$$

Задачі на визначення прискорень точок плоскої фігури способом полюса розв'язуються або графічною побудовою, або ж проектуванням рівності (2.85) на декартові осі.

СПОСІБ МЦП. Другим способом визначення прискорень точок плоскої фігури є спосіб миттєвого центра прискорень (МЦП). При визначенні швидкостей точок плоскої фігури ми бачили, що в кожну мить існує така точка P площини, швидкість якої дорівнює нулю. Аналогічно до цього неважко показати, що існує точка площини – так званий *миттєвий центр прискорень*, прискорення якої в дану мить дорівнює нулю. При цьому слід наголосити, що миттєвий центр швидкостей і миттєвий центр прискорень – це різні точки і співпадають вони лише у випадку, коли тіло має нерухому точку (але то вже чисто обертальний рух).

Для визначення положення МЦП необхідно мати або прискорення (модуль і напрям) будь-якої точки плоскої фігури та величини миттєвої кутової швидкості і миттєвого кутового прискорення (застосовується графо-аналітичний метод), або ж мати прискорення двох будь-яких точок плоскої фігури (застосовується графічний метод).

Графо-аналітичний метод визначення положення МЦП. Нехай МЦП плоскої фігури існує (точка Q), і нехай нам відоме прискорення (модуль і напрям) будь-якої точки B (рис. 2.21). Вибираючи точку Q за полюс, маємо записати

$$\vec{a}_B = \vec{a}_Q + \vec{a}_{B_Q}^{n} + \vec{a}_{B_Q}^{\tau}, \tag{2.88}$$

але оскільки прискорення $\vec{a}_Q = 0$, то

$$\vec{a}_B = \vec{a}^{\,n}_{B_Q} + \vec{a}^{\,\tau}_{B_Q}. \tag{2.89}$$

Враховуючи вирази (2.86) та (2.87), модуль прискорення точки *B* визначимо із формули

$$a_B = BQ\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \tag{2.90}$$

де ω і ε – миттєва кутова швидкість і миттєве кутове прискорення плоскої фігури; *QB* – відстань від точки *B* до МЦП, яка визначається із рівності

$$BQ = \frac{a_B}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}.$$

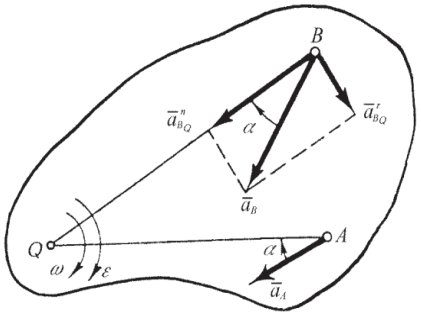


Рис. 2.21

З розділу про обертання тіла навколо нерухомої осі ми знаємо, що напрям вектора прискорення точки тіла при його обертанні визначається тангенсом кута α між вектором прискорення $\vec{a}_B$ і напрямом нормального прискорення $\vec{a}^{\,n}_{B_Q}$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Таким чином, для визначення положення МЦП графо-аналітичним методом ми робимо лише два кроки. Спочатку вектор прискорення $\vec{a}_B$ (рис. 2.21) повертаємо на кут α в напрямі обертання фігури (при прискореному обертанні), або в протилежний бік (при сповільненому обертанні). Потім на цьому промені відкладаємо відрізок *BQ*.

Знайшовши положення МЦП, можемо тепер визначити прискорення будь-якої іншої точки цієї плоскої фігури, наприклад, точки *A*. Для цього з'єднаємо точку *A* з точкою *Q* і проведемо з точки *A* вектор під кутом α (рис. 2.21). Модуль прискорення точки *A* визначимо із відношення

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}. \tag{2.91}$$

Графічний метод визначення положення МЦП базується на тій властивості, що вектори прискорень будь-яких точок плоскої фігури утворюють в кожну мить один і той же кут α з відрізками, що з'єднують ці точки з МЦП. Переконаємося, що МЦП можна знайти геометрично, якщо відомі напрями і модулі прискорень двох будь-яких точок плоскої фігури, наприклад *A* і *B*. Між прискореннями цих двох точок існує зв'язок

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B_A}, \tag{2.92}$$

якщо за полюс вибрати точку *A* (можна і навпаки). З цього рівняння маємо

$$\vec{a}_{B_A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A, \tag{2.93}$$

де $\vec{a}_{B_A}$ – прискорення точки *B* при обертанні плоскої фігури навколо полюса *A*.

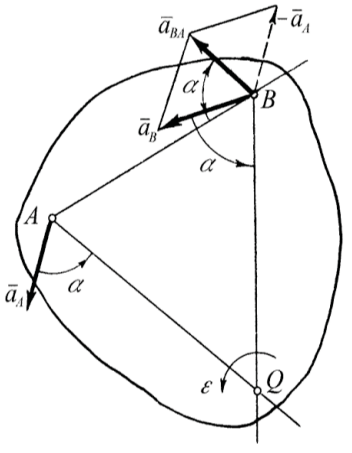


Рис. 2.22

Побудувавши в точці *B* вектори $-\vec{a}_A$ і $\vec{a}_B$ (рис. 2.22), знайдемо прискорення $\vec{a}_{B_A}$. Оскільки напрям відрізка *AB* складає з вектором $\vec{a}_{B_A}$ кут α, то вимірявши цей кут, використаємо його для визначення МЦП. Для цього із точок *A* і *B* проведемо промені під кутом α до векторів $\vec{a}_A$ і $\vec{a}_B$, які перетнуться в точці *Q*. Це і є МЦП плоскої фігури в дану мить її руху.

2.14. Складний рух точки

У кінематиці точки ми вивчали рух точки відносно декартової системи координат, яка безумовно вважалась нерухомою. Однак у дійсності не існує абсолютно нерухомих систем відліку, а є лише умовно нерухомі, адже в природі все рухається, бо рух – це спосіб існування матерії.

У більшості технічних задач системи координат, зв'язані з Землею (так звані геоцентричні системи), вважаються нерухомими. Але ці ж системи в розрахунках, пов'язаних із космічними польотами, розглядаються як рухомі, а за нерухому приймається система, зв'язана з Сонцем (так звана геліоцентрична система).

У сільськогосподарських машинах, машинах і апаратах АПВ, харчових виробництв, особливо в складних механізмах, автоматах, у роботах-маніпуляторах досить часто доводиться одночасно розглядати рух якогось фізичного об'єкта (матеріальної точки) відносно двох і більше систем координат, одна із яких рухається відносно іншої.

Простим і дуже наочним прикладом, що ілюструє необхідність двох систем координат, є рух збіжжя у рухомому комбайні, пасажира по палубі рухомого корабля, за яким спостерігають з берега. Рух пасажира (точки) відносно спостерігача на березі буде *складним*, тобто складатиметься з руху корабля і власного руху пасажира відносно корабля.

Якщо з берегом зв'язати нерухому систему координат, а з кораблем – рухому систему, то рух точки (пасажира) відносно *нерухомої* системи координат називатимемо *абсолютним рухом*, а рух відносно *рухомої* системи – *відносним рухом*. *Рух рухомої системи координат відносно нерухомої* (корабля відносно берега) називається *переносним рухом*. Точніше кажучи, переносним рухом для даного пасажира буде рух того місця (точки) корабля, у якому пасажир перебуває в даний момент.

Швидкість і прискорення точки у складному русі також відповідно називаються абсолютною, відносною і переносною швидкістю та абсолютним, відносним і переносним прискоренням.

Оскільки основними задачами кінематики є визначення закону руху і встановлення залежностей між кінематичними характеристиками рухомого об'єкта, то спробуємо записати рівняння складного руху точки.

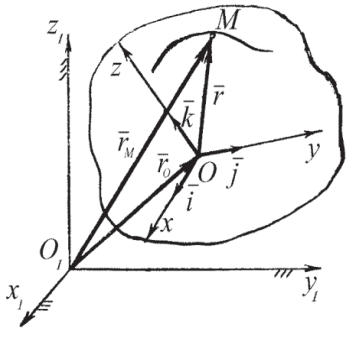


Рис. 2.23

Нехай точка M рухається по поверхні рухомого тіла (або середовища) описуючи деяку криволінійну траєкторію (рис. 2.23). Виберемо нерухому декартову систему координат $O_1x_1y_1z_1$ і рухому систему координат $Oxyz$, незмінно зв'язану з тілом (або середовищем).

З точки O_1 до точки M проведемо радіус-вектор $\vec{r}_M$, а з точки O рухомої системи координат – радіус-вектор $\vec{r}$. Рух точки O відносно нерухомої точки O_1 будемо фіксувати радіусом-вектором $\vec{r}_O$.

Очевидно, що в кожну мить справедлива рівність

$$\vec{r}_M = \vec{r}_O + \vec{r} \tag{2.94}$$

або

$$\vec{r}_M = \vec{r}_O + \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \tag{2.95}$$

яка є законом руху точки. Тут $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти) рухомої системи координат; x, y, z – проекції радіуса-вектора $\vec{r}$ на рухомі осі.

2.15. Абсолютна швидкість точки у складному русі

Для встановлення залежностей між абсолютною, відносною і переносною швидкостями точки в її складному русі розглянемо окремий випадок, коли рухома система $Oxyz$ (тобто тіло чи середовище) лише обертається з кутовою швидкістю ω_e і кутовим прискоренням ε_e навколо деякої осі ON, тобто коли переносний рух є обертальним. Тут і надалі для позначення переносного руху застосовуємо індекс e, відносного руху – індекс r, абсолютного руху – a.

Швидкість точки M визначимо як першу похідну від радіуса-вектора $\vec{r}_M$:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{2.96}$$

або

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \left(\vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{d\vec{i}}{dt}x + \frac{d\vec{j}}{dt}y + \frac{d\vec{k}}{dt}z\right). \tag{2.97}$$

Згідно з визначенням абсолютного руху, похідна $\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_a$ є абсолютною швидкістю точки, а похідна $\frac{d\vec{r}_O}{dt} = 0$ внаслідок того, що в нашому окремому випадку точка O нерухома. Векторна сума у другому доданку формули (2.97)

$$\vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt} = \vec{v}_r \tag{2.98}$$

є вектором відносної швидкості точки $\vec{v}_r$.

Похідні по часу від одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ у третьому доданку (2.97) являють собою швидкості кінців цих ортів при обертанні тіла навколо осі ON і можуть бути виражені через кутову швидкість обертання згідно з формулою Ейлера

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}\,; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}\,; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}, \tag{2.99}$$

де ω_e – кутова швидкість переносного обертального руху тіла навколо осі ON.

Таким чином, третій доданок у формулі (2.97) з урахуванням виразів (2.99) можемо привести до вигляду

$$\begin{aligned}&(\vec{\omega}_e \times \vec{i})x + (\vec{\omega}_e \times \vec{j})y + (\vec{\omega}_e \times \vec{k})z = \\ &= \vec{\omega}_e \times (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{\omega}_e \times \vec{r} = \vec{v}_e,\end{aligned} \tag{2.100}$$

який визначає переносну швидкість $\vec{v}_e$ у складному русі точки.

Остаточний вигляд формули (2.97) буде таким:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e, \tag{2.101}$$

тобто *абсолютна швидкість точки в складному русі дорівнює векторній сумі швидкостей відносного і переносного рухів*.

Тепер покажемо, що цей висновок справедливий і для випадку поступального переносного руху тіла. Дійсно, при поступальному переносному русі всі точки рухомої системи координат, в тому числі і її початок (точка O), мають однакові швидкості, а напрями одиничних ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ залишаються незмінними і їх похідні по часу дорівнюють нулю.

Таким чином, вираз (2.97) можемо записати у вигляді

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \left(\vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt} \right). \tag{2.102}$$

Тут $\dfrac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_a$ – абсолютна швидкість точки;

$\dfrac{d\vec{r}_O}{dt} = \vec{v}_O = \vec{v}_e$ – швидкість переносного поступального руху тіла;

$\left(\vec{i}\,\dfrac{dx}{dt} + \vec{j}\,\dfrac{dy}{dt} + \vec{k}\,\dfrac{dz}{dt} \right) = \vec{v}_r$ – відносна швидкість точки.

Отже формулу (2.102) можемо переписати у такому ж вигляді, який ми отримали у випадку переносного обертального руху

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \tag{2.103}$$

що підтверджує справедливість даної формули як для поступального, так і для обертального переносного руху тіла.

2.16. Абсолютне прискорення точки у складному русі

Для визначення абсолютного прискорення точки у складному русі запишемо формулу (2.103) з урахуванням (2.98) і (2.100) у такому вигляді

$$\vec{v}_a = \vec{\omega}_e \times (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) + \left(\vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt} \right) \tag{2.104}$$

і візьмемо від нього похідну по часу:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_a}{dt} &= \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) + \\ &+ \vec{\omega}_e \times \left(\vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dx}{dt} + \vec{k}\,\frac{dx}{dt} \right) + \vec{\omega}_e \times \left(\frac{d\vec{i}}{dt}x + \frac{d\vec{j}}{dt}y + \frac{d\vec{k}}{dt}z \right) + \\ &+ \left(\vec{i}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\,\frac{d^2z}{dt^2} \right) + \left(\frac{d\vec{i}}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{d\vec{j}}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt}\frac{dz}{dt} \right). \end{aligned} \tag{2.105}$$

Тут $\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \vec{a}_a$ – вектор абсолютного прискорення точки; $\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{\varepsilon}_e$ – вектор кутового прискорення рухомої системи (тіла або середовища).

Введемо такі позначення для виразів у дужках формули (2.105):

$(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{r}$ – радіус-вектор точки в рухомій системі координат;

$\left(\vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dx}{dt} + \vec{k}\,\frac{dx}{dt} \right) = \vec{v}_r$ – відносна швидкість точки;

$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}x + \frac{d\vec{j}}{dt}y + \frac{d\vec{k}}{dt}z \right) = \vec{\omega}_e \times \vec{r};$

$\left(\vec{i}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\,\frac{d^2z}{dt^2} \right) = \vec{a}_r$ – відносне прискорення точки;

$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{d\vec{j}}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt}\frac{dz}{dt} \right) = \vec{\omega}_e \times \left(\vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt} \right) = \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.$

Як бачимо, весь великий вираз у правій частині формули (2.105) зводиться до п’яти доданків, два з яких однакові:

$$\vec{a}_a = (\vec{\varepsilon}_e \times \vec{r}) + (\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r) + (\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e \times \vec{r}) + \vec{a}_r + (\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r),$$

або

$$\vec{a}_a = (\vec{\varepsilon}_e \times \vec{r}) + (\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e \times \vec{r}) + \vec{a}_r + 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r). \qquad (2.106)$$

Перші два доданки правої частини цієї формули являють собою прискорення переносного руху, тобто прискорення тієї точки тіла чи середовища, в якій в даний момент знаходиться наша рухома точка *M*:

$$\vec{a}_e = (\vec{\varepsilon}_e \times \vec{r}) + (\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e \times \vec{r}). \qquad (2.107)$$

Останній доданок виразу (2.106) являє собою так зване поворотне або коріолісове прискорення

$$\vec{a}_K = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r), \qquad (2.108)$$

а відтак і теорема про визначення абсолютного прискорення точки в складному русі називається ***теоремою Коріоліса*** на честь французького механіка, який вперше довів цю теорему:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_K. \qquad (2.109)$$

Теорема Коріоліса формулюється так: *абсолютне прискорення точки у складному русі дорівнює векторній сумі переносного, відносного і коріолісового прискорень.*

Розглянемо більш детально переносне прискорення. Із формули (2.107) бачимо, що переносне прискорення $\vec{a}_e$ складається із суми двох доданків $\vec{\varepsilon}_e \times \vec{r}$ та $\vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r})$. Перший векторний добуток являє собою переносне дотичне (або тангенціальне) прискорення, а другий – переносне нормальне прискорення:

$$\vec{a}_e^{\,\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}; \qquad \vec{a}_e^{\,n} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e \times \vec{r}, \qquad (2.110)$$

або по модулю

$$|\vec{a}_e^{\,\tau}| = \varepsilon r; \qquad |\vec{a}_e^{\,n}| = \omega^2 r. \qquad (2.111)$$

Напрями прискорень $\vec{a}_e^{\,\tau}$ і $\vec{a}_e^{\,n}$ аналогічні розглянутим у розділі про обертання тіла навколо осі: вектор $\vec{a}_e^{\,\tau}$ збігається з напрямом переносної швидкості $\vec{v}_e$ при прискореному переносному обертанні тіла і протилежний йому при сповільненому. Вектор $\vec{a}_e^{\,n}$ направлений до центру обертання тіла.

2.17. Прискорення Коріоліса

Модуль прискорення Коріоліса знаходиться як модуль подвоєного векторного добутку двох векторів (див. формулу (2.108)):

$$|\vec{a}_K| = 2|\vec{\omega}_e||\vec{v}_r|\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r). \qquad (2.112)$$

Як можна судити з формули (2.112), модуль коріолісового прискорення дорівнює нулю в трьох випадках:

1) $\omega_e = 0$ (переносний рух тіла поступальний);

2) $v_r = 0$ (точка в дану мить зупинилась);

3) $\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0$ (вектор $\vec{\omega}_e$ паралельний вектору $\vec{v}_r$).

Напрям вектора коріолісового прискорення $\vec{a}_K$ визначається або згідно з правилом векторного добутку двох векторів, або за допомогою правила Жуковського.

Згідно з правилом векторного добутку, з формули (2.108)

$$\vec{a}_K = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$$

бачимо, що вектор $\vec{a}_K$ перпендикулярний до площини, яку створюють вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$, і направлений у той бік, звідки поворот від першого вектора $\vec{\omega}_e$ до другого вектора $\vec{v}_r$ відбувається проти годинникової стрілки найкоротшим шляхом.

Згідно з *правилом Жуковського*, для визначення напряму прискорення Коріоліса потрібно *повернути вектор* $\vec{v}_r$ *на* 90° *у бік обертання тіла* у випадку, коли вектор відносної швидкості точки $\vec{v}_r$ перпендикулярний вектору кутової швидкості $\vec{\omega}_e$ переносного руху тіла (див. рис. 2.24,*б* і рис. 2.25,*а*).

Якщо вектори $\vec{v}_r$ і $\vec{\omega}_e$ не перпендикулярні між собою, то потрібно спочатку спроектувати вектор $\vec{v}_r$ на площину, перпендикулярну до вектора $\vec{\omega}_e$, а потім одержану *проекцію* $\vec{v}_r'$ *повернути на* 90° *у напрямі обертання тіла* (див. рис. 2.24,*а* і рис. 2.25,*б*).

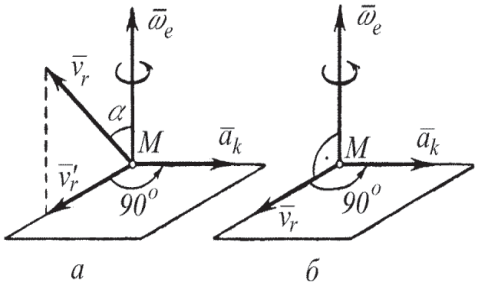


Рис. 2.24

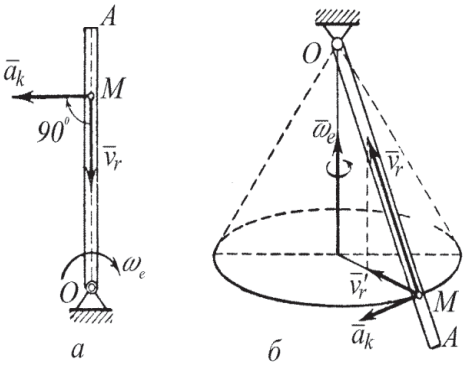


Рис. 2.25

ГЛАВА 3. ДИНАМІКА

3.1. Предмет і задачі динаміки

Динамікою *називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються закони механічного руху матеріальних об'єктів (матеріальної точки, системи матеріальних точок, твердого тіла) під дією сил, що викликають цей рух.* Тому розділ «динаміка» прийнято ділити на три підрозділи відповідно до об'єкту дослідження:

- динаміка матеріальної точки;
- динаміка системи матеріальних точок;
- динаміка твердого тіла.

Особлива вагомість динаміки у інженерній освіті полягає в тому, що у цьому розділі на прикладі механічного руху, як найпростішого руху матерії, студенти немеханічних спеціальностей вчаться описувати з допомогою диференціальних рівнянь будь-які інші процеси (рухи), які відбуваються в електротехніці, хімії, біології тощо. Крім того, значна увага приділяється дослідженню динамічних характеристик руху при розв'язуванні (інтегруванні) диференціальних рівнянь та при застосуванні загальних теорем динаміки.

У динаміці об'єднуються знання, набуті студентами в попередніх розділах теоретичної механіки – статиці та кінематиці, а також у курсах вищої математики – диференціальному та інтегральному численні.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки.

Основним методом розв'язування задач динаміки є метод складання і розв'язування диференціальних рівнянь руху. Ці рівняння можна скласти в декартових координатах, в натуральних чи інших осях, але всі вони виводяться із векторного запису основного рівняння динаміки – другого закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{3.1}$$

де $\vec{F} = \sum \vec{F}_k$ – рівнодійна системи сил, що діють на точку; m – маса; $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$ – прискорення точки.

У проекціях на осі декартової системи координат рівняння (3.1) записуються у вигляді трьох диференціальних рівнянь

$$ma_x = F_x; \qquad ma_y = F_y; \qquad ma_z = F_z$$

або

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \qquad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \qquad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}. \tag{3.2}$$

Тут $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, $a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$, $a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$ – проекції вектора прискорення $\vec{a}$ на осі декартової системи координат; $\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$, $\sum F_{kz}$ – суми проекцій всіх сил на ці ж осі.

У проекціях на осі натурального тригранника основне рівняння динаміки запишеться у вигляді:

$$ma_\tau = F_\tau; \qquad ma_n = F_n; \qquad ma_b = F_b$$

або

$$m\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}; \qquad m\frac{v^2}{\rho} = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}; \qquad 0 = \sum_{k=1}^{n} F_{kb}. \tag{3.3}$$

Тут $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$, $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, $a_b = 0$ – проекції вектора прискорення точки на дотичну, нормаль і бінормаль до траєкторії; $\sum F_{k\tau}$, $\sum F_{kn}$, , $\sum F_{kb}$ – суми проекцій всіх сил на ці осі.

Дві задачі динаміки. Вся величезна кількість задач, які розв'язує динаміка, зводиться всього-навсього до двох класів задач. *Перша (пряма) задача динаміки – за відомими масою і законом руху визначити сили, що діють на точку. Друга (обернена) задача – за заданими силами і масою точки визначити закон її руху.*

Перша задача динаміки розв'язується порівняно просто і зводиться до подвійного диференціювання закону руху.

Якщо рівняння руху точки задані координатним способом, тобто відомі функції

$$x = x(t); \qquad y = y(t); \qquad z = z(t), \tag{3.4}$$

то, двічі диференціюючи ці функції по часу, визначимо проекції прискорення a_x, a_y, a_z. Підставивши ці величини в диференціальні рівняння (3.2), знайдемо невідомі сили. Якщо рух точки заданий натуральним способом, то задача зводиться до визначення прискорень a_n і a_τ та подальшого визначення сил.

У другій задачі динаміки за відомими силами необхідно визначити закон руху точки, тобто потрібно застосувати обернену до диференціювання дію – інтегрування.

Розв'язування другої задачі динаміки зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь, що описують рух точки. Ця задача часто є досить складною, оскільки диференціальні рівняння легко інтегруються лише у випадку сталих за величиною сил або сил, що є функціями часу. У загальному ж випадку сили залежать від переміщення, швидкості, квадрату швидкості тощо.

Крім того, для правильного розв'язання необхідно вірно записати початкові умови руху, які потрібні для визначення сталих інтегрування, що також потребує деякої кваліфікації.

План (або методика) розв'язування першої і другої задач динаміки передбачає послідовне виконання таких дій:

1) зобразити точку і показати вектори прикладених до неї активних сил;

2) звільнити матеріальну точку від в'язей і замінити їх дію реакіями;

3) вибрати зручну систему координат (якщо точка рухається по прямій, то одну з декартових осей направляємо вздовж руху точки, якщо ж точка рухається по колу чи по криволінійній траекторії відомої в кожну мить кривизни ρ, то потрібно вибрати натуральні осі τ, n, b);

4) записати у векторній формі основне рівняння руху невільної матеріальної точки (II закон Ньютона, доповнений аксіомою про в'язі), і спроектувати всі вектори на вибрані осі.

У випадку першої задачі динаміки наступним кроком є визначення невідомих сил, тобто завершення розв'язання задачі.

При розв'язуванні другої задачі динаміки мусимо виконати ще кілька кроків:

5) розділити змінні і двічі проінтегрувати диференціальні рівняння руху;

6) записати початкові умови руху точки: початковий час $t = 0$, початкові координати і початкову швидкість (чи проекції початкової швидкості у випадку криволінійного руху);

7) підставити початкові умови руху в одержані інтеграли і визначити сталі інтегрування $C_1, C_2, \ldots C_n$;

8) переписати одержані інтеграли з урахуванням значень сталих інтегрування (записати закон зміни координат і швидкості точки з часом).

На цьому друга задача динаміки по визначенню закону руху точки буде вважатись розв'язаною. Якщо ж необхідно знайти інші параметри руху, наприклад, кінцеву швидкість чи пройдений точкою за вказаний проміжок часу шлях, то потрібно:

9) записати кінцеві умови руху точки (пройдений за час $t = t_1$ шлях і значення кінцевої швидкості) та підставити ці величини в одержані в п. 8 закони зміни координат і швидкості;

10) визначити необхідні параметри руху.

3.2. Прямолінійні коливання точки. Вільні коливання

Прикладом розв'язування другої задачі динаміки у випадку, коли на точку діє активна сила, що є функцією переміщення $\vec{F} = \vec{F}(x)$, буде визначення закону руху при прямолінійних коливаннях точки. Прямолінійні коливання виникають

внаслідок дії поновлюючої сили пружності при стисканні чи розтягуванні таких пружних елементів, як пружина чи гума. Однак слід зауважити, що пружні властивості в тій чи іншій мірі мають всі без винятку фізичні тіла і середовища, а тому коливання (вібрації) є одним із найбільш поширених у природі рухів.

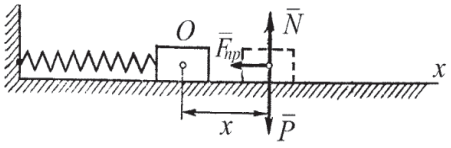


Рис. 3.1

Сила пружності направлена протилежно деформації (рис. 3.1). Модуль сили пружності $F_{пр}$ пропорційний першій степені деформації

$$F_{пр} = cx, \tag{3.5}$$

де x – лінійна деформація пружного елементу; c – коефіцієнт пропорційності, який характеризує пружні якості елементу і називається коефіцієнтом пружності (або жорсткості). Коефіцієнт пружності чисельно дорівнює силі, яку потрібно прикласти до пружного елементу для того, щоб змінити його довжину на одиницю виміру. Розмірність коефіцієнта пружності в системі СІ – Н/м.

Диференціальне рівняння руху точки $m\vec{v} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{пр}$ при проектуванні на вісь Ox має вигляд

$$ma_x = -F_{пр} \quad \text{або} \quad m\ddot{x} = -cx. \tag{3.6}$$

Розділивши обидві частини рівності (3.6) на масу m, приведемо це рівняння до вигляду, в якому воно відоме як *стандартна форма диференціального рівняння вільних прямолінійних коливань* точки

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{3.7}$$

Введена нами заміна $k = \sqrt{c/m}$ має важливий фізичний зміст – це є частота вільних (власних) коливань.

Диференціальне рівняння (3.7) є лінійним однорідним рівнянням другого порядку. На жаль, воно не може бути розв’язане прямим інтегруванням і його розв’язок будемо шукати у вигляді

$$x = Ce^{\lambda t}, \tag{3.8}$$

де C – стала інтегрування; λ – невідомий параметр, який потрібно визначити; t – час; e – основа натурального логарифма.

Для визначення невідомого параметра λ підставимо розв'язок (3.8) і його другу похідну по часу $\ddot{x} = C\lambda^2 e^{\lambda t}$ у рівняння (3.7):

$$C\lambda^2 e^{\lambda t} + k^2 Ce^{\lambda t} = 0,$$

або

$$\lambda^2 + k^2 = 0. \tag{3.9}$$

Алгебраїчне рівняння (3.9) відносно λ називають *характеристичним рівнянням,* воно дасть нам два корені

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-k^2} = \pm k\sqrt{-1} = \pm ik, \tag{3.10}$$

а тому розв'язок (3.8) запишемо у вигляді суми двох доданків:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

або

$$x = C_1 e^{ikt} + C_2 e^{-ikt}. \tag{3.11}$$

Використавши підстановки Ейлера

$$e^{ikt} = \cos kt + i\sin kt\,; \qquad e^{-ikt} = \cos kt - i\sin kt,$$

одержимо нову форму запису розв'язку (3.11), якою, опускаючи всі проміжні викладки, користуються як кінцевою при розв'язуванні задач на вільні коливання точки:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{3.12}$$

Тут C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов руху точки.

Розв'язок (3.12) являє собою загальний інтеграл диференціального рівняння (3.7). Продиференціювавши вираз (3.12), одержимо ще один інтеграл:

$$\dot{x} = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt. \tag{3.13}$$

Підставимо початкові умови руху ($t=0$, $x_{t=0}=x_0$, $\dot{x}_{t=0}=v_0$) у (3.12) та (3.13) і визначимо сталі інтегрування:

$$C_1 = x_0; \qquad C_2 = \frac{v_0}{k} = v_0\sqrt{m/c}\,.$$

З урахуванням значень C_1 і C_2 розв'язок рівняння (3.7) матиме вигляд

$$x = x_0\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt.$$

Розв'язок (3.12) можна звести до більш простої *амплітудної форми* такими замінами:

$$C_1 = A\sin\alpha; \qquad C_2 = A\cos\alpha, \tag{3.14}$$

де A і α – деякі сталі величини. Тоді (3.12) перепишеться у вигляді

$$x = A\cos kt\sin\alpha + A\sin kt\cos\alpha,$$

або

$$x = A\sin(kt+\alpha). \tag{3.15}$$

Із розв'язку (3.15) видно, що законом руху точки є гармонічна зміна координати $x(t)$, максимум якої $x_{\max}=A$ є амплітудою вільних коливань, величина $(kt+\alpha)$ – це фаза коливань, k – кругова частота, α – початкова фаза.

Амплітуда коливань визначається через сталі інтегрування C_1 і C_2 піднесенням до квадрату виразів (3.14) і складанням їх:

$$C_1^2 + C_2^2 = A^2\cos^2\alpha + A^2\sin^2\alpha = A^2,$$

звідки

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}. \tag{3.16}$$

Початкову фазу α також визначимо із (3.14) через сталі інтегрування:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{A\sin\alpha}{A\cos\alpha},$$

звідки

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}. \tag{3.17}$$

Період вільних коливань (час, що витрачається на одне повне коливання) знаходиться за формулою

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \tag{3.18}$$

Графіком вільних коливань є гармонічна функція $A\sin(kt+\alpha)$ (рис. 3.2). При цьому період і частота коливань залежать лише від маси точки і коефіцієнта пружності, а амплітуда і початкова фаза коливань залежать як від маси точки і коефіцієнта пружності, так і від початкових умов руху:

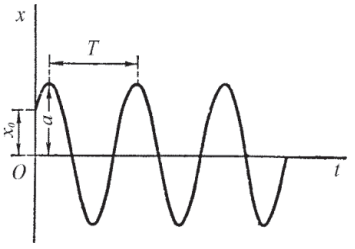


Рис. 3.2

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} = \sqrt{x_0^2 + mv_0^2/c};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_0}{v_0/k} = \frac{x_0}{v_0}\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

3.3. Затухаючи коливання точки

Затухаючі коливання точки мають місце у всіх реальних коливальних системах, оскільки на рухоме тіло завжди діють сили опору навколишнього середовища, зовнішнє і внутрішнє тертя, які призводять до розсіювання енергії в пружній системі.

Звичайно опір середовища (рідини чи газу) пропорційний першій степені швидкості точки і направлений протилежно швидкості точки:

$$\vec{R} = -\mu\vec{v}. \tag{3.19}$$

Тут μ – коефіцієнт пропорційності, який визначається експериментально (коефіцієнт так званого в'язкого тертя або рідинного опору).

Диференціальне рівняння, що описує прямолінійні затухаючі коливання точки, має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx - \mu v. \tag{3.20}$$

Перенесемо вліво всі члени цього рівняння, розділимо на масу m і введемо такі заміни

$$v = \dot{x}; \qquad \frac{c}{m} = k^2; \qquad \frac{\mu}{m} = 2n. \tag{3.21}$$

У результаті матимемо рівняння, яке відоме як *стандартна форма диференціального рівняння затухаючих коливань точки*:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{3.22}$$

Диференціальне рівняння (3.22), як і рівняння вільних коливань (3.7), також являє собою лінійне однорідне рівняння другого порядку і його розв'язок будемо шукати у такому ж вигляді

$$x = Ce^{\lambda t}. \tag{3.23}$$

Підставляючи (3.23) і його похідні в рівняння (3.22), отримаємо характеристичне рівняння відносно λ:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0. \tag{3.24}$$

Корені рівняння (3.24) визначаються з формули

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \tag{3.25}$$

Таким чином, розв'язок (3.23) матиме вигляд

$$x(t) = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}). \tag{3.26}$$

Ця формула показує, що, в залежності від значення підкореневого виразу $\sqrt{n^2 - k^2}$, можуть мати місце такі три випадки затухаючих коливань:

1) $n > k$ – великий опір;

2) $n = k$ – граничний випадок;

3) $n < k$ – малий опір.

У першому випадку $n > k$ і при $t \to \infty$ функція $x(t)$ швидко прямує до нуля, тобто має місце неперіодичний (аперіодичний) рух точки. Характер аперіодичного руху точки залежить від початкових умов (рис. 3.3).

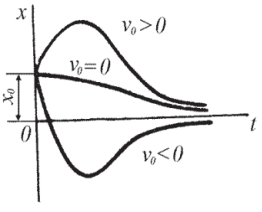


Рис. 3.3

У другому випадку $n = k$ формула (3.25) дасть два однакові корені

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n$$

і розв'язок (3.26) матиме вигляд

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t). \tag{3.27}$$

Рівняння (3.27) також описує неперіодичний рух точки і графік цієї функції якісно не відрізняється від графіка руху точки у випадку великого опору.

У випадку $n < k$ корені (3.25) будуть комплексні і різні:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}, \tag{3.28}$$

а розв'язок (3.26)

$$x(t) = e^{-nt}(C_1 e^{i\sqrt{n^2-k^2}t} + C_2 e^{-i\sqrt{n^2-k^2}t})$$

можемо записати так:

$$x(t) = e^{-nt}(C_1 e^{ik_1 t} + C_2 e^{-ik_1 t}). \tag{3.29}$$

Тут $\sqrt{n^2 - k^2} = \sqrt{-(k^2 - n^2)} = \sqrt{-1}\sqrt{k^2 - n^2} = ik_1$; величина $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ є *частотою затухаючих коливань.*

Застосувавши підстановки Ейлера, рівняння (3.29) перепишемо у вигляді

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \tag{3.30}$$

з якого видно, що має місце гармонічний рух з деяким затуханням (при $t \to \infty$ величина $e^{-nt} \to 0$). Графік таких коливань зображено на рис. 3.4, який показує, що амплітуда коливань поступово зменшується, прямуючи до нуля.

Якщо взяти відношення двох сусідніх амплітуд, то одержимо так званий декремент затухання $q = \dfrac{A_2}{A_1} = e^{\frac{nT}{2}}$,

а його логарифм дає логарифмічний декремент затухання

$$\ln q = \left|\frac{nT}{2}\right|. \tag{3.31}$$

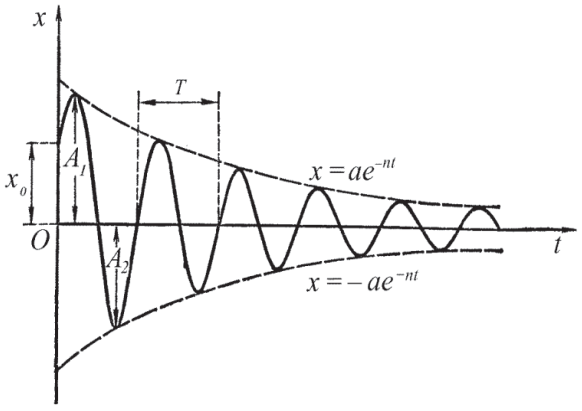


Рис. 3.4

Період затухаючих коливань знаходиться з формули

$$T_{\text{зат}} = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \tag{3.32}$$

Якщо вираз (3.32) порівняти з виразом $T = \frac{2\pi}{k}$, який визначає період вільних коливань точки, то побачимо, що $T_{\text{зат}} > T$, тобто період затухаючих коливань більший за період вільних коливань. Цією закономірністю користувався Кулон для визначення в'язкості рідин: підвісивши на пружині тонку пластинку, він примушував її коливатись у повітрі, а потім переносив її у ту рідину, в'язкість якої вимірювалась, і порівнював періоди коливань.

3.4. Вимушені коливання точки при відсутності опору середовища

Нехай на матеріальну точку, що здійснює прямолінійні вільні коливання під дією пружної сили $F_{пр} = cx$, діє додаткова стороння сила збурення $Q = H \sin pt$, яка в більшості випадків є неперервною функцією часу. У практиці такою силою може бути вібрація сусідніх механізмів і агрегатів внаслідок неточного

балансування маховиків, роторів електромоторів, турбінних дисків або при періодичній зміні тиску води, газу, пари в циліндрах двигунів тощо.

Диференціальне рівняння вимушених коливань точки матиме вигляд

$$m\ddot{x} = -cx + H\sin pt, \tag{3.33}$$

де H – амплітуда сторонньої сили збурення; p – частота збурення.

Розділивши на масу, приведемо це рівняння до стандартного вигляду

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt, \tag{3.34}$$

де $k^2 = \frac{c}{m}$; $h = \frac{H}{m}$.

Розв'язок неоднорідного рівняння (3.34) будемо шукати у вигляді суми двох розв'язків: загального розв'язку x_1 однорідного рівняння $\ddot{x} + k^2 x = 0$, що описує вільні коливання точки, і частинного розв'язку x_2, що описує вимушені коливання:

$$x = x_1 + x_2. \tag{3.35}$$

Розв'язок однорідного рівняння вільних коливань нам відомий:

$$x_1 = C_1\cos kt + C_2\sin kt. \tag{3.36}$$

Частинний розв'язок шукатимемо у такому ж вигляді, як і права частина рівняння (3.34), тобто у вигляді добутку деякої невідомої сталої D на гармонічну складову $\sin pt$:

$$x_2 = D\sin pt. \tag{3.37}$$

Підставляючи розв'язок (3.37) і його другу похідну в диференціальне рівняння (3.34), одержимо вираз для визначення D:

$$-Dp^2\sin pt + k^2 D\sin pt = h\sin pt,$$

звідки

$$D = \frac{h}{k^2 - p^2}. \tag{3.38}$$

Отже, частинний розв'язок (3.37) має вигляд

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{3.39}$$

Складаючи розв'язки (3.36) і (3.39), одержимо повний розв'язок рівняння (3.34)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt, \tag{3.40}$$

який є інтегралом диференціального рівняння вимушених коливань. Для визначення сталих інтегрування продиференціюємо одержаний вираз:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt. \tag{3.41}$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначимо із початкових умов руху:

$$\text{при} \quad t = 0 \qquad x_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}_{t=0} = v_0. \tag{3.42}$$

Підставляючи початкові умови руху у розв'язок (3.40) і його похідну по часу (3.41), одержимо такі значення для C_1 і C_2:

$$C_1 = x_0; \qquad C_2 = \frac{v_0 - p\dfrac{h}{k^2 - p^2}}{k}. \tag{3.43}$$

Аналогічно до випадку вільних коливань, виразу (3.40) можна надати амплітудної форми

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{3.44}$$

З формули (3.44) бачимо, що вимушені коливання точки складаються з суми двох гармонік, причому амплітуда A першої гармоніки залежить не лише від початкових умов x_0 і v_0 руху, але й від параметрів стороннього збурення:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 - p\dfrac{h}{(k^2 - p^2)}}{k}\right)^2}.$$

Амплітуда другої гармоніки залежить від співвідношення частот вільних і вимушених коливань. У випадку, коли частота збурення p близька до частоти вільних коливань k, вираз $(k^2 - p^2) \to 0$, а амплітуда вимушених коливань

зростає до нескінченності. Це явище носить назву ***резонансу*** і відіграє у техніці дуже велику роль.

3.5. Вимушені коливання точки при наявності опору середовища

Розглянемо вимушені коливання матеріальної точки, які відбуваються у середовищі, що чинить опір, пропорційний першій степені швидкості $\vec{R} = -\mu\vec{v}$.

Якщо матеріальна точка маси m рухається вздовж осі x під дією поновлюючої сили пружності $F_{пр}$, гармонічної збурюючої сили $H\sin pt$ і сили опору середовища R, то диференціальне рівняння руху точки матиме вигляд

$$m\ddot{x} = -kx - \mu v + H\sin pt \tag{3.45}$$

або

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin pt. \tag{3.46}$$

Тут введені такі позначення:

$$\dot{x} = v; \qquad k^2 = \frac{c}{m}; \qquad 2n = \frac{\mu}{m}; \qquad h = \frac{H}{m}. \tag{3.47}$$

Рівняння (3.46) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді суми розв'язків однорідного рівняння x_1 і частинного розв'язку x_2 неоднорідного диференціального рівняння:

$$x = x_1 + x_2.$$

Розв'язок x_1 однорідного диференціального рівняння

$$x_1 = e^{-nt}\left(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right) \tag{3.48}$$

показує, що в залежності від співвідношення між величинами n і k мають місце три випадки затухаючих коливань (див. формули (3.26), (3.27), (3.30)).

Частинний розв'язок x_2 , що визначає вимушені коливання точки, має вигляд:

$$x_2 = a\sin(pt + \beta). \tag{3.49}$$

Тут p – кругова частота вимушених коливань; β – початкова фаза;

$a = \dfrac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$ – амплітуда вимушених коливань.

Складаючи розв'язки (3.48) і (3.49), отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння (3.46), тобто визначимо закон вимушених коливань точки в опірному середовищі:

1) при $n > k$

$$x = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}t}) + a\sin(pt + \beta);$$

2) при $n = k$

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t) + a\sin(pt + \beta); \tag{3.50}$$

3) при $n < k$

$$x = e^{-nt}(C_1 \sin\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t) + a\sin(pt + \beta).$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаються із початкових умов руху.

З наведених розв'язків бачимо, що рух матеріальної точки під дією поновлюючої і збурюючої сил та сили опору середовища, пропорційної швидкості точки, являє собою накладання вимушених коливань на затухаючі коливання при $n < k$ або накладання вимушених коливань на аперіодичний рух при $n > k$ і $n = k$.

При усталеному режимі, тобто через достатньо великий проміжок часу після початку руху, результуючий рух точки практично буде складатися лише із вимушених коливань, які описуються рівнянням

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\sin(pt + \beta).$$

На рис. 3.5 проілюстроване накладання затухаючих коливань точки на вимушені коливання для випадку, коли $n < k$.

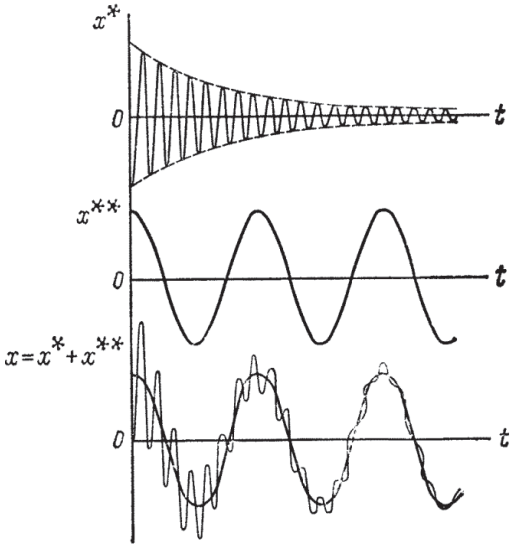


Рис. 3.5

3.6. Аналогії між коливальними процесами різної фізичної природи

У природі мають місце не лише механічні коливання, але й електромагнітні, акустичні, навіть біологічні та хімічні коливальні процеси. Коливальні рухи різної фізичної природи мають деякі спільні закономірності, які характеризують повторюваність стану змінних у часі об'єктів. Ця спільність механічних, електромагнітних, акустичних та інших коливальних процесів виражається аналітично у формі аналогій між відповідними диференціальними рівняннями.

Аналогію між диференціальними рівняннями, які описують коливання різної фізичної природи, не можна вважати чисто формальною. Вона, очевидно, відображає спільність деяких об'єктивно існуючих у природі закономірностей, які притаманні різним коливальним системам.

Вперше гіпотезу про відповідність між електричним контуром і механічною коливальною системою висунув у 1873 р. Джеймс Максвел. В основу такої аналогії він поклав відповідність між електричним струмом і швидкістю

матеріальної точки. У сучасних курсах основ електротехніки показано, що коливання простого електричного контура описуються диференціальними рівняннями, аналогічними рівнянням механічних коливань точки, розглянутих нами вище. Тому всі результати, одержані у розділі про механічні коливання точки, можуть бути використані в електротехніці.

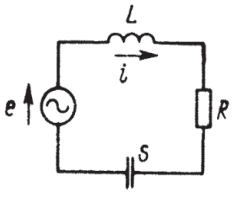


Рис. 3.6

Диференціальне рівняння, яке характеризує коливання, що виникають при дії періодичної електрорушійної сили $E = E_0 \sin \omega t$ в електричному ланцюзі, складеному із джерела змінної напруги та послідовно з'єднаних котушки самоіндукції L, активного опору R і конденсатора ємністю C (рис. 3.6), має вигляд

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C} q = E_0 \sin \omega t, \qquad (3.51)$$

який легко можемо переписати у вигляді диференціального рівняння (3.46) вимушених коливань точки з урахуванням опору середовища:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h \sin pt.$$

Тут q – електричний заряд конденсатора; $2n = R/L$; $k^2 = 1/LC$; $h = E_0/L$; $\omega = p$.

Якщо у цьому рівнянні покласти $E = 0$ і $R = 0$, то одержимо диференціальне рівняння, яке аналогічне диференціальному рівнянню (3.7) вільних механічних коливань точки. Коли покласти рівною нулю величину $E = 0$, то одержимо рівняння коливань в електричному контурі, аналогічне диференціальному рівнянню затухаючих коливань точки (3.22). Нарешті, якщо $R = 0$, а електрорушійна сила $E = E_0 \sin \omega t$, то рівняння коливань електричного контура аналогічне рівнянню (3.34), яке описує вимушені коливання точки без урахування опору середовища.

Аналогії між механічними і електричними величинами можна представити у вигляді таблиці:

Механічні параметри	**Електричні параметри**
t – час	t – час
x – координата точки	q – заряд (вимірюється в кулонах)
$v_x = \dot{x}$ – проекція швидкості	$i = \dot{q}$ – струм (вимірюється в амперах)
m – маса	L – індуктивність (вимірюється в генрі)
F_x – проекція сили	E – електрорушійна сила (вимірюється в вольтах)
β – коефіцієнт в'язкого тертя (рідинного опору)	R – омічний опір (вимірюється в омах)
c – коефіцієнт пружності	$\frac{1}{C}$ – де C – ємність (вимірюється в фарадах)
$Q_x = Q_x(t)$ – збурююча сила	$E = E(t)$ – електрорушійна сила (вимірюється в вольтах)

Тут слід зауважити, що існують і інші системи електромеханічних аналогій, які використовуються науковцями для практичних і теоретичних досліджень в електротехніці.

В теорії електромагнітного поля також розглядаються диференціальні рівняння, аналогічні до рівнянь коливальних процесів у механіці. Зокрема, у квантовій теорії електромагнітному полю ставлять у відповідність деяку механічну систему, стан якої описується системою диференціальних рівнянь, аналогічних рівнянню (3.7).

3.7. Дві міри механічного руху. Загальні теореми динамки

В історії механіки відома майже столітня суперечка між послідовниками Рене Декарта (1596–1650) з одного боку і Готфріда Лейбніца (1646–1716) з другого про *міру механічного руху.* Декарт і його учні вважали, що єдиною мірою механічного руху є добуток маси на швидкість об'єкта ($m\vec{v}$), яку вони назвали «кількість руху». Хрістіан Гюйгенс (1629–1695) при вивченні явища удару ввів поняття добутку маси на квадрат швидкості mv^2, яке Лейбніц назвав «живою силою» і відстоював думку, що ця величина повністю характеризує динамічні властивості тіл і являє собою єдину міру механічного руху. Гаспар Коріоліс (1792–1843) запропонував «живою силою» називати величину $\frac{mv^2}{2}$, яку в сучасній термінології ми знаємо як кінетичну енергію.

Дискусія між ученими-механіками продовжувалася більше 100 років, тому що на той час (XVII і XVIII століття) не було чітких понять про силу та про можливість перетворення механічного руху в інші форми руху матерії, і вчені не могли дійти спільної думки. Остаточне вирішення цієї проблеми стало можливим лише в середині XIX століття після відкриття загального закону збереження енергії. Механіка завдячує цим Ф. Енгельсу, який з філософської точки зору узагальнив наукові досягнення того часу і у праці «Діалектика природи» вказав, що «механічний рух у дійсності має двояку міру, і кожна з цих мір використовується для досить обмеженого кола явищ».

І далі: «Якщо наявний механічний рух передається таким чином, що він зберігається як механічний рух, то він передається відповідно до формули про добуток маси на швидкість (кількість руху). Якщо ж механічний рух передається так, що він зникає як механічний рух і воскресає у формі теплоти, електрики тощо, тобто якщо він перетворюється в якусь іншу форму руху матерії, то кількість цієї нової форми руху пропорційна добутку маси на квадрат швидкості...»

Таким чином, у сучасній механіці мірами механічного руху вважаються дві величини – кількість руху $m\vec{v}$ і кінетична енергія $\frac{mv^2}{2}$.

Загальні теореми динаміки. Повну інформацію про рух матеріального об'єкта ми отримуємо при інтегруванні диференціальних рівнянь руху, тобто при розв'язуванні другої задачі динаміки. Однак у загальному випадку це досить складна задача. У простих випадках диференціальні рівняння можуть бути проінтегровані в елементарних функціях, а у більш складних застосовуються наближені методи та чисельне інтегрування за допомогою ЕОМ.

Однак у багатьох конкретних інженерних задачах динаміки потрібну інформацію про параметри руху можна одержати набагато простіше за допомогою загальних теорем, до яких належать три теореми динаміки точки:

- теорема про зміну кінетичної енергії точки;
- теорема про зміну кількості руху точки;
- теорема про зміну момента кількості руху точки;

та чотири теореми динаміки системи матеріальних точок:

- теорема про зміну кінетичної енергії системи;
- теорема про зміну кількості руху системи;
- теорема про зміну момента кількості руху (кінетичного момента) системи;
- теорема про рух центра мас системи.

Загальні теореми динаміки оперують поняттями, які мають реальний фізичний зміст (наприклад, кількість руху, кінетична енергія, робота тощо). Вони одержані шляхом нескладних перетворень диференціальних рівнянь руху, в результаті чого отримані зручні формули, які широко використовуються при розв'язуванні конкретних задач.

Слід лише пам'ятати, що при застосуванні загальних теорем динаміки потрібно звертати особливу увагу на розрахункові дані задачі. Вибирати потрібно ту теорему, яка містить у собі зв'язок між відомими і невідомими величинами. Часто для розв'язування задачі потрібно застосувати декілька теорем динаміки.

3.8. Теореми про зміну кінетичної енергії точки та системи

Кінетична енергія (або «жива сила» за старою термінологією) є однією з двох мір механічного руху і характеризує перетворення механічного руху в інші види руху матерії (тепловий, електричний тощо).

Теорема про зміну кінетичної енергії, як і інші теореми динаміки, також є дещо видозміненим інтегралом основного закону механіки – другого закону Ньютона. Переконаємось у цьому.

Нехай під дією рівнодійної сили $\vec{F}$ матеріальна точка перемістилась з положення M_0 в положення M_1. При цьому її радіус-вектор $\vec{r}$ дістав деякий елементарний приріст $d\vec{r}$. Оскільки рух точки описується рівнянням

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \tag{3.52}$$

то домноживши скалярно ліву і праву частини рівності (3.52) на $d\vec{r}$, одержимо

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\,d\vec{r} = \vec{F}\,d\vec{r}, \tag{3.53}$$

або

$$m\frac{d\vec{r}}{dt}\,d\vec{v} = \vec{F}\,d\vec{r}. \tag{3.54}$$

Оскільки $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, то рівність (3.54) запишеться у вигляді

$$m\vec{v}\,d\vec{v} = \vec{F}\,d\vec{r},$$

або

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\vec{F}\,d\vec{r}. \tag{3.55}$$

Тут $\frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія точки; $d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ – диференціал кінетичної енергії;

$\vec{F}\,d\vec{r}=dA$ – елементарна робота рівнодійної сили.

Формула (3.55) являє собою вираз, який ми використаємо в подальшому при доведенні теореми про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок: диференціал кінетичної енергії точки дорівнює елементарній роботі рівнодійної сили.

Проінтегрувавши (3.55) у визначених границях, одержимо теорему про зміну кінетичної енергії точки

$$\int_{v_0}^{v_1} d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\int_{M_0}^{M_1}\vec{F}\,d\vec{r}, \tag{3.56}$$

звідки маємо вираз ***теореми про зміну кінетичної енергії точки***:

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A. \tag{3.57}$$

Тут $\frac{mv_0^2}{2}$ і $\frac{mv_1^2}{2}$ – початкова і кінцева кінетичні енергії точки; $A=\int\vec{F}\,d\vec{r}$ – робота сили $\vec{F}$ на переміщенні точки з положення M_0 в положення M_1.

Формулювати теорему (3.57) можемо так: *зміна кінетичної енергії точки на деякому переміщенні дорівнює роботі рівнодійної сили на цьому ж переміщенні*.

Розглянемо тепер систему, що складається з n матеріальних точок. Запишемо для кожної k-ої точки системи диференціальні рівняння руху у векторній формі

$$m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt}=\vec{F}_k^{\,e}+\vec{F}_k^{\,i}, \tag{3.58}$$

де $\vec{F}_k^e$ і $\vec{F}_k^i$ – рівнодійні зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на k-ту точку системи.

Домножимо скалярно кожне рівняння системи на елементарний приріст $d\vec{r}_k$ радіуса-вектора кожної точки

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} d\vec{r}_k = \vec{F}_k^e \, d\vec{r}_k + \vec{F}_k^i \, d\vec{r}_k, \tag{3.59}$$

а потім ліву частину рівності (3.59) перетворимо таким чином:

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} d\vec{r}_k = m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} d\vec{v}_k = m_k \vec{v}_k \, d\vec{v}_k = d\left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right), \tag{3.60}$$

а в правій частині введемо позначення: $\vec{F}_k^e \, d\vec{r}_k = dA_k^e$ і $\vec{F}_k^i \, d\vec{r}_k = dA_k^i$ – елементарні роботи рівнодійних зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на k-ту точку системи.

Величина $d\left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right) = dT_k$ є диференціалом кінетичної енергії k-ої точки системи.

Перепишемо рівність (3.59) у вигляді

$$dT_k = dA_k^e + dA_k^i \tag{3.61}$$

і підсумуємо такі рівності для всіх n точок системи

$$\sum_{k=1}^{n} dT_k = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} dA_k^i. \tag{3.62}$$

Оскільки операції додавання і диференціювання перемістимі, то запишемо

$$d\sum_{k=1}^{n} T_k = d\sum_{k=1}^{n} A_k^e + d\sum_{k=1}^{n} A_k^i, \tag{3.63}$$

або

$$dT = d\sum_{k=1}^{n} A_k^e + d\sum_{k=1}^{n} A_k^i. \tag{3.64}$$

Тут $T = \sum T_k$ – кінетична енергія системи.

Проінтегрувавши обидві частини рівності (3.64) у визначених границях, одержимо

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i, \tag{3.65}$$

де T_0 і T – початкова і кінцева кінетичні енергії системи.

Вираз (3.65) являє собою запис ***теореми про зміну кінетичної енергії системи*** матеріальних точок і формулюється так: *зміна кінетичної енергії матеріальної системи на деякому переміщенні дорівнює сумі робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки системи на цьому переміщенні*.

У порівнянні з розглянутими нижче загальними теоремами динаміки, теорема про зміну кінетичної енергії має такі відмінності: по-перше, записується в скалярній, а не у векторній формі; по-друге, враховує дію внутрішних сил системи.

3.9. Робота сили. Потужність

При використанні теореми про зміну кінетичної енергії точки чи системи необхідно вміти обчислювати роботу, яку виконують прикладені сили на даних переміщеннях.

Елементарна робота сили $\vec{F}$ на елементарному переміщенні $d\vec{r}$ дорівнює скалярному добутку цих величин

$$dA = \vec{F}\, d\vec{r},$$

або, розкриваючи модуль скалярного добутку двох векторів, одержимо

$$dA = |\vec{F}|\,|d\vec{r}|\cos\alpha. \tag{3.66}$$

Тут α – кут між напрямом сили $\vec{F}$ і напрямом переміщення $d\vec{r}$.

Позначивши проекції сили $\vec{F}$ на осі декартової системи координат через F_x, F_y, F_z, а проекції елементарного переміщення $d\vec{r}$ через dx, dy, dz, можемо записати вираз для елементарної роботи у вигляді

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{3.67}$$

Дещо інший вираз елементарної роботи отримаємо, якщо запишемо елементарне переміщення $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$. Тоді матимемо:

$$dA = |\vec{F}||\vec{v}|\,dt\cos\alpha \quad \text{або} \quad dA = |\vec{F}|\,ds\cos\alpha, \tag{3.68}$$

оскільки $ds = |\vec{v}|\,dt$ – елементарне переміщення точки.

З формул (3.68) видно, що робота може бути додатньою, від'ємною чи рівною нулю в залежності від кута α між вектором сили і напрямом переміщення:

- якщо напрям сили і напрям руху співпадають $(0 \le \alpha < \frac{\pi}{2})$, то робота додатня;
- якщо сила перпендикулярна до переміщення $(\alpha = \frac{\pi}{2})$ – робота сили дорівнює нулю;
- якщо сила протидіє переміщенню $(\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi)$ – робота сили від'ємна.

Повною роботою сили на скінченному переміщенні точки від M_0 до M_1 буде інтегральна сума елементарних робіт

$$A = \int_{M_0}^{M_1} dA. \tag{3.69}$$

Застосуємо одержані вирази до визначення роботи таких найбільш поширених силових проявів, як сила ваги, сила пружності, момент сили тощо.

Робота сили ваги. Нехай точка M, на яку діє сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$, перемістилась із положення M_0 з координатами x_0, y_0, z_0 в положення M_1 з координатами x_1, y_1, z_1 (рис. 3.7). Елементарна робота сили ваги, згідно з формулою (3.67), дорівнює

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz. \tag{3.70}$$

Оскільки $P_x = P_y = 0$, а $P_z = -mg$, то повна робота

$$A(P) = -\int_{z_0}^{z_1} mg\,dz = -mg(z_1 - z_0) = mg(z_0 - z_1) = m\,g\,h. \qquad (3.71)$$

Тут $h = z_0 - z_1$ – висота, на яку опустилася точка під дією сили ваги P. Якщо, незважаючи на дію сили P, точка буде підніматися від M_1 до M_0, то робота сили буде від'ємною.

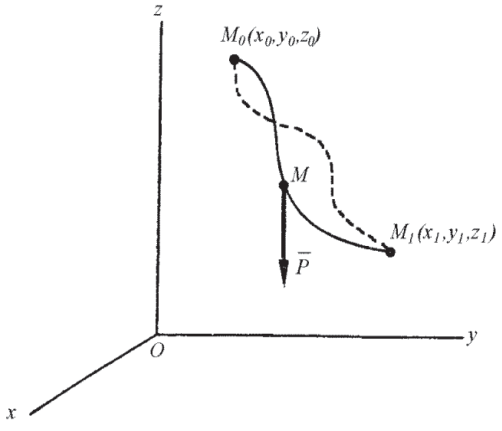


Рис. 3.7

Отже ми встановили, що *робота сили ваги не залежить від форми траєкторії, а лише від кінцевого переміщення по висоті. Знак* роботи сили ваги *додатній* при русі тіла *вниз* і *від'ємний* при підйомі *вгору*:

$$A(P) = \pm m\,g\,h.$$

Робота сили пружності. Розглянемо матеріальний об'єкт (точку M), який лежить на горизонтальній гладенькій площині і прикріплений до нерухомої стіни пружиною з жорсткістю c (див. рис. 3.1).

При переміщенні точки із положення рівноваги вліво чи вправо виникає сила пружності $F_{пр} = cx$, протилежна цьому переміщенню. Оскільки проекції вектора сили $\vec{F}_{пр}$ на осі координат $F_y = F_z = 0$, а проекція $F_x = -cx$, то елементарна робота сили пружності

$$dA(F_{пр}) = F_x dx = -cx\,dx. \qquad (3.72)$$

Повна робота

$$A(F_{пр}) = -c\int_{x_0}^{x_1} x\,dx, \tag{3.73}$$

або остаточно

$$A(F_{пр}) = -\frac{c(x_1^2 - x_0^2)}{2}. \tag{3.74}$$

Отже, *робота сил пружності дорівнює половині добутку коефіцієнта жорсткості на квадрат розтягу чи стиску пружини*.

Робота сили при обертанні тіла (робота моменту сили). Нехай на тверде тіло, що має нерухому вісь *Oz*, діє сила $\vec{F}$, яка не паралельна осі і не перетинає її. Під дією цієї сили тіло повернеться на деякий кут $d\varphi$, а точка прикладання сили переміститься із положення M_0 в положення M_1, описавши при цьому дугу

$$ds = R\,d\varphi. \tag{3.75}$$

Тут R – найкоротша відстань (плече) від лінії дії сили до осі *Oz*.

Елементарна робота сили на переміщенні ds

$$dA = F\,ds = FR\,d\varphi = M_z(\vec{F})\,d\varphi, \tag{3.76}$$

де $M_z(\vec{F}) = FR$ – момент сили відносно осі *Oz*.

Повна робота

$$A = \int_0^{\varphi} M_z(\vec{F})\,d\varphi, \tag{3.77}$$

або

$$A(M) = M_z\varphi. \tag{3.78}$$

Таким чином, *робота сили при обертанні тіла навколо осі дорівнює добутку момента сили відносно даної осі на кут повороту тіла.*

Аналогічне правило можемо сформулювати для визначення роботи пари сил: *робота момента пари сил на деякому повороті тіла навколо осі дорівнює добутку модуля момента пари на кут повороту тіла.*

Робота внутрішніх сил системи. Внутрішні сили системи матеріальних точок – це сили взаємодії між точками, що входять до складу системи. У більшості випадків внутрішні сили являють собою реакції тих в'язей, які з'єднують точки системи і по закону рівності дії і протидії зрівноважуються між собою.

Робота реакцій внутрішніх в'язей системи дорівнює нулю у тому випадку, коли в'язі є ідеальними. До таких в'язей належать гнучкі невагомі та нерозтяжні нитки, поверхні і шарніри без тертя, ідеальні стержні тощо.

Робота внутрішніх сил системи дорівнює нулю і в тому випадку, коли в процесі руху відстані між точками системи не змінюються (так звані незмінні системи).

Отже, у більшості задач динаміки роботою внутрішніх сил нехтують:

$$\sum A(\vec{F}_k^i) = 0.$$

Потужність сили. Потужність визначається роботою, виконаною силою за одиницю часу. Наприклад, якщо за час dt сила $\vec{F}$ здійснила роботу $dA = \vec{F}d\vec{r}$, то вираз для потужності сили матиме вигляд

$$N_F = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}, \tag{3.79}$$

або за модулем

$$N_F = |\vec{F}||\vec{v}|\cos\alpha. \tag{3.80}$$

Отже, *потужність сили є скалярною величиною, яка дорівнює добутку сили на швидкість точки її прикладання.* Одиницею виміру потужності є ват (1 Вт = 1 Дж/с = 1 Н м/с).

3.10. Кінетична енергія твердого тіла

Кінетична енергія механічної системи, як ми встановили вище, дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій окремих тіл (точок) системи. Ці тіла можуть рухатись поступально, обертатись навколо нерухомої осі або

здійснювати більш складний плоско-паралельний рух. Розглянемо почергово ці три випадки руху.

1. Якщо тіло здійснює *поступальний рух*, то всі його точки (у тому числі і центр мас) мають однакові швидкості $v_k = v_c$. Кінетична енергія $T_{\text{пост}}$ обчислюється як сума кінетичних енергій всіх n точок тіла

$$T_{\text{пост}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k, \tag{3.81}$$

або

$$T_{\text{пост}} = \frac{M v_c^2}{2}. \tag{3.82}$$

Тут $M = \sum m_k$ – маса тіла; v_c – швидкість центра мас тіла.

Таким чином, *кінетична енергія при поступальному русі тіла дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості його центра мас.*

2. При *обертанні* тіла навколо нерухомої осі лінійні швидкості окремих точок визначаються з формули Ейлера

$$v_k = \omega R_k, \tag{3.83}$$

де ω – кутова швидкість обертання; R_k – радіус k-ої точки тіла.

Кінетична енергія $T_{\text{оберт}}$ визначається так:

$$T_{\text{оберт}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k (\omega R_k)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k R_k^2, \tag{3.84}$$

або

$$T_{\text{оберт}} = \frac{I_z \omega^2}{2}. \tag{3.85}$$

Тут $\sum m_k R_k^2 = I_z$ – момент інерції тіла відносно осі обертання, який дорівнює сумі добутків маси кожної точки на квадрат її відстані від осі.

Отже, *при обертанні тіла навколо осі кінетична енергія дорівнює половині добутку момента інерції тіла відносно даної осі на квадрат кутової швидкості.*

3. Одним із складних рухів тіла, які дуже часто зустрічаються в механічних системах, є *плоско-паралельний рух,* прикладом якого є кочення колеса або циліндра по нерухомій площині без проковзування.

Оскільки плоско-паралельний рух тіла можна розкласти на поступальний рух тіла разом з полюсом і миттєвий обертальний рух навколо полюса, то вибравши за полюс центр мас тіла, можемо визначити кінетичну енергію як суму

$$T_{\text{пл–пар}} = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{I_{zc}\omega^2}{2}. \qquad (3.86)$$

Отже, *кінетична енергія тіла при плоско-наралельному русі дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху зі швидкістю центра мас і кінетичної енергії при обертанні тіла навколо центра мас.* Цей висновок у літературі часто називають теоремою Кеніга. З її доведенням студенти можуть познайомитись у повних курсах теоретичної механіки (Павловський, 2004).

3.11. Моменти інерції

При визначенні кінетичної енергії тіл, що обертаються, ми зустрілись із новою фізичною величиною, яка називається моментом інерції тіла. Поняття момента інерції було введене Леонардом Ейлером. Слід зауважити, що якщо маса тіл є мірою їх інертності при поступальному русі, то мірою інертності тіл при обертанні є момент інерції (або момент інертності).

Моментом інерції тіла називається скалярна величина, яка характеризує розподіл маси в тілі (або в системі тіл) *і є мірою інертності при обертальному русі*.

Розрізняють слідуючі моменти інерції:

1) полярний I_0;

2) осьові I_x, I_y, I_z;

3) відцентрові I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}.

Для визначення *полярного* момента інерції I_0 розглянемо будь-яку k-ту точку тіла з масою m_k і радіусом-вектором $\vec{r}_k$. Момент інерції k-ої точки відносно центра O дорівнює добутку маси точки на квадрат відстані від цього центра

$$I_{0k} = m_k(\vec{r}_k)^2. \tag{3.87}$$

Оскільки

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2, \tag{3.88}$$

то

$$I_{0k} = m_k(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \tag{3.89}$$

Підсумовуючи для всіх точок тіла, маємо

$$I_0 = \sum m_k(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2), \text{ або } I_0 = \sum m_k(\vec{r}_k)^2. \tag{3.90}$$

Таким чином, за формулою (3.90), *полярний момент інерції дорівнює сумі добутків маси кожної точки тіла на квадрат її відстані до полюса (початку координат)*.

Осьові (або аксіальні) моменти інерції визначаються для кожної k-ої точки тіла як добуток маси точки на квадрат її відстані від даної осі. Наприклад, осьовий момент інерції точки відносно осі Oz дорівнює

$$I_{zk} = m_k R_{zk}^2. \tag{3.91}$$

Відстань R_{zk} точки від осі виражається через координати точки

$$R_{zk}^2 = x_k^2 + y_k^2. \tag{3.92}$$

Отже

$$I_{zk} = m_k(x_k^2 + y_k^2). \tag{3.93}$$

Підсумувавши для всіх точок тіла, маємо

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k^2 + y_k^2). \tag{3.94}$$

Аналогічно можемо записати вирази для I_x і I_y:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2); \quad I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + z_k^2). \tag{3.95}$$

Осьовий момент інерції тіла дорівнює сумі добутків маси кожної точки на квадрат її відстані до осі.

Якщо складемо всі три осьові моменти інерції (3.94) і (3.95), то одержимо

$$\begin{aligned} I_x + I_y + I_z &= \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2) + \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + z_k^2) + \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) = \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2), \end{aligned} \tag{3.96}$$

або

$$I_x + I_y + I_z = 2I_0. \tag{3.97}$$

Отже, сума осьових моментів інерції тіла дорівнює подвоєному полярному моменту, взятому відносно початку координат.

Відцентровими моментами інерції називають величини, які дорівнюють алгебраїчній сумі добутків маси кожної точки тіла на добуток її відповідних координат:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k; \\ I_{xz} &= \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k; \\ I_{yz} &= \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Якщо відносно деякої системи координат, вибраної в тілі, відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, то осі такої системи називають *головними осями інерції.* Якщо ж початок такої системи координат співпадає з центром мас тіла (чи системи), то такі осі називають *головними центральними осями інерції*.

Момент інерції тіла відносно заданої осі можна представити як добуток маси тіла на квадрат деякої умовної лінійної величини, яка являє собою відстань центра мас тіла до даної осі і називається *радіусом інерції тіла*:

$$I_z = M\rho_z^2. \tag{3.99}$$

Тут $M = \sum m_k$ – маса тіла; ρ_z – радіус інерції тіла відносно осі Oz.

Радіус інерції знаходиться із формули

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} \tag{3.100}$$

і може бути визначений експериментально.

Осьові моменти інерції тіл плоскої форми. Дуже часто при розв'язуванні задач про обертальний рух необхідно мати осьові моменти інерції однорідних тіл простої форми. Розглянемо деякі з них:

1. *Тонкий однорідний стержень*

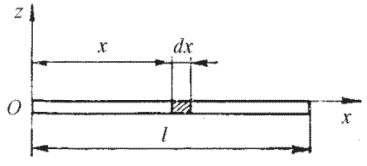


Рис. 3.8

Момент інерції однорідного стержня довжиною l відносно осі Oz, що перпендикулярна до стержня і проходить через його кінець (рис. 3.8), визначається як сума добутків маси кожної окремої k-ої частинки стержня на квадрат відстані від осі

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2, \tag{3.101}$$

де x_k – відстань від k-ої точки до осі. Однак у випадку неперервного розподілу маси в стержні замість суми застосуємо інтеграл, поширений по всій масі стержня

$$I_z = \int_{(m)} x^2\, dm. \tag{3.102}$$

Тут dm – маса елемента стержня довжиною dx, x – відстань елемента від осі Oz.

Оскільки елементарна маса $dm = \frac{m}{l}dx$, то підставивши цей вираз у (3.102), маємо

$$I_z = \int\limits_{(m)} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \int\limits_0^l x^2 dx,$$

звідки

$$I_z = \frac{ml^2}{3}. \tag{3.103}$$

Отже, *момент інерції тонкого однорідного стержня відносно осі, що перпендикулярна до стержня на його кінці, дорівнює третині добутку маси на квадрат довжини стержня.*

Якщо нам потрібний момент інерції однорідного стержня відносно осі, що проходить через його середину (центр мас C), то маємо

$$I_{zc} = \frac{m}{l} \int\limits_{-l/2}^{l/2} x^2 dm, \tag{3.104}$$

звідки

$$I_{zc} = \frac{ml^2}{12} \tag{3.105}$$

2. *Однорідне тонке кільце (обруч)*

Нехтуючи товщиною кільця радіуса R, знайдемо його момент інерції відносно центральної осі Oz. Для цього виділимо в кільці елемент маси dm (рис. 3.9). Тоді

$$I_z = \int\limits_{(m)} R^2 dm = R^2 \int\limits_{(m)} dm, \tag{3.106}$$

або

$$I_z = mR^2. \tag{3.107}$$

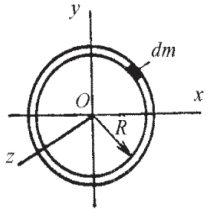


Рис. 3.9

Отже, *момент інерції однорідного тонкого кільця (обруча) відносно осі Oz дорівнює добутку маси кільця на квадрат його радіуса.*

Оскільки товщиною кільця знехтувано, то неважко побачити, що $I_z = I_0$, де I_0 – полярний момент інерції кільця відносно його центра. Через те, що кільце

симетричне, моменти інерції відносно двох інших (поперечних) осей рівні $I_x = I_y = I$. Використавши залежність між полярним і осьовими моментами інерції, запишемо

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z,$$

звідки

$$I_z = 2I.$$

Отже

$$I = I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{mR^2}{2}, \tag{3.108}$$

тобто моменти інерції кільця відносно поперечних осей *Ox* та *Oy* дорівнюють половині момента інерції I_z.

3. *Однорідний суцільний диск*

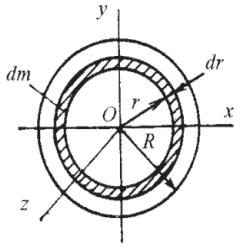


Рис. 3.10

Якщо радіус диска *R*, то момент інерції відносно центральної осі *Oz* (рис. 3.10) визначимо з формули

$$I_z = \int_{(m)} r^2 dm, \tag{3.109}$$

де *dm* – елементарне кільце диска товщиною *dr*, взяте на відстані *r* від осі. Маса цього елементарного кільця

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr.$$

Отже,

$$I_z = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\frac{r^4}{4}\Big|_0^R,$$

звідки

$$I_z = \frac{mR^2}{2}. \tag{3.110}$$

Таким чином, *момент інерції суцільного однорідного диска відносно центральної осі Oz дорівнює половині добутку маси диска на квадрат його радіуса.*

Моменти інерції диска відносно осей *Ox* і *Oy* знаходяться аналогічно до відповідних моментів обруча і становлять половину від I_z, тобто

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{mR^2}{4}. \tag{3.111}$$

4. *Однорідний суцільний циліндр*

Розіб'ємо циліндр, що має висоту h і радіус R, на елементарні диски товщиною dz (рис. 3.11). Маса кожного з цих дисків

$$dm = \frac{m}{h}\,dz, \tag{3.112}$$

а момент інерції кожного елементарного диска відносно осі *Oz* визначається з формули

$$dI_z = \frac{dmR^2}{2} = \frac{mR^2}{2h}\,dz. \tag{3.113}$$

Інтегруючи по всій висоті, знайдемо

$$I_z = \int_0^h \frac{mR^2}{2h}\,dz = \frac{mR^2}{2h}\,z\Big|_0^h,$$

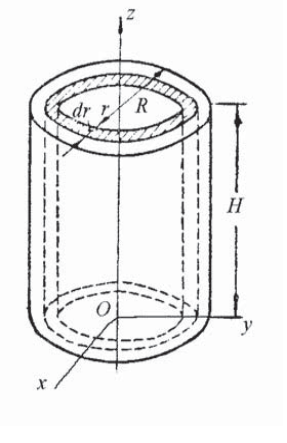


Рис. 3.11

звідки

$$I_z = \frac{mR^2}{2}. \tag{3.114}$$

Отже, *момент інерції однорідного суцільного циліндра відносно поздовжньої осі не залежить від висоти циліндра і дорівнює половині добутку маси циліндра на квадрат його радіуса,* тобто моменти інерції циліндра і тонкого диска відносно осі *Oz* співпадають.

3.12. Теореми про зміну кількості руху точки та системи. Закон збереження кількості руху

Розглянемо наступну теорему динаміки – теорему про зміну кількості руху. В основному рівнянні динаміки для матеріальної точки

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

маса точки $m = const$, а прискорення $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Перепишемо цю рівність у вигляді

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \tag{3.115}$$

Тут $m\vec{v}$ – *кількість руху точки, яка є векторною величиною і дорівнює добутку маси точки на її швидкість*.

Рівність (3.115) являє собою ***теорему про зміну кількості руху точки*** *в диференціальній формі* і може бути сформульована так: *похідна по часу від кількості руху точки дорівнює рівнодійній всіх сил, що діють на точку*.

Розділивши змінні та проінтегрувавши вираз в означених границях, одержимо теорему про зміну кількості руху точки *в інтегральній формі*

$$\int_{v_0}^{v_1} d(m\vec{v}) = \int_0^{t_1} \vec{F}\,dt, \tag{3.116}$$

звідки

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \vec{S}. \tag{3.117}$$

Тут $\vec{S} = \int \vec{F}\,dt$ – імпульс рівнодійної сили, а $\vec{F}\,dt$ – елементарний імпульс сили.

У формі (3.117) теорема про зміну кількості руху точки відома як *теорема імпульсів* і формулюється так: *зміна кількості руху точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійної сили за той же проміжок часу.*

Проектуючи векторні величини формули (3.117) на осі декартової системи координат, одержимо запис теореми *у координатній формі*

$$\begin{aligned} m(v_{1x}-v_{0x}) &= S_x; \\ m(v_{1y}-v_{0y}) &= S_y; \\ m(v_{1z}-v_{0z}) &= S_z, \end{aligned} \tag{3.118}$$

яка широко використовується при дослідженні руху суцільних середовищ.

Як нам відомо, системою матеріальних точок називається така їх сукупність, при якій положення і рух однієї точки залежить від положення і руху інших, тобто положення і рух точок взаємозв'язані.

Якщо система складається з n матеріальних точок, то для кожної k-ої точки можна записати основне рівняння динаміки

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = \vec{F}_1^{\,e} + \vec{F}_1^{\,i}; \\ &... \\ &\frac{d}{dt}(m_k\vec{v}_k) = \vec{F}_k^{\,e} + \vec{F}_k^{\,i}; \\ &... \\ &\frac{d}{dt}(m_n\vec{v}_n) = \vec{F}_n^{\,e} + \vec{F}_n^{\,i}. \end{aligned} \tag{3.119}$$

Тут m_k і $\vec{v}_k$ – маса і швидкість k-ої точки; $\vec{F}_k^{\,e}$ і $\vec{F}_k^{\,i}$ – відповідно рівнодійні зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки системи.

Склавши почленно векторні рівності (3.119), одержимо для всіх n точок системи

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{\,e} + \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{\,i}, \tag{3.120}$$

або

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{\,e}. \tag{3.121}$$

Тут $\vec{Q} = \sum m_k\vec{v}_k$ – кількість руху системи, яка дорівнює векторній сумі кількостей руху точок системи; $\sum\vec{F}_k^{\,e}$ – головний вектор зовнішніх сил, прикладених до точок системи; $\sum\vec{F}_k^{\,i} = 0$ – головний вектор внутрішніх сил, який дорівнює нулю

внаслідок попарної рівності за модулем і протилежності за напрямом внутрішніх сил системи.

Рівність (3.121) являє собою ***теорему про зміну кількості руху системи*** в *диференціальній формі* і формулюється так: *похідна по часу від кількості руху системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що діють на точки системи.*

Спроектувавши рівність (3.121) на декартові осі, маємо теорему про зміну кількості руху системи в проекціях на осі:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} e. \tag{3.122}$$

Розділивши у формулі (3.121) змінні і проінтегрувавши у визначених границях, одержимо теорему про зміну кількості руху системи *в інтегральній формі*:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \int_0^{t_1} \vec{F}_k^e \, dt, \tag{3.123}$$

або

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \vec{S}^e. \tag{3.124}$$

Тут $\vec{Q}_0$ і $\vec{Q}_1$ – початкова і кінцева кількості руху системи; $\vec{S}^e = \int \vec{F}_k^e \, dt$ – імпульс зовнішніх сил за даний проміжок часу.

Теорема імпульсів для системи матеріальних точок формулюється так: *зміна кількості руху системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу зовнішніх сил, що діють на точки системи за той же проміжок часу* .

У проекціях на координатні осі формула (3.124) має вигляд:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = S_x^e; \quad Q_{1y} - Q_{0y} = S_y^e; \quad Q_{1z} - Q_{0z} = S_z^e. \tag{3.125}$$

Теорема імпульсів у вигляді (3.124) чи (3.125) широко використовується в теорії удару, в гідродинаміці, при вивченні руху суцільних середовищ тощо.

Диференціальна форма теорем про зміну кількості руху точки і системи матеріальних точок (рівняння (3.115), (3.121) і (3.122)) найчастіше використовується при розв'язуванні задач, в яких має місце закон збереження кількості руху точки чи системи.

Закон збереження кількості руху.

Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на точки системи, дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^e = 0, \tag{3.126}$$

то має місце закон збереження кількості руху системи

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0; \qquad \vec{Q} = const, \tag{3.127}$$

тобто зберігається та ж кількість руху, яку система мала на початку:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0.$$

Якщо одна з проекцій головного вектора зовнішніх сил на осі координат (наприклад, на вісь Ox) дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^{n}F_{kx}^e = 0, \tag{3.128}$$

то має місце закон збереження проекції кількості руху системи на цю вісь:

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0; \qquad Q_x = const, \tag{3.129}$$

або $$Q_x = Q_{x0}.$$

Цей закон можна записати і для однієї окремої точки. Якщо на матеріальну точку діє система сил, еквівалентна нулю, то з теореми одержимо

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = 0,$$

звідки $m\vec{v} = const$ або $mv = mv_0$.

3.13. Теорема про зміну момента кількості руху точки та системи

Теорема про кількість руху застосовується до вивчення руху точки чи поступального руху тіла, який є наслідком дії сили. Для того, щоб застосувати цю теорему до вивчення обертального руху тіла, який є результатом дії момента сили або момента пари сил, потрібно видозмінити теорему про зміну кількості руху, тобто видозмінити рівність $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ таким чином, щоб одержати момент сили. Для цього домножимо *векторно зліва* праву, а відтак і ліву, частини цієї рівності на радіус-вектор $\vec{r}$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{3.130}$$

Векторний добуток $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0$ є моментом рівнодійної сили $\vec{F}$ відносно центра *O*, з якого проведено радіус-вектор $\vec{r}$. Векторний добуток $\vec{r} \times m\vec{v} = \vec{k}_0$ є моментом кількості руху точки відносно того ж центра *O*. Отже, рівність (3.130) можна переписати у вигляді

$$\frac{d\vec{k}_0}{dt} = \vec{M}_0, \tag{3.131}$$

який являє собою ***теорему про зміну момента кількості руху точки*** і формулюється так: *похідна по часу від момента кількості руху точки відносно деякого центра O дорівнює моменту рівнодійної сили відносно того ж центра O.*

Векторній рівності (3.131) відповідають три рівності в координатній формі:

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z. \tag{3.132}$$

Виходячи з рівності (3.130), для кожної *k*-ої точки системи можемо записати рівність

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k) = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i, \tag{3.133}$$

де $\vec{F}_k^e$ і $\vec{F}_k^i$ – рівнодійні зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до k-ої точки системи.

Складаючи векторно ліві і праві частини для всіх n точок системи, одержимо

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}(\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k) = \sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k \times \vec{F}_k^i,$$

або

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e. \tag{3.134}$$

Векторна величина $\vec{K}_0 = \sum(\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k)$, яка дорівнює векторній сумі моментів кількостей руху всіх точок системи відносно центра O, є моментом кількості руху або *кінетичним моментом* системи матеріальних точок. Вектор $\vec{M}_O^e = \sum(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e)$ є головним моментом всіх зовнішніх сил системи відносно центра O. Вектор $\vec{M}_O^i = \sum(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^i) = 0$ є головним моментом внутрішніх сил системи відносно центра O і дорівнює нулю внаслідок попарної рівності за модулем і протилежності за напрямом всіх внутрішніх сил системи.

Ця важлива ***теорема про зміну момента кількості руху (або кінетичного момента) системи*** читається так: *похідна по часу від момента кількості руху системи, взятого відносно деякого центра O, дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил системи відносно того ж центра O.*

У проекціях на координатні осі рівність (3.134) запишеться так:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e, \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y^e, \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e. \tag{3.135}$$

Теорема про зміну момента кількості руху найчастіше застосовується при вивченні обертального руху тіла. Особливий інтерес має місце у випадку реалізації закону збереження момента кількості руху.

Закон збереження моменту кількості руху.

Якщо головний момент зовнішніх сил системи дорівнює нулю $\vec{M}_0^e = 0$, то з теореми про зміну момента кількості руху системи

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0^e$$

маємо:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = 0, \quad \text{звідки} \quad \vec{K}_0 = const. \tag{3.136}$$

Якщо одна з проекцій головного момента зовнішніх сил на якусь вісь дорівнює нулю, наприклад $\vec{M}_z^e = 0$, то

$$\frac{dK_z}{dt} = 0, \quad \text{звідки} \quad K_z = const. \tag{3.137}$$

Отже, у випадку рівності нулю головного момента зовнішніх сил (або його проекції на якусь вісь) кінетичний момент системи зберігає ту свою величину, яку система мала на початку руху, тобто має місце закон збереження момента кількості руху системи матеріальних точок або закон збереження його проекції на якусь із осей координат.

Цей закон можна записати і для окремої матеріальної точки, якщо момент рівнодійної сил, що діють на точку, дорівнює нулю. Особливо зручно користуватися цим законом у випадку дії на точку так званої центральної сили, тобто сили, лінія дії якої весь час проходить через деяку точку (центр). Прикладом такої сили є сила притягання, яка діє на планети сонячної системи з боку Сонця.

3.14. Кінетичний момент тіла, що обертається навколо осі

Кінетичний момент (або момент кількості руху) тіла є однією з основних динамічних характеристик тіл, що обертаються. Для визначення цього момента розглянемо тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю ω.

Момент кількості руху k-ої точки тіла відносно осі Oz визначається з формули

$$K_{zk} = m_k v_k R_k, \tag{3.138}$$

де $m_k v_k$ – кількість руху k-ої точки; R_k – найкоротша відстань від точки до осі обертання (плече).

Згідно з формулою Ейлера, модуль швидкості k-ої точки тіла $v_k = \omega R_k$, тому вираз (3.138) перепишемо так:

$$K_{zk} = m_k R_k^2 \omega \qquad \text{або} \qquad K_{zk} = I_{zk}\omega. \tag{3.139}$$

Тут $I_{zk} = m_k R_k^2$ – момент інерції k-ої точки тіла відносно осі обертання.

Підсумувавши моменти кількостей руху всіх точок тіла, одержимо кінетичний момент тіла, що обертається навколо осі Oz:

$$K_z = \sum_{k=1}^{n} K_{zk} = (\sum_{k=1}^{n} m_k R_k^2)\omega = \sum_{k=1}^{n} I_{zk}\omega, \tag{3.140}$$

або

$$K_z = I_z \omega. \tag{3.141}$$

Тут $I_z = \sum m_k R_k^2$ – момент інерції тіла відносно осі Oz.

Таким чином, при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі його *кінетичний момент дорівнює добутку момента інерції тіла відносно осі на кутову швидкість обертання.*

3.15. Диференціальне рівняння обертального руху тіла навколо осі

Для запису диференціального рівняння обертального руху розглянемо тверде тіло, що обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω і знаходиться під дією системи зовнішніх сил.

Скористаємося теоремою про зміну момента кількості руху тіла відносно осі Oz:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z^e. \tag{3.142}$$

Кінетичний момент тіла відносно осі *Oz* дорівнює добутку осьового момента інерції тіла I_z, який є сталою скалярною величиною, на кутову швидкість обертання: $K_z = I_z\omega$. Підставивши це значення у (3.142), одержимо

$$\frac{d}{dt}(I_z\omega) = M_z^e, \tag{3.143}$$

звідки

$$I_z\frac{d\omega}{dt} = M_z^e \quad \text{або} \quad I_z\varepsilon = M_z^e. \tag{3.144}$$

Тут $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – кутове прискорення обертального руху тіла.

Рівняння (3.144) являє собою диференціальне рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі *Oz* і може читатися так: *добуток момента інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення дорівнює моменту всіх зовнішніх сил відносно осі обертання*.

Формула (3.144) показує, що при заданому моменті зовнішніх сил M_z^e чим більший момент інерції I_z, тим менше кутове прискорення обертального руху тіла ε і навпаки. Отже, момент інерції при обертальному русі тіла відіграє ту ж саму роль, яку маса відіграє при поступальному русі, тобто *момент інерції* I_z *є мірою інертності тіла при обертанні*.

3.16. Теорема про рух центра мас системи

Центром мас (або центром інерції) системи матеріальних точок називається точка, в якій умовно зосереджена маса всіх точок системи і положення якої визначається з формул, аналогічних до формул для визначення центра ваги в статиці

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{\sum m_k}, \tag{3.145}$$

або в координатній формі

$$x_c = \frac{\sum m_k \vec{x}_k}{\sum m_k}; \qquad y_c = \frac{\sum m_k \vec{y}_k}{\sum m_k}; \qquad z_c = \frac{\sum m_k \vec{z}_k}{\sum m_k}.$$

Тут $\vec{r}_c$, x_c, y_c, z_c – відповідно радіус-вектор і його проекції – координати центра мас системи; m_k – маса k-ої точки системи.

З формули (3.145) можемо записати

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k = \vec{r}_c \sum_{k=1}^{n} m_k \quad \text{або} \quad \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k = M \vec{r}_c. \tag{3.146}$$

Тут $\sum m_k = M$ – маса системи.

Тепер, якщо записати диференціальні рівняння руху k-ої точки системи під дією зовнішніх і внутрішніх сил

$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^{\,e} + \vec{F}_k^{\,i} \tag{3.147}$$

і підсумувати ліві і праві частини цих рівнянь для всіх точок системи

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,i}, \tag{3.148}$$

а потім в лівій частині рівняння переставити місцями знаки суми і диференціювання, то одержимо вираз:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,i}. \tag{3.149}$$

Тут $\sum \vec{F}_k^{\,e}$ – головний вектор зовнішніх сил; $\sum \vec{F}_k^{\,i} = 0$ – головний вектор внутрішніх сил, який внаслідок властивостей внутрішніх сил системи дорівнює нулю.

Враховуючи вираз (3.146), а також рівність $\sum \vec{F}_k^{\,i} = 0$, перепишемо формулу (3.149) у такому вигляді

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(M\vec{r}_c\right)=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{\,e}, \tag{3.150}$$

або

$$M\vec{a}_c=\sum\vec{F}_k^{\,e}. \tag{3.151}$$

Тут $\vec{a}_c=\dfrac{d^2}{dt^2}\vec{r}_c$ – прискорення центра мас системи.

Вираз (3.151) являє собою теорему про рух центра мас системи, яка формулюється так: *добуток маси системи на прискорення центра мас дорівнює рівнодійній всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи.*

Порівнюючи (3.151) з диференціальним рівнянням руху точки, яке у векторній формі має вигляд $m\vec{a}=\sum\vec{F}_k$, ми бачимо, що *центр мас системи рухається подібно до матеріальної точки, маса якої дорівнює масі системи, під дією зовнішніх сил, прикладених до точок системи*.

Якщо ліву частину (3.151) переписати так:

$$M\vec{a}_c=M\frac{d\vec{v}_c}{dt}=\frac{d}{dt}(M\vec{v}_c),$$

то теорему про рух центра мас можемо легко перетворити на теорему про зміну кількості руху системи

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}_c)=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{\,e},$$

або

$$\frac{d\vec{Q}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{\,e}. \tag{3.152}$$

Тут $M\vec{v}_c=\vec{Q}$ – кількість руху системи матеріальних точок. У цьому легко переконатися, зробивши ряд простих дій з урахуванням виразу (3.146):

$$M\vec{v}_c=M\frac{d\vec{r}_c}{dt}=\frac{d}{dt}\left(M\vec{r}_c\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{r}_k\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{d\vec{r}_k}{dt}=\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{v}_k=\vec{Q}.$$

Закон збереження руху центру мас.

Причиною однієї з найбільш поширених помилок є незнання закону збереження руху центра мас. Одним з прикладів нерозуміння цього закону було порівняно недавнє (початок 60-х років) сенсаційне відкриття «машини Діна», розрекламованої в США як «майбутнє авіації», яка нібито могла підніматися вгору без втручання зовнішніх сил.

Запишемо теорему про рух центра мас системи матеріальних точок у вигляді

$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt}=\vec{F}^e. \tag{3.153}$$

У випадку рівності нулю головного вектора зовнішніх сил швидкість центра мас є сталою величиною

$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt}=0,\quad \vec{v}_c=const \quad \text{або} \quad \vec{v}_c=\vec{v}_{c_0}. \tag{3.154}$$

Якщо на початку руху система знаходилась у спокої $\vec{v}_{c_0}=0$, тобто якщо

$$\vec{v}_c=\frac{d\vec{r}_c}{dt}=0,\quad \text{то} \quad \vec{r}_c=const. \tag{3.155}$$

Тут $\vec{r}_c$ – радіус-вектор центра мас.

Отже *у випадку, коли головний вектор зовнішніх сил і початкова швидкість центра мас дорівнюють нулю, положення центра мас системи залишається незмінним* при будь-яких переміщеннях точок всередині системи.

Якщо дорівнює нулю лише одна з проекцій головного вектора зовнішніх сил на будь-яку координатну вісь (наприклад, на вісь *Ox*), то будемо мати закон збереження проекції швидкості центра мас на цю вісь ($v_{cx}=const$).

Якщо ж проекція швидкості центра мас системи на дану вісь на початку руху дорівнювала нулю (наприклад, $v_{cx_0}=0$), то матимемо закон збереження даної координати центра мас ($x_c=const$).

ГЛАВА 4. ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ

Принцип – це основне, вихідне положення будь-якої науки. Принципами механіки називаються загальні положення, які містять у собі повну інформацію про механічний рух чи рівновагу матеріальних об'єктів. Різні принципи механіки можуть бути рівноцінні між собою або відрізнятись один від другого степенем загальності.

В основу побудови механіки як науки положені декілька загальних принципів, прикладом яких може служити принцип Даламбера для невільної матеріальної точки. Цей принцип являє собою не що інше, як другий закон Ньютона, доповнений аксіомою про звільнення від в'язей. Однак, якщо положити принцип Даламбера в основу побудови механіки невільної системи матеріальних точок, то ми зіткнемося зі значними труднощами.

Подолання цих труднощів можливе лише при конкретизації характеру накладених на точки системи в'язей і формулюванні загальних принципів механіки, в яких, на відміну від принципу Даламбера, ця конкретизація автоматично враховується для системи в цілому, а не для кожної точки зокрема. Як виявилось, такого типу конкретизація характеру в'язей можлива в їх частковій ідеалізації.

Стосовно питання ідеалізації в'язей, то ми з цим уже зустрічалися у статиці. До ідеальних в'язей ми віднесли в'язі у вигляді абсолютно гладеньких поверхонь або ліній, гнучких нерозтяжних ниток, ідеальних стержнів. Абсолютно шорстка нерухома поверхня є прикладом ідеальної в'язі для тіла, що котиться по ній без проковзування (точка контакту тіла з поверхнею миттєво стає нерухомою).

У статиці ми розглядали найпростіші в'язі і знаходили їх реакції. Однак у більшості випадків при дослідженні руху механічних систем визначення реакцій в'язей не є необхідним. Тому виникло питання про пошуки такого методу розв'язування задач динаміки невільної механічної системи, при якому реакції в'язей автоматично виключались би з розгляду. І такий метод був знайдений

Жозефом Луї Лагранжем (1736–1813), основоположником нової механіки, названої, на відміну від класичної, аналітичною механікою.

Аналіз механічних в'язей показав Лагранжу, що більшість з них мають одну чудову властивість, а саме: сума елементарних робіт реакцій в'язей на нескінченно малих можливих (або віртуальних) переміщеннях системи дорівнює нулю (Булгаков, 2007). Такі в'язі були названі *ідеальними.* Застосування поняття можливих переміщень викликане тим, що коли на механічну систему накладені в'язі, то дана система не в змозі здійснювати *будь-які* переміщення, оскільки в'язі допускають лише *деякі* переміщення точок системи.

До загальних принципів механіки, крім принципу Даламбера, належать принцип Лагранжа (або принцип можливих переміщень, який називають загальним рівнянням статики), а також принцип Даламбера-Лагранжа, відомий як загальне рівняння динаміки. Ці три принципи лягли в основу аналітичної механіки, яка збагатила науку новими могутніми методами.

Аналітична механіка – це розділ механіки, який, за словами його творця Лагранжа, «не потребує ні побудов, ні геометричних або механічних міркувань, а потребує лише алгебраїчних операцій, підпорядкованих планомірному і одноманітному ходу». Блискучим підтвердженням цього є метод побудови диференціальних рівнянь руху механічної системи в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа ІІ роду).

4.1. Принцип Даламбера

Як ми вже говорили, основний закон механіки – ІІ закон Ньютона – був відкритий Ньютоном стосовно до руху вільної матеріальної точки чи тіла, тобто для задач небесної механіки. Але після того, як була додатково сформульована аксіома про звільнення від в'язей, Жан Лерон Даламбер (1717–1783) запропонував дуже зручний метод (або принцип), який дозволив формально звести задачі динаміки до рівнянь рівноваги, тобто до рівнянь статики.

У деяких книгах принцип Даламбера іменується принципом Германа-Ейлера-Даламбера, оскільки ним задовго до Даламбера користувались, але ніде цього не опублікували, петербурзькі академіки Я. Герман (1716 р.) та Л. Ейлер (1737 р.).

Запис принципу Даламбера можемо одержати шляхом таких нескладних дій. Запишемо диференціальне рівняння руху невільної матеріальної точки, на яку діють активні сили $\vec{F}$ і реакції в'язей $\vec{N}$

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} \tag{4.1}$$

і перепишемо цю рівність таким чином:

$$\vec{F} + \vec{N} - m\vec{a} = 0. \tag{4.2}$$

Оскільки добуток $m\vec{a}$, взятий зі знаком «мінус», теж має розмірність сили, то цю силу було названо *даламберовою силою інерції*

$$\vec{F}^{\text{зі}} = -m\vec{a}. \tag{4.3}$$

Силою інерції називається векторна величина, яка дорівнює добутку маси точки на її прискорення і направлена протилежно прискоренню.

Рівність (4.2) є математичним записом *принципу Даламбера* для матеріальної точки:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{\text{ін}} = 0. \tag{4.4}$$

Формулювати принцип Даламбера можемо так: *у кожний момент часу активні сили і реакції в'язей, що діють на точку, зрівноважуються силами інерції.*

Якщо точка рухається по криволінійній траєкторії, то її прискорення складається із суми двох прискорень – дотичного (тангенціального) і нормального. Відповідно до цього сили інерції також називають тангенціальними і нормальними (або відцентровими) силами інерції. За модулем ці сили інерції відповідно дорівнюють:

$$F_{\tau}^{\text{ін}} = ma_{\tau} = m\frac{dv}{dt}; \qquad F_{n}^{\text{ін}} = ma_{n} = \frac{v^2}{\rho}. \tag{4.5}$$

Якщо точка належить тілу, що обертається навколо осі, то модулі її тангенціальної і відцентрової сил інерції визначаються через параметри обертального руху тіла

$$F_{\tau}^{\text{ін}} = m\,\varepsilon\,R; \qquad F_{n}^{\text{ін}} = m\,\omega^{2}\,R. \tag{4.6}$$

Тут R – відстань від точки до осі обертання; ω і ε – кутова швидкість і кутове прискорення тіла.

Для системи матеріальних точок принцип Даламбера записується у вигляді системи двох векторних рівнянь, що зв'язують між собою активні сили, реакції в'язей, сили інерції та моменти цих сил відносно деякого центра O:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}_k + \vec{N}_k + \vec{F}_k^{\text{ін}}) = 0; \\ &\sum_{k=1}^{n}[\vec{M}_0(\vec{F}_k) + \vec{M}_0(\vec{N}_k) + \vec{M}_0(\vec{F}_k^{\text{ін}})] = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

При практичному розв'язуванні задач рівняння (4.7) записують у проекціях на осі декартової системи координат, або на осі натурального тригранника $\tau, n, b,$ або на будь-які інші осі.

4.2. Класифікація в'язей

Перш ніж перейти до розгляду інших принципів механіки, познайомимось із характером механічних в'язей, які можуть бути накладені на точки системи. Усі в'язі, що обмежують положення або рух матеріальних об'єктів, математично описуються так званими рівняннями в'язей, у які в загальному випадку можуть входити час руху об'єкта, його координати і швидкості:

$$f(x_k, y_k, z_k;\ \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k;\ t) = 0.$$

У кожному конкретному випадку, в залежності від виду цієї функції, в'язі розрізняють (класифікують) так:

- геометричні чи кінематичні;
- таціонарні чи нестаціонарні;
- голономні чи неголономні;

- утримуючі чи неутримуючі.

Геометричними в'язями називають в'язі, до рівнянь яких входять тільки координати і можливо час руху матеріального об'єкта. Наприклад, рівняння в'язі для математичного маятника сталої довжини з підвісом у початку координат має вигляд $x^2 + y^2 = l^2$ або $x^2 + y^2 - l^2 = 0$.

Кінематичними (або диференціальними) називаються в'язі, які накладають обмеження на швидкості точок, до рівнянь яких входять перші похідні від координат. Наприклад, при коченні циліндра без проковзування по нерухомій площині швидкість центра циліндра і його кутова швидкість зв'язані між собою залежністю, яка є рівнянням даної в'язі: $v_c = \omega r$ або $v_c - \omega r = 0$.

Стаціонарні в'язі – це в'язі, до рівнянь яких час t явно не входить, а *нестаціонарні* – до рівнянь яких час входить у явному вигляді. Наведені вище приклади рівнянь в'язей математичного маятника і колеса є прикладами стаціонарних в'язей. Прикладом нестаціонарної в'язі може бути математичний маятник, підвішений на нитці, яка змінює свою довжину (втягується в отвір, що співпадає з точкою підвісу).

До *голономних* належать всі геометричні в'язі, а також ті з кінематичних в'язей, які шляхом інтегрування можуть бути приведені до геометричних. До *неголономних* належать ті кінематичні в'язі, рівняння яких не можуть бути проінтегровані. Прикладом неголономної в'язі може служити куля, що котиться по площині без просковзування. Однак циліндр, що котиться без просковзування по площині, є прикладом голономної в'язі, оскільки рівняння в'язі $\dot{x}_c = R\dot{\varphi}$ допускає інтегрування $x = R\varphi$.

Утримуючою (або двобічною) в'яззю називається в'язь, дія якої на тіло не може припинитись. Прикладом утримуючої в'язі є математичний маятник, підвішений на невагомому (ідеальному) стержні. *Неутримуючою* (або однобічною) в'яззю є в'язь, від якої тіло може звільнитися. Прикладом неутримуючої в'язі є площина, по якій рухається тіло, що може залишити цю площину.

4.3. Можливі переміщення. Ідеальні в'язі

В аналітичній механіці широко використовується поняття можливого переміщення. У випадку стаціонарних утримуючих в'язей можливими (або віртуальними) переміщеннями називаються нескінченно малі уявні переміщення, які допускаються накладеними на точки системи в'язями в даний момент часу. При цьому слід мати на увазі, що можливі переміщення (на відміну від дійсних переміщень, які є наслідком дії сил), являють собою деякий геометричний образ, не зв'язаний ні з рухом, ні зі зміною самих в'язей. Наприклад, для годинникової стрілки, шарнірно закріпленої одним кінцем, можливими переміщеннями є два нескінченно малі повороти $\delta\varphi$: один за ходом годинника і другий – проти ходу.

Якщо в'язь не є утримуючою, то матимемо на увазі переміщення, які можливі без звільнення від в'язі. Наприклад, для тіла, підвішеного на нитці, можливим переміщенням є нескінченно мала дуга δs, відміряна вліво чи вправо від вертикального положення рівноваги. Незважаючи на те, що нитка не є утримуючою в'яззю (допускає переміщення тіла вгору), поки нитка натягнута, вона діє так, ніби вона є утримуючою в'яззю. З того моменту, коли натяг нитки стає рівним нулю, можемо вважати, що в'язі не існує і тіло може рухатись як вільне.

У загальному випадку можливе переміщення позначається $\delta\vec{r}$ – уявний нескінченно малий приріст радіуса-вектора точки. Можливі переміщення узагальнених координат, які ми будемо розглядати при складанні рівнянь Лагранжа ІІ роду, часто називають варіаціями координат.

Тепер розглянемо поняття ідеальних (або досконалих) в'язей. Як відомо зі статики, в результаті накладання на тіло в'язей з'являються сили, які називаються реакціями в'язей. Найпростішим прикладом ідеальної в'язі є гладенька поверхня, для якої силою тертя можна знехтувати. Реакція гладенької поверхні $\vec{N}$ перпендикулярна до цієї поверхні, тобто перпендикулярна до будь-якого можливого переміщення по ній. Робота реакції $\vec{N}$ гладенької поверхні на переміщенні тіла по цій поверхні дорівнюватиме нулю.

Таким чином, з наведеного прикладу ми можемо зробити висновок, що ідеальними в'язями називаються такі в'язі, для яких сума елементарних робіт їх реакцій на будь-якому можливому переміщенні дорівнює нулю.

4.4. Принцип можливих переміщень. Загальне рівняння статики

Статика твердого тіла (або геометрична статика), яка приведена в першому розділі курсу і якою ми завдячуємо працям Луі Пуансо (1777–1859), являє собою дуже просту і зручну для використання систему. Але основний метод статики – складання шести рівнянь рівноваги для одного тіла, на яке діє довільна просторова система сил, стає дуже громіздким у тих випадках, коли розглядається конструкція із декількох або ж багатьох тіл. Тобто, при наявності n тіл складання системи $6n$ рівнянь і їх розв'язання є досить громіздкою задачею.

Крім того, у більшості прикладних задач механіки не потрібне знання всіх сил і реакцій в'язей, а лише тих, що цікавлять інженера- конструктора. Ось чому особливого значення набуває метод аналітичної статики, оснований на використанні принципу можливих переміщень. Цей принцип можемо отримати із наведеного вище принципу Даламбера – рівняння (4.7). Для випадку, коли точки системи знаходяться у спокої або рухаються рівномірно і прямолінійно, тобто при відсутності сил інерції, маємо записати:

$$\vec{F}_k + \vec{N}_k = 0.$$

Тут $\vec{F}_k$ – рівнодійна активних сил; $\vec{N}_k$ – рівнодійна реакцій в'язей.

Домноживши цю рівність скалярно на можливе переміщення будь-якої k-ої точки системи $\delta\vec{r}_k$ і підсумувавши для всіх точок системи, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}_k + \vec{N}_k)\delta\vec{r}_k = 0.$$

Якщо на точки системи накладені ідеальні в'язі, то, згідно з визначенням ідеальності в'язей, сума елементарних робіт реакцій в'язей на можливих

переміщеннях системи дорівнює нулю $\sum_{k=1}^{n}\vec{N}_k = 0$. Отже, матимемо такий математичний вираз принципу можливих переміщень (або загального рівняння статики):

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0,$$

або

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A(\vec{F}_k) = 0, \tag{4.8}$$

який читається так: *для рівноваги механічної системи з ідеальними в'язями необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума елементарних робіт всіх активних сил на можливих переміщеннях точок системи дорівнювала нулю.*

4.5. Принцип Даламбера-Лагранжа
Загальне рівняння динаміки

Згідно з принципом Даламбера, для будь-якої *k*-ої точки механічної системи можемо записати

$$\vec{F}_k + \vec{N}_k + \vec{F}_k^{\text{ін}} = 0.$$

Домножимо цю рівність скалярно на будь-яке можливе переміщення точки $\delta\vec{r}_k$ і підсумуємо для всіх точок системи

$$\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}_k + \vec{N}_k + \vec{F}_k^{\text{ін}})\delta\vec{r}_k = 0.$$

Оскільки для механічних систем з ідеальними в'язями сума елементарних робіт реакцій в'язей на можливих переміщеннях дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{N}_k\delta\vec{r}_k = 0,$$

то одержимо рівняння, яке відоме як *загальне рівняння динаміки* (або принцип Даламбера-Лагранжа):

$$\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}_k + \vec{F}_k^{\text{ін}})\delta\vec{r}_k = 0, \tag{4.9}$$

або

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A(\vec{F}_k)+\sum_{k=1}^{n}\delta A(\vec{F}_k^{\text{ін}})=0. \qquad (4.10)$$

Рівняння (4.9) та (4.10) є результатом об'єднання двох принципів механіки – принципу Даламбера і принципу можливих переміщень Лагранжа і формулюється так: *при русі механічної системи з ідеальними в'язями сума елементарних робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні точок системи дорівнює нулю.*

4.6. Диференціальне рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа ІІ роду)

Складаючи диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок у декартових координатах на початку розділу «Динаміка», ми бачили, що кількість цих рівнянь дорівнює $3n$ (n– кількість точок системи). Якщо ж система невільна, то до цих рівнянь додаються рівняння в'язей і кількість рівнянь досягає $3n+s$, де s – кількість в'язей. Розв'язування такої системи рівнянь становить значні труднощі, оскільки зі зменшенням кількості степенів вільності системи кількість рівнянь не зменшується, а збільшується.

Лагранж у 1788 р. написав свою знамениту книгу «Аналітична механіка», яку Гамільтон назвав науковою поемою за стрункy математичну єдність і внутрішню гармонію побудови. У цій книзі Лагранж, крім принципу можливих переміщень і загального рівняння динаміки, вивів свої славнозвісні рівняння І і ІІ роду. Ця книга і ці рівняння знамениті ще й тим, що Лагранж для побудови своєї механіки не використав жодного малюнка.

Строге виведення рівнянь Лагранжа І і ІІ роду виходить за рамки даного курсу, тому зупинимося лише на деяких основних напрямках на цьому шляху. Спочатку розглянемо застосовані Лагранжем поняття узагальнених координат і узагальнених сил механічної системи.

Узагальнені координати. Положення і рух механічної системи, що складається з n матеріальних точок, визначається $3n$ декартовими координатами. Однак якщо на систему накладені голономні стаціонарні утримуючі в'язі, то рівняння цих в'язей можемо розв'язати відносно s декартових координат. Тоді число вільних (незалежних) координат, які визначають положення точок системи, дорівнюватиме $N = 3n - s$. Це число співпадає з числом степенів вільності системи.

При розв'зуванні деяких задач для визначення положення і руху системи замість декартових координат точок можуть використовуватись інші геометричні параметри: кути, площі, об'єми, криволінійні координати тощо.

Будь-які незалежні параметри, які однозначно визначають положення і рух точок системи, називаються узагальненими координатами і позначаються буквами $q_1, q_2, \ldots, q_N$. Похідні від узагальнених координат по часу називаються *узагальненими швидкостями* і позначаються символами з крапкою $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N$.

Узагальнені сили. Якщо положення і рух кожної точки системи повністю визначається узагальненими координатами $q_1, q_2, \ldots, q_N$, то радіус-вектор k-ої точки системи є функцією цих узагальнених координат:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_N). \tag{4.11}$$

Визначимо суму елементарних робіт сил, прикладених до точок системи, на їх можливих переміщеннях:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k. \tag{4.12}$$

Тут $\vec{F}_k$ – рівнодійна активних сил, прикладених до k-ої точки системи.

Розглядаючи радіус-вектор k-ої точки як функцію узагальнених координат, виразимо варіацію радіуса-вектора $\vec{r}_k$ таким чином:

$$\delta \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_N} \delta q_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \tag{4.13}$$

Тоді вираз для суми елементарних робіт матиме вигляд

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k \cdot \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i, \tag{4.14}$$

або, після зміни порядку підсумовування,

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k = \sum_{i=1}^{N}(\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i})\delta q_i. \tag{4.15}$$

Позначимо внутрішню суму формули (4.15) через Q_i і назвемо її *узагальненою силою* i-ої узагальненої координати, тобто

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}. \tag{4.16}$$

Тепер вираз для суми елементарних робіт активних сил системи запишеться у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k = \sum_{i=1}^{N}Q_i \delta q_i. \tag{4.17}$$

Таким чином, для механічних систем з ідеальними голономними стаціонарними утримуючими в'язями *узагальненою силою називається коефіцієнт у виразі елементарної роботи активних сил системи на можливому переміщенні (варіації) даної узагальненої координати.* Кількість узагальнених сил дорівнює кількості узагальнених координат.

Наприклад, кривошип має одну степінь вільності (може лише обертатись навколо нерухомої осі) і його узагальненою координатою є кут повороту $\varphi = \varphi(t)$, а узагальненою силою – момент сил, що діють на кривошип і викликають його обертання.

Побудова рівнянь Лагранжа ІІ роду. Запишемо загальне рівняння динаміки

$$\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}_k + \vec{F}_k^{\text{ін}})\delta \vec{r}_k = 0 \tag{4.18}$$

або

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k - \sum_{k=1}^{n}m_k \vec{a}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \tag{4.19}$$

Згідно з рівністю (4.17), можемо записати

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\cdot\delta\vec{r}_k=\sum_{k=1}^{n}\delta A_k=\sum_{i=1}^{N}Q_i\cdot\delta q_i, \tag{4.20}$$

де $k=1, 2, 3,\ldots, n$ (n– кількість точок системи); $i=1, 2, 3,\ldots, N$ (N – кількість узагальнених координат).

Вираз $\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{a}_k\cdot\delta\vec{r}_k$ перетворимо так:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{a}_k\cdot\delta\vec{r}_k&=\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt}\cdot\delta\vec{r}_k=\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\cdot\delta q_i=\\&=\left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{v}_k\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\right)-\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{v}_k\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\right)\right]\delta q_i.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Це перетворення стане очевидним, коли ми наведемо приклад диференціювання добутку двох функцій a і b: $a'b=(ab)'-ab'$.

На підставі тотожностей Лагранжа

$$\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}=\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_i}\quad\text{та}\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_i} \tag{4.22}$$

проведемо ряд перетворень виразу (4.21), які ми тут випускаємо, відсилаючи студента до повних курсів теоретичної механіки), і врешті-решт одержимо:

$$\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\delta q_i. \tag{4.23}$$

Тут $T=\sum T_k$ – кінетична енергія механічної системи, яка складається із $k=1, 2, 3,\ldots, n$ матеріальних точок.

Підставляючи вирази (4.20) та (4.23) у рівняння (4.19), отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i\right]\delta q_i=0. \tag{4.24}$$

Оскільки δq_i довільні і незалежні, то запишемо кінцевий вигляд формули, яка називається рівнянням Лагранжа ІІ роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i. \tag{4.25}$$

Тут q_i – узагальнені координати, $i = 1, 2, 3, \ldots, N$, де N – число узагальнених координат, яке дорівнює числу степенів вільності системи; $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ – узагальнена швидкість; Q_i – узагальнена сила, скалярна величина, яка являє собою коефіцієнт при варіаціях узагальнених координат у виразах елементарної роботи.

Читання математичного запису рівняння Лагранжа ІІ роду (4.25) може бути таким: *похідна по часу від частинної похідної кінетичної енергії системи по узагальненій швидкості мінус частинна похідна від кінетичної енергії по узагальненій координаті дорівнює узагальненій силі.*

Ці рівняння являють собою систему звичайних диференціальних рівнянь невільної системи матеріальних точок при наявності утримуючих ідеальних голономних в'язей. Кількість диференціальних рівнянь, які можуть бути складені за допомогою формалізму Лагранжа, дорівнює кількості узагальнених координат, тобто кількості степенів вільності системи.

Методика складання рівнянь Лагранжа ІІ роду. Для складання диференціальних рівнянь руху системи в узагальнених координатах пропонується виконання певної послідовності чисто формальних математичних дій (не вдаючись, як писав сам Лагранж, ні до геометричних, ні до механічних міркувань, а використовуючи лише алгебраїчні операції):

1. З'ясувати характер в'язей, накладених на механічну систему (рівняння Лагранжа можна застосовувати лише тоді, коли в'язі ідеальні і голономні).

2. Визначити число степенів вільності системи.

3. Вибрати узагальнені координати і визначити узагальнені швидкості.

4. Визначити кінетичну енергію системи і виразити її через узагальнені координати і швидкості.

5. Надати точкам системи одного з можливих переміщень і визначити елементарну роботу активних сил, прикладених до точок системи.

6. Виписати узагальнені сили, що відповідають узагальненим координатам.

7. Визначити частинні похідні $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ і $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ та похідну $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$.

8. Підставити всі одержані величини у формулу (4.25) і записати диференціальні рівняння руху механічної системи.

На закінчення можемо констатувати, що диференціальні рівняння руху механічних систем в узагальнених координатах – рівняння Лагранжа ІІ роду – можна скласти, знаючи загальний вираз лише двох величин: кінетичної енергії системи і роботи сил на можливих переміщеннях. Число цих рівнянь мінімальне і дорівнює числу степенів вільності системи. Разом з тим, рівняння Лагранжа досить загальні: їх можна використовувати для різних фізичних систем, зокрема електромагнітного поля. Крім того, опис руху невільної механічної системи у формі рівнянь Лагранжа ІІ роду має чітку математичну структуру, а тому їх розв'язування (інтегрування) є достатньо визначеним, щоб досліджувати його чисто математично.

ЧАСТИНА ІІ. МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ

ГЛАВА 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ВИЗНАЧЕННЯ ТА ДОПУЩЕННЯ

Механіка взагалі й механіка твердого деформівного тіла зокрема належать до тих природничих наук, які відіграють першорядну роль у розвитку інженерної справи та здебільшого визначають рівень науково-технічного прогресу. Механіка посідає особливе місце серед наук, які закладають фундамент будь-якої інженерії. Народившись як мистецтво, як наука про побудову машин та механізмів, механіка з найдавніших часів слугувала основою розвитку та прогресу суспільства. Жодна галузь національної економіки: промисловість, АПК, будівництво, машинобудування – неможлива без надійного теоретичного фундаменту, основну частину якого складає механіка.

Незважаючи на розмаїтість проблем, які виникають під час створення та експлуатації машин, конструкцій та споруд, методи та підходи до їх вирішення мають спільну наукову базу, якою є механіка твердого деформівного тіла (МТДТ). Це обумовлює особливе значення механіки, адже саме механіка видає перепустку в техніку, у виробництво. Механіка є однією з головних наукових основ техніки будь-якого призначення: чи то агропромислової, чи аерокосмічної.

Для інженерно-технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів, у тому числі й аграрних, найбільш необхідною є механіка матеріалів і конструкцій (ММК), яка розглядає інженерні методи розрахунків елементів конструкцій, інженерних споруд та деталей машин на міцність, жорсткість і стійкість.

Під *міцністю* розуміють здатність матеріалів, елементів конструкцій, споруд та деталей машин, виготовлених з цих матеріалів, чинити опір дії зовнішнього навантаження не руйнуючись. Основним критерієм міцності є відсутність руйнування.

У багатьох випадках для надійної роботи конструкції міцності її елементів

буває недостатньо. Елементи конструкції, а також конструкція в цілому не повинні в процесі експлуатації зазнавати суттєвої зміни своїх розмірів та форми, тобто не повинні отримувати великих деформацій, або кажуть, що вони мусять бути достатньо жорсткими.

Під *жорсткістю* розуміють здатність елементів конструкції, деталей машин протистояти деформуванню під дією зовнішніх сил, тобто чинити опір змінюванню своїх розмірів і форми таким чином, щоб при заданих навантаженнях деформації не перевищували наперед заданої величини.

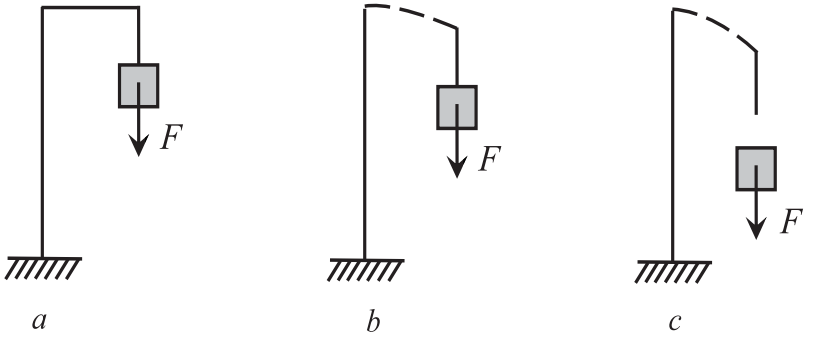


Рис. 1.1

Не викликає, наприклад, сумніву, що балки, як головні несучі елементи розрахункової схеми (рис. 1.1,*a*) баштового підіймального крану, повинні бути не тільки міцними, тобто не руйнуватися при підійманні вантажу, але й досить жорсткими, а саме не отримувати при навантаженні більше визначених нормами пружних, зникаючих після розвантаження деформацій. Що ж стосується залишкових, пластичних деформацій, то вони взагалі недопустимі (рис. 1.1,*b, c*), у противному разі кран був би непридатний до подальшої експлуатації. Нарешті, трапляються випадки, коли необхідно забезпечити зберігання початкової форми елементів конструкції або усієї конструкції. Це означає, що необхідно забезпечити стійкість початкової пружної форми рівноваги елементів.

Стійкістю називають здатність конструкції та її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

Наприклад, стержень, затиснутий у нижньому перерізі під дією осьової сили F, до певного значення стискуючої сили F_{cr}, відхилений від вертикального положення горизонтальною силою Q, повертається до початкового положення, якщо припинити дію сили Q. У такому випадку кажуть, що його початкова прямолінійна форма рівноваги є стійкою (рис. 1.2,*а*). Коли стискуюча сила досягає критичного значення F_{cr}, стержень, виведений із прямолінійної форми рівноваги, може як повернутися, так і не повернутися до неї після припинення дії сили Q (рис. 1.2,*б*). Такий стан рівноваги, коли можлива як початкова прямолінійна форма рівноваги, так і близька до неї нова криволінійна форма рівноваги стержня, називають байдужим або перехідним. Якщо значення стискуючої сили, більші за критичне, то прямолінійна форма рівноваги не зберігається, поперечні перерізи стержня отримують суттєві прогини, вісь стержня сильно скривлюється і набирає нової, криволінійної форми рівноваги (рис. 1.2,*с*). Таке явище називають втратою стержнем стійкості початкової прямолінійної форми рівноваги, а відповідне значення стискуючої сили при цьому називають критичним значенням F_{cr}, або просто критичною силою. Після втрати стійкості стержень практично втрачає свою несучу здатність, мала зміна стискуючої сили викликає великі прогини поперечних перерізів, що і є основним критерієм втрати стійкості.

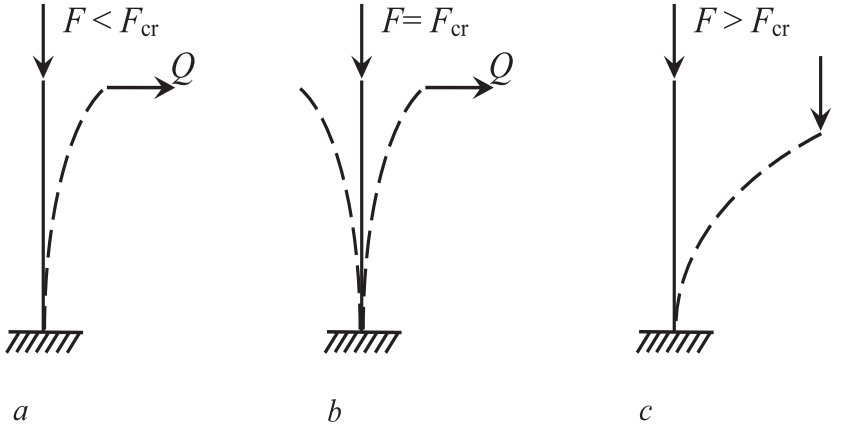


Рис. 1.2

Проектуючи машини, конструкції, споруди, як правило, потрібно не тільки забезпечити їх міцність, жорсткість та стійкість, а й потурбуватись, щоб на їх виготовлення пішла мінімальна кількість матеріалів, що безумовно зменшить їх вагу та вартість. Це протиріччя, очевидно, і є основним стимулом та двигуном подальшого розвитку науки про опір матеріалів – основної складової механіки матеріалів і конструкцій (ММК). Розрахунки елементів конструкцій, споруд та деталей машин на міцність, жорсткість та стійкість проводять не тільки на етапі проектування, але і для теоретичного обґрунтування, коли проекти готові, і навіть тоді, коли експериментальні зразки машин уже виготовлені, а деякі вузли або деталі виходять із ладу.

При розв'язуванні задач ММК спирається на досягнення багатьох суміжних наук, у першу чергу теоретичної механіки, теорії пружності, теорії пластичності, фізики твердого тіла, матеріалознавства. У свою чергу, ММК слугує основою для вивчення таких дисциплін, як статика і динаміка споруд (теорія споруд), деталі машин, підіймально-транспортні, сільськогосподарські машини і т. ін.

1.1. Історія науки про міцність та її перспективи

У ті далекі часи, коли люди тільки-но почали займатися будівництвом, вони зустрічалися з необхідністю мати відомості про здатність матеріалів чинити опір дії зовнішніх навантажень, щоб на основі цих відомостей підбирати необхідні, надійні розміри споруд та конструкцій. Безумовно, що стародавнім єгиптянам були відомі деякі емпіричні правила подібного роду, оскільки без них неможливо було б побудувати грандіозні монументи, храми, мечеті з мінаретами, піраміди, обеліски, багато з яких існують до наших часів. Великий досвід будівництва був накопичений стародавніми греками та римлянами, але в значній мірі втрачений і тільки в епоху Відродження поновлений у працях Леонардо да Вінчі (1452–1519). На жаль, наукові відкриття Леонардо да Вінчі залишились захованими в його записниках, і інженери XV і XVI століть продовжували, як і в римську

епоху, призначати розміри елементів споруд, спираючись тільки на практичний досвід та інтуїцію.

Виникнення науки про міцність пов'язують з ім'ям видатного італійського вченого Галілео Галілея (1564–1642), який зробив перші спроби встановлення небезпечних розмірів елементів конструкцій аналітичним шляхом. Відома книга Галілея "Бесіди і математичні докази, що належать до двох нових галузей науки" (1638) знаменує собою виникнення науки про міцність. 1660 року англійський вчений Роберт Гук (1635–1703) встановив закон деформування пружних тіл, а в 1678 р. написав трактат "Про відновні здатності або пружність", де сформулював закон, за яким деформація пружного тіла пропорційна діючій на нього силі, і який є основним у науці про опір матеріалів. Цей закон був названий Гуком "законом природи", а тепер він відомий як закон Гука.

Швидкий розвиток науки про міцність почався наприкінці XVIII століття у зв'язку з бурхливим розвитком промисловості та транспорту.

Значний внесок в розвиток аналітичних методів ММК зробили Л. Ейлер (1707–1783), Д. Бернуллі (1700–1782). Всесвітньо визнаними в області механіки деформівного твердого тіла є наукові праці видатних російських та українських вчених М.Г. Бубнова, Х.С. Головіна, Д.І. Журавського, Ф.С. Ясинського, В.Л. Кирпичова, С.П. Тимошенка, О.М. Крилова, М.М. Бєляєва, О.О. Умансь-кого, В.І. Феодосьєва, О.М. Динніка, Г.М. Савіна, Г.С. Писаренка та ін. Класичну теорію сільськогосподарських машин та знарядь і основи їх розрахунків ство-рили академік В.П. Горячкін і видатний український фахівець у галузі сільсько-господарських машин П.М. Василенко та його учні В.М. Булгаков, Д.Г. Войтюк та інші.

Подальший розвиток вітчизняної та світової науки і техніки, зокрема сіль-ськогосподарської, і на сучасному етапі відчуває потребу в нових матеріалах, конструкціях, у розробці більш досконалих інженерних методів їх розрахунків та експлуатації.

1.2. Сили, деформації та їх види

Механіка матеріалів і конструкцій є одним із розділів механіки реального твердого тіла, здатного деформуватися під впливом прикладених до нього зовнішніх сил. Зовнішніми силами для даного тіла є сили, які викликані дією на нього інших тіл. Зовнішні сили, розподілені по всьому об'єму тіла або по його частині, називають об'ємними. Зовнішні сили, прикладені до поверхні тіла, називаються поверхневими. Коли зовнішня сила діє на малу поверхню порівняно з поверхнею тіла, її називають зосередженою. Систему зовнішніх сил, прикладених до тіла, називають *навантаженням*. Навантаження може бути статичним або динамічним.

Статичним називають таке навантаження, за дії якого не виникають прискорення частинок тіла або ці прискорення малі і відповідними силами інерції можна нехтувати порівняно з діючими силами. Статичне навантаження має місце за поступового збільшення прикладеної до тіла сили від нуля до її кінцевого значення.

Динамічним називають навантаження, за якого виникають значні прискорення частинок елемента і пов'язані з ними сили інерції, які необхідно брати до уваги в розрахунках.

Одиницею виміру сили в міжнародній системі одиниць СІ є ньютон (Н), який дорівнює силі, що надає масі в 1 кг прискорення в 1 м/с^2. Більшими одиницями є кілоньютон (кН), меганьютон (МН). Зазначимо: 1 кН = 10^3 Н, 1 МН = 10^6 Н. Одиницею сили в системі МКГСС (технічній системі одиниць) є кілограм сили (кГ), який масі 1 кг надає прискорення 9,81 м/с^2. Одиниці сили в системі МКГСС та системі СІ зв'язані співвідношеннями

$$1\ \text{кГ} = 9{,}80665\ \text{Н} \approx 9{,}81\ \text{Н};\quad 1\ \text{Т} = 9{,}81\ \text{кН} \approx 10\ \text{кН}.$$

Внутрішніми силами називають сили взаємодії між окремими частинами твердого тіла. У подальшому нас цікавитимуть додаткові внутрішні сили, які викликані дією зовнішніх сил і чинять опір зовнішнім силам, що намагаються відділити одну частину пружного тіла від іншої або змінити його форму. Після

зняття зовнішнього навантаження внутрішні сили повертають пружне тіло у первинний стан та відновлюють його початкову форму та розміри. Слід зауважити, що в будь-якому твердому тілі між його окремими частинами завжди існують сили взаємодії. Унаслідок же дії навантаження в тілі виникають внутрішні сили, які залежать від характеру навантаження. Як буде показано в подальшому викладенні матеріалу, саме ці додаткові внутрішні сили потрібно знати та вміти їх визначати для розрахунків елементів конструкцій та деталей машин на міцність та жорсткість.

Дослідження поведінки твердих тіл показують, що під дією зовнішніх сил відстані між елементарними частинками пружного тіла змінюються, а відповідно змінюються й розміри, а можливо, і форма тіла. Зміну розмірів та форми тіла під дією зовнішнього навантаження називають *деформацією*.

Властивість тіла деформуватися під дією навантаження, а після його усунення відновлювати свої розміри та форму (повертатися у початковий стан) називають *пружністю*. Деформації, які зникають після припинення дії навантаження, називають *пружними* або зникаючими.

Іноді після усунення навантаження деформації повністю не зникають. Ту частину повної деформації, яка залишається після припинення дії навантаження, називають *пластичною* або залишковою.

Якщо деформації після усунення навантаження повністю зникають, тобто залишкові деформації відсутні, тіло називають *абсолютно пружним*.

Пружність є однією з основних властивостей твердих тіл, яка використовується у процесі проектування елементів конструкцій, машин та споруд. Поряд з пружними деформаціями, як було відзначено, у тілах можуть виникати також пластичні деформації. Для нормальної експлуатації інженерних конструкцій, машин не можна допускати виникнення пластичних деформацій, за яких розміри і форми елементів конструкцій та деталей машин безповоротно змінюються. Встановлення навантажень, коли можуть виникнути пластичні деформації, у таких випадках має велике значення.

Властивість матеріалів отримувати суттєві залишкові деформації називають *пластичністю*. Таку властивість матеріалів дуже широко використовують у багатьох виробничих процесах: у штамповці, ковальській справі, у прокатному виробництві, склодувному, гончарному, кондитерському. Існує окремий розділ механіки деформівного тіла – теорія пластичності, без якої не може працювати ані металургія, ані машинобудування.

Зауважимо, що тверді тіла можуть отримувати деформації необов'язково під дією зовнішніх сил. Деформування твердих тіл може відбуватися і під дією температурного, магнітного, електричного, радіаційного та навіть біологічного полів.

1.3. Основні гіпотези ММК

Тіло, склад і будова якого однакові в будь-якому його об'ємі, називають *однорідним*. Якщо механічні властивості тіла, зокрема його здатність протидіяти зовнішнім прикладеним силам, однакові в усіх точках та напрямках, то тіло називають *ізотропним.* Метали та їх сплави переважно однорідні та ізотропні. Тіло, властивості якого різні в різних напрямках, називають *анізотропним*. Яскравим прикладом такого матеріалу є волокниста деревина, властивості якої вздовж і поперек волокон суттєво відрізняються, ось чому легко колоти дрова вздовж волокон та значно важче поперек. Прикладом однорідного, але разом з тим анізотропного тіла може бути будь-який кристал. Переважна більшість конструкційних матеріалів мають складну будову. Наприклад, метали та їх сплави мають зернисту, полікристалічну будову. У матеріалі можуть бути сторонні включення, пори, газові пузирі (каверни), шлаки, мікротріщини. Механічні властивості матеріалів у різних напрямках або в різних точках можуть бути різними.

Різні механічні властивості окремих зерен матеріалу призводять до того, що реальні тверді тіла тією чи іншою мірою неоднорідні. Крім того, полікристалічні матеріали є анізотропними в малих об'ємах (порядку об'єму кристалічних зе-

рен). Проте за досить великих розмірів тіла (порівняно з розмірами зерен матеріалу) анізотропія не проявляє себе внаслідок її хаотичності. Механічні властивості матеріалу з безладною орієнтацією зерен відображають середні властивості його складових частин, і їх можна вважати однаковими в усіх напрямках. Отже, указані особливості полікристалічних матеріалів свідчать про дуже нерівномірний розподіл внутрішніх сил у реальному тілі. Ця нерівномірність проявляє себе тим більше, чим більше наближається розмір частини тіла, в якій визначаються внутрішні сили, до розмірів зерен матеріалу.

Вивчення розподілу внутрішніх сил у тілі, їх величини можна значно спростити, коли розглядати замість реального тіла його абстрактну модель. Спрощення, які приймаються в курсі ММК, відносяться і до властивостей матеріалу, характеру деформацій, і до геометрії конструкції чи елемента споруди та їх кріплення. Кожна реальна задача потребує прийняття своїх спрощуючих гіпотез.

До основних гіпотез ММК, які значно спрощують розрахунки елементів конструкцій та деталей машин на міцність, жорсткість та стійкість, віднесемо такі:

1) гіпотеза про суцільність матеріалу, згідно з якою припускається, що матеріал має суцільну будову, суцільно заповнює форму тіла, тобто атомістична, дискретна будова матеріалу не береться до уваги. Припущення про суцільність будови матеріалу спрощує вивчення розподілу внутрішніх сил, бо дозволяє користуватися математичними методами аналізу нескінченно малих величин і безперервних функцій. Ця гіпотеза дає змогу оцінювати міцність матеріалу незалежно від оцінки її методами теоретичної фізики, яка розглядає атомістичну будову матеріалу та сили взаємодії між елементарними частинками;

2) гіпотеза про однорідність матеріалу, в якій припускається, що матеріал має однаковий склад і будову в усіх його точках незалежно від величини виділеного в тілі об’єму. Матеріал припускається однорідним незалежно і від мікроструктури у зв’язку з тим, що вивчаються тіла, розміри яких значні порівняно з розмірами кристалічних зерен;

3) гіпотеза про пружність і ізотропність матеріалу. У більшості випадків припускають, що тіла абсолютно пружні, а матеріал має пружну ізотропію;

4) гіпотеза про малість пружних деформацій, згідно з якою вважають, що пружні деформації малі порівняно з розмірами деформівного тіла, а тому практично не впливають на взаємне розміщення прикладених до нього сил. На основі цієї гіпотези нехтують змінами в розміщенні зовнішніх сил відносно частин споруди і рівняння рівноваги складають для недеформованої споруди, тобто використовують принцип незмінюваності початкових розмірів;

5) гіпотеза про лінійний зв'язок між деформаціями та навантаженнями, за якою припускають, що в більшості випадків при деформуванні матеріалів справедливий закон Гука, який у визначених границях зміни навантаження виражає лінійний зв'язок між деформаціями та навантаженнями.

На основі цих гіпотез при розв'язуванні багатьох задач ММК застосовують принцип додавання та незалежності дії сил (*принцип суперпозиції*), згідно з яким результат дії на пружне тіло системи сил дорівнює сумі результатів дії окремих складових цієї системи незалежно від порядку їх прикладання.

1.4. Реальний об'єкт та його розрахункова схема

До числа заходів, які значно спрощують розрахунки елементів конструкцій та деталей машин методами ММК, можна віднести перехід від реального об'єкта до його механічної моделі або розрахункової схеми.

Під *розрахунковою схемою* розуміють реальний об'єкт, звільнений від другорядних, несуттєвих факторів та особливостей, які мало впливають на його нормальну, передбачену роботу. Залежно від потреби, необхідної точності, від того, яка сторона явища нас більше цікавить, для того ж самого реального об'єкта можна вибрати декілька розрахункових схем. А втім, тієї ж самій розрахунковій схемі може відповідати декілька реальних об'єктів. Це важливо тому, що одержане рішення для якоїсь розрахункової схеми можна використовувати для розрахунків цілого класу реальних об'єктів. Наприклад, розрахунок колони будівлі,

штока поршня трактора чи автомобіля може бути зведений до розрахунку на стиск прямого стержня поздовжньою силою. При цьому власною вагою штока можна знехтувати, як малою величиною порівняно з силою тиску газів, а власною вагою колони в одних випадках можна знехтувати, а в інших ні. Все залежить від потрібної точності розрахунку та співвідношення власної ваги колони та зовнішнього навантаження. У цілому вибір розрахункової схеми реального об'єкта – непроста задача, яка залежить від багатьох факторів: від властивості матеріалу, умов та особливостей роботи конструкції чи її елементів, накладених обмежень і т. ін. По мірі накопичення досвіду розрахунків реального об'єкта можна переходити від однієї, більш складної розрахункової схеми до іншої, яка більш точно відображає дійсну поведінку об'єкта та задовольняє практиці надійної експлуатації.

При виборі розрахункової схеми спрощення вводяться і в геометрію реальних об'єктів. Так, інженерні конструкції чи споруди, будучи складені з окремих елементів, мають більш або менш складну форму. Усю розмаїтість елементів та деталей можна звести до декількох простих форм, серед яких розрізняють стержні, пластинки, оболонки та масивні тіла. Найбільш поширеним елементом є *стержень*. Стержнем називають тіло, один із розмірів якого значно більший двох інших. Геометрично стержень (брус) може бути утворений плоскою фігурою, яка рухається своїм центром ваги C вздовж довільної лінії AB і площина якої перпендикулярна до цієї лінії (рис. 1.3,*a*).

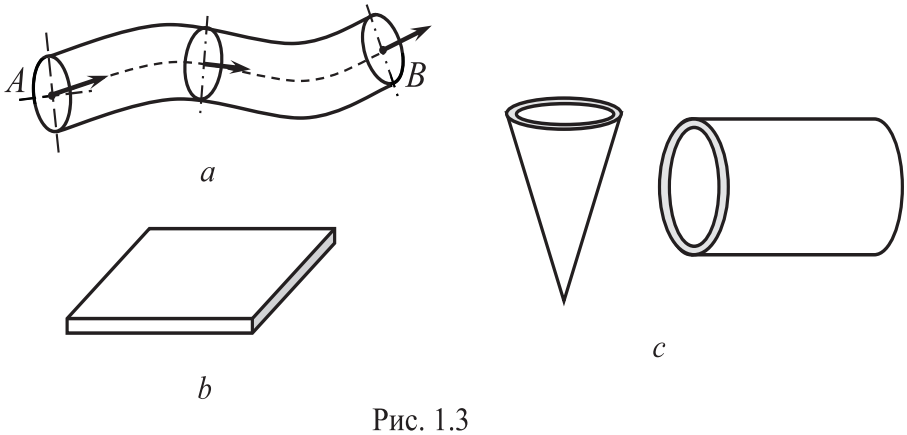


Рис. 1.3

При цьому лінію *AB* називають *віссю стержня*, а плоску фігуру – його *поперечним перерізом*. Якщо поперечний переріз не змінює розміри і форми і не повертається навколо дотичної до осі стержня під час свого руху вздовж осі, то одержимо стержень сталого поперечного перерізу, в інших випадках матимемо стержень змінного поперечного перерізу. Стержень, вісь якого є прямою лінією, називають прямим, а стержень з віссю у вигляді плоскої або просторової кривої – кривим стержнем. Якщо поперечний переріз обертається навколо осі, то стержень називають природно закрученим. Прикладом природно закрученого стержня є спіральне свердло. До схеми просторового або плоского кривого стержня удаємося в розрахунках гвинтової пружини, крюка, арок та інших елементів. Окремий тип стержнів – так звані тонкостінні стержні. Їх поперечний переріз має форму вузької смужки, товщина (ширина) якої невелика порівняно з розмірами контуру поперечного перерізу. До тонкостінних стержнів належать такі прокатні профілі, як кутник, двотавр, швелер, тонкостінні труби. Коли треба підкреслити, що стержень має не тонкостінний переріз, його називають брусом.

Стержні, які працюють на кручення та слугують для передачі крутного моменту, називають *валами*. Стержні, які працюють на згин, називають *балками*.

Елементи конструкцій, які являють собою тіло, обмежене двома площинами, відстань між якими мала порівняно з іншими розмірами, називають *пластинками.* Тіла, які обмежені двома криволінійними поверхнями, називають *оболонками* (рис. 1.3,*b*,*c*). Пластинки відрізняються від оболонок формою серединної поверхні, тобто поверхні, що проходить через середину їх товщини. Серединною поверхнею пластинок є площина, а оболонок – відповідна крива поверхня.

Тіла, усі розміри яких одного порядку, називають *масивами*.

При схематизації реальних об’єктів в ММК роблять спрощення і в системі сил, діючих на конструкцію. Введено, зокрема, поняття зосередженої сили. Розподілене навантаження, прикладене на невеликій порівняно зі загальними розмірами стержня ділянці, замінюється зосередженою силою. Наприклад, у розраху-

нках стержня, зображеного на рис. 1.4,*a*, можна розглядати вантаж *F* як зосереджену силу (рис. 1.4,*c*). Така заміна можлива під час розгляду поведінки (роботи) стержня в цілому, коли розміри площадки, через яку передається навантаження (рис. 1.4,*b*), малі порівняно зі загальними розмірами стержня. Якщо ж у розглянутому прикладі треба було провести розрахунок самої провушини, то вводити зосереджену силу було б некоректно.

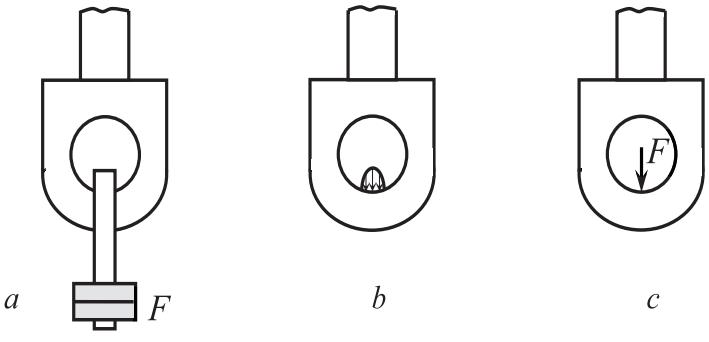


Рис. 1.4

Наголосимо, що при виборі розрахункової схеми деякі правила статики абсолютно твердого тіла застосовувати не можна. У першу чергу це стосується переносу сили вздовж лінії її дії та заміни системи сил рівнодіючою, коли рівновага стержня не порушується, але умови його роботи можуть істотно змінитися, що, звичайно, вплине на його міцність, жорсткість та стійкість.

1.5. Внутрішні сили в перерізах стержня та їх визначення. Метод перерізів

Під дією зовнішніх сил між частинами твердого тіла виникають внутрішні сили взаємодії. Для визначення величини й розподілу внутрішніх сил у навантаженому тілі використовують метод перерізів.

Припустимо, що довільний просторовий стержень B_1B_2 (рис. 1.5,*a*) знаходиться у стані рівноваги під дією довільної просторової системи зовнішніх сил. Для визначення внутрішніх сил у поперечному перерізі *m–n* уявно розріжемо

стержень площиною *m–n*, перпендикулярною до його осі, на дві частини і відкинемо одну з частин, наприклад B_1, а її дію на залишену частину B_2 замінимо неперервно розподіленими по перерізу внутрішніми силами. Частина B_2, що залишилася (рис. 1.5,*b*), перебуватиме у стані рівноваги під дією прикладених до неї зовнішніх і внутрішніх сил з боку відкинутої частини B_1. Спираючись на гіпотезу суцільності матеріалу, внутрішні сили припускають неперервно розподіленими по всьому перерізу. Цю систему внутрішніх сил можна, звівши до центра зведення, привести до однієї сили $\bar{R}$ – головного вектора і однієї пари сил $\bar{M}$ – головного моменту. За центр зведення вибираємо центр ваги поперечного перерізу, з яким зв'язуємо початок прямокутної системи координат *Cxyz*. Вісь *z* направляємо по нормалі до перерізу, а осі *x*, *y* розміщуємо у площині перерізу.

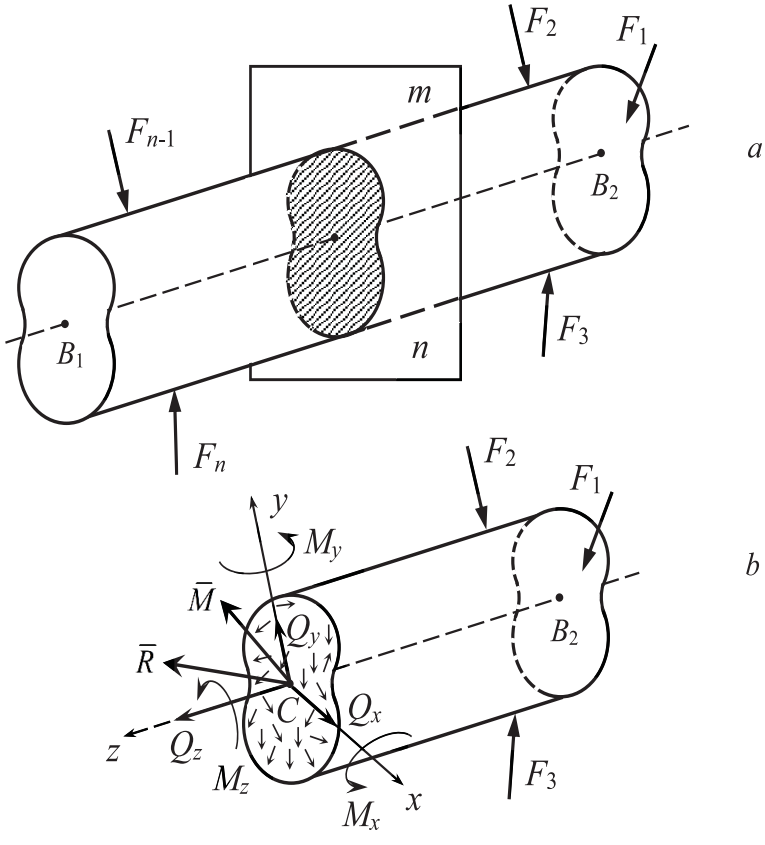


Рис. 1.5

Розклавши головний вектор $\bar{R}$ і головний момент $\bar{M}$ по осям x, y, z, тобто визначивши їх проекції на ці осі, отримаємо шість складових: три сили Q_x, Q_y, Q_z та три моменти M_x, M_y, M_z, які носять назву внутрішніх силових факторів (чинників). Складову внутрішніх сил Q_z частіше позначають N і називають нормальною або поздовжньою силою в перерізі. Сили Q_x, Q_y називають поперечними або перерізуючими силами. Складову моменту M_z називають крутним моментом і позначають частіше T. Моменти M_x, M_y називають згинальними моментами відповідно у вертикальній та горизонтальній площинах.

За відомих зовнішніх навантажень всі шість внутрішніх силових факторів визначають із шести рівнянь статики, які можна скласти для залишеної частини стержня B_2, розглядаючи внутрішні силові фактори як зовнішні сили:

$$\sum_i F_{iz} + N = 0; \qquad \sum_i mom_z(\bar{F}_i) + T = 0;$$
$$\sum_i F_{ix} + Q_x = 0; \qquad \sum_i mom_x(\bar{F}_i) + M_x = 0;$$
$$\sum_i F_{iy} + Q_y = 0; \qquad \sum_i mom_y(\bar{F}_i) + M_y = 0.$$

У загальному випадку навантаження стержня довільною просторовою системою сил у поперечному перерізі мають місце, тобто не дорівнюють нулю, всі шість силових факторів. Можливі і часткові випадки, якщо:

- на деякій ділянці стержня в поперечних перерізах виникає тільки поздовжня сила $N \neq 0$, а інші внутрішні силові фактори дорівнюють нулю, то маємо осьовий або центральний розтяг чи стиск цієї ділянки;
- виникає тільки крутний момент $T \neq 0$, то маємо кручення;
- виникає тільки згинальний момент $M_x \neq 0$ або $M_y \neq 0$, то маємо плоский чистий згин. Частіше поруч зі згинальним моментом з'являється і поперечна сила. Такий випадок згину називають плоским поперечним згином.

Можливі також комбінації різних типів навантаження, а саме: розтяг–стиск зі згином, згин з крученням тощо.

1.6. Поняття про напруження та деформації в точці. Тензори напружень та деформацій

Мірою інтенсивності внутрішніх сил у деякій точці перерізу тіла є напруження. Для визначення напружень у довільному перерізі, проведеному через будь-яку точку тіла, застосуємо метод перерізів. Через точку K (рис. 1.6), у якій треба визначити напруження, проведемо переріз I–I.

Відкидаємо одну із частин тіла, а навколо точки K виділяємо елементарну площинку величиною ΔA. Припустимо, що рівнодійна внутрішніх сил, діючих на цю площину, $\Delta\bar{R}$. Відношення $\dfrac{\Delta\bar{R}}{\Delta A} = \bar{p}_{CP}$ називають середнім напруженням у точці K даного перерізу I–I. На величину середнього напруження впливає нерівномірність розподілу внутрішніх сил у перерізі, а значить, і розміри виділеної площадки ΔA. Щоб повністю виключити вплив розмірів площадки ΔA на величину напруження, будемо її зменшувати, стягуючи у точку. Границю відношення $\Delta\bar{R}$ до ΔA при зменшенні площі ΔA до нуля називають повним напруженням у точці K даного перерізу

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\bar{R}}{\Delta A} = \bar{p}.$$

Таким чином, величину внутрішньої сили, яка діє на одиницю площі, виділеної навколо точки K перерізу I–I, називають *напруженням* у цій точці цього перерізу.

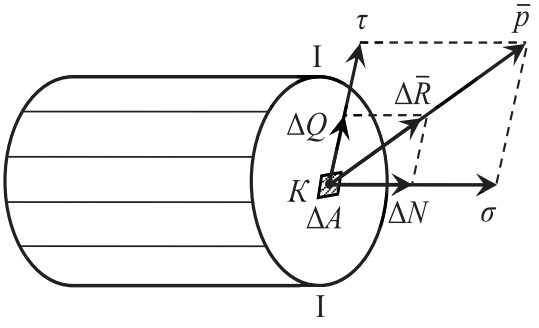


Рис. 1.6

Якщо через задану точку провести будь-який інакше розташований переріз і визначити повне напруження у цій точці цього перерізу, то у загальному випадку навантаження тіла величина і напрямок повного напруження будуть іншими. Сукупність напружень в усіх перерізах, які

можна провести через дану точку, утворюють напружений стан у цій точці. Напружений стан тіла називають однорідним, коли напружені стани в усіх його точках однакові. Якщо ж напружений стан залежить від координат точки, навколо якої визначаються напруження, то він називається неоднорідним.

Повне напруження $\overline{p}$ доцільно розкласти на дві складові: складову нормальну до площини перерізу, яку називатимемо просто нормальним напруженням та позначатимемо σ, і складову, дотичну до площини перерізу, яку називатимемо просто дотичним напруженням та позначатимемо τ

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}; \qquad \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

Між повним, нормальним і дотичним напруженнями у точці існує залежність

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2.$$

Одиницею напруження у міжнародній системі одиниць СІ є напруження в 1 ньютон на 1 квадратний метр (Н/м^2), або паскаль (Па). Оскільки ця одиниця напруження дуже мала, зручно застосовувати більші одиниці, зокрема мегапаскаль (1 МПа = 10^6 Па).

Між одиницями напруження у технічній і міжнародній системах існує зв'язок 1 кг/см^2 = 9,81 Н/см^2 ≈ 0,1 МН/м^2 = 0,1 МПа.

Якщо у загальному випадку навантаження просторового тіла навколо його довільної точки виділити елементарний об'єм матеріалу у вигляді прямого паралелепіпеда і зв'язати з його ребрами систему координат xyz з початком у даній точці, то по гранях виділеного елементу діятимуть відповідно нормальні σ_x, σ_y, σ_z та дотичні τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} напруження. Сукупність усіх нормальних σ_x, σ_y, σ_z та дотичних τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} напружень, які виникають на всіх площадках, проведених через дану точку, називають напруженим станом у цій точці. У загальному випадку напружений стан у точці характеризується матрицею напружень

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

яку називають тензором напружень.

Для визначення деформацій в точці K розглянемо малий відрізок S, який виходить із точки K в довільному напрямку (рис. 1.7). Унаслідок деформації точка K зміститься в K_1, а відрізок S подовшає на величину ΔS і змінить свій напрямок. Величину ΔS називають абсолютною лінійною деформацією або видовженням (подовженням). Границя ж відношення

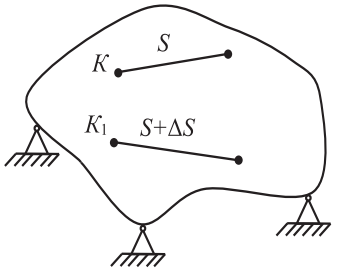


Рис. 1.7

$$\lim_{S \to 0} \frac{\Delta S}{S} = \varepsilon$$

носить назву відносного подовження, або відносної лінійної деформації в точці K у напрямку S. Якщо в точці K провести три осі x, y, z, то відносні подовження в напрямку цих осей під дією напружень σ_x, σ_y, σ_z відповідно будуть ε_x, ε_y, ε_z. Зміна прямих кутів між взаємно перпендикулярними, безмежно малими відрізками dx, dy, dz, які виходять із K, під дією дотичних напружень τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} називають кутовими деформаціями в точці K і позначають відповідно γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}. Сукупність лінійних та кутових деформацій по усіх напрямках і площинах, проведених через дану точку, називають деформованим станом у цій точці, який у загальному випадку характеризується матрицею деформацій

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Цю матрицю називають тензором деформацій. Напружений і деформований стан у точці, а відповідно і тензор деформацій та напружень, пов’язані між собою.

ГЛАВА 2. ОСЬОВИЙ РОЗТЯГ І СТИСК. РОЗРАХУНКИ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ І ДЕТАЛЕЙ МАШИН НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ

2.1. Поздовжні сили та їх визначення. Епюри поздовжніх сил

Якщо внутрішні сили у поперечному перерізі зводяться тільки до одного силового фактора – поздовжньої сили $N \neq 0$, а всі інші внутрішні силові фактори відсутні, тобто дорівнюють нулю, то має місце так званий осьовий або центральний розтяг–стиск.

За дії розтягуючої сили довжина стержня може бути довільною. Дія стискуючої сили на стержень великої довжини і порівняно невеликих розмірів поперечного перерізу може викликати втрату стержнем стійкості. У цій главі розглядатимемо лише стержні великої поперечної жорсткості, для яких немає небезпеки втрати стійкості. Для цього необхідно, щоб співвідношення довжини стержня l та найменшого розміру його поперечного перерізу d було в межах $l \le (4-5)d$.

Для визначення внутрішніх поздовжніх сил N у поперечних перерізах стержнів використаємо метод перерізів і покажемо його застосування на прикладі стержня сталого поперечного перерізу з площею A, навантаженого зосередженими осьовими силами F_1, F_2, F_3 (рис. 2.1,*а*). Власною вагою стержня нехтуємо.

Координатну вісь z з початком в центрі ваги нижнього кінцевого перерізу направимо вздовж осі стержня. Задавши напрямок реакції затиснення R, знаходимо її з умови рівноваги сил, прикладених до стержня,

$$\sum Z = R - F_1 - F_2 + F_3 = 0; \qquad R = F_1 + F_2 - F_3 = -200 \text{ кН}.$$

Для визначення поздовжньої сили в перерізі I–I уявно розрізаємо стержень у цьому перерізі і відкидаємо одну з частин, наприклад, верхню. Дію верхньої частини на нижню, що залишилася, замінюємо внутрішньою поздовжньою силою N_1 (рис. 2.1,*b*). Поздовжню силу вважаємо додатною, якщо вона викликає розтяг і направлена від досліджуваного перерізу. Якщо ж сила викликає стиск,

тобто направлена до перерізу, то вважаємо її від'ємною. Рекомендується поздовжню силу при її визначенні в загальному випадку направляти від перерізу, тобто вважати її додатною, тобто такою, що викликає розтяг. Отримання від'ємного значення сили N свідчить про те, що сила має протилежний напрямок і в цьому перерізі маємо стиск.

Розглядаючи рівновагу нижньої частини стержня (рис. 2.1,*b*), складаємо рівняння рівноваги у вигляді суми проекцій усіх діючих на неї сил на вісь z

$$\sum Z = N_1 - F_1 = 0,$$

звідки

$$N_1 = F_1 = 200 \text{ кН}. \tag{2.1}$$

Зробивши переріз II–II і розглянувши рівновагу нижньої частини (рис. 2.1,*c*), матимемо

$$\sum Z = N_2 - F_1 - F_2 = 0,$$

звідки

$$N_2 = F_1 + F_2 = 300 \text{ кН}. \tag{2.2}$$

Аналогічно знаходимо, що

$$N_3 = F_1 + F_2 - F_3 = -200 \text{ кН}. \tag{2.3}$$

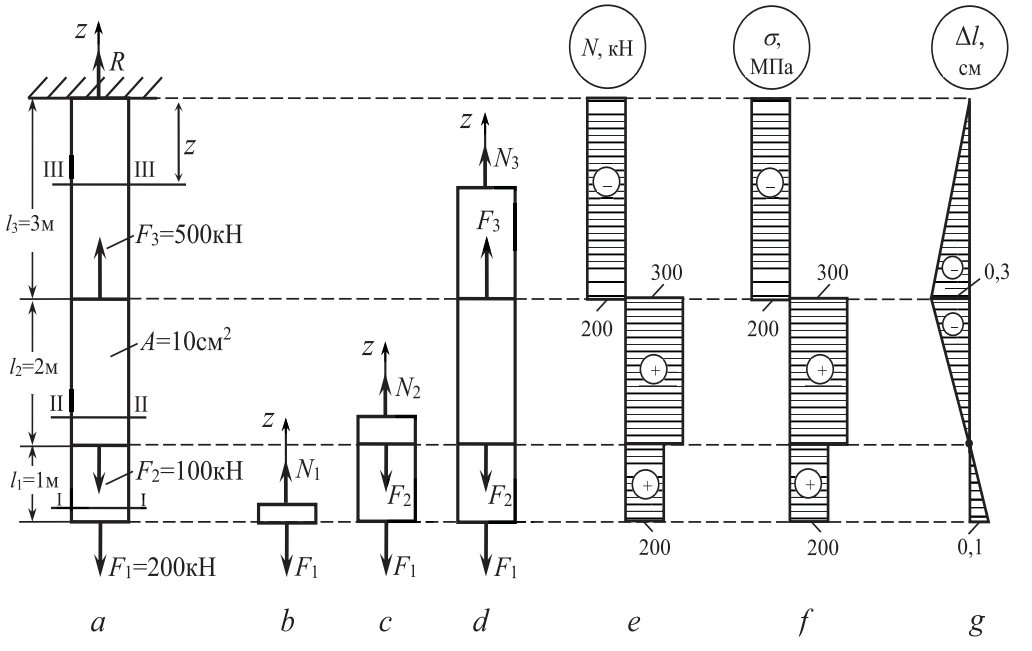


Рис. 2.1

Співвідношення (2.1), (2.2), (2.3) дають змогу зробити висновок та сформулювати таке правило для визначення поздовжньої сили N у довільному поперечному перерізі стержня за осьового розтягу–стиску, а саме: *величина поздовжньої сили N у будь-якому поперечному перерізі стержня дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх сил, які прикладені до стержня по одну сторону від досліджуваного перерізу.*

У випадку, коли зовнішні сили не направлені вздовж осі стержня, більш загально можна сказати, що величина поздовжньої сили N у будь-якому поперечному перерізі стержня дорівнює алгебраїчній *сумі проекцій на вісь стержня всіх зовнішніх сил*, які прикладені до стержня по одну сторону від цього перерізу.

Для наочного зображення розподілу внутрішніх поздовжніх сил вздовж осі стержня при переході від перерізу до перерізу будують графік функції $N(z)$, ординати якого рівні значенням поздовжніх сил у відповідних перерізах. Ці графіки називають епюрами поздовжніх сил N. Епюра поздовжніх сил, побудована на рис. 2.1,*е*, показує, що нижня ділянка стержня розтягнута силою 200 кН, середня – силою 300 кН, верхня ділянка стиснута силою 200 кН.

2.2. Напруження в поперечних перерізах стержня за осьового розтягу–стиску та їх визначення

У попередньому параграфі внутрішню поздовжню силу N у будь-якому перерізі визначали через діючі зовнішні сили. Водночас ця ж поздовжня сила, як внутрішня, є рівнодіючою елементарних нормальних зусиль $\sigma \cdot dA$, що виникають у точках поперечного перерізу стержня за осьового розтягу–стиску, тобто

$$N = \int\limits_{(A)} \sigma \, dA. \qquad (2.4)$$

Проте отримана формула (2.4) дає лише сумарну залежність між нормальним напруженням і поздовжньою силою, а характер та закон розподілу нормальних напружень можна встановити з огляду на дослідне вивчення цього явища. Якщо на поверхні стержня нанести систему поздовжніх та поперечних взаємно

перпендикулярних ліній, то після навантаження за осьового розтягу–стиску поперечні лінії перемістяться паралельно самим собі, тобто поздовжні волокна подовжуються або скорочуються однаково. Унаслідок цього поперечні перерізи стержня, плоскі перед навантаженням, залишаються плоскими і в процесі навантаження. Це положення відоме під назвою *гіпотези плоских перерізів або гіпотези Бернуллі* (Писаренко та ін., 1993).

Використовуючи гіпотезу плоских перерізів, можна зробити висновок, що нормальні напруження σ, які викликають розтяг–стиск поздовжніх волокон стержня, однакові за значенням та напрямком в усіх точках перерізу, тобто розподіляються рівномірно по площі поперечного перерізу. Враховуючи цей факт, з рівності (2.4) отримаємо

$$N = \sigma \int\limits_{(A)} dA = \sigma A,$$

звідки

$$\sigma = \frac{N}{A}. \tag{2.5}$$

Треба зауважити, що рівномірний розподіл нормальних напружень при розтягу або стиску стержня має місце лише в перерізах, досить віддалених від місць прикладання навантаження. Зокрема, коли навантаження прикладається до кінців стержня, формула (2.5) буде справедливою лише у тому випадку, коли осьові сили передаються на торцеві перерізи стержня рівномірно. За інших способів прикладання навантаження розподіл нормальних напружень у перерізах, близьких до місця прикладання зовнішніх сил, може бути більш або менш нерівномірним (рис. 2.2).

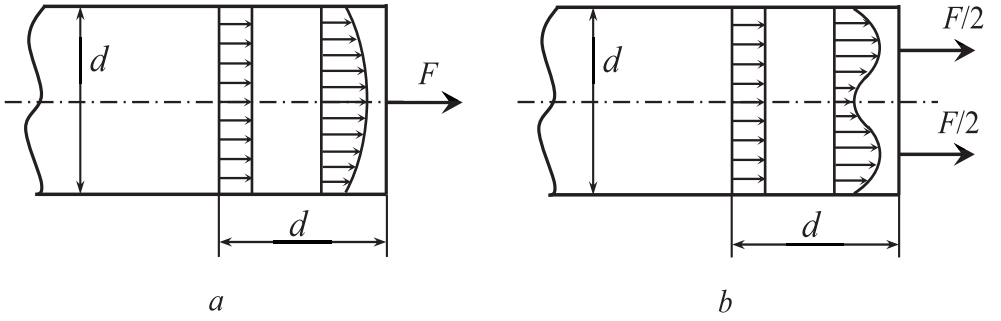


Рис. 2.2

Проте як теоретичні міркування, так і експериментальна перевірка показують, що нерівномірність розподілу напружень дуже швидко затухає, в міру віддалення перерізу від місця прикладання навантаження. Це явище було вперше досліджене видатним французьким вченим Б. Сен-Венаном (1797–1880) і відоме під назвою *принципу Сен-Венана*. За твердженням вченого, у поперечних перерізах стержня, досить віддалених від точок прикладання навантаження, розподіл напружень практично не залежить від детального способу його прикладання.

За достатню відстань перерізу від місць прикладання навантаження можна вважати відстань порядку поперечного розміру стержня.

Принцип Сен-Венана має загальне значення і використовується не лише для визначення напружень за осьового розтягу–стиску, а також і в інших випадках навантаження стержня.

З одного боку, формула (2.5) дає змогу визначити напруження σ у будь-якому поперечному перерізі стержня, якщо відома поздовжня сила, яка виникає у ньому, і площа перерізу. З іншого боку, якщо задатись допустимим напруженням, то із цієї формули можна встановити потрібну величину поперечного перерізу, або при заданій площі поперечного перерізу знайти допустиме значення поздовжньої сили.

Якщо найбільшим значенням поздовжньої сили, яку може витримати стержень до руйнування, буде N_u, то величину нормальних напружень

$$\sigma_u = \frac{N_u}{A},$$

викликаних цією силою, називають границею міцності або тимчасовим опором матеріалу стержня. Допустиме значення нормального напруження дорівнюватиме $\sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{k}$, де k – коефіцієнт запасу міцності.

2.3. Умова міцності стержня за нормальними напруженнями. Два типи (три види) розрахунків елементів конструкцій та деталей машин на міцність

Міцність стержня буде забезпечена в тому випадку, коли найбільше нормальне напруження, яке виникає в його поперечних перерізах, не перевищуватиме допустимого значення нормального напруження. Математичний вираз цієї умови, тобто умови міцності стержня за нормальними напруженнями при осьовому розтягу чи стиску, матиме вигляд

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A}\right)_{\max} \le \sigma_{adm}. \tag{2.6}$$

Поперечний переріз стержня, у якому виникають найбільші нормальні напруження $\sigma_{\max}$, називають небезпечним. У загальному випадку для визначення положення небезпечного перерізу необхідно виявити, у якому перерізі відношення N/A набирає найбільшого значення. У випадку стержня сталого поперечного перерізу ($A = const$) такими перерізами будуть перерізи, де поздовжня сила максимальна $N = N_{\max}$, що визначаємо за епюрою поздовжніх сил. Для стержня змінного поперечного перерізу за сталої поздовжньої сили небезпечним перерізом буде поперечний переріз з мінімальною площею $A_{\min}$ і $\sigma_{\max} = N / A_{min}$ (де тонко, там і руйнується).

Для стержня сталого поперечного перерізу умова міцності за нормальними нормальне напруженнями (2.6) набирає вигляду

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \le \sigma_{adm}. \tag{2.7}$$

На основі умови (2.7) виконують два типи (три види) розрахунків стержнів на міцність. До першого типу відносять два види розрахунків, які називають проектувальними. Якщо відомі максимальне значення поздовжньої сили $N_{\max}$ та допустиме значення нормального напруження для стержня σ_{adm}, то з правої частини умови міцності визначаємо необхідну для забезпечення міцності площу поперечного перерізу стержня

$$A \geq \frac{N_{\max}}{\sigma_{adm}}. \tag{2.8}$$

Значення необхідної площі поперечного перерізу стержня беремо з умови рівності. Більше значення теж влаштовуватиме нас, але при цьому збільшуватиметься матеріалоємність та відповідно вага стержня, що небажано.

Якщо відомі площа поперечного перерізу стержня A та допустиме значення нормального напруження для нього σ_{adm}, то максимальне значення поздовжньої сили, яка може виникати у поперечних перерізах стержня, знаходимо з правої частини умови міцності

$$N_{\max} \leq A \cdot \sigma_{adm}. \tag{2.9}$$

Другий тип і водночас третій вид розрахунків стержнів на міцність називають перевірочним або контрольним. Тут усе відоме – і найбільше значення поздовжньої сили $N_{\max}$, і площа A поперечного перерізу стержня, і допустиме для нього значення нормального напруження σ_{adm}. Усі ці величини підставляють в умову міцності за нормальними напруженнями (2.7) і перевіряють її виконання. Якщо умова виконується, то міцність стержня буде забезпечена, якщо ні, то треба щось змінювати: чи то зменшити навантаження, чи збільшити площу поперечного перерізу, чи, може, замінити матеріал стержня на міцніший. Деякі матеріали, особливо крихкі, мають різні допустимі значення нормального напруження при роботі на розтяг та стиск. У таких випадках, для розрахунків елементів, які працюють на розтяг, необхідно використовувати відповідне значення допустимого нормального напруження на розтяг σ^{t}_{adm}, а для елементів які працюють на стиск – значення допустимого нормального напруження на стиск σ^{c}_{adm}. Якщо матеріал однаково чинить опір розтягу та стиску, то допустиме нормальне напруження позначають просто σ_{adm}.

Приклад 1. Циліндр двигуна внутрішнього згоряння кріпиться до картера за допомогою 14 шпильок. Визначити діаметр d шпильок, враховуючи, що повне зусилля рівномірно розподіляється між ними, а допустиме нормальне напру-

ження для шпильок σ_{adm} = 900 кг/см^2. Внутрішній діаметр циліндра D = 16 см, а тиск у циліндрі на поршень p = 70 атм.

Розв'язування. Враховуючи, що 1 атм = 1 кг/см^2, визначимо силу, яка відриває циліндр від картера

$$F = p\frac{\pi D^2}{4} = 70 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 16^2}{4} = 14000 \text{ кг}.$$

Прийнявши до уваги, що сила F рівномірно розподіляється між шпильками, визначаємо силу, яка діє на одну шпильку,

$$F_1 = \frac{F}{4} = \frac{14000}{4} = 1000 \text{ кг}.$$

Із умови міцності шпильки за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{F_1}{A_1} \le \sigma_{adm},$$

знайдемо площу поперечного перерізу однієї шпильки

$$A_1 = F_1 / \sigma_{adm}$$

та відповідно діаметр шпильки

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{F_1}{\sigma_{adm}},$$

звідки

$$d = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi\sigma_{adm}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1000}{3{,}14 \cdot 900}} = 1{,}19 \text{ см}.$$

Остаточно діаметр поперечного перерізу шпильки приймаємо d = 1,2 см.

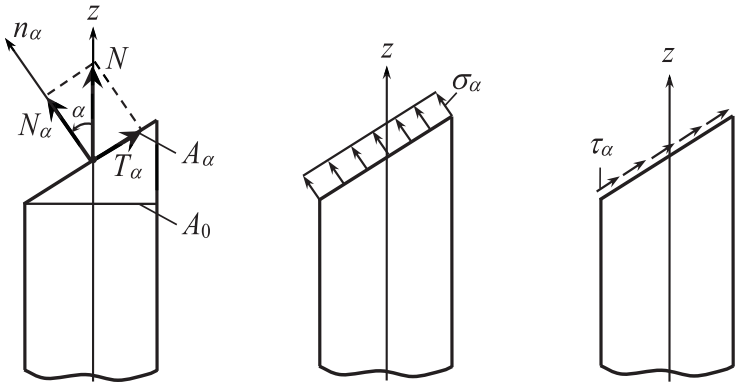
2.4. Напруження в нахилених (скісних) перерізах стержня

Для визначення напружень у довільно нахилених до осі перерізах стержня за осьового розтягу–стиску розглянемо переріз, зовнішня нормаль до якого утворює з поздовжньою віссю стержня z кут α, який відкладаємо проти руху стрілки годинника (рис. 2.3). Площа A_α нахиленого перерізу стержня зв'язана з площею A_0 поперечного перерізу стержня, як відомо, залежністю

$$A_\alpha = A_0 / \cos\alpha. \qquad (2.9)$$

Поздовжню силу N, що виникає в нахиленому перерізі при навантаженні стержня, розкладемо на дві складові – нормальну, по нормалі до нахиленого перерізу, яку позначимо через N_α і по дотичній до нахиленого перерізу – T_α (рис. 2.3,*а*). Ці складові відповідно дорівнюватимуть:

$$N_\alpha = N\cos\alpha; \qquad T_\alpha = N\sin\alpha. \tag{2.10}$$



a *b* *c*

Рис. 2.3

Складова N_α рівнодійна нормальних напружень та складова T_α рівнодійна дотичних напружень у нахиленому перерізі. Враховуючи, що нормальні напруження σ_α та дотичні напруження τ_α в нахилених перерізах розподілені рівномірно, для їх визначення отримаємо вирази:

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N}{A_0}\cos^2\alpha = \sigma_0\cos^2\alpha, \tag{2.11}$$

$$\tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N}{A_0}\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\alpha, \text{ де } \sigma_0 = \frac{N}{A_0}. \tag{2.12}$$

Із формул (2.11), (2.12) видно, що найбільші нормальні напруження виникають у поперечних перерізах при $\alpha = 0$, а найбільші дотичні напруження – у скісних перерізах, нахилених під кутом $\alpha = 45^\circ$ до осі стержня. Що стосується поздовжніх перерізів $\alpha = 90^\circ$, то в них і нормальні σ_α, і дотичні τ_α напруження дорівнюють нулю, тобто поздовжні волокна одне на одне не тиснуть.

2.5. Деформації стержня та їх визначення. Закон Гука

Спостереження показують, що розміри навантаженого стержня змінюються залежно від величини зовнішньої поздовжньої сили. Якщо до навантаження стержня його довжина була l, то після навантаження стане $l + \Delta l$. Величину Δl називають абсолютною поздовжньою деформацією або абсолютним видовженням (подовженням) стержня.

Відношення абсолютного видовження стержня до його початкової довжини

$$\varepsilon = \Delta l / l \tag{2.14}$$

називають відносним видовженням стержня, або відносною лінійною деформацією. У межах малих деформацій для більшості матеріалів справедливий закон Гука, який встановлює прямо пропорційну залежність між нормальними напруженнями та відносними деформаціями

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad \text{або} \quad \varepsilon = \sigma / E. \tag{2.15}$$

Коефіцієнт пропорційності E називають модулем поздовжньої пружності або модулем пружності першого роду, або модулем Юнга матеріалу. Цей модуль характеризує здатність матеріалу чинити опір дії зовнішніх сил щодо до деформацій, тобто характеризує поздовжню жорсткість матеріалу. Одиниця виміру модуля Юнга E [сила/площа], [кг/см^2], [Па]. Визначають модуль пружності, який є пружною характеристикою матеріалу, експериментальним шляхом. Середнє значення модуля Юнга E, наприклад для маловуглецевої сталі – $2 \cdot 10^5$ МПа, для міді – $1 \cdot 10^5$ МПа, свинцю – $0{,}17 \cdot 10^5$ МПа, деревини – $0{,}1 \cdot 10^5$ МПа, вольфраму – $4 \cdot 10^5$ МПа.

Враховуючи, що $\varepsilon = \Delta l / l$ та $\sigma = N / A$, на основі залежності (2.15) отримаємо математичний вираз закону Гука за осьового розтягу–стиску стержня у вигляді

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}. \tag{2.16}$$

Добуток EA називають жорсткістю поперечного перерізу стержня за осьового розтягу–стиску, а величину EA / l – жорсткістю стержня за розтягу–стиску.

Математичний вираз закону Гука (2.16) справедливий у тому випадку, коли поздовжня сила N і площа поперечного перерізу A по всій довжині стержня сталі. Якщо поздовжня сила і площа поперечного перерізу змінюються по довжині стержня, тобто є функціями від z – $N(z)$ і $A(z)$, то в стержні виділяємо двома поперечними перерізами елемент нескінченно малої довжини dz і, враховуючи, що по довжині цього елемента поздовжня сила N і площа A залишаються незмінними, для елемента стержня довжиною dz формула (2.16) буде справедливою і набере вигляду

$$\Delta dz = \frac{N(z)\,dz}{E \cdot A(z)}. \tag{2.17}$$

Взявши суму видовжень усіх елементів або визначений інтеграл від правої та лівої частин формули (2.17) в межах від 0 до l, остаточно визначимо повне абсолютне видовження стержня довжиною l

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z)\,dz}{E \cdot A(z)}. \tag{2.18}$$

Якщо величина $N(z) / A(z)$ залишається сталою на окремих ділянках стержня і таких ділянок n, то формулу (2.18) можна записати у вигляді суми

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i l_i}{E A_i}, \tag{2.19}$$

де N_i – величина поздовжньої сили на *i-тій* ділянці; l_i – довжина *i-тої* ділянки; A_i – площа поперечного перерізу *i-тої* ділянки.

Користуючись формулами (2.16)–(2.19), можна побудувати епюри поздовжніх переміщень поперечних перерізів. Наприклад, побудуємо епюру переміщень для стального стержня, зображеного на рис. 2.1,*а*, площа поперечного перерізу якого A = 10 см^2. Переріз ІІІ–ІІІ, розташований на відстані z від закріплення, за рахунок стиску ділянки довжиною z підніметься на величину

$$\Delta l_3 = N_3 \cdot z / EA.$$

Переміщення перерізів лінійно залежать від z, тобто епюра переміщень буде окреслена відрізком прямої. Для побудови епюри переміщень знайдемо переміщення крайніх перерізів. Переміщення поперечного перерізу в затисненні при $z = 0$ дорівнює нулю. Переміщення перерізу, в якому прикладена сила F_3 при $z = l_3$, буде відбуватися за рахунок скорочення третьої ділянки в результаті стиску, яке вважатимемо від'ємним,

$$\Delta_3 = \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA} = -\frac{200000 \cdot 300}{2 \cdot 10^7 \cdot 10} = -0{,}3 \text{ см}.$$

Відклавши значення переміщень у крайніх перерізах третьої ділянки, з'єднуємо їх прямою лінією, бо залежність видовження від довжини – лінійна (рис. 2.1,*g*).

Переміщення нижнього поперечного перерізу другої ділянки відбувається за рахунок скорочення третьої ділянки і видовження другої ділянки

$$\Delta_2 = \Delta l_3 + \Delta l_2 = \Delta l_3 + \frac{N_2 l_2}{EA} = -0{,}3 + \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 200}{2 \cdot 10^7 \cdot 10} = 0,$$

тобто переміщення перерізу, де прикладена сила F_2, дорівнює нулю. З'єднуємо на другій ділянці відрізком прямої ординату –0,3 см з нульовою ординатою (рис. 2.1,*g*). Нарешті, переміщення найнижчого поперечного перерізу стержня визначимо як суму абсолютних деформацій (видовжень і скорочень) усіх трьох ділянок

$$\Delta_1 = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \frac{N_1 l_1}{EA} = -0{,}3 + 0{,}3 + \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 100}{2 \cdot 10^7 \cdot 10} = 0{,}1 \text{см}.$$

Відкладаємо в нижньому перерізі першої ділянки ординату 0,1 см і з'єднуємо її з нульовою ординатою у верхньому перерізі першої ділянки. Побудований графік, ординати якого вказують на величину переміщень відповідних поперечних перерізів, називають епюрою поздовжніх переміщень. У нашому випадку знак "плюс" на епюрі переміщень означає, що перерізи переміщуються вниз, а знак "мінус" – перерізи переміщуються вгору.

2.6. Визначення механічних характеристик матеріалів. Діаграми розтягу і стиску

Спостереження за поведінкою стержнів з різних матеріалів показують, що під час розтягу або стиску стержень деформується не лише в поздовжньому напрямку, а і в поперечному. Під час розтягу стержень видовжується, поздовжній розмір збільшується і звужується в поперечних напрямках, тобто поперечні розміри зменшуються. У разі стиску, навпаки, збільшуються поперечні розміри і зменшується поздовжній розмір. Наприклад, якщо циліндричний стержень до розтягу мав початкову довжину l, а початковий діаметр d, то після розтягу довжина його стане l_1, а діаметр d_1. Тоді відносна поздовжня деформація визначиться як

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} = \frac{\Delta l}{l},$$

а відносна поперечна деформація

$$\varepsilon' = \frac{d_1 - d}{d} = \frac{\Delta d}{d}.$$

Доведено, що ці деформації пов'язані між собою співвідношенням

$$|\varepsilon' / \varepsilon| = \mu, \tag{2.20}$$

тобто відношення відносної поперечної деформації до відносної поздовжньої деформації є величина стала для даного матеріалу. Величину μ називають коефіцієнтом поперечної деформації або коефіцієнтом Пуассона.

Відносні поздовжня і поперечна деформації мають протилежні знаки, а тому $\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon$.

Коефіцієнт Пуассона, поряд з модулем пружності E, є важливою пружною характеристикою матеріалу і змінюється від 0 для пробкового дерева до 0,5 для каучуку. Для сталей залежно від марки μ = 0,25–0,35, для цинку μ = 0,27, для свинцю μ = 0,42 Коефіцієнт Пуассона характеризує поперечну жорсткість матеріалу, тобто його здатність чинити опір поперечним деформаціям.

Необхідні в інженерній практиці пружні характеристики матеріалів, такі як модуль пружності E, коефіцієнт Пуассона μ та ін., визначають дослідним шляхом. Для цього використовують стандартні зразки із досліджуваного матеріалу, проводять на них досліди на розтяг, стиск, зріз, кручення, згин тощо. Досліди виконують на спеціальних машинах, призначення та принцип роботи яких наведено у відповідних лабораторних практикумах з опору матеріалів (Дем'яненко та ін., 2017).

Зупинимося лише на результатах, які отримують при проведенні самого простого виду досліджень – випробувань на розтяг зразків з пластичної маловуглецевої сталі при статичних навантаженнях. Форма стандартних циліндричних зразків для випробувань на розтяг з метою визначення механічних характеристик наведена на рис. 2.4. Зразок закріплюють у спеціальних захватах випробувальної машини і розтягують повільно зростаючою силою від нуля до того значення, за якого відбувається руйнування зразка. У процесі випробування спеціальний пристрій випробувальної машини в автоматичному режимі викреслює графік залежності видовження зразка Δl від величини сили розтягу F, тобто записує так звану діаграму розтягу $F - \Delta l$.

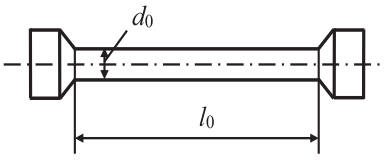


Рис. 2.4

Для визначення механічних характеристик матеріалу (незалежно від розмірів зразка) використовують умовну діаграму розтягу, перебудовану в координатах $\varepsilon - \sigma$. Для цього всі значення розтягуючої сили F ділять на початкову площу поперечного перерізу A_0, а видовження зразка Δl – на початкову розрахункову довжину l_0 (рис. 2.4). Будуючи діаграму $\varepsilon - \sigma$, змінюваність розмірів поперечного перерізу та довжини зразка не враховують, а тому діаграму називають *умовною*.

На рис. 2.5 наведено умовну діаграму розтягу маловуглецевої сталі, що має декілька характерних точок та ділянок. Спочатку при навантаженні зразка залежність між напруженням та відносною деформацією лінійна, що відображається на діаграмі ділянкою OB, яку називають ділянкою пропорційності. Ця ділянка

діаграми – пряма лінія. Вона відображає лінійну, прямо пропорційну залежність між нормальним напруженням σ та відносною деформацією ε.

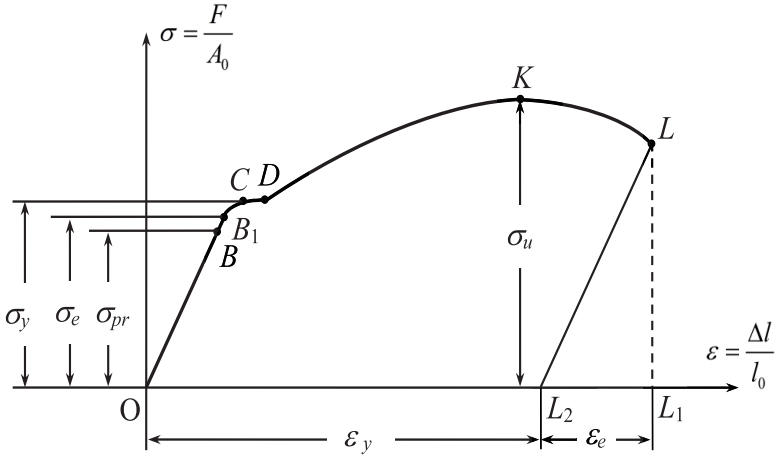


Рис. 2.5

Найбільше нормальне напруження, за якого ще справедливий закон Гука, тобто існує прямо пропорційна залежність між силою та видовженням, називають *границею пропорційності.* На діаграмі границя пропорційності відповідає точці B (кінець прямолінійної ділянки), позначається σ_{pr} і відповідно визначається

$$\sigma_{pr} = F_{pr} / A_0. \tag{8.2}$$

Наприклад, для маловуглецевої сталі Ст2 (вміст вуглецю 0,02%) значення σ_{pr} = 200 МПа = 2000 кг/см^2.

Ділянку OB_1 називають ділянкою пружності, а напруження, що відповідає точці B_1, називають границею пружності. *Границя пружності* σ_e – це найбільше значення нормального напруження, не перевищуючи яке зразок отримує тільки пружні деформації, тобто деформації, які зникають після розвантаження. Наголосимо, що границя пружності σ_e – це нормальне напруження, перевищення якого призводить до появи залишкових деформацій. Значення границі пружності σ_e та границі пропорційності σ_{pr} для багатьох пружно-пластичних матеріалів близькі.

Відрізок діаграми *CD* паралельний, або майже паралельний, осі ε називають ділянкою текучості. У разі напруження, що відповідає відрізку *CD*, зразок помітно деформується по всій довжині за сталого навантаження.

Границя текучості – це напруження, за якого деформації інтенсивно зростають при практично сталому значенні навантаження. Позначають границю текучості σ_y та визначають за формулою

$$\sigma_y = F_y / A_0 , \tag{2.22}$$

де F_y – сила розтягу, за якої зразок інтенсивно деформується (тече) за постійного навантаження.

У разі досягнення границі текучості попередньо полірована поверхня зразка стає матовою, оскільки на ній з'являється система ліній ковзання (лінії Людерса–Чернова), нахилених до осі зразка під кутом близько 45°. Границя текучості матеріалу є дуже важливою механічною характеристикою в розрахунках на міцність, зокрема при визначенні допустимих напружень для пластичних матеріалів. Для сталі-20 σ_y = 250 МПа, для сталі-45 σ_y = 360 МПа. Пройшовши стан текучості, за подальшого збільшення розтягуючої сили зразок знову набуває здатності чинити опір зростаючому видовженню. Ділянку *DK* називають зоною зміцнення матеріалу, наклепу, нагартовки.

Напруження, що відповідає найбільшому навантаженню, яке може витримати досліджуваний матеріал, називають *границею міцності* або тимчасовим опором матеріалу. Таке напруження позначають σ_u та розраховують за формулою

$$\sigma_u = F_{max} / A_0. \tag{2.23}$$

Для сталі-20 σ_u = 420 МПа, для сталі-45 σ_u = 610 МПа, для сталі-40Х σ_u = 1000 МПа. У разі досягнення границі міцності на зразку утворюється місцеве звуження – так звана шийка. Подальше видовження зразка відбувається за рахунок деформації зразка поблизу шийки, а тому ділянку *KL* називають зоною місцевої текучості. Розриву зразка відповідає точка *L* діаграми. За рахунок різкого зменшення діаметра шийки загальне навантаження знижується,

умовні напруження, одержані шляхом ділення розтягуючої сили F на початкову площу поперечного перерізу A_0, теж зменшується. Але слід підкреслити, що дійсні напруження при руйнуванні визначаються шляхом ділення руйнуючої сили на площу поперечного перерізу шийки. Дійсні напруження руйнування можуть значно перевищувати границю міцності. Інакше кажучи, границя міцності не є напруженням, за якого зразок руйнується.

Повна деформація на діаграмі відповідає абсцисі точки L, тобто відрізку OL_1. Якщо через точку L провести пряму, паралельну OB до перетину з віссю абсцис в точці L_2, то відрізок L_2L_1 відповідатиме відносній пружній деформації ε_e, а відрізок OL_2 – відносній залишковій (пластичній) деформації ε_y.

Результати проведеного експерименту дають змогу визначити також характеристики пластичності матеріалу, до яких належить відносне залишкове видовження

$$\delta = \frac{l - l_0}{l} \cdot 100\%, \tag{2.24}$$

де l – довжина зразка після розриву; l_0 – початкова довжина зразка, та відносне залишкове звуження в місці руйнування

$$\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\%, \tag{2.25}$$

де A_0 – площа поперечного перерізу зразка до деформування; A_1 – площа перерізу шийки після руйнування. Чим більші значення δ і ψ, тим матеріал більш пластичний, тобто отримує більші деформації до руйнування. Наприклад, для маловуглецевої сталі-10 ці величини становлять $\delta = 31\%$, $\psi = 63\%$. Така сталь вважається високопластичним матеріалом.

Матеріали, які мають відносне видовження або відносне звуження менше за 5%, умовно вважаються крихкими. За звичайної температури крихкими матеріалами є чавун, скло, граніт тощо. Зразки із крихких матеріалів руйнуються за малих деформацій. На рис. 2.6 (крива *а*) показана діаграма розтягу чавуну, з якої

видно, що навіть незначні деформації викликають відхилення в поведінці матеріалу від закону Гука, а залишкова відносна деформація в разі розриву не перевищує 0,015%.

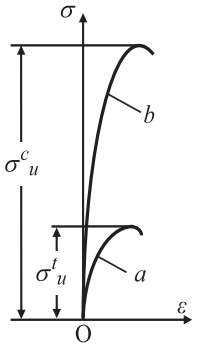


Рис. 2.6

Діаграма стиску чавуну (крива *b*) показує, що границя міцності чавуну при стиску σ^c_u приблизно в три рази більша за границю міцності цього ж матеріалу при розтягу σ^t_u, тобто крихкі матеріали набагато краще працюють при стиску, ніж при розтягу, що обов'язково необхідно враховувати, проектуючи елементи конструкцій та деталі машин. Для пластичних матеріалів порівняння характеристик міцності на розтяг та стиск проводять по границях текучості (σ^t_y та σ^c_y).

Існують матеріали, здатні сприймати більші навантаження при розтягу, ніж при стиску. Це матеріали, які мають волокнисту структуру, дерево, деякі типи пластмас. Залежно від умов роботи, характеру дії зовнішніх сил (температура, зовнішній тиск, фактор часу) деякі крихкі матеріали можуть мати властивості пластичних, а пластичні властивості крихких.

Підкреслимо, що основними механічними характеристиками та небезпечними напруженнями для пластичних матеріалів вважають границю текучості, а для крихких матеріалів границю міцності. Визначивши небезпечні напруження σ_y та σ_u експериментально і прийнявши відповідні коефіцієнти запасу міцності (k_1, k_2), розраховують значення допустимих напружень відповідно для пластичних

$$\sigma_{adm} = \sigma_y / k_1 \tag{2.26}$$

та для крихких матеріалів

$$\sigma_{adm} = \sigma_u / k_2. \tag{2.27}$$

Такі дані використовують у розрахунках елементів конструкцій і деталей машин на міцність за допустимими напруженнями.

2.7. Статично невизначені стержньові конструкції та їх розрахунки

Статично невизначеними називають стержньові системи, для яких неможливо визначити невідомі сили за допомогою тільки рівнянь статики, тобто стержньові системи, в яких число невідомих зусиль більше від числа лінійно незалежних рівнянь статики, які можемо скласти для їх визначення. Відповідно задачі, пов'язані з розрахунками статично невизначених систем, називають *статично невизначеними*. Різницю між числом невідомих сил та числом лінійно незалежних рівнянь статики, які можемо скласти для їх визначення, називають *ступенем статичної невизначеності конструкції* або відповідної задачі.

Приклад 2. У стержньовій конструкції гідравлічного пристрою для запресовування підшипників (рис. 2.7) у разі наявності тільки стержня 1 та відсутності стержня 2 маємо дві невідомі складові реакції в шарнірі Z_0, Y_0 і невідоме зусилля в стержні N_1. Всього невідомих сил реакції три. Для даної системи сил (довільна плоска система сил) можемо скласти три лінійно незалежні рівняння рівноваги, яких цілком достатньо для однозначного визначення трьох невідомих сил. Така конструкція і відповідно задача статично визначені. Накладених на горизонтальний стержень в'язей достатньо для забезпечення кінематичної незмінності конструкції.

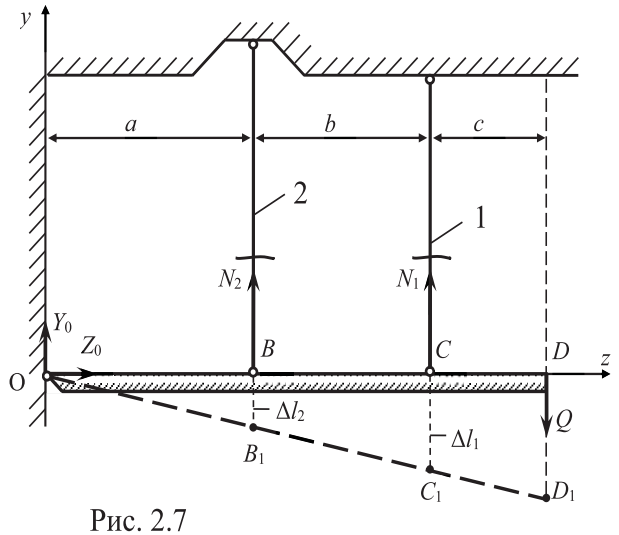


Рис. 2.7

Додамо тепер у конструкцію ще один стержень 2, тобто накладемо на систему додаткову в'язь, яка дасть і додаткову реакцію в'язі N_2. Невідомих зусиль стане чотири, а лінійно незалежних рівнянь статики, як і раніше, можемо скласти лише три.

Ступінь статичної невизначеності такої конструкції дорівнює одиниці. Для розв'язування задачі не вистачає одного рівняння.

Ступінь статичної невизначеності стержньової конструкції розраховують ще й за числом так званих "зайвих" в'язей, тобто в'язей, усунення яких не приводить до геометричної змінюваності системи. Термін "зайві" в'язі вживається в тому розумінні, що ці в'язі не потрібні для забезпечення рівноваги системи як абсолютно твердого тіла, але для забезпечення міцності й жорсткості реальної пружної конструкції ці в'язі необхідні. У нашому прикладі стержень 2 є "зайвим". І якщо його усунути, то система як абсолютно тверде тіло буде геометрично незмінною, але ж міцність та жорсткість пружної стержньової системи, звичайно, зміняться.

Отже, абсолютно жорсткий брус OD закріплений за допомогою нерухомого циліндричного шарніра O та двох стержнів 1 та 2, з площею поперечного перерізу A_1 та A_2, довжиною l_1 та l_2, модулем пружності матеріалу E_1 та E_2 відповідно. Зовнішня сила, що діє на брус OD, Q. Треба визначити невідомі реакції Z_0, Y_0, поздовжні сили в стержнях N_1, N_2 та напруження в поперечних перерізах стержнів 1 і 2 σ_1, σ_2. Задача один раз статично невизначена, оскільки невідомих сил чотири, а лінійно незалежних рівнянь статики для плоскої довільної системи сил можна скласти тільки три.

Нехтуючи зміною розмірів елементів системи в результаті їх деформації та зміною їх положення, складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} &\sum Z = Z_0 = 0; \\ &\sum Y = Y_0 + N_1 + N_2 - Q = 0; \\ &\sum mom_0\left(\bar{F}_i\right) = N_1\left(a+b\right) + N_2 \cdot a - Q\left(a+b+c\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Рівняння рівноваги (2.28) треба доповнити рівнянням сумісності деформацій, яке відображає той факт, що система деформується без руйнування окремих елементів, без роз'єднання шарнірів, тобто деформується як єдине ціле. При цьому деформації окремих елементів зв'язані між собою. Розглянемо спочатку

геометричну сторону задачі. У результаті навантаження стержні 1 та 2 деформуються і абсолютно жорсткий горизонтальний брус OD займе положення OD_1. У реальних конструкціях ці деформації настільки малі, що на умови рівноваги не впливають. Для кращого розуміння вони показані у збільшеному вигляді. Горизонтальними переміщеннями точок B та C під час деформації нехтуємо як величинами більш високого порядку малості порівняно з вертикальними переміщеннями. Оскільки напрямки переміщень шарнірів B та C співпадають з напрямками осей стержнів 2 та 1, вважатимемо, що шарніри B і C переміщуються вертикально і відповідно

$$BB_1 = \Delta l_2 ; \qquad CC_1 = \Delta l_1,$$

де Δl_1 і Δl_2 – видовження першого та другого стержнів.

Із подібності трикутників $\Delta OCC_1 \sim \Delta OBB_1$ знаходимо

$$\Delta l_1 / \Delta l_2 = (a + b) / a,$$

або

$$\Delta l_1 \cdot a = \Delta l_2 (a + b). \tag{2.29}$$

Співвідношення (2.29) і є рівнянням сумісності деформацій, записаним в переміщеннях.

Тепер розглянемо фізичну сторону задачі. Використовуючи закон Гука, виражаємо видовження стержнів 1 і 2 через невідомі сили:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}. \tag{2.30}$$

Враховуючи вирази (2.30) після їх підстановки у рівняння (2.29), рівняння сумісності деформацій (2.29) перепишемо в невідомих зусиллях і таким чином отримаємо четверте рівняння, яким доповнимо систему трьох рівнянь статики

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} a = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \left(a + b\right). \tag{2.31}$$

Доповнивши систему рівнянь рівноваги (2.28) четвертим рівнянням сумісності деформацій (2.31), записаним у зусиллях, і розв’язуючи систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими, знайдемо усі невідомі зусилля Z_0, Y_0, N_1, N_2, а потім і напруження в поперечних перерізах стержнів:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}.$$

Зауважимо, що для остаточного та повного розв'язання цієї задачі обов'язково необхідно мати або площі поперечних перерізів стержнів, або їх співвідношення A_1 / A_2.

Приклад 3. Однорідний, сталого поперечного перерізу площею A стержень жорстко затиснутий по краях і навантажений силою F (рис. 2.8). Необхідно визначити напруження σ_a, σ_b, які виникають у поперечних перерізах верхньої та нижньої ділянок стержня.

Розв'язування. Для визначення внутрішніх поздовжніх сил N_a, N_b, що виникають у поперечних перерізах стержня на ділянках a та b, визначимо опорні реакції R_a, R_b. Невідомих сил дві. Для стержня, на який діють сили вздовж однієї прямої, можемо скласти, як відомо зі статики, тільки одне рівняння рівноваги

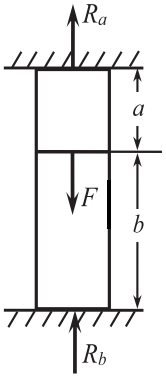


Рис. 2.8

$$R_a + R_b - F = 0, \tag{2.32}$$

тобто для визначення двох невідомих сил маємо одне рівняння статики. Отже, задача один раз статично невизначена. Додаткове рівняння сумісності деформацій у цій задачі складемо виходячи з тієї умови, що повне видовження стержня дорівнює нулю

$$\Delta l = \Delta l_a + \Delta l_b = 0. \tag{2.33}$$

Геометрична сторона задачі з'ясована, рівняння сумісності деформації в переміщеннях складено (2.33). Фізична сторона задачі полягає в тому, що поздовжня розтягуюча сила у верхній ділянці стержня $N_a = R_a$, а поздовжня стискуюча сила в нижній ділянці $N_b = R_b$ і відповідно абсолютні деформації цих ділянок визначаться:

$$\Delta l_a = \frac{R_a \cdot a}{EA}; \quad \Delta l_b = \frac{R_b \cdot b}{EA}. \tag{2.34}$$

Рівняння сумісності деформацій (2.33) через невідомі сили набере вигляду

$$\frac{R_a \cdot a}{EA} = \frac{R_b \cdot b}{EA}, \tag{2.35}$$

звідки $$R_a = \frac{b}{a} \cdot R_b \,. \qquad (2.36)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.32) та (2.36), знаходимо, що

$$R_a = F \cdot \frac{b}{a+b}; \quad R_b = F \cdot \frac{a}{a+b}\,.$$

Визначаємо за відомими формулами напруження у поперечних перерізах верхньої та нижньої ділянок стержня:

$$\sigma_a = \frac{N_a}{A} = \frac{R_a}{A} = \frac{F}{A} \cdot \frac{b}{a+b}; \qquad \sigma_b = \frac{N_b}{A} = \frac{R_b}{A} = \frac{F}{A} \cdot \frac{a}{a+b}.$$

У цій задачі рівняння сумісності деформацій можна було б скласти виходячи з інших міркувань: в початковій системі (рис. 2.8) відкинути нижнє затиснення, замінивши його дію на стержень реакцією R_b. Переріз I–I тепер вільно може переміщуватися під дією сил F та R_b, яка виступає у ролі зовнішньої сили (рис. 2.9).

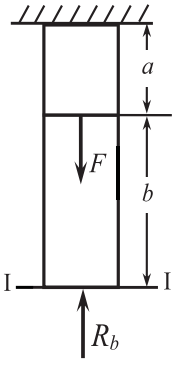


Рис. 2.9

Згідно з принципом незалежності дії сил, стержень під дією сили F видовжиться на величину $\Delta l_F = \frac{F \cdot a}{EA}$, а під дією сили R_b скоротиться на $\Delta l_{R_b} = \frac{R_b \cdot (a+b)}{EA}$. Для повної відповідності отриманої системи (рис. 2.9), яку називають основною, початковій системі (рис. 2.8) необхідно, щоб переміщення перерізу I–I дорівнювало нулю, що можливо у випадку, коли $\Delta l_F = \Delta l_{Rb}$ (рівняння сумісності деформацій у переміщеннях) або рівняння сумісності деформацій в силах

$$\frac{Fa}{EA} = \frac{R_b(a+b)}{EA}. \qquad (2.37)$$

Розв'язуючи спільно рівняння рівноваги (2.32) та рівняння сумісності деформацій (2.37), знайдемо опорні реакції:

$$R_b = \frac{Fa}{a+b}; \qquad R_a = \frac{Fb}{a+b}.$$

Нормальні напруження у поперечних перерізах верхньої та нижньої ділянок відповідно визначимо:

$$\sigma_a = \frac{F}{A} \cdot \frac{b}{a+b}; \qquad \sigma_b = \frac{F}{A} \cdot \frac{a}{a+b}.$$

Останній підхід до складання рівняння сумісності деформацій є найбільш загальним і в подальшому буде викладений у методі сил.

Приклад 4. Чавунний круглий маховик, що лопнув під час роботи, треба стягти стальним обручем. Зовнішній діаметр диску D = 80 см. Внутрішній діаметр обруча d дещо менший від D. Для можливості насадки обруч попередньо нагрівають. Охолоджуючись, довжина обруча (діаметр обруча) зменшується і стискує диск, залишаючись у розтягнутому стані. Якої довжини треба взяти внутрішній діаметр обруча d, якщо напруження в ньому після насадки має дорівнювати σ = 100 МПа. Диск вважати абсолютно твердим тілом. Модуль пружності сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Розв'язування. Після насадки і охолодження в поперечних перерізах обруча виникнуть розтягуючі нормальні напруження, які дорівнюють 100 МПа. Це означає, що відносні деформації обруча після охолодження, відповідно до закону Гука, дорівнюватимуть

$$\varepsilon = \sigma / E . \tag{2.38}$$

Довжина обруча після насадки і охолодження визначиться через діаметр диска $l = \pi \cdot D$; довжина обруча до нагрівання $l_0 = \pi \cdot d$; абсолютне видовження обруча $\Delta l = l - l_0 = \pi (D - d)$.

Відносне видовження обруча становитиме

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{D-d}{d}. \tag{2.39}$$

Враховуючи вирази (2.38) та (2.39), одержимо, що

$$\sigma / E = (D - d) / d,$$

звідки $$d = \frac{D}{\left(\frac{\sigma}{E}+1\right)} = \frac{80}{\left(\frac{100}{2\cdot 10^5}+1\right)} = 79{,}6\,\text{см}.$$

Приклад 5. Абсолютно жорсткий горизонтальний брус навантажувача знаходиться під дією сили F, підтримується двома стальними тягами 1 та 2 (рис. 2.10).

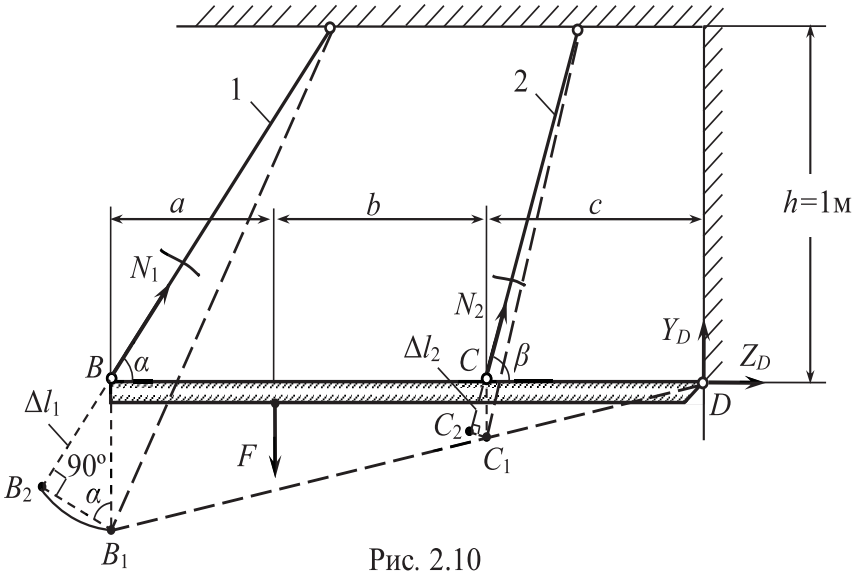


Рис. 2.10

Перша тяга має площу поперечного перерізу в два рази більшу, ніж друга. Визначити площі поперечних перерізів A_1 та A_2 стальних тяг, якщо допустиме напруження для них σ_{adm} = 160 МПа. Взяти при розрахунках a = 1 м; b = 2 м; c = 1,5 м; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$; F = 120 кН.

Розв'язування. Задача один раз статично невизначена, оскільки невідомих реакцій в'язей чотири: N_1, N_2, Z_D, Y_D, а лінійно незалежних рівнянь статики для горизонтального бруса, який знаходиться під дією плоскої довільної системи сил, можемо скласти тільки три:

$$\begin{aligned}
&\sum Z = N_1\cos\alpha + N_2\cos\beta + Z_D = 0;\\
&\sum Y = N_1\sin\alpha + N_2\sin\beta + Y_D - F = 0;\\
&\sum mom_D\left(\overline{F}_i\right) = N_1\cos 45^\circ\left(a+b+c\right) + N_2\cos 30^\circ\cdot c - F\left(b+c\right) = 0.
\end{aligned} \qquad (2.40)$$

Для складання рівняння сумісності деформацій розглянемо деформований стан нашої стержньової конструкції. Розглядаючи малі деформації стальних тяг та нехтуючи горизонтальними складовими переміщень, шарніри B і C, переміщуючись по вертикалі, займають положення B_1 та C_1. Тяги 1 та 2 при цьому видовжилися та повернулися. Умовно можемо вважати, що стержні спочатку видовжилися на величини $BB_2 = \Delta l_1$ та $CC_2 = \Delta l_2$, а потім повернулися так, що точки B_2 та C_2 перейшли в положення B_1 та C_1. Враховуючи малість кутів повороту стержнів, вважатимемо, що кути $\angle BB_2B_1$ та $\angle CC_2C_1$ прямі.

Знайдемо залежність між видовженнями тяг Δl_1 та Δl_2. Із подібності трикутників $\Delta\, DBB_1 \sim \Delta\, DCC_1$ маємо

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{a+b+c}{c} = \frac{4{,}5}{1{,}5} = 3. \qquad (2.41)$$

Відповідно із $\Delta\, BB_2B_1$ та $\Delta\, CC_2C_1$

$$BB_1 = \Delta l_1 / \cos 45°; \qquad CC_1 = \Delta l_2 / \cos 30°. \qquad (2.42)$$

Після підстановки виразів BB_1 і CC_1 (2.42) в залежність(2.41) одержимо рівняння сумісності деформацій у переміщеннях:

$$\frac{\Delta l_1 \cdot \cos 30°}{\Delta l_2 \cdot \cos 45°} = 3,$$

або

$$\Delta l_1 \cdot \cos 30° = 3\Delta l_2 \cdot \cos 45°. \qquad (2.43)$$

Таким чином, розглянувши геометричну сторону деформованого стану конструкції, із геометричних міркувань отримали додаткове рівняння сумісності деформацій (2.43).

Розглянемо тепер фізичну сторону задачі. Видовження стальних тяг Δl_1 та Δl_2, відповідно до закону Гука, виразимо через невідомі сили:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E A_1}; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E A_2}, \qquad (2.44)$$

де l_1 та l_2 – довжини стержнів, які можна визначити через величину h (рис. 2.10):

$$l_1 = h/\cos 45°; \quad l_2 = h/\cos 30°. \qquad (2.45)$$

За умовою задачі маємо співвідношення площ поперечних перерізів тяг

$$A_1 = 2\, A_2\,. \qquad (2.46)$$

Враховуючи рівності (2.44), (2.45), (2.46), рівняння сумісності деформації (2.43) перепишемо через невідомі сили

$$\frac{N_1 h \cos 30^\circ}{2EA_2 \cos 45^\circ} = 3 \cdot \frac{N_2 h \cos 45^\circ}{EA_2 \cos 30^\circ},$$

або після простих перетворень

$$N_1 - 4N_2 = 0. \qquad (2.47)$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.40) і (2.47), одержимо, що $N_1 \approx 120$ кН, $N_2 = 30$ кН.

Нормальні напруження в поперечних перерізах стальних тяг, які підтримують горизонтальний брус, відповідно визначаться:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A_2} = \frac{120000}{2A_2} \text{ Па}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{30000}{A_2} \text{ Па}.$$

Оскільки напруження в першому стержні більше, ніж у другому, підбір площі поперечного перерізу розпочинаємо з умови міцності першого стержня

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \le \sigma_{adm} \quad \text{або} \quad \frac{N_1}{2A_2} \le \sigma_{adm},$$

звідки $A_2 = N_1 / 2\sigma_{adm} = 120000 / (2 \cdot 160000000) = 3{,}75 \cdot 10^{-4}$ м^2 = 3,75 см^2.

Відповідно площа поперечного перерізу першого стержня дорівнюватиме

$$A_1 = 2A_2 = 7{,}5 \text{ см}^2.$$

2.8. Монтажні деформації та напруження

Напруження та деформації елементів конструкцій, які виникають під час їхнього монтажу за рахунок неточного виготовлення окремих елементів, називають монтажними.

Приклад 6. Абсолютно жорсткий горизонтальний брус підтримується трьома стальними стержнями довжиною l = 1 м (рис. 2.11). Середній стержень виготовлений на Δ = 0,5 мм коротшим необхідної довжини і поставлений під час монтажу на місце з початковим натягом. Визначити напруження в стержнях,

якщо площі поперечних перерізів усіх стержнів є однаковими і дорівнюють $A = 2$ см^2, а $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Розв'язування. Щоб виконати монтаж наведеної конструкції, необхідно середній стержень розтягнути і видовжити на величину Δ.

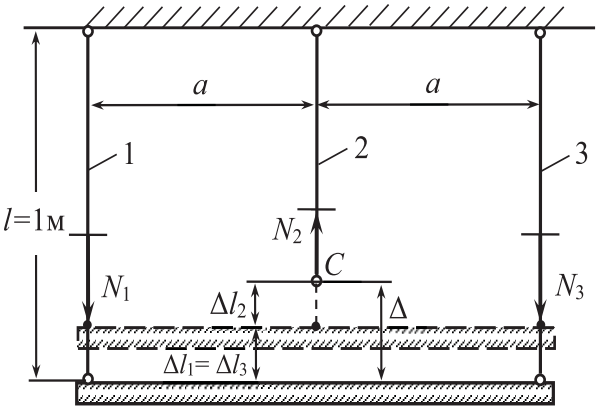


Рис. 2.11

Після монтажу середній стержень знаходитиметься в розтягнутому стані і підніматиме горизонтальний брус, стискуючи крайні стержні. У такий спосіб у стержнях виникнуть відповідно стискуючі N_1, N_3 та розтягуюча N_2 сили. Горизонтальний брус під дією трьох сил N_1, N_2, N_3 (рис. 2.11) знаходиться у стані рівноваги. Брус дещо підніметься і займе положення, показане пунктирною лінією. Для системи паралельних сил N_1, N_2, N_3 можемо скласти два лінійно незалежних рівняння рівноваги, з яких неможливо однозначно віднайти три невідомих. Отже, конструкція після монтажу, а відповідно і задача один раз статично невизначені.

Рівняння рівноваги запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} &\sum Y = -N_1 + N_2 - N_3 = 0; \\ &\sum mom_C(\bar{F}_i) = N_1 \cdot a - N_3 \cdot a = 0. \end{aligned} \qquad (2.48)$$

Додаткове рівняння сумісності деформацій складемо із тих міркувань, що зазор Δ перекривається за рахунок видовження середнього стержня Δl_2 та скорочення крайніх стержнів $\Delta l_1 = \Delta l_3$ (рис. 2.11). Тобто

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta \, . \qquad (2.49)$$

Виражаючи абсолютні деформації стержнів через невідомі сили за законом Гука $\Delta l_1 = \dfrac{N_1 l}{EA}$, $\Delta l_2 = \dfrac{N_2 l}{EA}$, рівняння (2.49) перепишемо у вигляді

$$\frac{N_1 l}{EA} + \frac{N_2 l}{EA} = \Delta. \qquad (2.50)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.48) та (2.50), одержимо

$$N_1 = N_3 = \frac{1}{2} N_2 = \frac{\Delta EA}{3l} = 6,66\,\text{кН}.$$

Відповідно нормальні напруження у поперечних перерізах стержнів 1, 2, 3 становитимуть

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 33,3\ \text{МПа}; \qquad \sigma_2 = 66,7\ \text{МПа}.$$

2.9. Температурні деформації і напруження та їх визначення

З фізики відомо, що тіла під дією температури змінюють свої розміри: під час нагрівання збільшують, у разі охолодження зменшують. Зміну розмірів пружного твердого тіла під впливом температурного поля називають *температурною деформацією*. Відповідно і напруження, які виникають в елементах конструкцій у результаті зміни температури, називають температурними. Температурні напруження виникають тільки в статично невизначених системах. Методика їх визначення аналогічна розрахункам статично невизначених систем за дії силового навантаження. Змінюється тільки фізична сторона задачі, оскільки деформації виникають не за рахунок дії сил, а за рахунок зміни температури. Визначення температурних напружень покажемо на прикладі. Експериментально встановлено, що стержень довжиною l при зміні температури на величину $\Delta t°$ змінює довжину на Δl_t, тобто температурна деформація стержня дорівнює

$$\Delta l_t = \alpha_t \cdot l \cdot \Delta t°, \qquad (2.51)$$

де α_t – коефіцієнт теплового лінійного розширення матеріалу, який залежить від матеріалу та наведено в спеціальних таблицях довідників.

Приклад 7. Стальний стержень затиснутий нерухомо між двома стінками (рис. 2.12). Довжина стержня l = 0,5 м. Площа поперечного перерізу A = 20 см^2,

коефіцієнт теплового лінійного розширення сталі $\alpha_t = 125 \cdot 10^{-7}$ 1/град, модуль пружності сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Визначити напруження в стержні при нагріванні на $\Delta t° = 30°C$.

Розв'язування. Під час нагрівання стержень видовжується і тисне на жорсткі стінки. Стінки у свою чергу тиснуть на стержень, що викликає появу стискуючих сил та напружень. Реакції стінок позначимо через R_1 та R_2. Для системи сил, діючих вздовж однієї прямої, можемо скласти тільки одне рівняння рівноваги

$$\Sigma Z = R_1 - R_2 = 0. \tag{2.52}$$

Рівняння рівноваги одне, а невідомих дві. Задача один раз статично невизначена. Із рівняння рівноваги (2.52) маємо

$$R_1 = R_2 \,. \tag{2.53}$$

Щоб знайти величину R_1 або R_2, треба скласти додаткове рівняння сумісності деформацій. Оскільки загальна довжина стержня не змінюється, можемо стверджувати, що видовження за рахунок підвищення температури Δl_t (температурної деформації) та скорочення стержня Δl_R (пружної деформації) під дією стискуючої поздовжньої сили R_2, дорівнює нулю

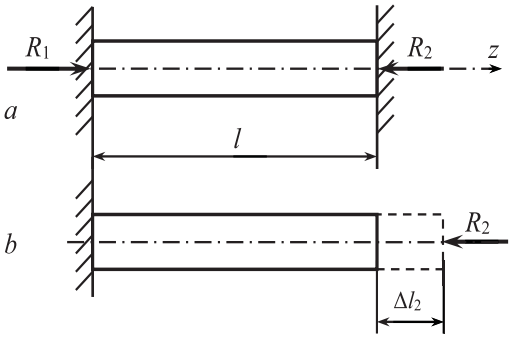


Рис. 2.12

$$\Delta l = \Delta l_t - \Delta l_{R2} = 0. \tag{2.54}$$

Враховуючи, що $\Delta l_t = \alpha_t \cdot l \cdot \Delta t°$; $\Delta l_{R2} = R_2 l / EA$, рівняння сумісності деформацій (2.54) перепишемо у вигляді

$$\alpha_t \cdot l \cdot \Delta t° - \frac{R_2 l}{EA} = 0, \tag{2.55}$$

звідки визначимо стискуючу поздовжню силу $R_2 = R_1 = \alpha_t \cdot \Delta t° \cdot EA$. Відповідно температурні нормальні напруження в поперечних перерізах стержня дорівнюватимуть

$$\sigma_t = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t° \cdot EA}{A} = \alpha_t \cdot \Delta t° \cdot E = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 30 = 75 \text{ МПа}.$$

Більш загальний підхід до складання рівняння сумісності деформацій можна здійснити таким чином: відкидаємо уявно "зайву" опору, наприклад праву, замінюючи її дію реакцією R_2. Одержуємо основну систему. На переміщення основної системи накладаємо такі обмеження, які накладалися на початкову систему відкинутою опорою. Тобто вимагаємо, щоб переміщення крайнього правого перерізу дорівнювало нулю. Іншими словами, видовження стержня за рахунок підігрівання Δl_t та скорочення стержня за рахунок стискуючої сили збоку стінки в сумі дають загальне видовження, яке дорівнює нулю

$$\Delta l_t + (-\Delta l_{R2}) = 0,$$

або

$$\alpha_t \cdot l \cdot \Delta t^\circ - \frac{R_2 l}{EA} = 0,$$

звідки

$$\sigma_t = \frac{R_2}{A} = \alpha_t \cdot \Delta t^\circ \cdot E = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 30 = 75\,\text{МПа}.$$

Зазначимо, що дію температурного поля на елементи конструкцій та деталі машин необхідно брати до уваги. Особливо це актуально для елементів конструкцій та деталей машин, які працюють в умовах високих та низьких температур, наприклад для елементів та деталей двигунів внутрішнього згоряння. Для того щоб запобігти виникненню великих температурних деформацій та напружень, виконують запобіжники у вигляді деформаційних швів, зазорів, температурних компенсаторів і т. ін.

2.10. Напруження і деформації з урахуванням власної ваги стержня та їх визначення

У попередніх параграфах, визначаючи деформації та напруження, власною вагою стержнів нехтували, а враховували тільки дію зовнішніх прикладених сил. У деяких же випадках необхідно враховувати і дію власної ваги та її вплив на міцність і жорсткість елементів конструкцій та деталей машин. Розглянемо це питання на прикладі.

Приклад 8. Циліндричний стержень довжиною l, площею поперечного перерізу A, навантажений силою F та силами власної ваги (рис. 2.13). Необхідно визначити та побудувати епюри поздовжніх сил N, нормальних напружень σ та переміщень поперечних перерізів u, якщо питома вага матеріалу γ.

Розв'язування. Для визначення поздовжніх сил розглянемо рівновагу відсіченої нижньої частини стержня довжиною z. На цю частину діють зовнішня сила F, сила власної ваги γAz та внутрішня поздовжня сила N. Із умови рівноваги маємо

$$N = F + \gamma Az\,. \tag{2.56}$$

Напруження в довільному перерізі визначимо за формулою

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} + \gamma z\,. \tag{2.57}$$

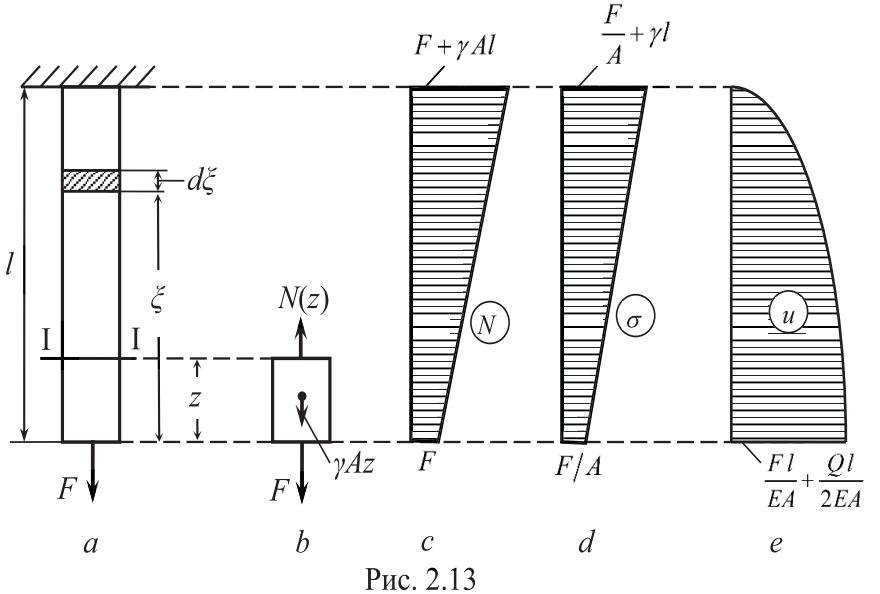


Рис. 2.13

Переміщення перерізу I–I відбувається за рахунок видовження частини стержня, що знаходиться між поперечним перерізом I–I та закріпленням стержня. Поздовжня сила, що діє на цій ділянці стержня, змінюється по довжині, а тому для визначення видовження використаємо формулу (2.18)

$$u = \int_z^l \frac{N(\xi)\,d\xi}{EA} = \int_z^l \frac{(F + \gamma A\xi)\,d\xi}{EA} = \frac{1}{EA}\left(F\xi + \gamma A\frac{\xi^2}{2} \right)\Bigg|_z^l = \frac{F}{EA}(l - z) + \frac{\gamma}{2E}\left(l^2 - z^2\right). \tag{2.58}$$

Переміщення найнижчого поперечного перерізу

$$u\big|_{z=0} = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{Fl}{EA} + \frac{Ql}{2EA}, \tag{2.59}$$

де $Q = \gamma Al$ – власна вага стержня.

На основі виразів (2.56), (2.57), (2.58) будуємо епюри поздовжніх сил, нормальних напружень та переміщень поперечних перерізів (рис. 2.13,*c*, *d*, *e*).

Приклад 9. Колона (рис. 2.14) навантажена силою F і силами власної ваги. Якщо колона мала б площу поперечного перерізу сталу за висотою, то напруження в перерізах були б різні. І коли у найбільш навантаженому нижньому перерізі напруження досягнуть допустимих, інші перерізи будуть недовантажені. Ось чому виникає питання підібрати такий закон зміни площі поперечного перерізу $A = A(z)$, щоб напруження в усіх перерізах були однакові і дорівнювали F / A_0. Питома вага матеріалу колони γ.

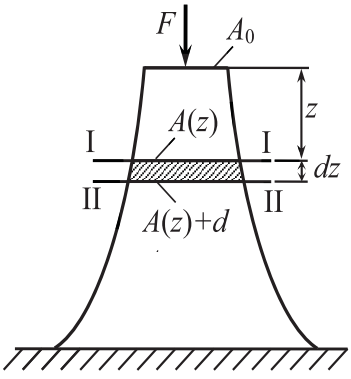


Рис. 2.14

Розв'язування. Будемо вважати, що $A(z)$ – площа поперечного перерізу I–I на відстані z від верхнього торця колони підібрана таким чином, що напруження, які в ньому виникають за рахунок дії сили F та власної ваги ділянки колони довжиною z, дорівнюють F / A_0. У перерізі II–II, що знаходиться на відстані dz від перерізу I–I, діє додаткова сила, яка дорівнює вазі елемента dz

$$dQ = \gamma A(z)dz. \tag{2.60}$$

Але ж і площа поперечного перерізу II–II збільшилася на величину dA. Отже, для того щоб напруження в перерізі II–II залишилося незмінним, необхідно, щоб додаткова сила, розділена на додаткову площу, залишалася рівною F / A_0, звідки маємо диференціальне рівняння

$$dQ / dA = F / A_0, \tag{2.61}$$

або з урахуванням рівняння (2.60)

$$\frac{\gamma A(z)dz}{dA} = \frac{F}{A_0}. \tag{2.62}$$

Рівняння (2.62) перепишемо у вигляді

$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma A_0}{F} dz. \tag{2.63}$$

Після інтегрування матимемо

$$\ln A = \frac{\gamma A_0}{F} z + C. \tag{2.64}$$

При $z = 0$, $A = A_0$, звідки $C = \ln A_0$.

Враховуючи значення для C, одержимо

$$\ln \frac{A}{A_0} = \frac{\gamma A_0}{F} z.$$

Тоді закон зміни площі буде $A = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma A_0 z}{F}}$.

Така колона (стержень) носить назву колони (стержня) однакового опору. Конструкції, у яких напруження однакові в усіх точках, називаються *рівноміцними* конструкціями, або однакового опору. У подібних конструкціях матеріал використовується найбільш раціонально (економно), вони мають мінімальну вагу, що також суттєво.

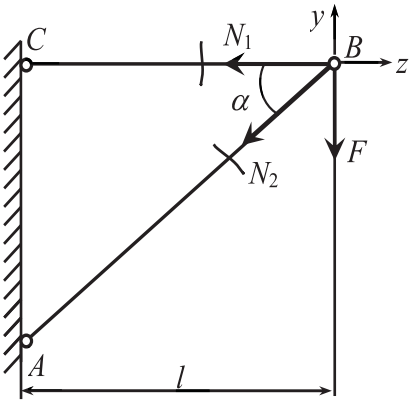


Рис. 2.15

Приклад 10. Кронштейн ABC підйомника навантажений силою F (рис. 2.15). Необхідно підібрати поперечні перерізи стержнів AB і BC з таким розрахунком, щоб напруження в них мали однакову задану величину σ_{adm}. При цьому кут α повинен бути підібраний із умови мінімальної ваги конструкції, якщо виліт кронштейна l відомий.

Розв'язування. З рівнянь рівноваги вузла B

$$\sum Z = -N_1 + N_2 \cos\alpha = 0;$$
$$\sum Y = N_2 \sin\alpha - F = 0$$

визначимо поздовжні сили, які виникають у стержнях кронштейна під дією зовнішньої сили F:

$$N_1 = F \cdot \mathrm{ctg}\alpha; \quad N_2 = \frac{F}{\sin\alpha}. \tag{2.65}$$

Із умов міцності стержнів за нормальними напруженнями

$$\sigma_1 = N_1 / A_1 \le \sigma_{adm}; \quad \sigma_2 = N_2 / A_2 \le \sigma_{adm}$$

визначаємо необхідні площі поперечних перерізів:

$$A_1 = \frac{N_1}{\sigma_{adm}} = \frac{F \cdot \mathrm{ctg}\alpha}{\sigma_{adm}}; \quad A_2 = \frac{N_2}{\sigma_{adm}} = \frac{F}{\sigma_{adm} \cdot \sin\alpha}. \tag{2.66}$$

Вага кронштейна пропорційна об'єму стержнів

$$V = A_1 \cdot l + A_2 \cdot \frac{l}{\cos\alpha}.$$

З урахуванням рівнянь (2.66) об'єм стержнів дорівнюватиме

$$V = \frac{F\,l}{\sigma_{adm}} \left(\mathrm{ctg}\alpha + \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \right). \tag{2.67}$$

Величина V досягатиме екстремального значення у випадку, коли $dV/d\alpha = 0$.

Визначивши похідну і прирівнявши її нулю, отримаємо, що об'єм стержнів кронштейна V, а відповідно і вага кронштейна досягатимуть мінімуму при

$$\cos^2\alpha = 1 / 3, \quad \text{звідки} \quad \alpha \approx 55°.$$

2.11. Перевірка міцності елементів та деталей машин за гранично допустимими навантаженнями

У попередніх параграфах при розрахунках на міцність як статично визначених, так і статично невизначених конструкцій, використовувалася умова міцності за допустимими нормальними напруженнями

$$\sigma_{max} \le \sigma_{adm}. \tag{2.68}$$

Ця умова вимагає вибору таких розмірів елементів конструкції або таких зовнішніх навантажень, за яких найбільше нормальне напруження у небезпечному перерізі не перевищувало б допустимого значення. При цьому за допустиме значення нормального напруження приймається величина $\sigma_{adm} = \sigma_y / k$ або $\sigma_{adm} = \sigma_u / n$, тобто границя текучості для пластичних матеріалів або границя міцності для крихких матеріалів зменшені відповідно у k або n разів. Зрозуміло, що такий розрахунок за допустимими напруженнями передбачає: матеріал конструкції буде повністю навантажений тільки в окремих точках або перерізах. У решти перерізів матеріал буде працювати з недовантаженням, тобто несуча здатність конструкції не використовується повністю, а це пов'язано з перевитратою матеріалу та небажаним збільшенням ваги конструкції. З метою більш повного використання несучої здатності конструкції та економії матеріалу розрахунок проводять за гранично допустимими навантаженнями. Умовою міцності при цьому методі розрахунку ставиться вимога, щоб найбільше навантаження на конструкцію не перевищувало деякого гранично допустимого навантаження Q_{adm}, яке встановлюється спеціальними нормами,

$$Q_{max} \le Q_{adm} = Q_{руйнуюче} / k_1, \qquad (2.69)$$

де k_1 – коефіцієнт запасу міцності, який приймається на основі ряду міркувань, аналогічних тим, що й при виборі коефіцієнта запасу k у розрахунках за допустимими напруженнями.

Якщо взяти $k_1 = k$, то результати розрахунків за допустимими напруженнями і за гранично допустимими навантаженнями для статично визначених систем співпадають. Для статично невизначених конструкцій результати будуть різними. Пояснюється це тим, що в статично визначеній конструкції "зайвих" в'язей немає. Досягнення в одній із в'язей напруженням границі текучості σ_y рівнозначне тому, що навантаження досягло значення $Q_{руйнуючого}$. І в тому, і в іншому випадках конструкція одержує значні залишкові деформації і, як правило, не може виконувати свого призначення.

Інша ситуація – у випадку статично невизначеної конструкції. Тут "вихід із ладу" однієї із в'язей (тобто досягнення напруження в одній із в'язей границі текучості) не означає "виходу з ладу" усієї конструкції, оскільки остання може функціонувати за рахунок інших "зайвих" в'язей.

Приклад 11. Абсолютно жорсткий брус, опертий на шарнірну опору C, підтримується двома стержнями 1 і 2, виготовленими із пластичної сталі (рис. 2.16). Брус навантажений силою F. Довжини l і площі поперечних перерізів A стержнів однакові.

Вважаємо, що границя текучості сталі відома σ_y, а допустиме напруження $\sigma_{adm} = \sigma_y / k$. Визначимо найбільше навантаження за методом допустимих напружень σ_{adm} і за методом граничних навантажень F_{adm}.

Розв'язування. Конструкція один раз статично невизначена, бо для визначення чотирьох невідомих реакцій можемо скласти тільки три рівняння рівноваги

$$\sum mom_C\left(\bar{F}_i\right) = N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot 3a = 0. \qquad (2.70)$$

Складемо додаткове рівняння сумісності деформацій. Спочатку з геометричних міркувань складемо рівняння сумісності деформацій в переміщеннях. Для цього уявимо собі, що під дією сили F балка повернулася відносно шарніра C на дуже малий кут β (рис. 2.16). При цьому шарнір B перемістився в положення B_1, а перший стержень видовжився на величину $\Delta l_1 = BB_1$; шарнір D перемістився в положення D_1, а другий стержень видовжився на величину $\Delta l_2 = DD_1$. Із подібності трикутників $\Delta BB_1C \sim \Delta DD_1C$ маємо, що

$$\Delta l_1 / \Delta l_2 = a / 2a, \quad \text{або} \quad 2\,\Delta l_1 = \Delta l_2. \qquad (2.71)$$

Рівняння (2.71) є рівнянням сумісності деформацій, записане в переміщеннях. Використовуючи закон Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E A}; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E A},$$

рівняння (2.71) перепишемо у вигляді

$$2N_1 = N_2 \,. \tag{2.72}$$

Отримане рівняння (2.72) є рівнянням сумісності деформацій, записаним у силах. Розв'язуючи системи (2.70) і (2.72), знаходимо, що

$$N_1 = \frac{3}{5}F\,; \quad N_2 = \frac{6}{5}F\,.$$

Відповідно нормальні напруження в стержнях визначаться так:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{3}{5}\frac{F}{A}; \qquad \sigma_2 = \frac{6}{5}\frac{F}{A}. \tag{2.73}$$

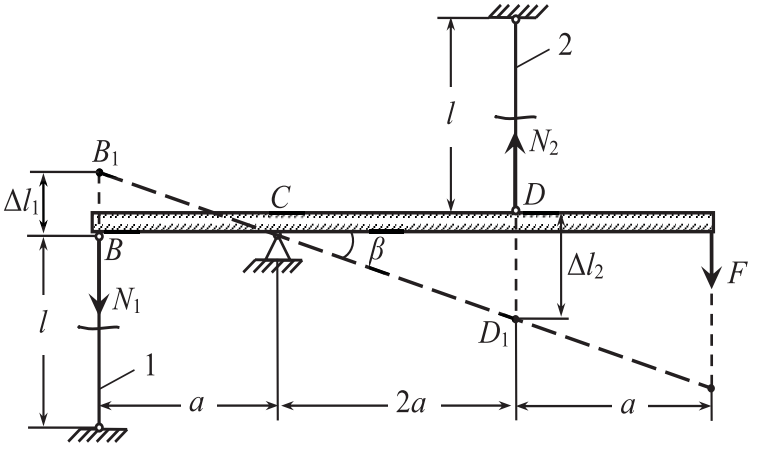


Рис. 2.16

Більші напруження виникають у другому стержні. Поставимо вимогу, щоб вони не перевищували допустимих $\sigma_{adm} = \sigma_y / k$

$$\sigma_2 = \frac{6}{5}\frac{F}{A} = \frac{\sigma_y}{k}, \tag{2.74}$$

звідки

$$F_{adm} = \frac{5}{6}\cdot\frac{\sigma_y \cdot A}{k}\,. \tag{2.75}$$

Як бачимо із отриманих формул (2.73), напруження в стержнях зростають пропорційно навантаженню *F*. Напруження в другому стержні більші, ніж у першому. За подальшого збільшення навантаження напруження у другому стержні першими досягнуть границі текучості. Тепер другий стержень буде деформува-

тися без збільшення сприйманого навантаження. У цей же час напруження в першому стержні ще не досягли границі текучості і подальше збільшення навантаження можливе за рахунок його невичерпаної несучої здатності. Будемо продовжувати збільшувати навантаження до тих пір, доки не потече матеріал і в першому стержні. Подальше навіть незначне збільшення навантаження пов'язано зі значними залишковими пластичними деформаціями. Навантаження, за якого в поперечних перерізах обох стержнів нормальні напруження досягають значень, що дорівнюють границі текучості σ_y, називають граничним $F_{граничним}$. Тоді граничне допустимим навантаженням буде

$$F^{k_1}_{adm} = F_{граничне} / k_1.$$

Припустимо тепер, що напруження в обох стержнях досягли σ_y. Тоді зусилля в стержнях відповідно будуть дорівнювати:

$$N_1 = \sigma_y \cdot A; \quad N_2 = \sigma_y \cdot A. \tag{2.76}$$

Із рівняння рівноваги

$$\sum mom_C\left(\bar{F}_i\right) = N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a - F_{граничне} \cdot 3a = \sigma_y \cdot A \cdot a + \sigma_y \cdot A \cdot 2a - F_{граничне} \cdot 3a = 0$$

знаходимо, що $F_{граничне} = \sigma_y \cdot A$, а гранично допустиме навантаження буде

$$F^{k_1}_{adm} = \frac{F_{граничне}}{k_1} = A \cdot \frac{\sigma_y}{k_1}. \tag{2.77}$$

Порівнюючи при $k = k_1$ величини максимальних навантажень, одержаних методом допустимих напружень (2.75) і методом гранично допустимих навантажень (2.77), бачимо, що $F^{k_1}_{adm} > F_{adm}$.

Таким чином, розрахунок за гранично допустимими навантаженнями дає можливість повніше використовувати несучу здатність конструкції, зменшити її вагу та отримати економію матеріалу.

2.12. Напружено-деформований стан в точці та його види

На прикладі осьового розтягу–стиску стержня було з'ясовано, що нормальні (2.11) та дотичні (2.12) напруження, які виникають у нахилених перерізах стержня, залежать від кута нахилу перерізу до осі стержня, тобто від орієнтації перерізу:

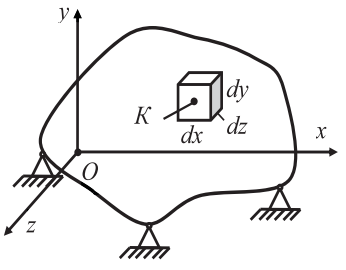


Рис. 2.17

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha ; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha ,$$

де σ_0 – нормальне напруження, яке виникає в точках поперечного перерізу стержня. З наведених залежностей бачимо, що у разі змінення положення перерізу змінюються відповідно нормальні та дотичні напруження, які виникають у його точках. Сукупність нормальних та дотичних напружень, які діють на всіх площинах, проведених через задану точку, називають напруженим станом у цій точці. Деформації центрально-розтягнутого стержня є найпростішим видом деформацій тіла, за якого напружений стан в усіх його точках однаковий, тобто однорідний. У загальному випадку навантаження просторового тіла довільною просторовою системою сил напружений стан змінюється від точки до точки, тобто є неоднорідним. Ось чому при вивченні напруженого стану у довільній точці K навантаженого тіла (рис. 2.17) навколо цієї точки уявно вирізають елементарний об'єм матеріалу у вигляді прямого паралелепіпеда зі сторонами dx, dy, dz, паралельними відповідно осям вибраної системи координат Ox, Oy, Oz. Враховуючи малість розмірів паралелепіпеда, можна вважати, що напружений стан в усіх його точках однорідний і співпадає з напруженим станом у досліджуваній точці K. Напруження на гранях паралелепіпеда і на його довільних перерізах вважають рівномірно розподіленими, які у загальному випадку мають і нормальні, і дотичні складові. Зрозуміло, що такий підхід можливий з урахуванням гіпотези суціль-ності матеріалу.

Якщо вважати, що напруження на гранях паралелепіпеда відомі, то подібно до того, як робили при осьовому розтягу–стиску за допомогою методу перерізів,

розглядаючи рівновагу відсіченої частини паралелепіпеда, можна досліджувати закон зміни напружень на довільних площинках, які проходять через задану точку *K*. Зокрема, знайдуться такі положення площин, за яких дотичні складові напружень або, як кажуть, просто дотичні напруження на них дорівнюють нулю. У подальшому покажемо, що навколо довільної точки напруженого тіла завжди можна виділити елементарний паралелепіпед, орієнтований таким чином, що усі його грані будуть вільні від дотичних напружень. Такі грані паралелепіпеда називають *головними площинами*, а нормальні напруження, які діють на цих головних площинах – *головними напруженнями*. Залежно від наявності діючих по гранях виділеного паралелепіпеда напружень, розрізняють одновісний або лінійний напружений стан, двовісний або плоский та тривісний або об'ємний напружені стани.

Якщо на гранях паралелепіпеда, утвореного головними площинами, діють нормальні напруження тільки в одному напрямку (рис. 2.18,*a*), маємо лінійний напружений стан. Якщо на гранях паралелепіпеда, утвореного головними площинами, діють нормальні напруження у двох взаємно перпендикулярних напрямках (рис. 2.18,*b*), маємо двовісний або плоский напружений стан, і якщо в трьох напрямках (рис. 2.18,*c*) – тривісний або об'ємний напружений стан.

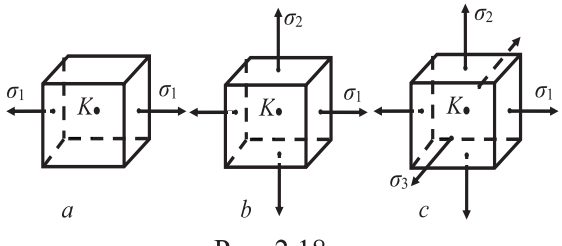


Рис. 2.18

Головні нормальні напруження позначаються σ_1, σ_2, σ_3, при цьому алгебраїчні значення задовольняють умові $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Лінійний напружений стан ми досліджували за центрального розтягу–стиску стержня. Головними площинами були поперечні перерізи при $\alpha = 0$, в яких виникали тільки нормальні напруження. Напружений стан у точках стержня вважається відомим, оскільки нормальні напруження σ_0 в точках поперечних перерізів відомі, а за формулами (2.11), (2.12) можна знайти нормальні та дотичні напруження у довільно нахилених перерізах.

Напружений стан у точці характеризується тензором напружень, який має вигляд

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

2.13. Аналіз плоского напруженого стану. Визначення нормальних та дотичних напружень на довільних площадках. Закон парності дотичних напружень

Розглянемо детальніше плоский напружений стан, який зустрічатимемо в розрахунках на міцність валів та балок.

Характерною ознакою плоского напруженого стану є відсутність напружень на двох паралельних гранях елементарного паралелепіпеда, уявно вирізаного навколо досліджуваної точки *K* (рис. 2.18,*b*). На інші чотири грані цього паралелепіпеда з боку навколишнього середовища діють напруження, які покажемо у вигляді нормальних та дотичних складових (рис. 2.19).

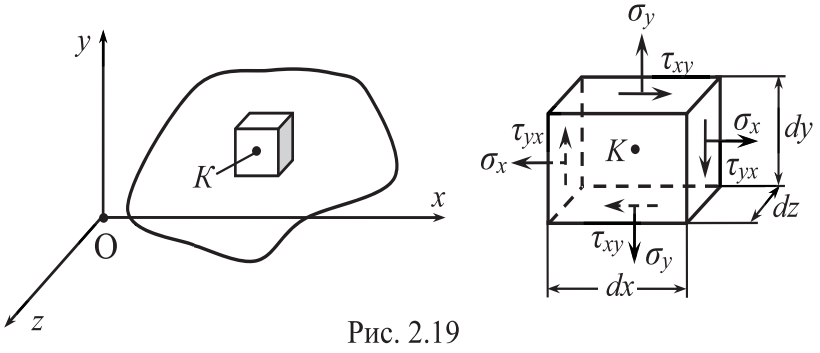


Рис. 2.19

Оскільки в усіх точках нескінченно малого паралелепіпеда напружений стан вважається однорідним, однойменні напруження на паралельних гранях є чисельно рівними.

Позначаючи напруження, звернемо увагу на індекси *x* та *y* біля *σ*, які означають, що нормальні напруження паралельні відповідно осям координат O*x* та

Оy. Якщо нормальні напруження викликають розтяг елемента, то вони вважаються додатними, якщо стиск – від'ємними. Перший індекс біля τ означає, що це напруження паралельне відповідній осі координат, і другий індекс – дотичне напруження діє на грані, яка перпендикулярна відповідній осі координат. Наприклад, τ_{yx} означає, що це дотичне напруження, паралельне осі Оy, і діє на грані, перпендикулярній осі Оx.

У разі плоского напруженого стану дотичні напруження за найпростішим правилом вважаються додатними, якщо вони викликають поворот елемента за годинниковою стрілкою. На рис. 2.19 наведено додатний напрямок дотичних напружень на всіх чотирьох гранях. Оскільки навантажене тіло знаходиться в стані рівноваги, то і виділений елементарний паралелепіпед під дією напружень на його гранях теж перебуває в рівновазі. Нормальні сили взаємно урівноважуються. Дотичні сили на протилежних гранях складають дві пари сил, сума моментів яких повинна дорівнювати нулю

$$(\tau_{yx} \cdot dy\,dz)dx + (\tau_{xy} \cdot dx\,dz)dy = 0,$$

звідки

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}. \qquad (2.78)$$

Залежність (2.78) виражає закон парності дотичних напружень за плоского напруженого стану, згідно з яким за плоского напруженого стану дотичні напруження, що діють на довільних взаємно перпендикулярних площинах, рівні за величиною і протилежні за знаком. Виходячи із закону парності, неважко довести, що за плоского напруженого стану можливі лише два варіанти дії дотичних напружень по гранях виділеного елемента (рис. 2.20).

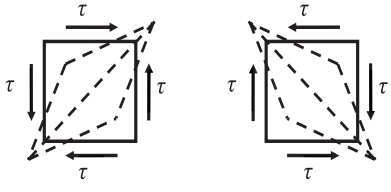


Рис. 2.20

Дотичні напруження, що діють на двох взаємно перпендикулярних гранях, рівні за величинами і направлені так, що їх стрілки збігаються до спільного ребра або розбігаються. При цьому дотичні напруження викликають видовження тієї чи іншої діагоналі.

Визначимо нормальні та дотичні напруження на довільно нахилених площинах за плоского напруженого стану. Розглянемо елементарний паралелепіпед, на бокових гранях якого діють нормальні та дотичні напруження σ_x, σ_y, τ_{yx}, τ_{xy}, дві паралельні грані – "видима" та "невидима", – вільні від напружень (рис. 2.21).

Розглянемо площину, перпендикулярну вільним граням і нахилену під деяким кутом α до вертикальної грані. На цій площині діють напруження σ_α, τ_α, які треба визначити через задані діючі напруження σ_x, σ_y, τ_{yx}, τ_{xy}. Користуючись методом перерізів, розглянемо рівновагу частини B паралелепіпеда (рис. 2.21,*b*). Проектуючи сили, які діють на гранях частини B паралелепіпеда на нормаль n до нахиленої площини і на вісь t, що лежить у нахиленій площині, отримаємо:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha\,; \tag{2.79}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha\,. \tag{2.80}$$

Враховуючи, що $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, вираз (2.79) можна представити у вигляді

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha\,. \tag{2.81}$$

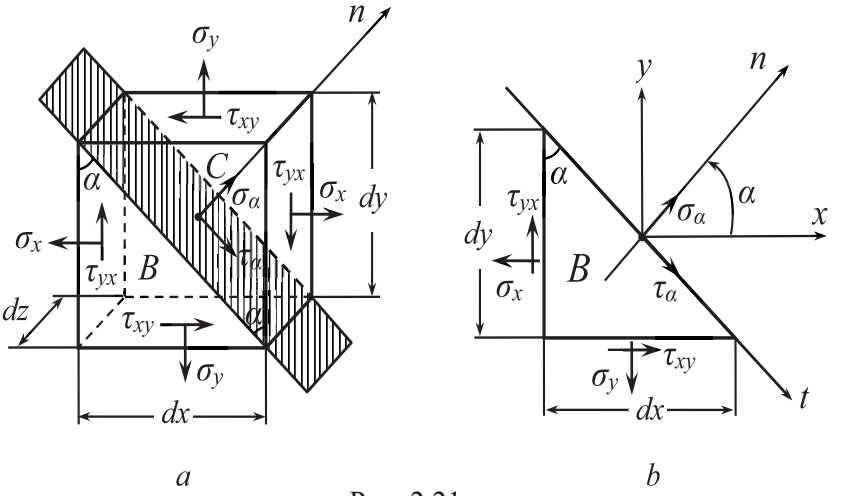


Рис. 2.21

Отже, маючи відомі початкові напруження, за формулами (2.80) та (2.81) можна знайти напруження на довільній площині, а це означає, що плоский напружений стан у даній точці нам відомий.

Неважко переконатися в тому, що одержані формули (2.11) та (2.12) для визначення σ_α і τ_α при розтягу (стиску) стержня, тобто за лінійного напруженого стану, є окремим випадком формул (2.79) та (2.80).

Нормальні напруження на площині, нахиленій під кутом 90° до досліджуваної площини, відповідно до формули (2.81), дорівнюватимуть

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{yx}\sin 2\alpha,$$

а тому $$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y = const.$$

Отже, сума нормальних напружень, які діють на двох взаємно перпендикулярних площинах, є величиною сталою, тобто є інваріантною величиною по відношенню до напрямку осей координат (до нахилу площин).

2.14. Головні нормальні напруження та їх визначення

Дослідимо функцію σ_α (2.81) на екстремум, для чого візьмемо від неї першу похідну по α і прирівняємо до нуля

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{yx}\cos 2\alpha\right) = 0. \qquad (2.82)$$

Похідна, як бачимо, дорівнюватиме нулю у випадку, коли вираз у дужках (2.82) дорівнює нулю, але у свою чергу вираз у дужках – це τ_α (2.80). Отже, нормальні напруження досягають екстремального значення на тих площинах, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю. Визначення головних напружень, як екстремальних нормальних напружень, співпадає з попереднім визначенням головних напружень як нормальних напружень, що діють на тих площинах, на яких відсутні дотичні напруження.

Із умови (2.82) випливає, що

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}, \tag{2.83}$$

звідки знаходимо кути α_0 та $\alpha_0+\pi/2$, за яких функція σ_α досягає екстремальних значень

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}\right). \tag{2.84}$$

Після підстановки значення кутів α_0 та $\alpha_0+\pi/2$ у вираз (2.81), одержимо два екстремальних значення нормальних напружень

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}. \tag{2.85}$$

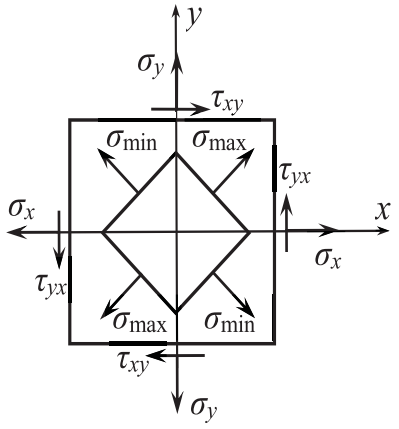


Рис. 2.22

Отже, маємо, що за довільних початкових напружень σ_x, σ_y, τ_{yx}, τ_{xy} в даній точці існує паралелепіпед, на гранях якого діють тільки нормальні напруження. Позначимо σ_{max} через σ_1, а σ_{min} через $-\sigma_2$.

Формула (2.85) дає два значення головних напружень, але не вказує, в якому напрямку діє σ_1, а в якому $-\sigma_2$. Для цього, як відомо, треба досліджувати знак другої похідної $d^2\sigma_\alpha / d\alpha^2$. Для спрощення вирішення цього питання слід скористатися таким правилом: максимальні головні напруження проходять через два квадранти осей координат, у яких стрілки дотичних напружень сходяться, а мінімальні відповідно – у перпендикулярному напрямку (рис. 2.22). Дійсно, при переході від вертикальної грані до горизонтальної дотичні напруження змінюють знак з "мінуса" на "плюс", а це згідно з рівністю (2.82) означає, що похідна $d\sigma_\alpha / d\alpha$ змінює знак з "плюса" на "мінус". Отже, сама функція σ_α в цьому квадранті досягає максимуму. Остаточно головні нормальні напруження визначають за формулою

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}\,.$$

Нумерація головних напружень відбувається після їх визначення з урахуванням алгебраїчної величини за умови, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

2.15. Екстремальні дотичні напруження та їх визначення

Той же самий напружений стан у точці може бути представлений різними початковими площинами, тобто різними початковими напруженнями. Оскільки дотичні напруження на головних площинах відсутні, то головні площини і головні напруження найпростіше визначають напружений стан у точці. У цьому випадку формули (2.80) та (2.81) будуть мати найпростіший вигляд. Виходячи з цих міркувань, за початкові візьмемо головні площини і головні напруження. Нехай $\sigma_{max} = \sigma_1$, $\sigma_{min} = \sigma_2$. Відкладаючи кут α від σ_1, запишемо формули для σ_α, τ_α вважаючи, що у формулах (2.80) та (2.81) $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\tau_{yx} = 0$:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha\,; \tag{2.86}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha\,. \tag{2.87}$$

Із формули (2.87) видно, що екстремальних значень дотичні напруження досягають на площинах, нахилених до головних площин під кутом $\alpha = \pm 45°$, і дорівнюють

$$\tau_{max/min} = \pm\,(\sigma_1 - \sigma_2)\,/\,2. \tag{2.88}$$

Якщо початкові площини довільні, то, використавши формулу (2.80) для визначення екстремальних дотичних напружень, матимемо

$$\tau_{\max\diagup\min} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}\,. \tag{2.89}$$

Підкреслимо, що в загальному випадку на площинах з екстремальними дотичними напруженнями нормальні напруження не дорівнюють нулю.

Дійсно, із формули (2.86) маємо, що

$$\sigma_{\pm 45^\circ} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$

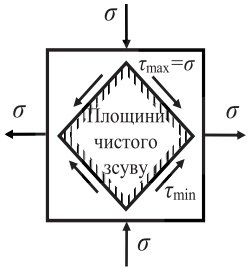


Рис. 2.23

У тому ж випадку, коли на гранях паралелепіпеда (рис. 2.23) діють головні напруження, рівні за величиною і протилежні за знаком (розтягуючі в одному напрямку і стискуючі в перпендикулярному) $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$, то $\tau_{max/min} = \pm\sigma$, а нормальні напруження на площинах з екстремальними дотичними напруженнями в цьому випадку дорівнюють нулю. Такий випадок напруженого стану називають *чистим зсувом*. Отже, розтягуючи пластину в одному напрямку і стискуючи її з такою самою інтенсивністю в перпендикулярному напрямку, можна одержати площини чистого зсуву, на яких діють тільки дотичні напруження. Ці площини розташовані під кутом 45° до початкових.

2.16. Графічне дослідження плоского напруженого стану в точці за допомогою круга Мора

Неважко довести, що всі формули, одержані раніше аналітичним шляхом, можуть бути представлені графічно. Для цього представимо σ_α і τ_α як координати точки в площині Оxy. Щоб з'ясувати, яке геометричне місце указаних точок, візьмемо $\sigma_\alpha = x$, $\tau_\alpha = y$ і позначимо величини $a = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ і $R = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$, тоді формули (2.86) і (2.87) будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} x = a + R\cos 2\alpha; \\ y = R\sin 2\alpha. \end{cases} \qquad (2.90)$$

Рівняння (2.90) є рівнянням кола (рис. 2.24,*b*), записане в параметричній формі, центр якого знаходиться на осі Оx на відстані a від початку координат. Радіус кола R. Це коло називають колом напружень або кругом Мора (Отто Мор (1835–1918) – німецький вчений, який дав геометричну інтерпретацію напруженого стану в точці).

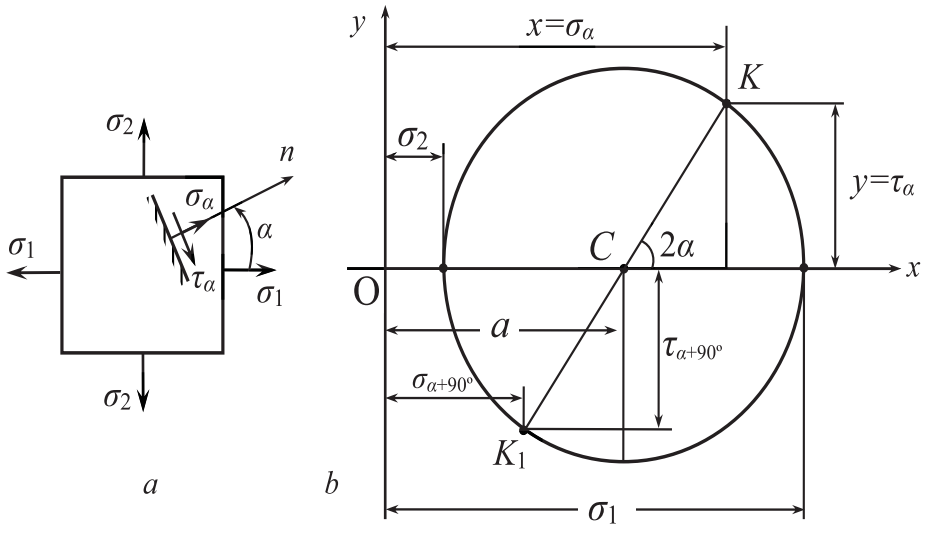


Рис. 2.24

Довільно нахиленій площині, яка визначається кутом α (рис. 2.24,*а*), на крузі напружень відповідає деяка точка K, яку називають зображуючою точкою цієї площини. Координати зображуючої точки є нормальним та дотичним напруженнями, що діють на площині, яку ця точка зображує. Із формули (2.90) випливає, що кутам α та $\alpha + 90°$ на крузі напружень відповідають точки K і K_1 (рис. 2.24,*b*), які діаметрально протилежні. Знаючи напруження на початкових площинах σ_α, τ_α і $\sigma_{\alpha+90°}$, $\tau_{\alpha+90°} = -\tau_\alpha$, можна побудувати круг Мора.

Наприклад, припустимо, що на початкових (вихідних) площинах (рис. 2.25,*а*) задані напруження σ_x, τ_{yx}, σ_y, $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$. Побудова круга Мора зводиться до наступного:

1) на осях σ–τ відкладають в тому ж самому масштабі величини нормального і дотичного напружень, одержують положення зображуючих точок – для вертикальної площини точка $K(\sigma_x, \tau_{yx})$ і для горизонтальної площини точка $K_1(\sigma_y, \tau_{xy})$;

2) з'єднавши точки K і K_1 прямою, одержують на перетині з віссю σ центр круга C. Радіусом CK проводять сам круг.

Для розв'язування конкретних задач за допомогою круга Мора зручно користуватися точкою P з координатами (σ_y, τ_{yx}), яку називають полюсом круга напружень (рис. 2.25,*b*). Щоб знайти напруження на якійсь площині з кутом нахилу

α_*, потрібно з полюса P провести промінь, паралельний нормалі, до даної площини. Точка M перетину променя з кругом є зображуючою точкою даної площини, тобто координати точки M будуть нормальним та дотичним напруженням $(\sigma_{\alpha^*}, \tau_{\alpha^*})$ на площині з кутом нахилу α_*.

Це неважко довести. Попередньо відзначимо: $\angle MCK = 2\alpha_*$, як центральний, який спирається на ту ж саму дугу, що і вписаний $\angle MPK = \alpha_*$.

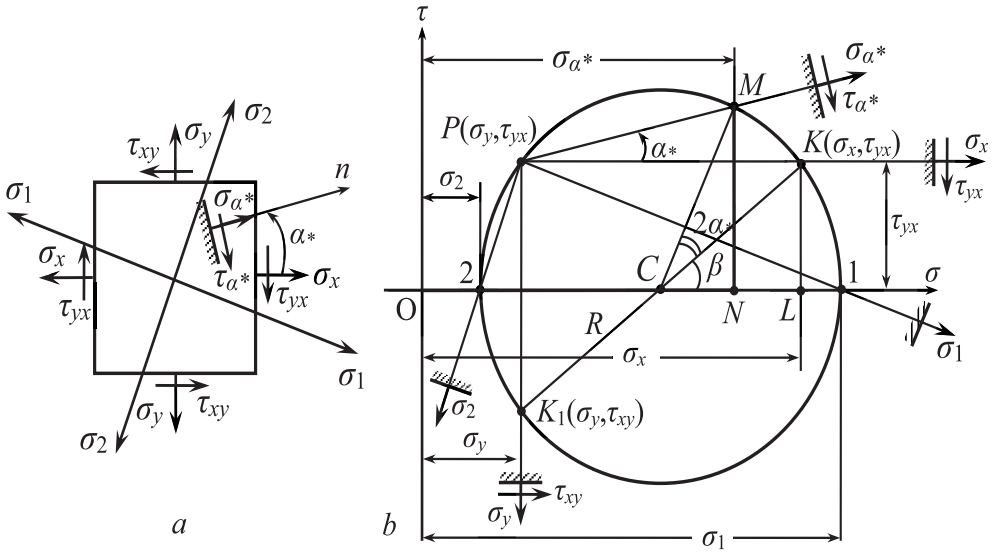


Рис. 2.25

Із рис. 2.25,*b* маємо

$$ON = OC + CN = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R\cos(\beta + 2\alpha_*) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R\cos\beta\cos 2\alpha_* - R\sin\beta\sin 2\alpha_*.$$

Оскільки $R\cos\beta = CL = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$, а $R\sin\beta = KL = \tau_{yx}$,

то $$ON = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha_* - \tau_{yx}\sin 2\alpha_* = \sigma_{\alpha^*},$$

що і треба було довести.

Аналогічно доводиться, що

$$MN = R\sin(\beta + 2\alpha_*) = R\cos\beta\sin 2\alpha_* + R\sin\beta\cos 2\alpha_* = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha_* + \tau_{yx}\cos 2\alpha_* = \tau_{\alpha^*}.$$

Доведене положення надає можливості розв'язувати графічно задачу про визначення напружень на заданій нахиленій площині, а також обернену задачу про визначення нахилу площини зі заданими напруженнями. Наприклад: якщо треба знайти положення головних площин, то через полюс P та точки 1 і 2, які є зображуючими точками головних площин, проводять промені $P1$, $P2$. Нормалі до головних площин паралельні відповідно цим променям. Напрямок головних напружень σ_1, σ_2 і орієнтація головних площин показані на рис. 2.25.

Користуючись кругом Мора, неважко встановити цілий ряд залежностей, які були отримані аналітичним шляхом (Корнілов, 2003) . Наприклад:

$$\sigma_{1,2} = OC \pm R = OC \pm \sqrt{CL^2 + KL^2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2};$$

$$\tau_{\max/\min} = \pm R = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

2.17. Об'ємний напружений стан в точці та його аналіз

Якщо на гранях паралелепіпеда, утвореного головними площинами, діють нормальні напруження в трьох взаємно перпендикулярних напрямках (рис. 2.18,*c*), маємо об'ємний або просторовий напружений стан. У випадку об'ємного напруженого стану на гранях паралелепіпеда, виділеного навколо деякої точки і орієнтованого довільно, будуть діяти, як уже відзначалося вище, напруження, показані на рис. 2.26. Напрямки таких напружень вважають додатними.

Розглядаючи рівновагу паралелепіпеда, склавши суму моментів усіх сил відносно осей x, y, z, одержимо рівності

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tag{2.91}$$

які виражають закон парності дотичних напружень.

Проте у випадку об'ємного напруженого стану, йдеться не про повні дотичні напруження, а про їхніх складові.

На двох взаємно перпендикулярних площинах складові дотичних напружень, перпендикулярні до лінії перетину площин, рівні за величиною і направлені так, що викликають поворот елемента в протилежних напрямках.

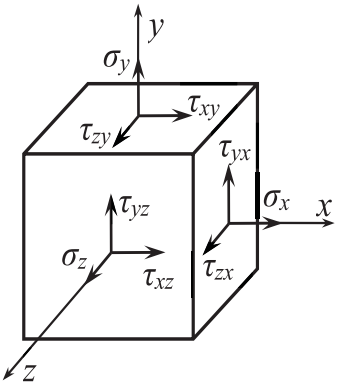


Рис. 2.26

Як уже обговорювалося, осі координат x, y, z, а значить і паралелепіпед, можна зоорієнтувати так, що дотичні напруження на його гранях зникнуть. Ці грані називають головними площинами, а нормальні напруження, які на них діють – головними напруженнями. Найбільші за алгебраїчним значенням головні напруження позначають σ_1, середні за величиною – σ_2, а найменші – σ_3 (згідно з умовою $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

Для об'ємного напруженого стану, як і у випадках для лінійного та плоского, можна визначити напруження на довільних площинах через задані початкові напруження. Це можна зробити аналітично і графічно.

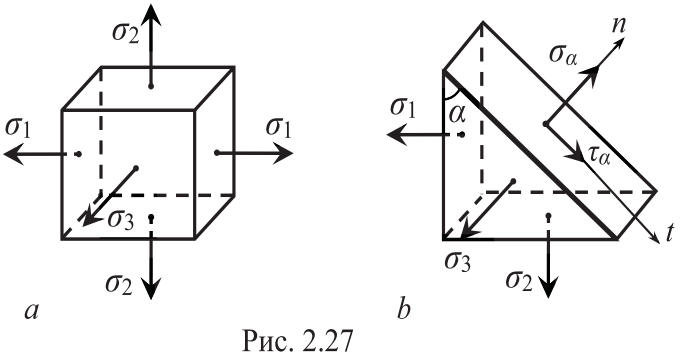


Рис. 2.27

Визначимо напруження для найбільш характерних площин, які зустрічаються в практичних розрахунках. Наприклад, маємо виділений із тіла елементарний паралелепіпед з відомими початковими напруженнями σ_1, σ_2, σ_3. Знайдемо спочатку напруження на площинах, паралельних одному із головних напружень, наприклад, на площині паралельній σ_3.

Із рис. 2.27,*b* видно, що напруження σ_3 не впливає на величину σ_α, τ_α, оскільки при розгляданні рівноваги елемента зусилля, викликане напруженням σ_3, не

дає проекції на осі n і t. А це означає, що можна використовувати формули (2.86), (2.87), виведені для плоского напруженого стану:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha;$$
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha. \qquad (2.92)$$

Формули (2.92) можна представити графічно за допомогою круга Мора (рис. 2.28) з центром C_{12}.

Аналогічні міркування можна провести для площин, паралельних σ_2 та σ_3, і одержати формули для визначення напружень, аналогічні формулам (2.92). На рис. 2.28 побудовані круги Мора для площин, паралельних σ_3, з центром круга в точці C_{12}; для площин, паралельних σ_2, з центром у точці C_{13}; для площин, паралельних σ_1, з центром у точці C_{23}.

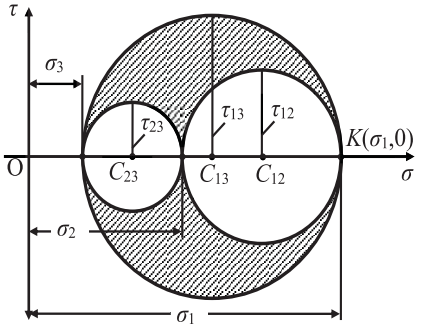


Рис.2.28

Звернемо увагу на точки, які є вершинами цих кругів. Вони є зображуючими точками діагональних площин, нахилених під кутом 45° до відповідних головних напружень. На цих площинах діють екстремальні дотичні напруження:

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2};\ \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2};\ \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}.$$

Що стосується довільних просторово нахилених площин, які не паралельні жодному з головних напружень, то, за теорією пружності, для них напруження σ_α, τ_α зображуються координатами точок, які заштриховані на рис. 2.28. Значення цих напружень можуть бути розраховані за формулами:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha_1 + \sigma_2 \cos^2\alpha_2 + \sigma_3 \cos^2\alpha_3; \qquad (2.93)$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2\alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2\alpha_3 - \sigma_\alpha^2}, \qquad (2.94)$$

де α_1, α_2, α_3 – кути, які складає нормаль до площини з напрямками σ_1, σ_2, σ_3.

Крім головних напружень, у теорії напруженого стану особливе місце займають так звані октаедричні напруження, що виникають на площинах, рівно нахилених до всіх трьох головних напружень. Такі площини можна розглядати як грані правильного восьмигранника (октаедра), осі якого збігаються з напрямками головних напружень. Використовуючи формули (2.93) і (2.94), можна показати, що

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3);$$
$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2}. \qquad (2.95)$$

Октаедричні дотичні напруження називають ще напруженнями, що викликають зміну форми тіла. У теорії пружності показано, що вони близькі до максимальних дотичних напружень.

2.18. Деформований стан в точці та його аналіз. Узагальнений закон Гука

Вище вже обговорювалося визначення деформацій у точці. Було наголошено: якщо в точці K ненавантаженого тіла (рис. 2.29) провести три взаємно перпендикулярних нескінченно малих відрізка dx, dy, dz, зорієнтованих вподовж осей Ox, Oy, Oz, то після навантаження тіла зовнішніми силами ці відрізки змінять свою довжину на Δdx, Δdy, Δdz, а величини прямих кутів між відрізками dx, dy, dz зміняться відповідно на γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}.

Величини $\varepsilon_x = \Delta dx / dx$, $\varepsilon_y = \Delta dy / dy$, $\varepsilon_z = \Delta dz / dz$ називають відносними лінійними деформаціями в точці K у напрямках осей x, y, z, а γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} – кутовими деформаціями в точці K, або кутами зсуву. Сукупність усіх лінійних і кутових деформацій, які виникають у всіх напрямках, проведених через дану точку, утворюють деформований стан у цій точці. Систему координат можна зорієнтувати таким чином, що в цих напрямках

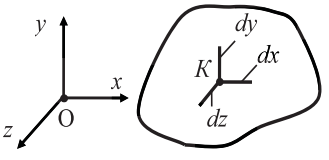


Рис. 2.29

кутові деформації $\gamma_{xy} = 0$, $\gamma_{xz} = 0$, $\gamma_{yz} = 0$. Ці осі називають головними осями деформівного стану в точці, а відносні лінійні деформації в напрямку головних осей – головними відносними деформаціями в точці. Позначаються головні відносні деформації відповідно $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. У теорії пружності показано, що для ізотропного матеріалу напрямки головних напружень і головних деформацій співпадають. Деформований стан у точці характеризується тензором деформацій, який має вигляд

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Для аналізу деформівного стану одержують формули, аналогічні формулам для аналізу напруженого стану. Якщо, наприклад, за плоского напружено-деформованому стану відомі головні деформації ε_1 і ε_2, то в напрямку осі, повернутої під кутом α до ε_1, деформації будуть такими:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos 2\alpha, \tag{2.96}$$

$$\frac{\gamma_\alpha}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\sin 2\alpha. \tag{2.97}$$

Якщо відомі $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, то

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}. \tag{2.98}$$

Із виразу (2.98) випливає, що $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_x + \varepsilon_y = const$, тобто сума відносних лінійних деформації в напрямку довільних взаємно перпендикулярних осей в даній точці є величиною сталою.

Аналогія у формулах для визначення напружень і деформацій в точці надає можливості використовувати круг Мора і для аналізу деформованого стану в точці. У загальному випадку деформації матеріалу в точці носять об'ємний характер. Математична аналогія в розподілі деформацій і напружень має місце як для

плоского, так і для об'ємного напружено-деформівного стану. Напружений та деформований стани в точці зв'язані між собою.

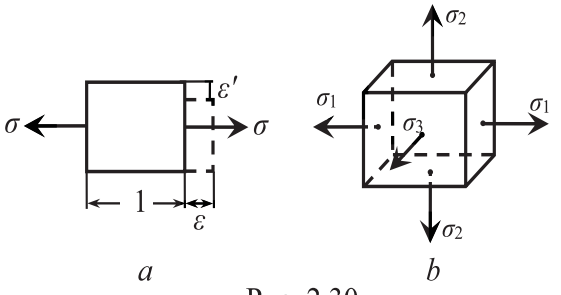


Рис. 2.30

Визначимо цей зв'язок між напруженнями та деформаціями, маючи на увазі виконання прийнятих у ММК гіпотез про абсолютну пружність, ізотропність, відповідність матеріалу закону Гука та малість деформацій.

За осьового розтягу–стиску стержня було встановлено, що виділений елементарний паралелепіпед (рис. 2.30,*a*) деформується в поздовжньому і поперечному напрямках. При цьому відносна поздовжня деформація зв'язана з нормальними напруженнями залежністю

$$\varepsilon = \sigma / E, \tag{2.99}$$

а відносна поперечна деформація – залежністю

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E}\ , \tag{2.100}$$

де E – модуль Юнга матеріалу; μ – коефіцієнт Пуассона матеріалу.

Залежності (2.99), (2.100) є математичними виразами закону Гука за лінійного напруженого стану. Визначимо аналогічні співвідношення для об'ємного напруженого стану (рис. 2.30,*b*). Виразимо $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Для цього скористаємося принципом незалежності дії сил і співвідношеннями (2.99), (2.100). Відносне видовження ε_1 у напрямку дії головного напруження σ_1 представимо як суму трьох складових

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13},$$

де ε_{11} – деформація, викликана дією тільки σ_1, яку визначають за формулою

$\varepsilon_{11} = \sigma_1 / E$ (2.99), оскільки є поздовжньою відносно σ_1; ε_{12} – деформація в напрямку σ_1, але викликана дією σ_2. Ця деформація відносно σ_2 є поперечною і визначається за формулою (2.100); $\varepsilon_{12} = -\mu\ (\sigma_2 / E)$; ε_{13} – деформація в напрямку σ_1, викликана дією σ_3. Вона є поперечною відносно σ_3 і визначається за формулою $\varepsilon_{13} = -\mu\ (\sigma_3 / E)$.

Отже, $$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}.$$

Розмірковуючи аналогічно, одержимо формули узагальненого закону Гука за об'ємного напруженого стану:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)\right]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]. \end{aligned} \qquad (2.101)$$

У ці формули розтягуючі напруження підставляють додатними, а стискуючі – від'ємними. Коли одне з головних напружень дорівнює нулю, одержимо закон Гука за плоского напруженого стану. Наприклад, якщо $\sigma_3 = 0$, то матимемо:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\sigma_2\right]; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu\sigma_1\right]; \quad \varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E}\left[\sigma_1 + \sigma_2\right]. \qquad (2.102)$$

Підкреслимо, що рівність нулю напружень σ_3 не означає, що і деформація ε_3 також дорівнюватиме нулю.

Інколи необхідно визначити напруження за відомими деформаціями. Тоді із формул (2.102) можна знайти:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2\right]; \qquad \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1\right]. \qquad (2.103)$$

Отримані формули записані для головних площин і головних напружень. Але слід підкреслити, що і для неголовних площин, на яких дотичні напруження не дорівнюють нулю, формули, які пов'язують нормальні напруження σ_x, σ_y, σ_z і відповідні лінійні відносні деформації ε_x, ε_y, ε_z, мають такий самий вигляд. Пояснюється це тим, що за малих деформацій дотичні напруження, які діють на тих же площинах, що й нормальні напруження, викликають лише зсув прямокутного

елемента, не змінюючи його сторін, тобто дотичні напруження не викликають лінійних деформацій. Отже, лінійні деформації видовження і кутові зсуву елемента в даному випадку можна вважати незалежними.

Далі визначимо відносну зміну об'єму елемента.

Нехай розміри елементарного паралелепіпеда до деформування dx, dy, dz, а після деформування $(dx+\Delta dx)$, $(dy+\Delta dy)$, $(dz+\Delta dz)$. Початковий об'єм V_0, після деформації V_1. Зміна об'єму

$$\Delta V = V_1 - V_0 = (dx + \Delta dx)\cdot(dy + \Delta dy)\cdot(dz + \Delta dz) - dx\cdot dy\cdot dz =$$
$$= dx\cdot dy\cdot dz\cdot(1 + \varepsilon_1)\cdot(1 + \varepsilon_2)\cdot(1 + \varepsilon_3) - dx\cdot dy\cdot dz\,.$$

Нехтуючи взаємними добутками ε_1, ε_2, ε_3, одержимо

$$\Delta V = V_0\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Відносна об'ємна деформація

$$\theta = \Delta V / V_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \qquad (2.104)$$

Якщо замість ε_1, ε_2, ε_3 використати їх значення із формул (2.101), то матимемо

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \qquad (2.105)$$

Формули (2.104), (2.105) для відносної зміни об'єму є математичними виразами об'ємного закону Гука.

Зокрема, за рівномірного всебічного стиску, коли $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$,

$$\theta = -3(1-2\mu)\frac{\sigma}{E} = -\frac{\sigma}{K}, \qquad (2.106)$$

де $K = E / 3(1-2\mu)$ – об'ємний модуль пружності матеріалу.

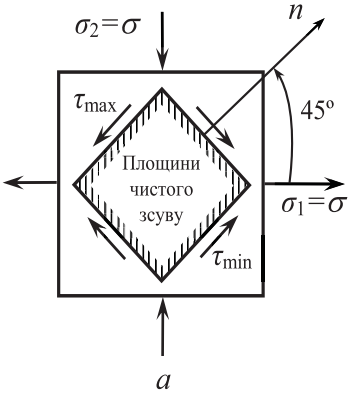
Із формули (2.106) видно, що коефіцієнт Пуассона не може бути більше 0,5, оскільки у противному разі за всебічного стиску тіло буде не зменшуватись, а збільшуватися за об'ємом. У природі не виявлено таких матеріалів. Об'єм тіла, матеріал якого має коефіцієнт Пуассона, близький до 0,5, наприклад гума, парафін, за всебічного стиску практично не змінюється.

2.19. Чистий зсув. Закон Гука при чистому зсуві.

Чистим зсувом називають такий випадок плоского напружено-деформованого стану, за якого на гранях виділеного елементарного паралелепіпеда діють тільки дотичні напруження. Ці грані називають площинами чистого зсуву. Неважко переконатися, що чистий зсув еквівалентний напруженому стану, який виникає в пластині, розтягнутій в одному напрямку і стиснутій такими ж самими за інтенсивністю нормальними напруженнями в перпендикулярному напрямку (рис. 2.31).

Побудувавши круг Мора (рис. 2.31,*b*), бачимо, що точка M є зображуючою точкою площини, на якій діють найбільші дотичні напруження $\tau_{max} = \sigma$. Ця площина розташована під кутом 45° до головних площин. На ній нормальні напруження дорівнюють нулю. Отже, це площина чистого зсуву. Відповідно до закону парності дотичних напружень показуємо всі чотири площини чистого зсуву. Такого самого висновку дійдемо, скориставшись формулами для визначення нормальних та дотичних напружень у випадку плоского напруженого стану:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha\,; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha \quad \text{при } \alpha = 45°.$$



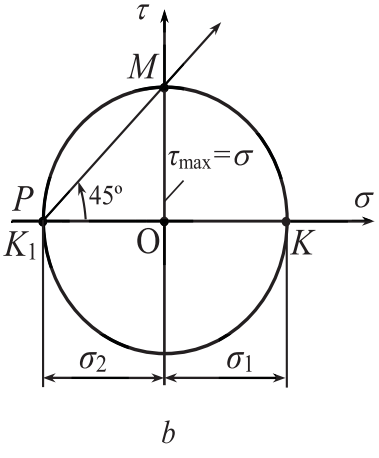


Рис. 2.31

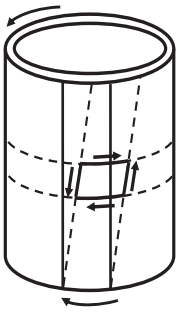


Рис. 2.32

Типовим прикладом тіла, в усіх точках якого має місце чистий зсув, є скручена тонкостінна труба великого діаметра (рис. 2.32). Відзначимо, що деформація кручення часто використовується для експериментального вивчення роботи матеріалу на зсув, оскільки практично не вдається створити такий напружений стан шляхом безпосереднього прикладання дотичних напружень до кромок плоскої пластинки.

Розглянемо деформацію елемента, грані якого є площинами чистого зсуву (рис. 2.33). Величину δ називаємо абсолютним зсувом, а відношення $\delta / a = tg\gamma \approx \gamma$ – відносним зсувом або кутом зсуву.

Експериментально встановлено, що у певних межах зміни дотичних напружень деформація зсуву відбувається пружно, а її величина пропорційна дотичним напруженням:

$$\gamma = \tau / G, \quad \text{або} \quad \tau = G\gamma, \tag{2.107}$$

де коефіцієнт пропорційності G називають модулем пружності при зсуві або просто модулем зсуву матеріалу, який характеризує жорсткість матеріалу на зсув, тобто здатність матеріалу чинити опір відносно кутових деформацій зсуву. Розмірність G [кг/см^2], [МПа]. Для маловуглецевої сталі

$$G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

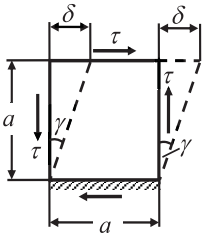


Рис. 2.33

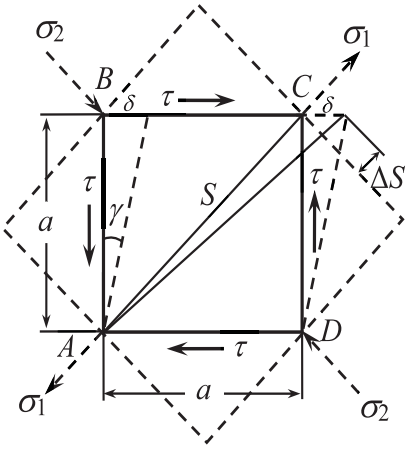


Рис. 2.34

Залежність (2.107) є математичним виразом закону Гука при зсуві, яка, як бачимо, аналогічна формулі $\varepsilon = \sigma / E$, що виражає закон Гука при розтягу–стиску.

Розглядаючи деформацію квадратного елемента при чистому зсуві, бачимо, що видовження ΔS діагоналі AC (рис. 2.34) можна пояснити, з одного боку, як результат безпосереднього зсуву, а це означає, що

при заданих напруженнях τ, залежить від модуля G. З іншого боку, як ми неодноразово підкреслювали, чистий зсув, еквівалентний розтягу в одному напрямку і стиску в перпендикулярному напрямку напруженнями $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$. Головні площини з напруженнями σ_1, σ_2 повернуті до площин чистого зсуву під кутом 45°, тобто напруження σ_1, σ_2 співпадають за напрямком з діагоналями елемента AC та BD. У цьому випадку видовження діагоналі ΔS залежить від модуля Юнга E матеріалу. Отже, робимо висновок, що модулі E і G зв'язані.

Видовження ΔS діагоналі AC в результаті зсуву дорівнюватиме

$$\Delta S = \delta \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} a\gamma .$$

Оскільки $a = S\cos 45^\circ = S\sqrt{2}/2$; $\gamma = \tau / G$, то

$$\Delta S = \frac{\tau}{2G} S . \tag{2.108}$$

Застосувавши до волокна AC узагальнений закон Гука, можна записати

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta S}{S} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} . \tag{2.109}$$

Враховуючи, що $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$, із співвідношення (2.109) отримаємо

$$\Delta S = \frac{(1+\mu)\tau}{E} S . \tag{2.110}$$

Прирівнявши вирази (2.108) і (2.110), знаходимо шукане співвідношення між пружними характеристиками ізотропного матеріалу, тобто між модулями поздовжньої пружності E та зсуву G

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} . \tag{2.111}$$

Залежність (2.111) показує, що три сталі E, G і μ, які характеризують пружні властивості ізотропного матеріалу, зв'язані між собою. Визначивши дослідним шляхом дві з них, за формулою (2.111) можна обчислити третю.

2.20. Розрахунки на міцність деяких елементів та деталей машин, які працюють в умовах зсуву

Наведемо приклади наближених розрахунків деяких з'єднань елементів конструкцій та деталей сільськогосподарських машин, які працюють в умовах зсуву. В окремих перерізах таких елементів діють значні дотичні напруження. У цих же перерізах виникають, як правило, і нормальні напруження, а тому вони не є площинами чистого зсуву. Враховуючи, що нормальні напруження значно менші дотичних, у наближених розрахунках на міцність до уваги беруть лише дотичні напруження, а означені перерізи при цьому наближено вважають площинами чистого зсуву. Крім деформації зсуву, такі елементи можуть отримувати деформації зім'яття. Характерними прикладами таких деформацій можуть бути з'єднання елементів конструкцій та деталей машин за допомогою болтів, гвинтів, заклепок, зварних швів, шпонок, врубок і т.ін. Наприклад, диски зчеплення, леміші та полиці плугів, розпушувачі, зуби борін і т.ін. Подробиці розрахунків таких з'єднань обговорюються в спеціальних курсах деталей машин, металевих, дерев'яних та пластмасових будівельних конструкцій. Розглянемо лише основні питання таких розрахунків на прикладах роботи заклепочних і зварних з'єднань.

Проаналізуємо роботу однієї заклепки діаметром d, яка з'єднує три смужки товщиною t (рис. 2.35). Якщо заклепок n штук, то вважають, що зусилля розподіляється між усіма заклепками нарівно.

Припустимо також, що дотичні напруження в поперечних перерізах заклепки $m–n$ розподілені рівномірно. За таких спрощень дотичні напруження в кожній точці поперечного перерізу заклепки дорівнюватимуть

$$\tau = \frac{F}{2 \cdot \pi d^2 / 4}.$$

Умову міцності заклепки на зсув запишемо як

$$\tau = \frac{2F}{\pi d^2} \le \tau_{adm\,з}.$$

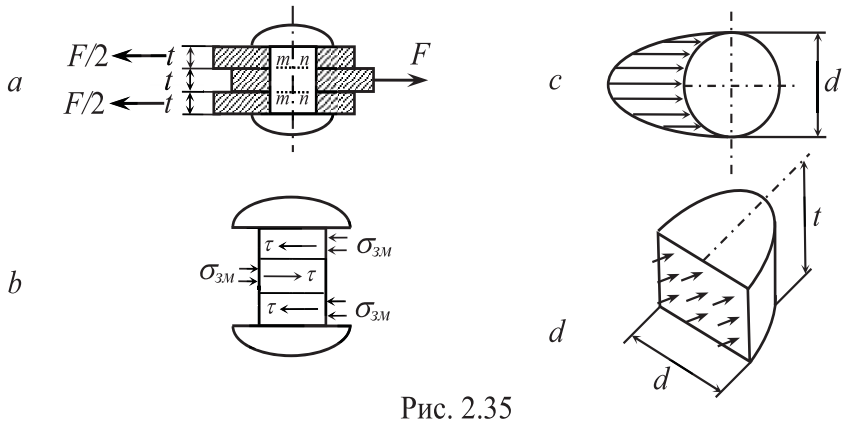


Рис. 2.35

Якщо заклепок n, то умова міцності заклепки відповідно матиме вигляд

$$\tau = \frac{2F}{\pi d^2} \le \tau_{adm\,з}.$$

Крім зрізу, заклепкам загрожує ще й зім'яття. Закон розподілу тиску на циліндричну поверхню заклепок (рис. 2.35,*c*) достатньо складний, а тому на практиці вважають, що тиск від смужки на заклепку розподіляється рівномірно по діаметральній площині перерізу заклепки, площа якої $t \cdot d$ (рис. 2.35,*d*). Площу цієї площини умовно називають площею зім'яття. Нормальні напруження зім'яття визначимо за формулою

$$\sigma_{зт} = \frac{F}{t \cdot d},$$

а умова міцності на зім'яття за наявності n заклепок відповідно матиме вигляд

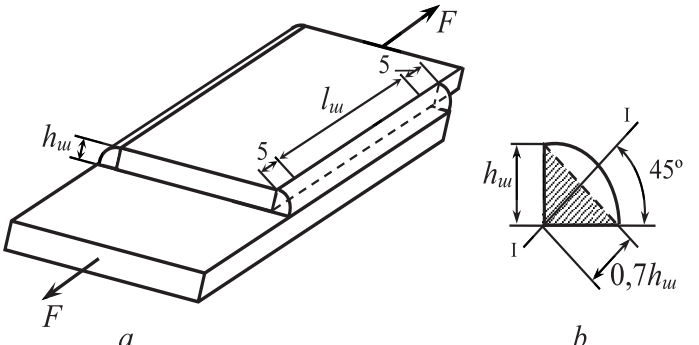
$$\sigma_{зт} = \frac{F}{ntd} \le \sigma_{adm\,з}.$$

Отже, умови міцності для розрахунку на міцність заклепок при зсуві та зім'ятті достатньо прості. Але у кожному конкретному випадку необхідно визначити, чи є заклепочне з'єднання однозрізним чи багатозрізним. Необхідно не забувати і про міцність самих з'єднуваних елементів на розтяг, особливо в місцях, послаблених отворами під заклепки.

Розглянемо основи розрахунку на міцність зварних з'єднань. Одне з можливих з'єднань за допомогою валикових (кутових) швів, паралельних напрямку

прикладеної сили, показано на рис. 2.36,*а*.

Крім валикових швів, паралельних напрямку діючих сил, застосовуються також шви, перпендикулярні до напрямку дії сили. В обох випадках розрахунок швів проводиться однаково. Практика показує, що поздовжні шви працюють краще від швів поперечних, тобто перпендикулярних до напрямку дії сил. Результати спостережень за роботою зварних з'єднань свідчать про те, що валикові (кутові) шви руйнуються від зрізу по найменшій площі зрізу, тобто в площині бісекторіальній до сторін шва (площина I–I на рис. 2.36,*b*). При цьому розрахунковою площею зрізу буде прямокутник зі сторонами $l_ш$ і $0{,}7h_ш$. Розрахункова довжина шва $l_ш$ приймається на 10 мм коротшою від дійсної довжини через можливо гіршу якість шва на його кінцях; розрахункова висота шва $0{,}7h_ш$ наближено дорівнює висоті рівнобедреного трикутника (заштрихований на рис. 2.36,*b*), вписаного в поперечний переріз шва з висотою $h_ш$. Прийнявши розподіл дотичних напружень у площині зрізу рівномірним, умова міцності двох зварних швів набере вигляду



а *b*

Рис. 2.36

$$\tau = \frac{F}{2 \cdot 0{,}7 h_ш l_ш} \le \tau_{adm}.$$

Приклад 12. *Розрахунок заклепочного з'єднання*. Два стальних листи (рис. 2.37) шириною b = 200 мм і товщиною t = 10 мм з'єднані за допомогою шести заклепок і двох накладок шириною 200 мм і товщиною t_1 = 8 мм. Діаметри заклепок d = 20 мм.

Перевірити міцність з'єднання, якщо листи розтягуються силою F = 200 кН, допустимі напруження для листів і накладок на розтяг σ_{adm} = 160 МПа, на зріз τ_{adm} = 60 МПа, на зім'яття $\sigma_{adm\,з}$ = 200 МПа.

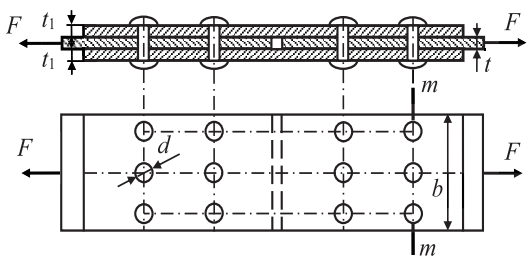


Рис. 2.37

Розв'язування. Обчислимо нормальні напруження в небезпечному перерізі листа, тобто у найбільш послабленому, з огляду на площу, поперечному перерізі *m–m*. Площа поперечного перерізу *m–m* дорівнює

$$A = bt - ndt = 200 \cdot 10 - 3 \cdot 20 \cdot 10 = 1400 \text{ мм}^2.$$

Визначимо нормальні напруження в цьому перерізі

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^3}{1400 \cdot 10^{-6}} = 143 \cdot 10^6 \text{ Па} = 143 \text{ МПа} < \sigma_{adm}.$$

Як бачимо, умова міцності листа за нормальними напруженнями виконується, відповідно і міцність листа буде забезпечена.

Перевіримо міцність з'єднання на зріз, враховуючи, що заклепки двозрізні $\kappa = 2$. Дотичні напруження в поперечних перерізах заклепок

$$\tau = \frac{F}{\kappa \cdot n \cdot \dfrac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 200 \cdot 10^3}{2 \cdot 6 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 53 \cdot 10^6 \text{ Па} = 53 \text{ МПа} < \tau_{adm},$$

також не перевищують допустимих значень, тому їх міцність на зріз теж забезпечена.

Перевірка міцності заклепочного з'єднання на зім'яття, враховуючи, що умовна площа зім'яття дорівнює $n \cdot d \cdot t$,

$$\sigma_з = \frac{F}{n \cdot d \cdot t} = \frac{200 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}} = 167 \cdot 10^6 \text{ Па} = 167 \text{ МПа} < \sigma_{adm\,з}$$

показує, що умова міцності заклепок на зім'яття виконується, відповідно і міцність заклепочного з'єднання на зім'яття теж забезпечена.

2.21. Класичні теорії міцності

В інженерній практиці розрахунків елементів конструкцій та деталей машин на міцність дуже важливою є оцінка міцності деталей машин чи елементів конструкцій та споруд за відомим напруженим станом, тобто за відомими головними напруженнями в точках тіла. Напружений стан, який обумовлює початок руйнування у крихких матеріалів або появу залишкових деформацій у пластичних матеріалів, називають граничним напруженим станом. Така задача легко розв'язується у випадку простих видів навантаження, зокрема для лінійного напруженого стану, для якого найбільш повно досліджено "поведінку" різних матеріалів, оскільки в цьому випадку граничні (небезпечні) напруження легко визначити експериментально. Для пластичних матеріалів під граничним (небезпечним) напруженням розуміють границю текучості $\sigma_н = \sigma_y$, за досягнення якої матеріал отримує залишкові (пластичні) деформації. Для крихких матеріалів небезпечним напруженням вважають границю міцності $\sigma_н = \sigma_и$, перевищення якої призводить до руйнування. Вибираючи відповідний коефіцієнт запасу міцності n, визначають допустимі нормальні напруження при розтягу σ^t_{adm} та при стиску σ^c_{adm}. Умова міцності для одновісного напруженого стану (рис. 2.38) набирає вигляду

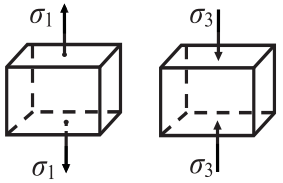


Рис. 2.38

$$\sigma_1 \le \sigma^t_{adm} \quad \text{або} \quad \sigma_3 \le \sigma^c_{adm}.$$

Значно складніше вирішується питання про міцність матеріалу за складного напруженого стану, коли в точках тіла два або всі три головних напруження не дорівнюють нулю. У цих випадках, як показують досліди, для того ж самого матеріалу небезпечний стан можемо мати при безлічі найрізноманітних комбінацій граничних (небезпечних) напружень $\sigma_{1н}$, $\sigma_{2н}$, $\sigma_{3н}$. Експериментально встановити граничні значення головних напружень дуже важко не тільки внаслідок складності постановки експерименту, а й через велике число випробувань, пов'язане з практично необмеженим числом комбінацій напружень, що потребує достатньо

складних випробувальних машин, апаратури і не може бути здійснено у виробничих умовах (Піскунов, 1994). Постає питання: як використати результати експериментальних досліджень небезпечного стану за лінійного напруженого стану, зокрема осьового розтягу–стиску, для оцінки граничного опору за об'ємного напруженого стану? Виникає потреба в методі оцінки рівня небезпечності довільного напруженого стану за результатами механічних випробувань матеріалу в умовах простого розтягу–стиску, тобто в порівнянні складного напруженого стану з простим. Зрозуміло, щоб порівнювати рівні небезпечності різнотипних напружених станів, необхідно прийняти гіпотезу стосовно того, який фактор вирішує суттєву роль у досягненні граничного (небезпечного) напруженого стану матеріалу. Саме вибір основного фактора, який характеризує міцність матеріалу та можливість досягнення граничного стану, тобто визначення критерію міцності, являє основну задачу будь-якої теорії міцності. Інакше кажучи, виникає потреба у визначенні гіпотези, критерію міцності матеріалу, який би не залежав від виду напруженого стану – лінійного, плоского чи об'ємного. Для цього приймають гіпотези про переважний вплив на міцність матеріалу того чи іншого фактора, вважаючи, що порушення міцності матеріалу за будь-якого напруженого стану відбудеться тільки тоді, коли величина цього фактора досягне певного граничного значення. Граничне значення фактора, що свідчить про міцність, знаходять з простих випробувань, наприклад на розтяг або стиск. Введення критерію міцності дає змогу порівняти даний складний напружений стан з простим, наприклад з одновісним розтягом, і установити при цьому еквівалентне розрахункове напруження, яке в обох випадках дає однаковий коефіцієнт запасу. Під коефіцієнтом запасу у випадку об'ємного напруженого стану розуміють число n, яке показує, у скільки разів треба одночасно збільшити усі компоненти напруженого стану σ_1, σ_2, σ_3, щоб цей напружений стан став граничним,

$$\sigma_{1н} = n\sigma_1; \quad \sigma_{2н} = n\sigma_2; \quad \sigma_{3н} = n\sigma_3 .$$

Отже, критерій міцності визначається гіпотезою про переважний вплив якогось одного фактора і залежно від того, який фактор приймається за вирішальний, формулюється відповідна теорія міцності. Прийнятий критерій міцності матеріалу повинен враховувати властивості матеріалу і допускати експериментальну перевірку шляхом випробування матеріалу за різних напружених станів. Розглянемо деякі з цих теорій, які називають класичними або фундаментальними теоріями міцності.

Перша (І) теорія міцності – теорія найбільших нормальних напружень. За цією теорією вважають, що міцність матеріалу, який працює в умовах складного напруженого стану, забезпечена в тому випадку, коли виниклі найбільші нормальні напруження не перевищують допустимих значень нормальних напружень, встановлених для одновісного напруженого стану. Згідно з цією теорією основним критерієм міцності матеріалу є найбільше нормальне напруження. Умова міцності за теорією найбільших нормальних напружень має вигляд:

$$\sigma_1 \le \sigma^t_{adm}; \qquad \sigma_3 \le \sigma^c_{adm}. \tag{2.112}$$

Гіпотеза найбільших нормальних напружень враховує лише одне з трьох головних напружень, що є її недоліком.

Практика показує, що перша (І) теорія міцності не відображає умов виникнення пластичних деформацій і дає задовільні результати для крихких матеріалів (скло, гіпс, камінь, цегла, кераміка, інструментальні сталі та інші), коли найбільше і середнє головні напруження розтягуючі. Першу теорію міцності пов'язують з ім'ям Галилео Галілея.

Друга (ІІ) теорія міцності – теорія найбільших відносних деформацій. Згідно з другою (ІІ) теорією міцності, міцність матеріалу, який працює в умовах складного напруженого стану, забезпечена у тому випадку, коли найбільша відносна лінійна деформація не перевищує допустимого значення відносної деформації для матеріалу, встановленої для одновісного напруженого стану. За крите-

рій міцності в цій класичній теорії приймають найбільшу за абсолютною величиною відносну лінійну деформацію. Вважають, що міцність порушується, коли ε_{max} досягає небезпечного значення $\varepsilon_н$. Умову міцності запишемо у вигляді $\varepsilon_{max} \le \varepsilon_{adm}$.

Використовуючи узагальнений закон Гука, перепишемо умову міцності через нормальні напруження. Якщо найбільше відносне видовження дорівнює ε_1, то умова міцності набирає такого вигляду: $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \le \varepsilon_{adm}$.

За осьового розтягу, вважаючи придатним закон Гуку, матимемо $\varepsilon_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{E}$. Остаточно умову міцності матеріалу за другою класичною теорією міцності запишемо так:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \le \frac{\sigma_{adm}}{E},$$

або

$$\sigma^{\text{II}}_{розр} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le \sigma_{adm}. \qquad (2.113)$$

Як бачимо з умови міцності (2.113), розрахункове напруження за ІІ теорією міцності залежить вже не від одного головного напруження, а від комбінації усіх трьох головних напружень, які й характеризують напружений стан у точці.

Дослідна перевірка другої теорії міцності свідчить про те, що вона дає задовільні результати для крихких матеріалів у разі обов'язкового виконання закону Гука. Критерій найбільших лінійних деформацій був запропонований Е. Маріоттом (1686). Пізніше, у XIX ст., його застосовували Ж. Понселе та Б. Сен-Венан. Другу теорію міцності називають ще теорією міцності Сен-Венана.

Третя (ІІІ) теорія міцності – теорія найбільших дотичних напружень. Міцність матеріалу в умовах складного напруженого стану за третьою теорією міцності забезпечена в тому випадку, коли найбільше дотичне напруження в ньому не перевищує допустимого дотичного напруження, визначеного для одновісного напруженого стану. Ця теорія базується на відомому факті, коли пластична деформація в матеріалах виникає в результаті зсувів у кристалічній решітці під дією дотичних напружень, і тоді основним критерієм

міцності слід прийняти найбільше дотичне напруження. Вважають, що критичний стан матеріалу настає тоді, коли τ_{max} досягає небезпечного значення $\tau_н$, яке виявляється за простого розтягу. Умова руйнування має вигляд $\tau_{max} = \tau_н$.

Умову міцності за третьою теорією запишемо так: $\tau_{max} \le \tau_{adm}$.

Оскільки $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, а $\tau_н = \sigma_н/2$, то умова руйнування приймає вигляд

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_н, \tag{2.114}$$

Умову міцності запишемо таким чином:

$$\sigma^{\text{III}}_{розр} = \sigma_1 - \sigma_3 \le \sigma_{adm}. \tag{2.115}$$

Як бачимо, розрахункове напруження за третьою теорією міцності також залежіть від комбінації головних напружень. Зауважимо, що третя класична теорія міцності найбільших дотичних напружень добре підтверджується дослідами для пластичних матеріалів, у яких допустимі напруження на розтяг і стиск однакові. Недоліком цієї теорії є те, що вона не враховує дії всіх головних напружень, а саме напруження σ_2, яке справляє деякий вплив на міцність матеріалу. Критерій найбільших дотичних напружень розглядають як критерій утворення залишкових пластичних деформацій, що відбуваються головним чином за рахунок зсувів, які поширюються в певних напрямках кристалічної решітки, якщо на цих напрямках дотичні напруження досягають деякого граничного значення. Вважаючи граничним станом матеріалу появу текучості, умову (2.114) запишемо у вигляді

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y, \tag{2.116}$$

де σ_y – границя текучості матеріалу.

Ця умова задовільно описує початок появи пластичних деформацій за складного напруженого стану для маловуглецевих сталей, алюмінієвих сплавів та інших металів, які мають площинки текучості при розтягу та стиску. Для ізотропних матеріалів умова пластичності (2.116) розходиться з даними дослідів не більше як на 15%. Гіпотеза, на якій ґрунтується третя класична теорія міцності, уперше в 1773 році була висунута Ш. Кулоном, згодом її виклав французький інженер А. Треска (1868). При вивченні пластичності цю гіпотезу, як умову те-

кучості, застосував Б. Сен-Венан. Тому третю теорію міцності називають теорією Кулона, а умову текучості (2.116) – умовою Треска–Сен-Венана.

Четверта (IV) теорія міцності – енергетична – проголошує, що міцність матеріалу, який працює в умовах складного напруженого стану, забезпечена, якщо питома потенціальна енергія пружної деформації формозміни матеріалу не перевищує питомої потенціальної енергії пружної деформації в умовах одновісного напруженого стану.

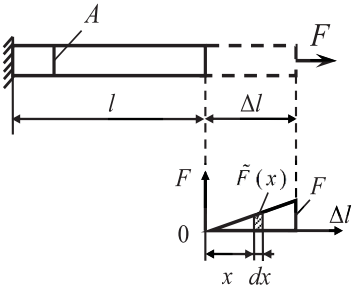


Рис. 2.39

Потенціальною енергією деформації називають енергію, яка накопичується в пружному тілі за його деформації. Величина потенціальної енергії деформації, накопиченої в одиниці об'єму, називається питомою потенціальною енергією пружної деформації. Відповідно до закону про збереження енергії, приріст потенціальної енергії деформації за статичного навантаження дорівнює роботі зовнішніх сил, виконаній ними при деформації тіла. У випадку простого розтягу або стиску роботу сили F, витрачену на розтяг пружного тіла на величину Δl (рис. 2.39), визначимо у такий спосіб. Оскільки сила F змінної величини та виконується закон Гука, тобто існує прямо пропорційна залежність між силою та деформацією $\tilde{F}(x) = Fx / \Delta l$, то спочатку визначимо елементарну роботу сили на малому переміщенні dx, на якому силу можна вважати сталою,

$$dW = \tilde{F}dx = (F\,x / \Delta l)dx$$

Отже, робота сили F на переміщенні Δl, а значить, і потенціальна енергія пружної деформації, будуть

$$W = U = \int_0^{\Delta l} \frac{F\,x}{\Delta l}\,dx = \frac{F\,\Delta l}{2},$$

а питома потенціальна енергія деформації на одиницю об'єму дорівнюватиме

$$u = \frac{U}{Al} = \frac{F\Delta l}{A \cdot l \cdot 2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2}. \qquad (2.117)$$

Визначимо питому потенціальну енергію деформації для об'ємного напруженого стану. Розглянемо елементарний об'єм матеріалу тіла у вигляді одиничного кубика, грані якого є головними площинами. На цих гранях діють головні напруження σ_1, σ_2, σ_3. Оскільки площини мають одиничні розміри, то сили, що діють на цих гранях, чисельно рівні σ_1, σ_2, σ_3, а їх переміщення чисельно рівні головним деформаціям ε_1, ε_2, ε_3. Використовуючи принцип суперпозиції та формулу (2.117), вираз для визначення питомої потенціальної енергії деформації у випадку об'ємного напруженого стану матиме вигляд

$$u = \frac{\sigma_1\varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2\varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3\varepsilon_3}{2}. \qquad (2.118)$$

Враховуючи вирази для ε_1, ε_2, ε_3 з узагальненого закону Гука (2.101), остаточно для визначення питомої потенціальної енергії пружної деформації отримаємо

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]. \qquad (2.119)$$

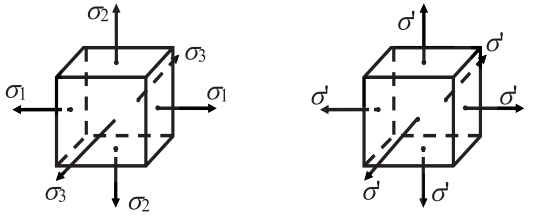


Рис. 2.40

За деформації елемента в загальному випадку змінюються як його об'єм, так і форма, а саме кубик перетворюється в паралелепіпед. Згідно з цим вважають, що повна питома потенціальна енергія деформації складається із питомої потенціальної енергії деформації зміни об'єму u_V і питомої потенціальної енергії деформації формозміни u_ϕ, тобто

$$u = u_V + u_\phi.$$

Визначити u_ϕ безпосередньо складно, а тому розглядають два кубічних елементи одиничних розмірів, завантажених, як показано на рис. 2.40.

Навантажимо кубики так, щоб відносні зміни об'ємів були рівними:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \quad \theta' = \frac{1-2\mu}{E} 3\sigma' .$$

Рівними θ і θ' будуть при $\sigma' = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$.

Питома потенціальна енергії деформації першого кубика визначиться

$$u = u_V + u_\phi = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\,(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right].$$

Другий кубик за всебічного розтягу однакової інтенсивності форми не змінить, його потенціальна енергії формозміни $u'_\phi = 0$, а повна питома потенціальна енергії деформації буде

$$u' = u'_V + 0 = \frac{3}{2E}(1-2\mu)\,\sigma'^2 .$$

Оскільки відносні зміни об'ємів обох кубиків однакові, то можна вважати, що і питомі потенціальні енергії зміни об'ємів рівні, тобто

$$u_V = u'_V.$$

Звідки

$$\begin{aligned} &u_\phi = u - u_V = u - u'_V = \\ &= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] - \frac{3}{2E}(1-2\mu)\frac{(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2}{9} = \\ &= \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]. \end{aligned} \tag{2.120}$$

Доведено, що поява пластичних деформацій у полікристалічних ізотропних матеріалах пов'язана з властивою для даного матеріалу величиною питомої потенціальної енергії пружної деформації, витраченої на зміну форми тіла. Умова пластичності, виражена через величину такої енергії, розглядається як енергетична теорія міцності. Іншими словами: небезпечний напружений стан текучості матеріалу виникає тоді, коли питома потенціальна енергія формозміни досягає свого граничного значення $u_{\phi y}$. Ця гранична величина питомої потенціальної енергії формозміни визначається за простого розтягу в момент появи текучості.

Умову появи текучості запишемо у вигляді

$$u_\phi = u_{\phi y}, \tag{2.121}$$

де $u_ф$, $u_{фy}$ – величина питомої потенціальної енергії деформації відповідно формозміни та формозміни в момент появи текучості.

Умова міцності за четвертою енергетичною теорією міцності матиме вигляд

$$u_ф \le u_{ф\ adm}. \tag{2.122}$$

Питому потенціальну енергію деформації формозміни можна записати у вигляді

$$u_ф = \frac{1+\mu}{3E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right]. \tag{2.123}$$

За простого розтягу в момент текучості ($\sigma_1 = \sigma_y$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = 0$) маємо

$$u_{фy} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_y^2 \tag{2.124}$$

Отже, умову настання текучості (2.121) з урахуванням (2.123) та (2.124) запишемо

$$\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)} = \sigma_y, \tag{2.125}$$

або

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} = \sigma_y. \tag{2.126}$$

Умова міцності набере вигляду

$$\sigma_{розр}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \le \sigma_{adm}. \tag{2.127}$$

Порівнюючи вираз (2.127) з виразом для дотичних напружень $\tau_{окт}$ на октаедричних площинах (2.95), бачимо, що всі величини збігаються з точністю до постійного множника. Виходячи з цього, четверту теорію міцності можна сформулювати, прийнявши за критерій пластичності не питому потенціальну енергію формозміни, а дотичні напруження на октаедричних площинах, тобто виразити як умову сталості октаедричних дотичних напружень. Згідно з цією умовою, незалежно від виду напруженого стану, пластична деформація виникає за певної величини октаедричного дотичного напруження. Відповідно умову міцності можна записати як

$$\tau_{окт} \le \tau_{adm}. \tag{2.128}$$

Сутність четвертої (IV), енергетичної теорії міцності, як і третьої (III), добре узгоджується з даними експериментів для пластичних матеріалів, що мають однаковий опір розтягу та стиску. Результати розрахунків за четвертою теорією міцності дещо ближчі до експериментальних даних, ніж за третьою. Але основна перевага четвертої теорії порівняно з третьою не в цьому. Більш важливою є інша обставина. Якщо в розрахунках конструкції ми звертаємося до третьої теорії міцності, тобто до виразу (2.115), то повинні поміркувати, якому із трьох головних напружень присвоїти індекси 1, 2 і 3. Особливо ця процедура ускладнюється при змінних навантаженнях. Якщо ж використати четверту теорію, то виявляється, що перестановка місцями індексів 1, 2, 3 у виразі (2.127) не впливає на його величину, тобто звільняє нас від необхідності з'ясовувати, яке з головних напружень є найбільшим, а яке – найменшим.

Уперше ідею, покладену в основу четвертої теорії, висловив Д. Максвелл у середині XIX ст., але вона залишалася невідомою дослідникам. Е. Бельтрамі в 1885 році за критерій міцності запропонував прийняти повну питому потенціальну енергію деформації, яка накопичується в тілі внаслідок зміни його об'єму u_V і форми u_ϕ. Але прийняти повну енергію деформації за критерій пластичності неможливо, оскільки з дослідів відомо, що гідростатичний рівномірний стиск ізотропного матеріалу не приводить до пластичних деформацій, у той час як потенціальна енергія необмежено зростає. У зв'язку з цим професор Львівської політехніки Максиміліан Губер у 1904 році запропонував не враховувати питому енергію пружної деформації, що витрачається на зміну об'єму, тобто дійшов ідеї Д. Максвелла. Отже, четверта, енергетична теорія міцності набула назви теорії Максвелла–Губера.

Еквівалентні або зведені нормальні напруження. Вирази в лівих частинах умов міцності (2.112), (2.113), (2.115), (2.127) розглядаються як деякі напруження за лінійного напруженого стану, що еквівалентні об'ємному напруженому стану. Ці напруження називають еквівалентними і позначають $\sigma_{екв}$ з індексами, що відповідають номеру теорії:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{екв.}^{I} = \sigma_1 \le \sigma_{adm};\\
&\sigma_{екв.}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le \sigma_{adm};\\
&\sigma_{екв.}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \le \sigma_{adm};\\
&\sigma_{екв.}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \le \sigma_{adm}.
\end{aligned} \qquad (2.129)$$

Викладені чотири теорії міцності, хоч і називають їх класичними, але вони не є універсальними. Першу та другу теорії можна застосовувати лише для крихких матеріалів, оскільки вони відображають крихке руйнування. Третя та четверта теорії добре відображають пластичне руйнування (текучість), їх застосовують для пластичних матеріалів. Однак, як показують експерименти, за всебічного розтягу пластичний матеріал поводить себе як крихкий, а за всебічного стискання крихкий матеріал поводить себе як пластичний. Крім того, необхідно враховувати різний опір розтягу та стиску. Отже, виникла потреба в узагальнених теоріях міцності, що відображають як крихке, так і пластичне руйнування.

На сьогодні розроблено цілий ряд *узагальнених* теорій міцності. Найпоширенішими серед них є теорія міцності Мора, теорія Писаренко–Лебедєва та ін. Розглянемо теорію Мора.

Теорія міцності Мора базується на графічній інтерпретації напруженого стану в точці тіла – побудові кругів Мора. При цьому припускають, що міцність залежить тільки від найбільшого та найменшого головних напружень, а середнім головним напруженням можна знехтувати. Отже, об'ємний напружений стан графічно можна представити кругом Мора, побудованим на найбільшому та найменшому головних напруженнях. Якщо із досліду одержані граничні значення головних напружень, за яких матеріал переходить у пластичний стан або руйнується, то круг Мора, побудований на граничних напруженнях, буде граничним. Для заданого матеріалу на підставі експериментів можна, змінюючи співвідношення головних напружень, побудувати низку (сімейство) граничних кругів Мора (рис. 2.41).

Для всіх кругів будують граничну обвідну лінію *ABCDE*. Крайня права точка *C* обвідної, де вона перетинає вісь $O\sigma$, відповідає всебічному рівномірному розтягу $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_y^t$. У лівий бік від початку координат гранична обвідна залишається незамкненою, оскільки за рівномірного всебічного стиску матеріал здатний витримувати досить великі навантаження, не руйнуючись. При переході від розтягу до стиску опір матеріалу поступово зростає, що відображається діаметрами кругів, які збільшуються.

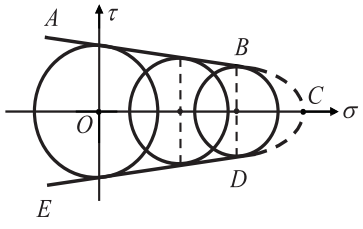


Рис. 2.41

За допомогою граничної обвідної можна зробити висновок щодо безпеки заданого напруженого стану з головними напруженнями σ_1 і σ_3. Якщо круг Мора, побудований на заданих σ_1 та σ_3, розташований у межах граничної обвідної, то цей стан безпечний. Збільшуючи пропорційно напруження σ_1 та σ_3 доти, доки круг не торкнеться обвідної, та взявши відношення радіусів граничного та заданого кругів, знайдемо коефіцієнт запасу.

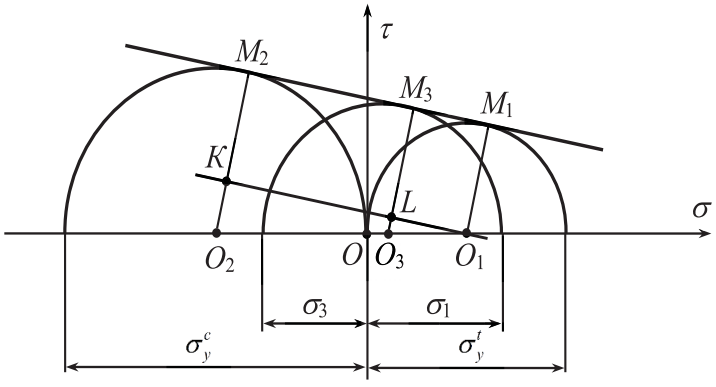


Рис. 2.42

На практиці немає потреби будувати обвідну повністю. Достатньо провести невелику ділянку обвідної, побудувавши два круги (рис. 2.42) – один з центром в т. O_1, що відповідає руйнуванню для пластичного матеріалу за осьового розтягу ($\sigma_1 = \sigma_y^t$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), інший з центром у т. O_2, що відповідає руйнуванню за осьо-

вого стиску ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = \sigma^c_y$), або для крихкого матеріалу з граничними напруженнями відповідно σ^t_u та σ^c_u. Обвідну до цих кругів замінюють дотичною прямою M_2M_1.

Для заданого напруженого стану з напруженнями σ_1 і σ_3 будують круг з центром в т. O_3. Нехай цей круг дотикається до обвідної в точці M_3. Із точки O_1 проведемо пряму O_1K, паралельну прямій M_2M_1. З геометричних міркувань (подібності трикутників) одержимо таке відношення:

$$\frac{KO_2}{LO_3} = \frac{O_1O_2}{O_1O_3}.$$

Тоді через напруження умова текучості Мора, яка враховує різні границі текучості матеріалу при розтягу і стиску, матиме вигляд

$$\sigma_1 - \frac{\sigma^t_y}{\sigma^c_y}\sigma_3 = \sigma_y.$$

Відповідно умову міцності за теорією Мора запишемо таким чином:

$$\sigma^M_{екв.} = \sigma_1 - \frac{\sigma^t_y}{\sigma^c_y}\sigma_3 \le \sigma_{adm}. \qquad (2.130)$$

Якщо границі на розтяг і на стиск однакові, тобто $\sigma^t_y = \sigma^c_y$ (ідеально пластичний матеріал), то еквівалентне напруження за теорією Мора переходить в еквівалентне напруження за третьою теорією міцності. За крихкого руйнування в умову (2.130) замість значень границь текучості при розтягу та стиску σ^t_y, σ^c_y необхідно підставити відповідні значення границь міцності σ^t_u, σ^c_u.

Для крихкого матеріалу умову міцності Мора запишемо як

$$\sigma^M_{екв.} = \sigma_1 - \frac{\sigma^t_u}{\sigma^c_u}\sigma_3 \le \sigma_{adm}.$$

Для ідеально крихкого матеріалу, коли $\sigma^t_u \to 0$, еквівалентне напруження за теорією Мора співпадає з еквівалентним напруженням за першою теорією міцності.

Отже, теорію, сформульовану О. Мором у 1900 році, можна застосовувати як для ідеально крихких і ідеально пластичних матеріалів, так і для матеріалів з

проміжними властивостями. Теорія побудована на експериментальних даних і не потребує додаткової експериментальної перевірки.

Таким чином, перевірка міцності матеріалу за складного напруженого стану супроводжується значними труднощами, які ускладнюються ще й неможливістю всякчас правильно оцінити, якого виду руйнування слід очікувати – пластичного чи крихкого.

Приклад 13. Визначити, який із трьох напружених станів, наведених на рис. 2.43, є більш небезпечним. Числові значення напружень задані в МПа. Матеріал на розтяг і на стиск працює однаково, тобто $\sigma^t_y / \sigma^c_y = 1$.

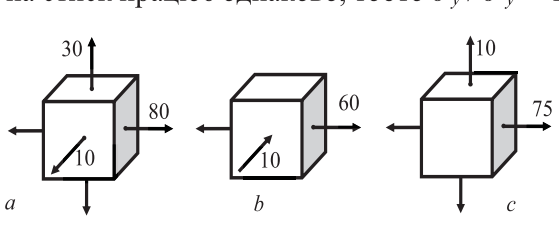


Рис. 2.43

Розв'язування. Величину еквівалентного напруження визначимо за ІІІ теорією міцності (або за теорією Мора) $\sigma^{III}_{екв.} = \sigma_1 - \sigma_3 \le \sigma_{adm}$, МПа:

a) $\sigma_1 = 80$ МПа; $\sigma_2 = 30$ МПа; $\sigma_3 = 10$ МПа; $\sigma^{III}_{екв} = 80–10 = 70$ МПа;

b) $\sigma_1 = 60$ МПа; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = –10$ МПа; $\sigma^{III}_{екв} = 60–(–10) = 70$ МПа;

c) $\sigma_1 = 75$ МПа; $\sigma_2 = 10$ МПа; $\sigma_3 = 0$; $\sigma^{III}_{екв} = 75–0 = 75$ МПа.

Отже, найбільш небезпечним є напружений стан у випадку *c*. Напружені стани *a* та *b* рівнонебезпечні.

Приклад 14. Прилад для дослідження морських глибин опускається на глибину H (рис. 2.44). Вага прибору у воді Q. Питома вага води γ, питома вага матеріалу каната γ_K, площа поперечного перерізу A. Визначити еквівалентні напруження у верхньому та нижньому перерізах каната.

Розв'язування. У верхньому перерізі має місце тільки осьовий розтяг за рахунок ваги приладу Q та ваги каната $Q_K = (\gamma_K - \gamma)AH$, тобто $\sigma_1 = \dfrac{Q + Q_K}{A}$;

$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Отже,

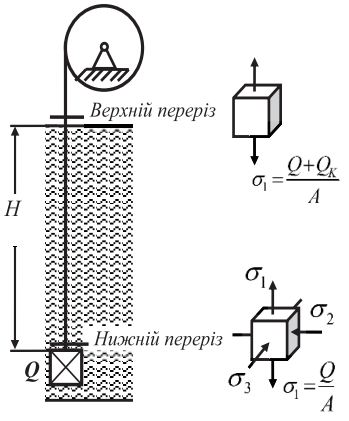


Рис. 2.44

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{Q + Q_K}{A} = \frac{Q}{A} + (\gamma_K - \gamma)H .$$

У нижньому перерізі має місце тривісний (об'ємний) напружений стан. Розтягуюче напруження викликається вагою приладу $\sigma_1 = Q / A$, стискуючі напруження – тиском рідини на глибині H: $\sigma_2 = \sigma_3 = -\gamma H$.

Це означає, що

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{Q}{A} + \gamma H .$$

Таким чином, якщо питома вага матеріалу каната більше ніж вдвічі перевищує питому вагу води, то найбільш небезпечним буде верхній переріз каната.

ГЛАВА 3. КРУЧЕННЯ. РОЗРАХУНКИ ВАЛІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ

3.1. Крутні моменти та їх визначення. Епюри крутних моментів

Крученням називають таке навантаження стержня зовнішньою системою сил, коли в його поперечних перерізах виникають тільки крутні моменти, а поздовжні сили, згинальні моменти та поперечні сили відсутні, тобто дорівнюють нулю. Стержні, які працюють на кручення та слугують для передачі крутного моменту, в техніці називають валами. В умовах кручення працюють багато деталей сільськогосподарських машин і елементів конструкцій, наприклад, карданні та колінчасті вали, вали електродвигунів і верстатів, ведучі осі автомобілів, тракторів, комбайнів, локомотивів, осі турбін і т.ін. У багатьох випадках поряд з крученням деталі машин працюють водночас в умовах згину або розтягу–стиску. Ці випадки відносяться до стану складного опору, який буде досліджено далі.

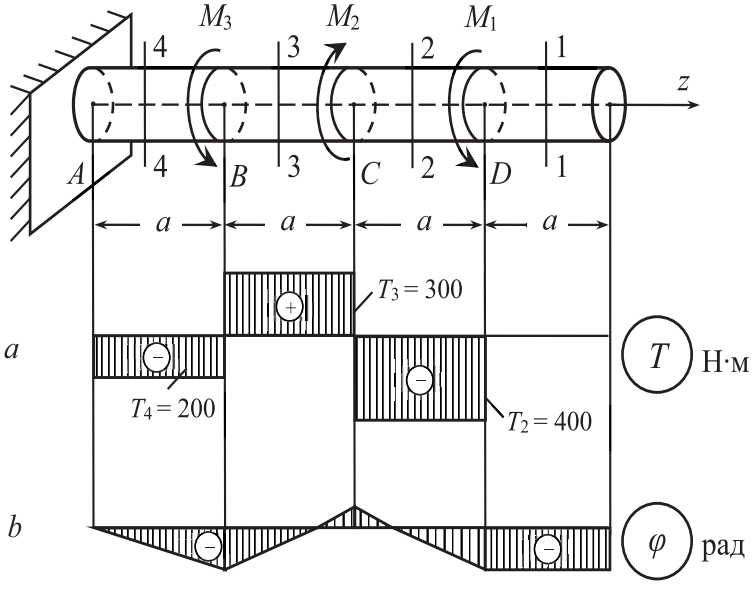


Рис. 3.1

Проаналізуємо кручення валів з круглими або кільцевими поперечними перерізами, які найчастіше використовують у сільськогосподарських машинах.

Розглянемо вал круглого поперечного перерізу, до якого прикладені зовнішні крутні моменти $M_1 = 400$ Н·м, $M_2 = 700$ Н·м, $M_3 = 500$ Н·м у різних поперечних перерізах (рис. 3.1). Для визначення внутрішніх крутних моментів у поперечних перерізах вала застосуємо метод перерізів. Стержень уявно розріжемо площиною, перпендикулярною осі, на дві частини. Наприклад, для визначення внутрішнього крутного моменту T_2 в перерізі 2–2 розглянемо рівновагу частини, що лежить праворуч від перерізу. Внутрішній момент T_2 вважають додатним, якщо при розгляді відсіченої частини з боку перерізу він буде повертати її у напрямку руху стрілки годинника (рис. 3.2). Запишемо рівняння рівноваги залишеної частини вала

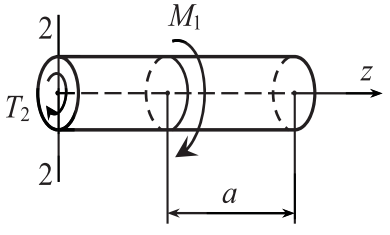


Рис. 3.2

$$\sum mom_z(\bar{F}_i) = T_2 + M_1 = 0,$$

звідки

$$T_2 = -M_1 = -400 \text{ Н·м}. \tag{3.1}$$

Неважко побачити, що

у перерізі 1–1 $$T_1 = 0; \tag{3.2}$$

у перерізі 3–3 $$T_3 = -M_1 + M_2 = 300 \text{ Н·м}; \tag{3.3}$$

у перерізі 4–4 $$T_4 = -M_1 + M_2 - M_3 = -200 \text{ Н·м}. \tag{3.4}$$

Виходячи із виразів (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), можна сформулювати правило для визначення крутного моменту в довільному поперечному перерізі вала, а саме: внутрішній крутний момент у довільному поперечному перерізі вала дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх крутних моментів, прикладених до вала по одну сторону (праворуч або ліворуч) від перерізу. На основі цього правила та правила знаків для крутного моменту будують графік зміни крутного моменту вздовж осі вала, який називають епюрою крутних моментів.

За епюрою крутних моментів визначають положення небезпечних перерізів, у яких крутний момент набирає максимального значення T_{max}. Для цього вал розбивають на ділянки, границями яких є поперечні перерізи, де прикладені зосереджені зовнішні крутні моменти, а також розпочинаються або закінчуються ділянки розподілених моментних навантажень. Визначивши внутрішні крутні моменти в ряді перерізів, будують епюру крутних моментів. На рис. 3.1,*а* побудована епюра крутних моментів T за результатами підрахунків величини внутрішніх крутних моментів на кожній із чотирьох ділянок за формулами (3.1)–(3.4).

3.2. Напруження та деформації при крученні стержня з круглим поперечним перерізом

Для дослідження характеру деформацій вала круглого поперечного перерізу при крученні на його бокову поверхню наносять сітку із твірних та направляючих (рис. 3.3). Експериментальні спостереження показують, що при крученні вісь такого стержня залишається прямолінійною, контури поперечних перерізів круглі й плоскі до деформації, залишаються такими ж самими і після деформації. Це дозволяє застосовувати в подальшому гіпотезу плоских перерізів. При крученні відбувається поворот одного перерізу відносно іншого на деякий кут φ, який називають кутом закручування. Якщо, наприклад, переріз 1–1 (рис. 3.3) знаходиться на відстані z від нерухомого лівого крайнього перерізу і повертається відносно нього на кут φ, то переріз 2–2 повертається відносно лівого крайнього перерізу на кут $\varphi + d\varphi$, а це означає, що переріз 2–2 повертається відносно перерізу 1–1 на кут $d\varphi$ (рис. 3.4).

Відстані між поперечними перерізами при крученні практично не змінюються, а це означає, що поздовжні волокна не видовжуються і не скорочуються. Це дає змогу припустити, що нормальні напруження в поперечних перерізах вала відсутні. Вал можна уявити утвореним із круглих жорстких дисків, нанизаних своїми центрами ваги на поздовжню вісь, а кручення такого вала – результат поворотів цих дисків один відносно одного навколо осі вала.

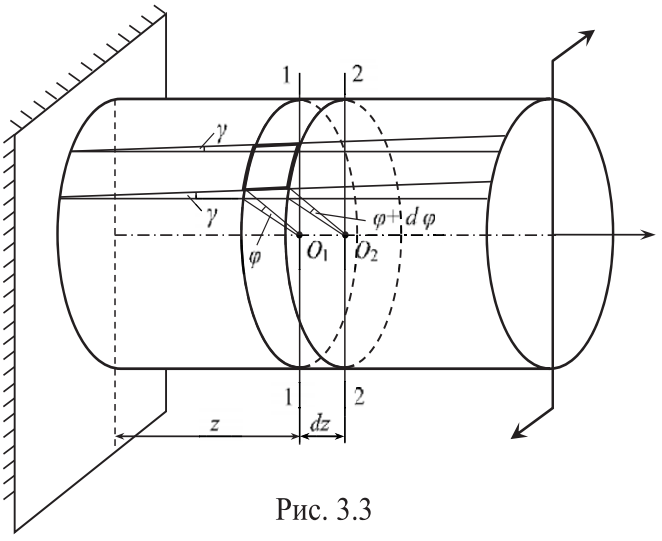


Рис. 3.3

З одного боку, розглядаючи деформацію елемента вала (рис. 3.4,*a*), маємо переміщення B_2B_3 як результат повороту перерізу 2–2 на кут $d\varphi$

$$B_2B_3 = \rho \cdot d\varphi. \tag{3.5}$$

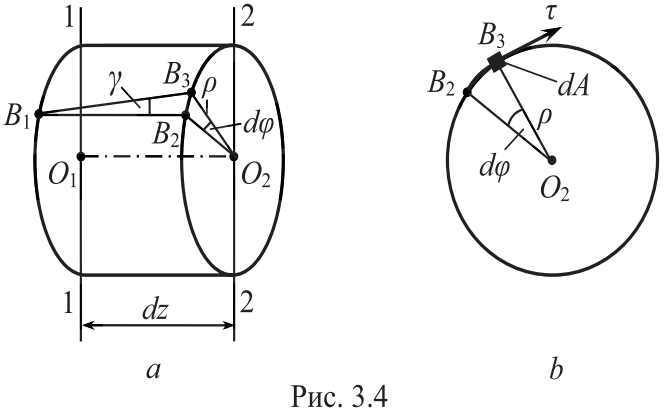


Рис. 3.4

З іншого боку, відрізок B_2B_3 є результатом зсуву поздовжнього волокна B_1B_2 на кут γ

$$B_2B_3 = \gamma \cdot dz\,. \tag{3.6}$$

Прирівнюючи праві частини виразів (3.5) і (3.6), маємо

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{\rho}\gamma. \tag{3.7}$$

Використовуючи закон Гука при зсуві

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \tag{3.8}$$

з урахуванням виразу (3.7) отримаємо

$$\tau = \frac{d\varphi}{dz} G\rho, \tag{3.9}$$

де G – модуль пружності матеріалу вала при зсуві, або просто модуль зсуву.

Із залежності (3.9) можна зробити висновок, що дотичні напруження в точках поперечних перерізів вала пропорційні відстані ρ від центра ваги перерізу до точки, в якій визначається напруження.

У попередньому параграфі було показано, що внутрішній крутний момент T у поперечному перерізі вала можна визначити через зовнішні навантаження, які діють на вал, використовуючи метод перерізів. Водночас внутрішній крутний момент T є результатом сумарної дії дотичних напружень у поперечному перерізі. Як доведено в теорії пружності, дотичні напруження в будь-якій точці поперечного перерізу круглого вала направлені перпендикулярно відповідному радіусу в бік дії крутного моменту. Напруження τ, що діє на елементарній площадці dA (рис. 3.4,*b*), утворює елементарну силу $\tau \cdot dA$, яка викликає відносно центра ваги перерізу O_2 елементарний крутний момент,

$$dT = \tau \cdot dA \cdot \rho. \tag{3.10}$$

Заповнюючи уявно весь поперечний переріз елементарними площадками і визначаючи та інтегруючи елементарні крутні моменти від дії дотичних напружень на кожній із площадок, знаходимо внутрішній крутний момент у поперечному перерізі вала

$$T = \int\limits_{(A)} \tau \cdot \rho dA. \tag{3.11}$$

З урахуванням формули (3.9) вираз (3.11) перепишемо у вигляді

$$T = \int\limits_{(A)} \frac{d\varphi}{dz} G\rho^2 dA = \frac{d\varphi}{dz} G \int\limits_{(A)} \rho^2 dA. \tag{3.12}$$

Величину $\int\limits_{(A)} \rho^2 dA$ позначають I_ρ і називають *полярним моментом інерції* поперечного перерізу, яка є геометричною характеристикою поперечного перерізу вала, що враховує не тільки величину площі поперечного перерізу, а і його конфігурацію. Отже, для визначення відносного погонного кута закручування $d\varphi / dz$, який позначимо через θ, отримаємо вираз

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{GI_\rho}. \tag{3.13}$$

Повний кут закручування вала довжиною l дорівнюватиме

$$\varphi = \int_0^l \frac{T\,dz}{GI_\rho}. \tag{3.14}$$

Якщо по всій довжині вала крутний момент і діаметр поперечного перерізу вала є сталими величинами, тобто не змінюються, то із рівності (3.14) для визначення кута закручування отримаємо формулу

$$\varphi = \frac{T\,l}{GI_\rho}. \tag{3.15}$$

Формули (3.14), (3.15) є математичними виразами закону Гука при крученні. Величину GI_ρ називають жорсткістю поперечного перерізу вала при крученні. Для ступінчастих валів або для валів, у яких T змінюється за довжиною зі стрибками, кут закручування між початковим і кінцевим перерізами визначається як сума кутів закручування на окремих ділянках зі сталими відношеннями $T_i / I_{\rho i}$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i\,l_i}{G\,I_{p\,i}}. \tag{3.16}$$

Наприклад, для вала, наведеного на рис. 3.1, кут повороту перерізу B відносно нерухомого перерізу A дорівнюватиме

$$\varphi_B = \frac{T_4 \cdot AB}{GI_p},$$

кут повороту перерізу C

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{CB} = \frac{T_4 \cdot AB}{GI_p} + \frac{T_3 \cdot BC}{GI_p}, \tag{3.17}$$

кут повороту перерізу D

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{DC} = \varphi_B + \varphi_{CB} + \varphi_{DC} = \frac{T_4 AB}{GI_p} + \frac{T_3 \cdot BC}{GI_p} + \frac{T_2 \cdot CD}{GI_p}. \tag{3.18}$$

Підрахувавши кути закручування в перерізах B, C, D (з урахуванням знаків крутних моментів), будують епюру кутів закручування φ. Епюра кутів закручування φ у нашому прикладі наведена на рис. 3.1,*b* за однакових довжин усіх ділянок.

Повний кут закручування не завжди може характеризувати жорсткість стержня при крученні, оскільки вподовж усього вала крутні моменти можуть мати різні знаки і повний кут закручування може бути невеликим, у той час як на окремих ділянках він може виявитися значним.

Для оцінки жорсткості вала використовують іншу міру – відносний погонний кут закручування $\theta = d\varphi / dz$. Умова жорсткості вала при цьому набирає вигляду

$$\theta_{max} = \left(\frac{T}{GI_p} \right)_{max} \le \theta_{adm} \tag{3.19}$$

де θ_{adm} – допустиме значення відносного погонного кута закручування. Наприклад, для валів середньої довжини, які використовують у загальному машинобудуванні θ_{adm} = (0,5–1) град/м, тобто кінцеві поперечні перерізи вала довжиною 1 м можуть повертатися один відносно одного максимум на один градус.

Повернемося до визначення дотичних напружень у точках поперечних перерізів вала. Для цього у формулу (3.9) замість відносного погонного кута закручення $d\varphi / dz$ підставимо його вираз із (3.13). Після підстановки отримаємо формулу для визначення дотичних напружень у довільній точці довільного поперечного перерізу вала при крученні

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{I_p}, \tag{3.20}$$

де T – внутрішній крутний момент у поперечному перерізі, у точках якого визначаємо дотичні напруження; ρ – відстань від центра ваги перерізу до точки, в якій визначається дотичне напруження; I_ρ – полярний момент інерції поперечного перерізу. Для суцільного вала круглого поперечного перерізу діаметром D, як відомо, $I_p = \dfrac{\pi D^4}{32}$, для порожнистого вала, кільцевого перерізу зі зовнішнім діаметром D і внутрішнім d відповідно

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right), \text{ де } \alpha = \frac{d}{D}.$$

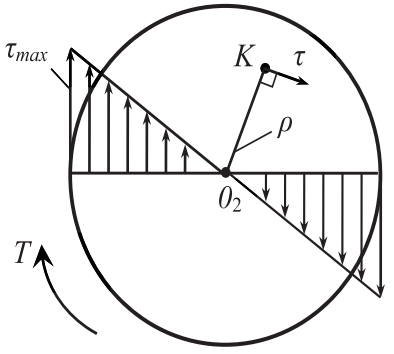


Рис. 3.5

На рис. 3.5 показані дотичні напруження в окремій точці K, а також розподіл дотичних напружень вздовж горизонтального діаметра вала у вигляді епюри дотичних напружень.

Дотичні напруження пропорційні відстані ρ точки до центра перерізу, перпендикулярні до відрізка ρ (рис. 3.5) і направлені в бік дії крутного моменту. Максимальні дотичні напруження виникають у точках периферії перерізу, тобто в точках, які найбільш віддалені від осі вала або від центра перерізу, при $\rho = \rho_{max}$

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot \rho_{max}}{I_p}. \tag{3.21}$$

Величину I_ρ / ρ_{max} позначають через W_p і називають *полярним моментом опору* поперечного перерізу. Формула (3.21) набирає вигляду

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p}. \tag{3.22}$$

Для круглого поперечного перерізу діаметра D:

$$\rho_{max} = \frac{D}{2}; \qquad W_p = \frac{\pi D^3}{16}, \tag{3.23}$$

для кільцевого перерізу

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right). \tag{3.24}$$

Звернемо увагу на ту обставину, що дотичні напруження в точках, розташованих поблизу від центра перерізу, малі, тобто матеріал вала поблизу його осі залишається недонапруженим, у той час як у точках периферії перерізу напруження можуть досягнути допустимих значень. Інакше кажучи, для більш раціонального використання матеріалу, зниження матеріалоємності та ваги, вал потрібно виготовляти (якщо можливо) порожнистим. Остаточно формула для обчислення значень найбільших дотичних напружень, що виникають у точках периферії $\rho = \rho_{max}$ небезпечного перерізу, в якому крутний момент набирає найбільшого значення $T = T_{max}$, матиме вигляд

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p}.$$

3.3. Умова міцності валу за дотичними напруженнями. Два типи (три види) розрахунків валів на міцність

Вал є однією з важливих деталей машин і механізмів. Він повинен бути міцним і жорстким. Для забезпечення міцності вала необхідно, щоб максимальні напруження, які виникають у небезпечних перерізах не перевищували допустимих, тобто потрібно виконання умови міцності вала. Згідно з цією умовою, міцність вала буде забезпечена, якщо найбільші дотичні напруження, які виникають у точках периферії $\rho = \rho_{max}$ небезпечного перерізу $T = T_{max}$, не перевищуватимуть допустимих значень дотичних напружень, встановлених для вала, а саме:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p} \le \tau_{adm}. \tag{3.25}$$

Умова міцності (3.25) дає можливість виконувати два типи (три види) розрахунків валів на міцність та розв’язувати два типи (три види) задач, пов’язаних з цими розрахунками.

Перший тип розрахунків називають проектувальним, де маємо два види розрахунків.

Найбільш важливим є перший вид розрахунків, пов'язаний з визначенням діаметра вала за відомого крутного моменту в його поперечних перерізах та значенні допустимого дотичного напруження для вала. Розв'язуючи цю проблему, з умови міцності (3.25) визначають необхідний полярний момент опору поперечного перерізу вала

$$W_p = \frac{T_{max}}{\tau_{adm}},$$

та за полярним моментом опору поперечного перерізу вала W_p розраховують діаметр вала. Для суцільного вала круглого поперечного перерізу

$$\frac{\pi D^3}{16} \geq \frac{T_{max}}{\tau_{adm}},$$

звідки

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{max}}{\pi \tau_{adm}}}. \qquad (3.26)$$

Для порожнистого вала кільцевого поперечного перерізу

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right) \geq \frac{T_{max}}{\tau_{adm}}, \quad \text{де } \alpha = \frac{d}{D},$$

звідки

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16\,T_{max}}{\pi\left(1-\alpha^4\right)\tau_{adm}}}. \qquad (3.27)$$

Другий вид розрахунків вала на міцність дозволяє визначити величину максимального крутного моменту, який може виникати у поперечних перерізах вала без порушення міцності, за відомих розмірів поперечного перерізу вала та значень допустимих дотичних напружень. У цьому випадку величину максимального крутного моменту обчислюють з правої частини умови міцності вала (3.25)

$$T_{max} = \tau_{adm} \cdot W_p,$$

де полярний момент опору поперечного перерізу вала W_p визначають за формулами (3.23) або (3.24).

Другий тип розрахунків носить назву перевірочних або контрольних. Тут маємо тільки один вид, у якому все відомо для вала – максимальне значення крутного моменту в поперечних перерізах, розміри поперечного перерізу і значення допустимого дотичного напруження. Усі ці величини підставляємо в умову міцності вала (3.25) і перевіряємо, виконується вона чи ні. У випадку, якщо умова міцності виконується, міцність вала буде забезпечена. Якщо умова міцності не виконується, то для забезпечення міцності щось треба змінити: чи то зменшити зовнішнє навантаження, чи то збільшити відповідно розміри поперечного перерізу, чи виконати вал з більш міцного матеріалу, тобто з більшим значенням допустимого дотичного напруження.

3.4. Умова жорсткості валу. Два типи (три види) розрахунків валів на жорсткість

Для нормальної роботи валів їх деформації – кути поворотів поперечних перерізів – мають бути обмеженими, а в більшості випадків навіть малими. Щоб досягти цього, вали потрібно розраховувати не тільки на міцність, але і на жорсткість. Для забезпечення жорсткості вала необхідно, щоб його параметри задовольняли умові жорсткості, згідно з якою жорсткість вала буде забезпечена, якщо найбільший відносний погонний кут закручування вала θ_{max} не перевищуватиме допустимого значення погонного кута закручування θ_{adm}, а саме:

$$\theta_{max} = \left(\frac{T}{GI_p} \right)_{max} \leq \theta_{adm}.$$

У випадку сталого поперечного перерізу вала умова жорсткості вала набирає вигляду

$$\theta_{max} = \frac{T_{max}}{GI_p} \leq \theta_{adm}. \qquad (3.28)$$

Іноді умову жорсткості вала сталого поперечного перерізу записують у вигляді

$$\varphi_{max} = \frac{T_{max} l}{G I_p} \le \varphi_{adm}.$$

На основі умови жорсткості вала (3.28) виконують два типи (три види) розрахунків валів на жорсткість, аналогічно тим, які виконувалися в розрахунках валів на міцність. До першого типу відносять проектувальні розрахунки. Розрахунок першого виду дозволяє визначити діаметр вала при відомих зовнішніх крутних моментах та допустимому куті закручування. Знаючи зовнішні крутні моменти, будуємо епюру внутрішніх крутних моментів, за якою визначаємо його найбільше значення. Після чого з умови жорсткості вала обчислюємо полярний момент інерції поперечного перерізу вала

$$I_p = \frac{T_{max}}{G\theta_{adm}}.$$

Для суцільного вала $I_p = \frac{\pi D^4}{32}$. Отже, $\frac{\pi D^4}{32} = \frac{T_{max}}{G\theta_{adm}}$, звідки

$$D \ge \sqrt[4]{\frac{32 T_{max}}{G \pi \theta_{adm}}}. \qquad (3.29)$$

Для порожнистого вала кільцевого поперечного перерізу $I_p = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right)$ і з умови жорсткості отримаємо

$$D \ge \sqrt[4]{\frac{32 T_{max}}{G \pi \left(1-\alpha^4\right) \theta_{adm}}}. \qquad (3.30)$$

Таким чином, для вала отримуємо два значення діаметра: перше – із розрахунку на міцність за умовою міцності вала за дотичними напруженнями, друге – із розрахунку на жорсткість за умовою жорсткості вала. Остаточно для вала приймається більше значення діаметра, яке задовольнятиме і умові міцності, і умові жорсткості вала.

За другим видом проектувального розрахунку валів на жорсткість визначаємо максимальне значення крутного моменту, який може виникати в поперечних

перерізах вала, за відомих розмірів поперечного перерізу вала та допустимого значення відносного погонного кута закручування θ_{adm}. З правої частини умови жорсткості вала (3.28) матимемо максимальне значення крутного моменту

$$T_{max} \le \theta_{adm}\, GI_\rho\,.$$

Отримавши для вала за умовою міцності і за умовою жорсткості два значення крутного моменту, остаточно приймаємо менше значення, яке задовольнятиме і умові міцності, і умові жорсткості вала.

Другий тип та третій вид розрахунків вала на жорсткість є перевірочним (контрольним). Тут нам все відоме – максимальне значення крутного моменту, який виникає у поперечному перерізі вала, розміри поперечного перерізу, допустиме значення відносного погонного кута закручування. Підставляємо усі відомі параметри в умову жорсткості (3.28). У разі виконання умови жорсткість вала буде забезпечена, невиконання умови потребує внесення відповідних коректив.

Зауважимо, що при розрахунках валів на жорсткість усі кутові параметри необхідно підставляти у відповідні формули в радіанах.

3.5. Залежність між крутним моментом, потужністю, яку передає вал, та його кутовою швидкістю

Величину крутного моменту, який виникає у поперечних перерізах вала, асто доводиться розраховувати за відомої потужності, що передається валом, та кутової швидкості його обертання. З теоретичної механіки відомо, що роботу, яку виконує пара сил з моментом T при повороті на кут φ, визначають

$$W = T \cdot \varphi. \tag{3.31}$$

Продиференціюємо (3.31) за часом

$$\frac{dW}{dt} = T \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \tag{3.32}$$

Враховуючи, що похідна від роботи за часом є потужність $dW/dt = N$, а похідна за часом від кута повороту є кутова швидкість $d\varphi/dt = \omega$, з формули (3.32) матимемо

$$N = T \cdot \omega, \tag{3.33}$$

звідки

$$T = N / \omega. \tag{3.34}$$

Якщо потужність вимірюється у ватах (Вт = Н·м / с), а кутова швидкість у радіанах за секунду (1/с), то крутний момент буде мати розмірність (Н·м). Якщо потужність задана у кіловатах, то формула (3.34) набирає вигляду

$$T = 1000 \frac{N}{\omega} \ \left(\text{Н} \cdot \text{м}\right). \tag{3.35}$$

В інженерній практиці досить часто потужність N задається в кінських силах, а кутова швидкість ω в обертах за хвилину – n. Враховуючи, що $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$, а 1 к.с. = 75 кг·м/с, матимемо

$$T = \frac{75 \cdot 30 N}{\pi n} = 716{,}6 \frac{N}{n} \left(\text{кг} \cdot \text{м}\right). \tag{3.36}$$

Якщо ж потужність виражається в кіловатах, а кутова швидкість в обертах за хвилину, то, враховуючи, що 1 к.с. = 0,736 кВт, одержимо

$$T = \frac{716{,}6}{0{,}736} \frac{N}{n} = 973{,}6 \frac{N}{n} \left(\text{кг} \cdot \text{м}\right) = 9551 \frac{N}{n} \left(\text{Н} \cdot \text{м}\right). \tag{3.37}$$

Приклад 1. Автомобіль має потужність двигуна 69 к.с. і рухається вгору. Його карданний вал працює у двох режимах: 108 та 60 об/хв. Визначити зовнішній діаметр вала, якщо відношення внутрішнього діаметра до зовнішнього задане та дорівнює $\alpha = 0{,}9$, а допустиме дотичне напруження $\tau_{adm} = 100$ МПа = = 1000 кг/см^2. Як зміняться найбільші дотичні напруження в поперечному перерізі вала при переході від більшої швидкості обертання до меншої, тобто в разі зміни режимів роботи вала?

Розв'язування. Визначимо крутні моменти за більшої та меншої швидкостей обертання відповідно:

$$T_1 = 716{,}6 \frac{N}{n_1} = 716{,}6 \frac{69}{108} \approx 457{,}8 \text{ кг·м};$$

$$T_2 = 716{,}6 \frac{N}{n_2} = 716{,}6 \cdot \frac{69}{60} \approx 824{,}1 \text{ кг·м}.$$

Величину зовнішнього діаметра підберемо за менших обертів, оскільки крутний момент у цьому випадку більший. Відповідно формулі (3.27) знаходимо, що

$$D = \sqrt[3]{\frac{16T_2}{\pi\left(1-\alpha^4\right)\tau_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{16\cdot 824{,}1\cdot 100}{3{,}14\left(1-0{,}66\right)\cdot 1000}} = 10{,}7 \text{ см}.$$

Приймаємо $D = 11$ см.

Дотичні напруження за більшої швидкості обертання $\tau_1 = T_1 / W_p$, а за меншої $\tau_2 = T_2 / W_p$. Знаходимо відношення

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{824{,}1}{457{,}8} = 1{,}8.$$

Отже, при переході від більшої швидкості обертання до меншої дотичні напруження збільшуються в 1,8 раза.

3.6. Статично невизначені вали та їх розрахунки

Вали, для яких реакції накладених в'язей та внутрішні крутні моменти в їхніх поперечних перерізах можна обчислити за допомогою тільки рівнянь статики, називають *статично визначеними валами*. Якщо такі розрахунки неможливі, вал називають *статично невизначеним*. Порядок розрахунку статично невизначеного вала при крученні покажемо на конкретних прикладах.

Приклад 2. Розглянемо ступінчастий вал з діаметрами першої ділянки $D_1 = 6$ см і другої ділянки $D_2 = 5$ см. Загальна довжина вала $l_1 + l_2 = 3{,}3$ м (рис. 3.6). Визначити розміри l_1 та l_2 з умови, щоб крутний момент M, прикладений у місці зміни діаметра вала, викликав у кожній частині вала однакові найбільші дотичні напруження.

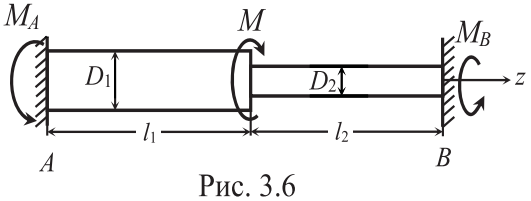


Рис. 3.6

Розв'язування. Щоб визначити напруження у поперечних перерізах першої і другої ділянок вала, необхідно в першу чергу обчислити внутрішні крутні моменти T_1 і T_2 у поперечних перерізах цих ділянок. Розглядаючи окремо рівновагу правої та лівої ділянок вала, неважко показати, що $T_1 = M_A$; $T_2 = M_B$. Таким чином, невідомих зусиль два, а лінійно незалежних рівнянь статики можна скласти тільки одне

$$\sum mom_z(\bar{F}_i) = M_A + M_B - M = 0. \tag{3.38}$$

Отже, вал, а відповідно і задача, один раз статично невизначені. Для розв'язування задачі, крім рівняння рівноваги, необхідно скласти ще одне додаткове рівняння переміщень, розглядаючи деформований стан вала. Для цього в початковій системі відкидаємо "зайву" в'язь (праве жорстке затиснення), замінюючи її дію крутним моментом M_B, і одержуємо так звану основну систему (рис. 3.7).

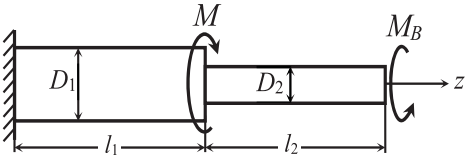


Рис. 3.7

На переміщення основної системи накладаємо такі самі обмеження, які накладалися на початкову систему відкинутими в'язями. У нашому випадку відкинуте праве жорстке затиснення не дозволяло перерізу B повертатися навколо поздовжньої осі вала, тобто кут повороту φ_B поперечного перерізу B має дорівнювати нулю. Отже, для основної системи (рис. 3.7) повинна виконуватися вимога

$$\varphi_B = 0. \tag{3.39}$$

Рівняння (3.39) і є додатковим рівнянням кутових переміщень. Визначаємо тепер кут повороту φ_B, використовуючи принцип незалежності дії сил, від моментів M та M_B, які розглядаємо як незалежні зовнішні моменти, і прирівнюємо кут φ_B нулю.

$$\varphi_B = \frac{M_B l_2}{GI_{p_2}} + \frac{M_B l_1}{GI_{p_1}} - \frac{M l_1}{GI_{p_1}} = 0, \tag{3.40}$$

де $I_{p_1} = \frac{\pi D_1^4}{32} = 1296 \text{ см}^4$; $I_{p_2} = \frac{\pi D_2^4}{32} = 625 \text{ см}^4$ – полярні моменти інерції поперечних перерізів. Рівняння (3.40) є рівнянням переміщень, яке записане в невідомих зусиллях. Розв'язуючи тепер систему двох рівнянь (3.38), (3.40) відносно двох невідомих, отримаємо:

$$M_B = \frac{M I_{p_2} l_1}{I_{p_1} l_2 + I_{p_2} l_1} = \frac{625 \cdot M l_1}{625 l_1 + 1296 l_2}; \tag{3.41}$$

$$M_A = \frac{M I_{p_1} l_2}{I_{p_1} l_2 + I_{p_2} l_1} = \frac{1296 M l_2}{625 l_1 + 1296 l_2}. \tag{3.42}$$

Знаходимо найбільші дотичні напруження в точках периферії поперечних перерізів першої і другої ділянок:

$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_{p_1}} = \frac{M_A}{\frac{\pi D_1^3}{16}}; \qquad \tau_2 = \frac{T_2}{W_{p_2}} = \frac{M_B}{\frac{\pi D_2^3}{16}}.$$

Прирівнюючи ці напруження згідно з умовою задачі, з урахуванням виразів (3.41) та (3.42) одержимо, що $l_2 = \frac{5}{6} l_1$, тобто довжини ділянок треба взяти відповідно l_1 = 1,8 м; l_2 = 1,5 м. Саме за такого співвідношення довжин ділянок вала найбільші дотичні напруження в точках периферії поперечних перерізів обох ділянок будуть однакові.

Приклад 3. Мідна трубка, зовнішній діаметр якої $D_м$ = 7,5 см, вставлена в стальну трубку такого ж внутрішнього діаметра d_c = 7,5 см (рис. 3.8). Товщина стінок обох трубок 3 мм. Трубки мають однакову довжину. Їх кінці жорстко з'єднані між собою пластинкою, до якої прикладено крутний момент $M_к$ = 100 кг·м. Визначити найбільші дотичні напруження в поперечних перерізах кожної з трубок, якщо модулі зсуву відповідно дорівнюють $G_м = 4 \cdot 10^5$ кг/см^2, $G_c = 8 \cdot 10^5$ кг/см^2.

Розв'язування. Якби нам були відомі величини крутних моментів, що сприймають на себе стальна та мідна трубки, тобто розподіл крутного моменту $M_к$ між

стальною та мідною трубками, то найбільші дотичні напруження в їх поперечних перерізах можна було б визначити відповідно за формулами:

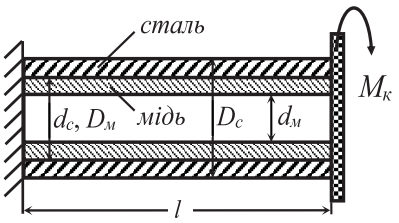


Рис. 3.8

$$\tau_c = \frac{T_c}{W_{pc}}; \quad \tau_м = \frac{T_м}{W_{pм}}, \tag{3.43}$$

де T_c, $T_м$ – величини крутних моментів, що сприймають на себе відповідно стальна та мідні трубки; W_{pc}, $W_{pм}$ – полярні моменти опору поперечних перерізів стальної та мідної трубок.

Із фізичних міркувань можна записати, що сума моментів T_c і $T_м$ дорівнює зовнішньому моменту, прикладеному до пластинки,

$$T_c + T_м = M_к . \tag{3.44}$$

Іншими словами, пластинка знаходиться у стані рівноваги під дією зовнішнього крутного моменту $M_к$ та двох внутрішніх T_c і $T_м$ з боку стальної та мідної трубок. Лінійно незалежних рівнянь статики можна скласти одне (3.44), а невідомих два. Отже, задача один раз статично невизначена. Рівняння сумісності деформацій буде відображати той факт, що кути повороту поперечних перерізів обох трубок у місці кріплення до пластини будуть однакові, а саме:

$$\varphi_c = \varphi_м . \tag{3.45}$$

Враховуючи, що на основі закону Гука $\varphi_c = \frac{T_c l}{G_c I_{pc}}$; $\varphi_м = \frac{T_м l}{G_м I_{pм}}$, одержимо рівняння сумісності деформацій в невідомих зусиллях

$$\frac{T_c l}{G_c I_{pc}} = \frac{T_м l}{G_м I_{pм}}, \tag{3.46}$$

де $I_{pc} = \frac{\pi D_c^4}{32}\left(1-\alpha_c^4\right)$; $I_{pм} = \frac{\pi D_м^4}{32}\left(1-\alpha_м^4\right)$; $\alpha_м = \frac{d_м}{D_м}$; $\alpha_c = \frac{d_c}{D_c}$ – полярні моменти інерції поперечних перерізів стальної і мідної трубок; d_c, D_c, $d_м$, $D_м$ – внутрішні та зовнішні діаметри трубок.

Розв'язуючи спільно рівняння (3.44) та (3.46), знайдемо $T_c = 71{,}8$ кг·м; $T_м = 28{,}2$ кг·м, а із формул (3.43) $\tau_c = 251{,}1$ кг/см^2; $\tau_м = 115{,}8$ кг/см^2.

3.7. Гвинтові циліндричні пружини з малим кроком витків та їх розрахунки

У техніці гвинтові циліндричні пружини по праву знайшли широке застосування. Їх виготовляють зі спеціального дроту із пружинної сталі і використовують в основному для пом'якшення ударних навантажень на елементи та деталі машин і механізмів. Пружини слугують також невід'ємними елементами різноманітних зворотно-поступальних пристроїв, де за рахунок накопичення потенціальної енергії деформації приводяться до руху окремі деталі та елементи. Наприклад, годинникові пружини, клапанні пружини двигунів внутрішнього згоряння, пружини запобіжних клапанів, пружини вогнепальної зброї тощо. Проектуючи пружини, необхідно їх розраховувати на міцність та жорсткість, для чого потрібно вміти визначати напруження в поперечних перерізах дроту витків пружини та деформацію пружини – її видовження або просідання. Під деформацією пружини умовимося вважати зміну відстані між її крайніми витками.

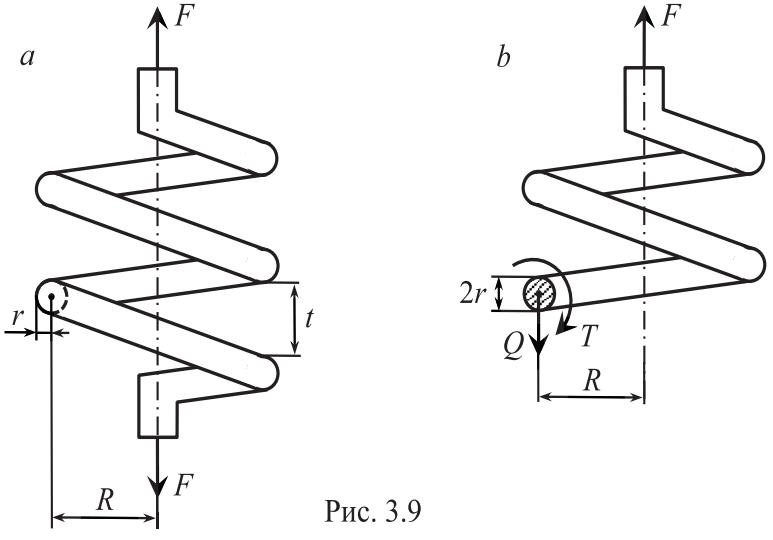


Рис. 3.9

Розглянемо циліндричні пружини з малим кроком витків (рис. 3.9), тобто пружини, радіус витка яких постійний за довжиною, а кут нахилу площини витка до площини перпендикулярної осі пружини малий. Інакше кажучи, можна вва-

жати, що площина витка практично перпендикулярна до осі пружини. Такі пружини найчастіше використовуються в тракторах, автомобілях та сільськогосподарських машинах.

Позначимо R – середній радіус витка пружини; n – число витків пружини; r – радіус дроту пружини; G – модуль пружності матеріалу дроту при зсуві; t – відстань між витками. Для визначення внутрішніх силових факторів у поперечних перерізах дроту (витка) розтягнутої осьовими силами F пружини уявно розріжемо пружину площиною, що містить поздовжню вісь пружини. Оскільки крок витка малий, то такий переріз можна вважати поперечним. Відкидаючи (уявно) нижню частину пружини, замінюємо її дію перерізуючою силою Q і крутним моментом T на залишену верхню частину. Із умов рівноваги верхньої частини пружини знаходимо:

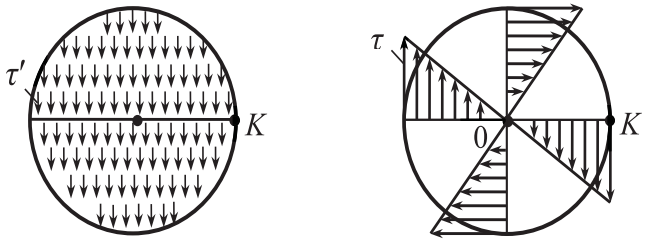
$$Q = F; \qquad T = F \cdot R\,. \tag{3.47}$$

Отже, дріт пружини з малим кроком витків працює на зсув і кручення. Дотичні напруження в точках поперечних перерізів пружини від зсуву вважаємо розподіленими рівномірно (рис. 3.10,*a*) і визначимо відповідно за формулою

$$\tau' = \frac{F}{\pi r^2}\,. \tag{3.48}$$

Дотичні напруження при крученні дроту від дії крутного моменту T (рис. 3.10,*b*), як відомо, найбільшими будуть у точках периферії перерізу. Ці дотичні напруження визначимо у такий спосіб:

$$\tau'' = \frac{T}{W_p} = \frac{F \cdot R}{\frac{\pi r^3}{2}} = \frac{2F \cdot R}{\pi r^3}\,. \tag{3.49}$$



a *b*

Рис. 3.10

Небезпечною точкою перерізу є точка K контуру, в якій напруження τ' і τ'' за напрямком співпадають. Небезпечні точки знаходяться з внутрішньої сторони витків. Використовуючи принцип суперпозиції, визначимо дотичні напруження в небезпечних точках

$$\tau_{max} = \tau' + \tau'' = \frac{F}{\pi r^2} + \frac{2F \cdot R}{\pi r^3} = \frac{2F \cdot R}{\pi r^3}\left(\frac{r}{2R} + 1\right). \tag{3.50}$$

Тріщини у витках частіше з'являються на внутрішній поверхні витків пружини. Для більшості пружин, які застосовуються в техніці, відношення $r/2R << 1$, тобто перша складова в дужках формули (3.50) мала порівняно з одиницею. Нехтуючи цією складовою, формула для визначення найбільших дотичних напружень у поперечних перерізах дроту пружини набирає вигляду

$$\tau_{max} \approx \frac{2F \cdot R}{\pi r^3},$$

а відповідно наближену умову міцності пружини запишемо як

$$\tau_{max} \approx \frac{2F \cdot R}{\pi r^3} \le \tau_{adm}. \tag{3.51}$$

Визначаючи деформації пружини (видовження або просідання), вважатимемо, що вони відбуваються за рахунок деформації кручення стержня пружини. Розглянемо деформацію кручення елементарної ділянки витка пружини довжиною ds (рис. 3.11).

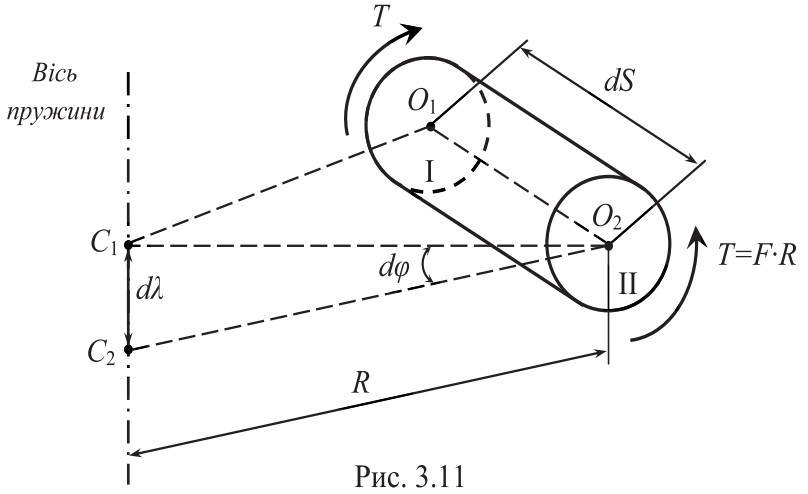


Рис. 3.11

Враховуючи малість елемента *ds*, можна вважати, що до деформації радіуси O_1C_1 і O_2C_1, які з'єднують вісь пружини з центрами поперечних перерізів, розташовані в одній площині й утворюють трикутник $O_1C_1O_2$. При деформації пружини другий переріз повернеться відносно умовно нерухомого першого перерізу на кут $d\varphi$. Оскільки довжина *ds* мала, то можна вважати, що поздовжня вісь цього стержня є прямою

$$d\varphi = \frac{T\,ds}{G\,I_p}, \tag{3.52}$$

де I_p – полярний момент інерції поперечного перерізу дроту. Радіус O_2C_1 повернеться разом з перерізом на той же кут $d\varphi$, і точка C_1 переміститься в положення C_2, що приведе до опускання кінця пружини на величину $C_1C_2 = d\lambda$

$$d\lambda = R \cdot d\varphi = R \cdot \frac{T\,ds}{G\,I_p}. \tag{3.53}$$

Якщо врахувати, що всі елементи ds (по загальній довжині витків) деформуються так само, то повне видовження (просідання) буде

$$\lambda = \int_0^l R \cdot \frac{T\,ds}{G\,I_p} = \int_0^{2\pi Rn} R \cdot \frac{F\,R \cdot ds}{G \cdot \frac{\pi r^4}{2}} = \frac{4F\,R^3 n}{G r^4}. \tag{3.54}$$

Формулу (3.54) можна переписати у вигляді

$$\lambda = F / c, \tag{3.55}$$

де величину $c = \dfrac{G r^4}{4R^3 n}$ називають жорсткістю пружини. *Жорсткість пружини* – це сила, яку необхідно прикласти до пружини, щоб змінити відстань між крайніми витками на одиницю довжини.

Величину, обернену жорсткості $\dfrac{1}{c}$, називають податливістю пружини. *Податливість пружини* – це величина просідання (укорочення або видовження) пружини, викликаного одиничною силою.

Приклад 4. Циліндрична гвинтова пружина задньої стійки автомобіля виконує роль ресори автомобіля (рис. 3.12). Опорна реакція на колесі R_B = 1кН. Допустиме дотичне напруження для кременистої сталі пружини τ_{adm} = 600 МПа. Середній радіус витка пружини R = 6 см, радіус дроту пружини r = 0,75 см, число витків n = 8. Перевірити міцність пружини та визначити максимальне переміщення точки B.

Розв'язування. Силу F, яка стискує пружину, знайдемо з умови рівноваги важеля BA

$$\sum mom_A(\bar{F}_i) = R_B \cdot b - F \cdot a = 0,$$

звідки

$$F = \frac{R_B \cdot b}{a} = \frac{1 \cdot 0,42}{0,28} = 1,5\,\text{кН} = 150\ \text{кг}.$$

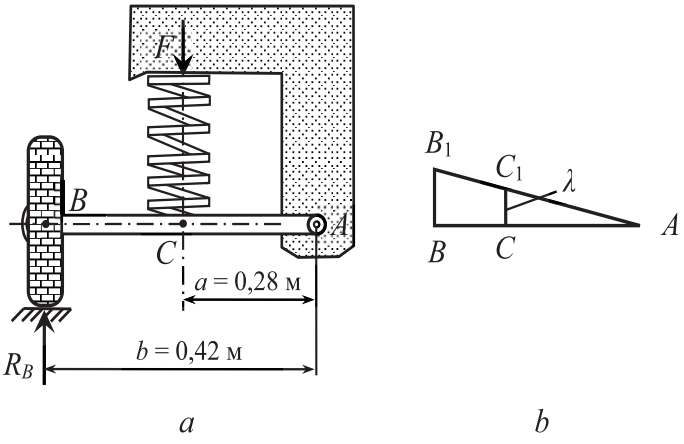


Рис. 3.12

Максимальні дотичні напруження у витках пружини знайдемо за наближеною формулою

$$\tau_{max} \approx \frac{2F \cdot R}{\pi r^3} = \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 100 \cdot 6}{3,14 \cdot 0,75^3} \approx 1450\ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} = 145\,\text{МПа}.$$

Отже, міцність пружини забезпечена, оскільки $\tau_{max} < \tau_{adm}$. Просадку пружини визначимо за формулою

$$\lambda = \frac{4F R^3 n}{G r^4} = \frac{4 \cdot 150 \cdot 6^3 \cdot 8}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,75^4} \approx 4,1\ \text{см}.$$

Переміщення точки B (рис. 3.12,b) знайдемо з умови подібності трикутників $\Delta BB_1A \sim \Delta CC_1A$, де $CC_1 = \lambda$ – осадка пружини,

$$BB_1 = CC_1 \cdot \frac{BA}{CA} = 4{,}1 \cdot \frac{0{,}42}{0{,}28} = 6{,}15 \text{ см}.$$

Приклад 5. Запобіжний клапан діаметром $D_к = 7{,}5$ см, затиснутий пружиною з початковим зусиллям F_0 (рис. 3.13). Клапан повинен відкриватися при тиску на нього $p = 8$ атм, після того як він переміститься на $h = 2$ см. У повністю розвантаженої пружини відстань між витками у світлі $t = 0{,}52$ см, а за відкритого клапану пружина повинна мати ще запас деформування 1,6 см. Середній радіус витків пружини $R = 3$ см, радіус стального дроту пружини $r = 0{,}6$ см. Визначити необхідне число витків n, величину початкового зусилля F_0 і найбільші дотичні напруження в поперечних перерізах витків пружини.

Розв'язування. Максимальна стискуюча сила, за якої клапан повинен відкритися, дорівнюватиме

$$F_{max} = p \cdot \frac{\pi D_к^2}{4} = \frac{8 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}5^2}{4} = 353{,}3 \text{ кг}.$$

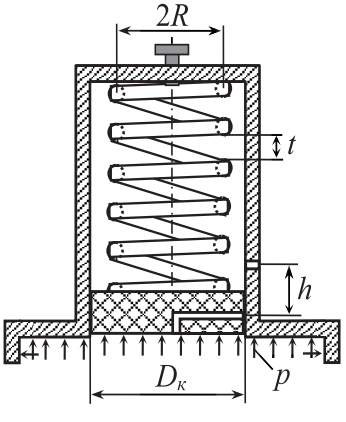


Рис. 3.13

Оскільки відстань між витками у світлі дорівнює t, а число витків n, то можливе просідання пружини буде $t \cdot n$. Нехай λ_0 – просідання пружини під дією початкової сили F_0; λ – просідання пружини під дією максимальної сили F_{max}. Тоді відповідно до умови задачі

$$\lambda = \lambda_0 + 2 \text{ см}. \qquad (3.56)$$

За відкритого клапана пружина повинна мати ще запас деформування 1,6 см, тобто

$$t \cdot n - \lambda = 1{,}6 \text{ см}. \qquad (3.57)$$

Для просідань пружини λ_0 і λ маємо:

$$\lambda_0 = \frac{4F_0R^3n}{Gr^4}; \qquad (3.58)$$

$$\lambda = \frac{4F_{max}R^3 n}{Gr^4}. \tag{3.59}$$

Підставивши значення λ_0 і λ в (3.56) та (3.57), одержимо:

$$\frac{4F_{max}R^3 n}{Gr^4} = \frac{4F_0 R^3 n}{Gr^4} + 2; \tag{3.60}$$

$$t \cdot n - \frac{4F_{max}R^3 n}{Gr^4} = 1,6. \tag{3.61}$$

Із системи рівнянь (3.60) та (3.61) знаходимо, що F_0 = 194 кг, n = 12 витків. Найбільші напруження визначимо за формулою

$$\tau_{max} \approx \frac{2F_{max} \cdot R}{\pi r^3} = \frac{2 \cdot 353,3 \cdot 3}{3,14 \cdot 0,6^3} \approx 3430 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} = 343\,\text{МПа}.$$

Приклад 6. Жорсткий брус, закріплений шарнірно нерухомою опорою B, підтримується двома пружинами з однаковими середніми радіусами витків R = 6 см та однаковими радіусами дроту r = 0,6 см (рис. 3.14). Перша пружина має n_1 = 10 витків, друга пружина має n_2 = 12 витків. До бруса прикладена пара сил з моментом M = 2,2 кН·м = 220 кг·м. Визначити зусилля в пружинах і дотичні напруження у поперечних перерізах витків пружин.

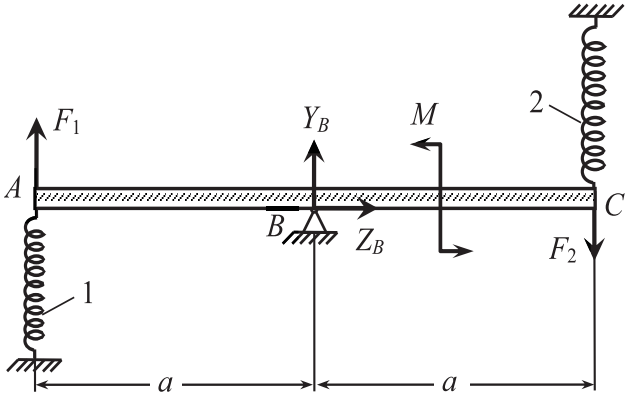


Рис. 3.14

Розв'язування. На брус ABC діють пара сил M, реакції опори Z_B, Y_B і реакції пружин F_1, F_2. Реакції пружин рівні за величиною відповідним стискуючим зу-

силлям у пружинах. Невідомих сил чотири, а рівнянь рівноваги для плоскої довільної системи сил можемо скласти тільки три. Задача один раз статично невизначена. Оскільки реакції в опорі B нас не цікавлять, то складемо тільки одне рівняння рівноваги

$$\sum mom_B\left(\bar{F}_i\right) = -F_1 \cdot a - F_2 \cdot a + M = 0. \tag{3.62}$$

Рівняння сумісності деформацій складемо, виходячи із таких міркувань. Просідання пружин λ_1 і λ_2 визначаються величиною переміщень точок A і C горизонтального бруса при його повороті навколо опори B. У нашому випадку ці переміщення однакові, тобто $\lambda_1 = \lambda_2$, або, враховуючи формулу (3.54),

$$\frac{4F_1R^3n_1}{Gr^4} = \frac{4F_2R^3n_2}{Gr^4}. \tag{3.63}$$

Розв'язуючи сумісно систему рівнянь (3.62) та (3.63), визначаємо:

$$F_1 = 120 \text{ кг}; \qquad F_2 = 100 \text{ кг}.$$

Дотичні напруження у небезпечних точках поперечних перерізів витків першої та другої пружин відповідно дорівнюватимуть:

$$\tau_1 = \frac{2F_1R}{\pi r^3} \approx 2120 \text{ кг/см}^2; \quad \tau_2 = \frac{2F_2R}{\pi r^3} \approx 1790 \text{ кг/см}^2.$$

Приклад 7. Три циліндричні гвинтові пружини мають відповідно жорсткості c_1, c_2, c_3. Визначити жорсткість ресори c, складеної з означених пружин, з'єднаних послідовно (рис. 3.15) і паралельно (рис. 3.16).

Розв'язування. За послідовного з'єднання пружин (рис. 3.15) загальне видовження пружини λ буде дорівнювати сумі видовжень складових пружин, викликаних силою F,

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \tag{3.64}$$

або відповідно до формули (3.55) $\dfrac{F}{c} = \dfrac{F}{c_1} + \dfrac{F}{c_2} + \dfrac{F}{c_3}$,

звідки: $$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}; \tag{3.65}$$

$$c = \frac{c_1 c_2 c_3}{c_2 c_3 + c_1 c_3 + c_1 c_2}.$$

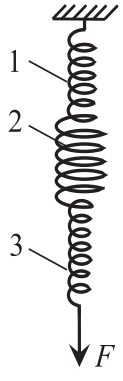


Рис. 3.15

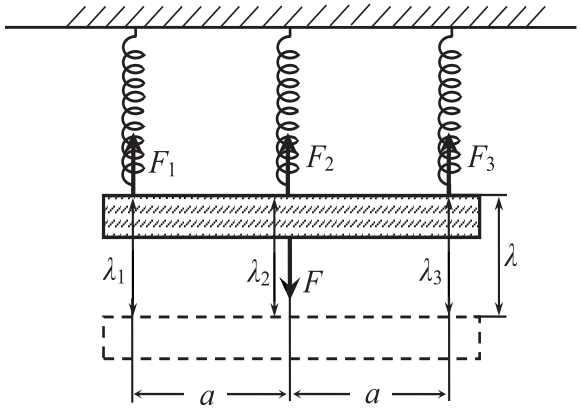


Рис. 3.16

За паралельного з'єднання пружин (рис. 3.16) видовження загальної λ і окремо взятих пружин будуть однакові

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 . \tag{3.66}$$

Рівняння рівноваги матиме вигляд

$$F = F_1 + F_2 + F_3 . \tag{3.67}$$

Враховуючи, що $F = c\lambda$; $F_1 = c_1\lambda_1 = c_1\lambda$; $F_2 = c_2\lambda_2 = c_2\lambda$; $F_3 = c_3\lambda_3 = c_3\lambda$, із формули (3.67) знаходимо $c\lambda = c_1\lambda + c_2\lambda + c_3\lambda$, тобто

$$c = c_1 + c_2 + c_3. \tag{3.68}$$

Таким чином, за наведеного паралельного з'єднання пружин, як бачимо з формули (3.68), жорсткість приведеної ресори збільшиться і буде визначатися сумою жорсткостей складових пружин. За послідовного з'єднання, як видно з формули (3.65), податливість системи збільшується і дорівнює сумі податливостей складових пружин, а це означає, що жорсткість послідовно з'єднаних пружин зменшується.

ГЛАВА 4. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Опір стержня різним видам деформації, як правило, залежить не тільки від його матеріалу та розмірів, а й від форми поперечних перерізів та їх орієнтації відносно силової площини дії зовнішніх сил.

Вивчаючи осьовий розтяг та стиск стержня, ми переконалися, що опір стержня пропорційний площі поперечного перерізу, тобто чим більша площа поперечного перерізу стержня, тим менші нормальні напруження в точках його поперечних перерізів і деформації при заданій силі.

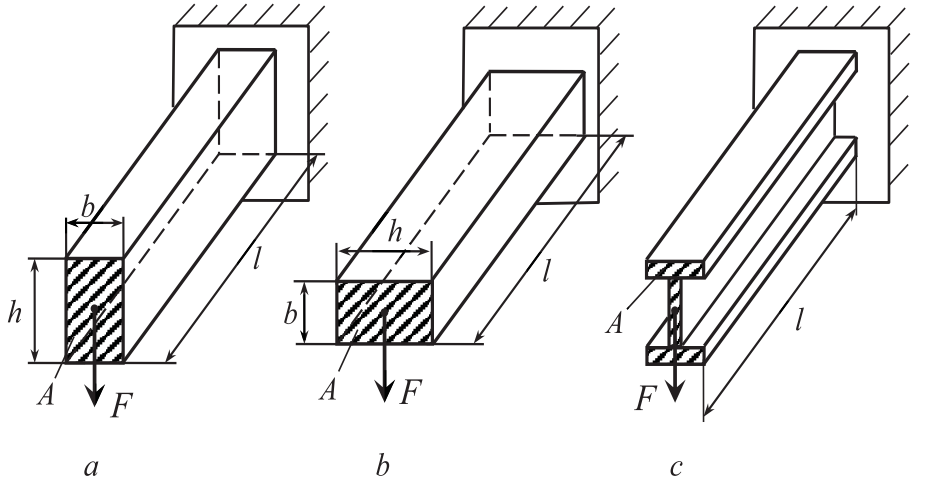


Рис. 4.1

Із матеріалу про кручення валів відомо, що опір деформаціям залежить не тільки від величини площі поперечних перерізів вала, а й від того, як ця площа розташована відносно осі вала. Два вали, суцільний круглого і порожнистий кільцевого поперечних перерізів, виготовлені з однакового матеріалу та з однаковими площами поперечних перерізів чинять різний опір дії крутних моментів та деформаціям. У точках кільцевого поперечного перерізу порожнистого вала виникатимуть менші дотичні напруження, цей вал матиме менший кут закручування і буде більш міцним та жорстким. Ці результати пояснюються величиною геометричних характеристик поперечного перерізу більш високого порядку, до

яких належать полярний момент інерції перерізу I_p та полярний момент опору перерізу W_p. Під час вивчення згину балок будуть введені геометричні характеристики, які відображатимуть здатність поперечних перерізів балки чинити опір дії зовнішніх сил при згині. На рис. 4.1 наведено консольні балки, які, маючи однакові площі поперечних перерізів A та довжини l, по-різному чинять опір дії зовнішньої сили F. У цьому можна дуже просто переконатися, якщо взяти звичайну лінійку та розташувати її так, як наведено на рис. 4.1,*a*,*b*. При навантаженні силою F ми побачимо неозброєним оком прогини перерізів у випадку *b*, чого не побачимо у випадку *a*. При цьому площа поперечного перерізу така ж сама. Це спостереження підтверджує той факт, що при згині деформації залежать також від форми поперечного перерізу, тобто розташування перерізу відносно якоїсь системи відліку. Розглянемо геометричні характеристики плоских перерізів, які дадуть уявлення про ступінь та характер опору стержня при різних видах навантаження.

4.1. Статичні моменти площі та моменти інерції плоских фігур

Найбільш простою і відомою геометричною характеристикою плоскої фігури є її площа. Розглянемо довільну плоску фігуру в системі координат Оxy, наведену на рис. 4.2.

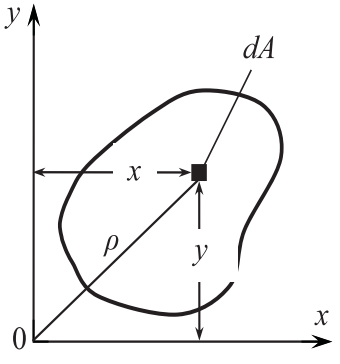


Рис. 4.2

Візьмемо елементарну площадку цієї фігури площею dA. Тоді площу складної фігури можна визначити за допомогою інтеграла

$$A = \int\limits_{(A)} dA. \qquad (4.1)$$

За осьового розтягу та стиску опір стержня, а саме напруження та деформації, як було показано, залежать від величини площі і не залежать

від конфігурації перерізу. Введемо поняття статичного моменту елементарної площі dA відносно осі Оx. За аналогією з поняттям моменту сили відносно осі добуток елемента площі dA на її відстань y від осі Оx $dS_x = y\,dA$ називають статичним моментом елемента площі dA відносно осі Оx. Взявши суму всіх таких добутків по всій площі фігури, тобто заповнивши при цьому усю фігуру елементарними площадками, дістанемо статичний момент площі плоскої фігури відносно осі Оx

$$S_x = \int\limits_{(A)} y\,dA. \tag{4.2}$$

Аналогічно отримаємо статичний момент площі плоскої фігури (перерізу) відносно осі Оy

$$S_y = \int\limits_{(A)} x\,dA. \tag{4.3}$$

Одиниця виміру статичного моменту площі – одиниця довжини у третій степені (м^3, см^3). Статичні моменти площі плоского перерізу відносно заданих осей координат можуть набирати додатних, від'ємних та нульових значень, залежно від розташування перерізу відносно вибраної системи координат. Із теоретичної механіки відомо, що координати центра ваги складної плоскої однорідної фігури визначають за формулами:

$$x_C = \frac{\sum A_i \cdot x_{Ci}}{\sum A_i} = \frac{S_y}{A}; \tag{4.4}$$

$$y_C = \frac{\sum A_i \cdot y_{Ci}}{\sum A_i} = \frac{S_x}{A}, \tag{4.5}$$

звідки отримаємо формули для визначення статичних моментів площі фігури за відомої площі та координат її центра ваги:

$$S_y = A \cdot x_C; \tag{4.6}$$

$$S_x = A \cdot y_C. \tag{4.7}$$

Наприклад, для прямокутника, наведеного на рис 4.3,*а* статичні моменти площі відносно осей x та y відповідно дорівнюватимуть $S_x = bh \cdot \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{2}$;

$S_y = bh \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2 h}{2}$, а для круга, наведеного на рис. 4.3,*b*, $S_x = S_y = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{8}$.

Із формул (4.6), (4.7) маємо, що статичні моменти площі плоскої фігури відносно осей, які проходять через центр ваги цієї фігури, тобто коли $x_C = 0$ і $y_C = 0$, дорівнюють нулю. Осі координат, які проходять через центр ваги фігури, називаються центральними осями. Статичні моменти площі плоскої фігури відносно її центральних осей дорівнюють нулю. У зв'язку з цим центральними осями плоскої фігури можемо називати осі, відносно яких статичні моменти площі цієї фігури дорівнюють нулю.

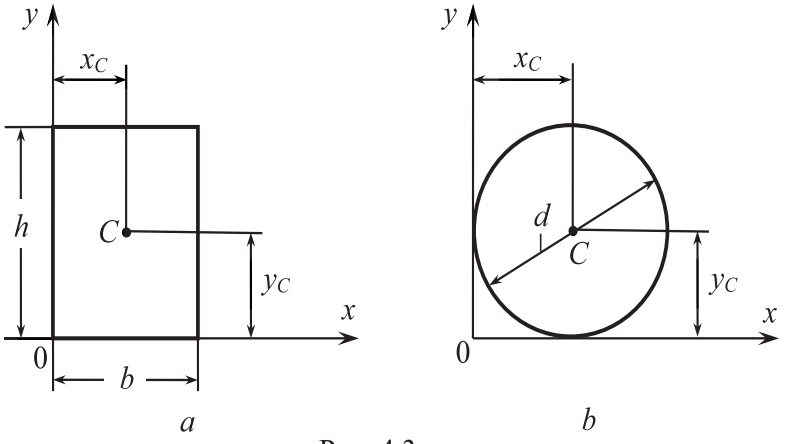


Рис. 4.3

Вивчаючи згин, матимемо справу з геометричними характеристиками, при визначенні яких беремо добуток елемента площі *dA* на квадрат його відстані до відповідної осі (рис. 4.2):

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA; \tag{4.8}$$

$$I_y = \int_{(A)} x^2 dA. \tag{4.9}$$

Геометричні характеристики плоского перерізу, які визначають за виразами (4.8), (4.9), називають осьовими або екваторіальними моментами інерції фігури відносно осей *x* і *y* та позначають I_x, I_y. Одиницею виміру осьових моментів інерції є одиниця довжини у четвертій степені (м^4, см^4).

Складаючи інтеграл, в якому площа dA помножена на добуток її координат $x \cdot y$ в системі осей x і y, отримаємо вираз для визначення геометричної характеристики плоского перерізу, яку називають змішаним або відцентровим моментом інерції фігури відносно осей x, y

$$I_{xy} = \int\limits_{(A)} xy dA. \tag{4.10}$$

Одиницею виміру відцентрового (змішаного) моменту інерції плоскої фігури є одиницею довжини у четвертій степені (м^4, см^4). Відцентровий момент інерції плоскої фігури відносно осей xy може бути додатним, від'ємним та дорівнювати нулю залежно від розташування перерізу відносно осей. Осі координат, відносно яких відцентровий момент інерції фігури дорівнює нулю, називають головними осями інерції фігури. Якщо головні осі інерції фігури мають початок у центрі ваги фігури, то їх називають головними центральними осями інерції фігури.

Ще раз повернемося до полярного моменту інерції фігури, в якому підінтегральний вираз являє собою добуток елемента площі dA на квадрат відстані ρ цього елемента від початку системи координат $I_p = \int\limits_{(A)} \rho^2 dA$.

Взагалі можна ввести поняття осьового моменту інерції *m-го* порядку $I_x^m = \int\limits_{(A)} y^m dA$; $I_y^{(m)} = \int\limits_{(A)} x^m dA$, або відцентрового моменту інерції $(m+n)$-го порядку $I_{xy}^{(m+n)} = \int\limits_{(A)} x^m y^n dA$.

Тоді моментом інерції нульового порядку ($m = 0$, $n = 0$) буде площа $A = \int\limits_{(A)} dA$.

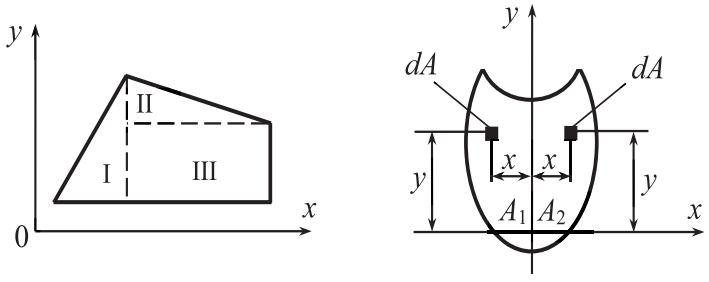
Статичні моменти площі перерізу є моментами площі першого порядку, відцентровий, полярний та осьові моменти інерції є моментами площі другого порядку.

У подальшому для розрахунків елементів конструкцій та деталей машин на міцність, жорсткість та стійкість використовуватимемо моменти площі не вище другого порядку. Осьові та полярні моменти інерції завжди додатні, оскільки під інтегралами – квадрати координат x, y, ρ. Із рис. 4.2 видно, що

$$\rho^2 = y^2 + x^2,$$

а тому полярний момент інерції плоского перерізу дорівнює сумі його осьових моментів інерції

$$I_p = \int\limits_{(A)} \rho^2 dA = \int\limits_{(A)} y^2\, dA + \int\limits_{(A)} x^2\, dA = I_x + I_y\,. \tag{4.11}$$



a *b*

Рис. 4.4

Відомо, що інтеграл по площі дорівнює сумі інтегралів, взятих по окремих частинах, що складають цю площу. А тому, визначаючи моменти інерції складної фігури, доцільно таку фігуру розбити на ряд простих і визначити моменти інерції кожної зі складових. Тоді момент інерції усієї фігури (рис. 4.4) дорівнюватиме

$$I_x = \int\limits_{(A)} y^2 dA = \int\limits_{(A_{\rm I})} y^2 dA + \int\limits_{(A_{\rm II})} y^2 dA + \int\limits_{(A_{\rm III})} y^2 dA = I_x^{\rm I} + I_x^{\rm II} + I_x^{\rm III}. \tag{4.12}$$

Нехай переріз має вісь симетрії, з якою збігається одна з осей координат, наприклад Оy (рис. 4.4,*b*). Тоді площа лівої частини фігури A_1 дорівнює площі правої частини A_2. Кожній елементарній площі dA з координатами (y; x_1) у лівій частині перерізу відповідає симетрично розташована площа dA з координатами (y; x_2) у правій частині перерізу. Оскільки для площ, які розглядаються, $x_2 = -x_1$, то можна записати такі співвідношення:

$$S_y = \int\limits_{(A)} x dA = \int\limits_{(A_1)} x_1 dA + \int\limits_{(A_2)} x_2 dA = \int\limits_{(A_1)} x_1 dA - \int\limits_{(A_2)} x_1 dA = 0; \qquad (4.13)$$

$$I_{xy} = \int\limits_{(A)} xy dA = \int\limits_{(A_1)} x_1 y dA + \int\limits_{(A_2)} x_2 y dA = \int\limits_{(A_1)} x_1 y dA - \int\limits_{(A_2)} x_1 y dA = 0. \qquad (4.14)$$

Отже, статичний момент площі плоскої фігури відносно осі симетрії дорівнює нулю. Відцентровий момент інерції фігури відносно пари взаємно перпендикулярних осей, одна із яких є віссю симетрії фігури, також дорівнює нулю, тобто пара взаємно перпендикулярних осей, одна з яких є віссю симетрії фігури, є завжди головними осями інерції фігури.

4.2. Моменти інерції простих фігур

Визначимо момент інерції прямокутника відносно центральних осей, паралельних його сторонам (рис. 4.5,*а*). Для визначення моменту інерції відносно осі x за елементарну площу dA виберемо прямокутник, паралельний осі x, висотою dy та шириною b. Звідки

$$dA = b\,dy;$$

$$I_x = \int\limits_{(A)} y^2 dA = b \int\limits_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = \frac{by^3}{3}\Bigg|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12}. \qquad (4.15)$$

За аналогією визначимо

$$I_y = \frac{hb^3}{12}. \qquad (4.16)$$

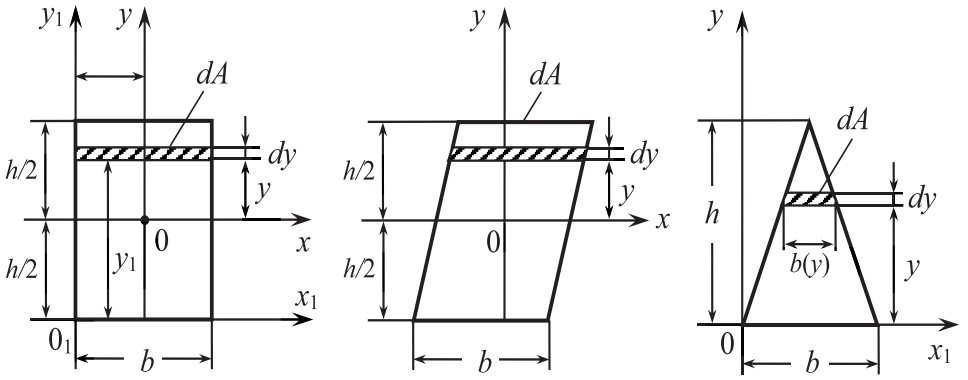
Так само можна визначити момент інерції паралелограма (рис. 4.5,*b*) відносно центральної осі x, паралельній основі

$$I_x = \frac{bh^3}{12}. \qquad (4.17)$$

Момент інерції прямокутника відносно осі x_1 дорівнюватиме

$$I_{x_1} = \int\limits_{(A)} y_1^2 dA = \int\limits_0^h y_1^2 b\,dy_1 = \frac{by_1^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{bh^3}{3}, \qquad (4.18)$$

аналогічно $$I_{y_1} = \frac{hb^3}{3}. \qquad (4.19)$$



a *b* *c*

Рис. 4.5

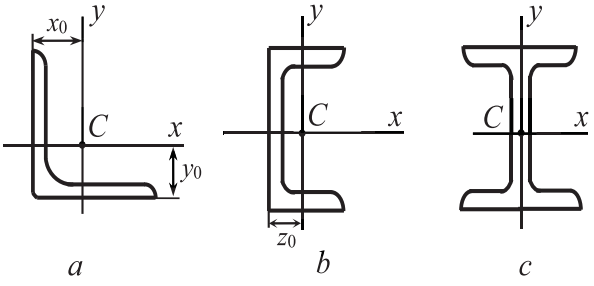
Момент інерції трикутника (рис. 4.5,*c*) відносно осі x_1, яка проходить через його основу, дорівнюватиме

$$I_{x_1} = \int\limits_{(A)} y^2 dA = \int\limits_0^h y^2 \cdot b(y) dy = \int\limits_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y)\, dy = \frac{bh^3}{12}, \qquad (4.20)$$

де ширина смужки $b(y)$ знаходиться із геометричних міркувань $b(y) = \frac{b}{h}(h-y)$.

Момент інерції трикутника відносно центральної осі, яка паралельна основі, дорівнюватиме $I_x = \frac{bh^3}{36}$.

Для стандартних прокатних поперечних перерізів стержнів – кутових, двотаврових, швелерних (рис. 4.6) – усі геометричні розміри та геометричні характеристики відносно різних осей наведено в таблицях сортаментів ГОСТ 8509-86, ГОСТ 8510-86, ГОСТ 8239-89, ГОСТ 8240-80. У них, крім моментів інерції, надано площі фігур, положення центрів ваги, характерні розміри та інші



a *b* *c*

Рис. 4.6

геометричні характеристики. Номер двотавра, швелера означає їх висоти в сантиметрах. Для кутників вказують розміри поличок та товщину стінки у міліметрах.

4.3. Залежність між моментами інерції плоскої фігури відносно паралельних осей

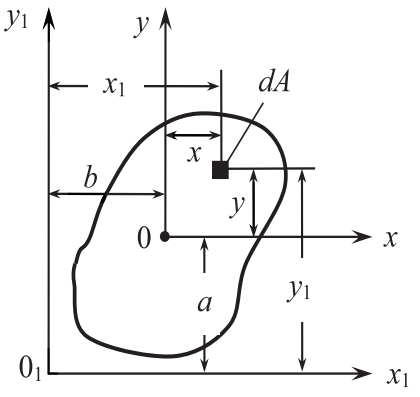


Рис. 4.7

Вважаємо, що моменти інерції довільної плоскої фігури I_x, I_y, I_{xy} (рис. 4.7) відносно системі координат x та y відомі. Визначимо моменти інерції тієї ж самої фігури відносно нових осей x_1, y_1, які паралельні осям x, y і знаходяться на відстанях a та b відповідно (рис. 4.7). За визначенням моменти інерції фігури відносно осей x_1 та y_1 дорівнюватимуть

$$I_{x_1} = \int\limits_{(A)} y_1^2 dA; \quad I_{y_1} = \int\limits_{(A)} x_1^2 dA; \quad I_{x_1 y_1} = \int\limits_{(A)} x_1 y_1 \, dA. \tag{4.21}$$

Координати елементарної площі dA в системах координат Oxy та Ox_1y_1 зв'язані співвідношеннями (рис. 4.7):

$$x_1 = x + b; \qquad y_1 = y + a. \tag{4.22}$$

Після підстановки виразів для x_1, y_1 у формули (4.21), розкриття дужок та інтегрування матимемо:

$$I_{x_1} = \int\limits_{(A)} y_1^2 dA = \int\limits_{(A)} \left(y + a\right)^2 dA = \int\limits_{(A)} y^2 dA + 2a \int\limits_{(A)} y dA + a^2 \int\limits_{(A)} dA = I_x + 2aS_x + a^2 A; \tag{4.23}$$

$$I_{y_1} = \int\limits_{(A)} x_1^2 dA = \int\limits_{(A)} \left(x + b\right)^2 dA = \int\limits_{(A)} x^2 dA + 2b \int\limits_{(A)} x dA + b^2 \int\limits_{(A)} dA = I_y + 2bS_y + b^2 A; \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} I_{x_1 y_1} = \int\limits_{(A)} x_1 y_1 dA = \int\limits_{(A)} \left(x + b\right)\left(y + a\right) dA = \int\limits_{(A)} xy dA + a \int\limits_{(A)} x dA + b \int y dA + ab \int\limits_{(A)} dA = \\ = I_{xy} + aS_y + bS_x + abA. \end{aligned} \tag{4.25}$$

У тому випадку, коли осі x та y будуть центральними осями перерізу, відповідно статичні моменти площі перерізу $S_y = 0$, $S_x = 0$ та залежності (4.23), (4.24), (4.25) наберуть вигляду:

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A; \tag{4.26}$$

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A; \tag{4.27}$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abA. \tag{4.28}$$

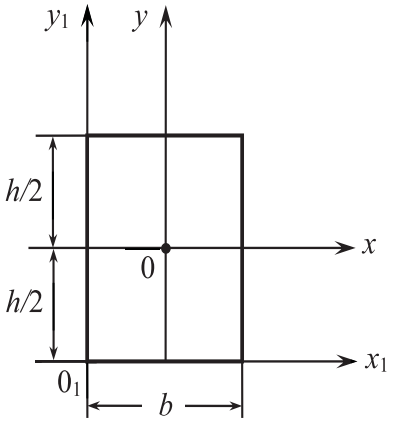


Рис. 4.8

Таким чином, осьовий момент інерції фігури відносно довільної осі, яка паралельна центральній осі фігури, дорівнює сумі моменту інерції фігури відносно власної центральної осі плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між цими осями. Відцентровий момент інерції плоскої фігури відносно довільних взаємно перпендикулярних осей паралельних центральним осям фігури дорівнює відцентровому моменту інерції фігури відносно власних центральних осей фігури плюс добуток площі фігури на координати її центру ваги відносно нових осей x_1, y_1.

Слід звернути увагу на те, що координати a, b у залежності (4.28) для визначення відцентрового моменту інерції треба підставляти, враховуючи їхні знаки. Визначимо, наприклад, осьові та відцентровий моменти інерції прямокутника зі сторонами b та h відносно осей x_1, y_1 (рис. 4.8), використовуючи залежності (4.26)–(4.28). Відомо, що відносно центральних осей x, y моменти інерції $I_x = \dfrac{bh^3}{12}$; $I_y = \dfrac{hb^3}{12}$, а $I_{xy} = 0$, бо осі x та y є осями симетрії фігури та головними осями інерції. Тоді відповідно до формул (4.26)–(4.28) для прямокутника запишемо

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot bh = \frac{bh^3}{3},$$

що співпадає з результатами безпосереднього інтегрування. Аналогічно

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A = \frac{4b^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{3}.$$

Для відцентрового моменту інерції маємо

$$I_{x_1y_1} = I_{xy} + abA = 0 + \frac{h}{2}\cdot\frac{b}{2}b\cdot h = \frac{h^2b^2}{4}.$$

4.4. Залежність між моментами інерції при повороті осей

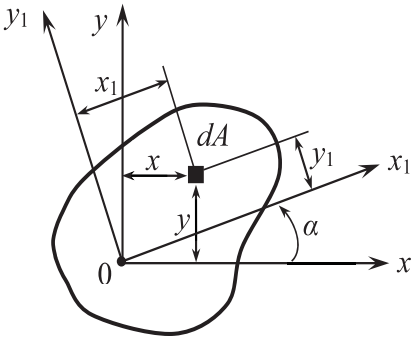


Рис. 4.9

Вважаємо, що моменти інерції фігури I_x, I_y, I_{xy} відносно осей x та y відомі (рис. 4.9). Необхідно визначити моменти інерції цієї ж фігури відносно нових осей x_1, y_1, які повернуті на деякий кут α відносно старих осей x, y проти руху стрілки годинника. За визначенням моменти інерції фігури відносно осей x_1 та y_1 дорівнюватимуть:

$$I_{x_1} = \int\limits_{(A)} y_1^2 dA; \quad I_{y_1} = \int\limits_{(A)} x_1^2 dA; \quad I_{x_1y_1} = \int\limits_{(A)} x_1 y_1 dA. \tag{4.29}$$

Координати елементарної площі dA в системах координат Oxy та Ox_1y_1 зв'язані співвідношеннями (рис. 4.9):

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\alpha + y\sin\alpha; \\ y_1 &= y\cos\alpha - x\sin\alpha. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Підставляємо x_1, y_1 у формули (4.29). Розкриваючи дужки та інтегруючи їх, матимемо:

$$I_{x_1} = \int\limits_{(A)} y_1^2 dA = \int\limits_{(A)} \left(y\cos\alpha - x\sin\alpha\right)^2 dA = I_x\cos^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha + I_y\sin^2\alpha; \tag{4.31}$$

$$I_{y_1} = \int\limits_{(A)} x_1^2 dA = \int\limits_{(A)} (x\sin\alpha + y\sin\alpha)^2 dA = I_y\cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha + I_x\sin^2\alpha; \tag{4.32}$$

$$I_{x_1y_1} = \int\limits_{(A)} x_1 y_1 dA = \int\limits_{(A)} \left(x\cos\alpha + y\cos\alpha\right)\left(y\cos\alpha - x\sin\alpha\right)dA = \\ = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha. \tag{4.33}$$

Складаючи перші два співвідношення, отримаємо

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = \int\limits_{(A)} \left(y^2 + x^2\right)dA = I_p. \tag{4.34}$$

Таким чином, сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей, які мають спільний початок, не залежить від кута повороту α і при повороті осей залишається сталою величиною, що дорівнює полярному моменту інерції.

За допомогою виразу (4.34) можна визначити осьовий момент інерції круга відносно діаметра. Для круга, як симетричної фігури,

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_p,$$

де величина I_p нам відома: $I_p = \pi D^4/32$.

Отже, для круга осьові моменти інерції відносно осей x та у, які співпадають з діаметрами, дорівнюють

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}.$$

4.5. Головні осі інерції, головні моменти інерції плоского перерізу та їх визначення

Із отриманих формул (4.31), (4.32), (4.33) видно, що моменти інерції перерізу залежать від кута повороту α та змінюють свою величину при повороті осей. Для практичних розрахунків важливо знати, за якого положення осей x_1, y_1 осьові моменти матимуть найбільше і найменше значення. Для цього функцію $I_{x_1}(\alpha)$ досліджуємо на екстремум. Знаходимо похідну $dI_{x_1}/d\alpha$ і прирівнюємо її нулю

$$dI_{x_1}/d\alpha = -2I_x \cos\alpha \cdot \sin\alpha + 2I_y \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2I_{xy}\cos 2\alpha =$$
$$= -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha\right) = 0,$$

звідки
$$\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha = 0. \qquad (4.35)$$

Як видно із залежності (4.33), отриманий вираз (4.35) є відцентровим моментом інерції I_{x1y1}. Отже, осьовий момент інерції досягає екстремальних значень відносно тих осей, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю. Осі, відносно яких відцентровий момент інерції фігури дорівнює нулю, а її осьові моменти інерції досягають екстремальних значень, називають головними осями інерції фігури. Головні осі інерції позначають літерами u і v. Осьові моменти інерції відносно головних осей називають головними моментами інерції і позначають I_u, I_v. Із рівняння (4.35) знаходимо значення кутів α_1 та α_2, за яких осьові моменти інерції набирають екстремальних значень

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y},$$

звідки
$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}\right), \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}. \qquad (4.36)$$

Підставивши значення кутів α_1 та α_2 у вираз (4.31), остаточно отримаємо

$$I_{u\diagup v} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}. \qquad (4.37)$$

Верхній знак у формулі (4.37) відповідає найбільшому значенню моменту інерції I_{max}. Якщо осі x та y є центральними, то головні центральні моменти інерції відповідно дорівнюватимуть

$$I_{u\diagup v} = I_{max\diagup min} = \frac{I_{x_C} + I_{y_C}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{x_C} - I_{y_C}\right)^2 + 4I_{x_C y_C}^2} \qquad (4.38)$$

Слід пам'ятати, що додатні кути α_1, α_2 треба відкладати проти руху стрілки годинника. Вісь, відносно якої осьовий момент інерції набирає максимального значення I_{max}, завжди складає менший із кутів α_1, α_2 з тією з осей, відносно якої

момент інерції має більше значення. На практиці головну вісь, відносно якої осьовий момент інерції досягає I_{max}, визначають шляхом "оковимірювальної" оцінки, а саме: фігура більш видовжена вздовж тієї осі, відносно якої момент інерції досягає I_{min}. Цю вісь позначають *v*. У практичних розрахунках на стійкість, за складного опору, часто використовують поняття радіуса інерції плоскої фігури відносно осі. Радіусами інерції плоскої фігури відносно осей *v* та *u* називають відповідно величини $i_v = \sqrt{I_v / A}$ та $i_u = \sqrt{I_u / A}$.

Побудований на осях $2i_u$ і $2i_v$ еліпс називають еліпсом інерції.

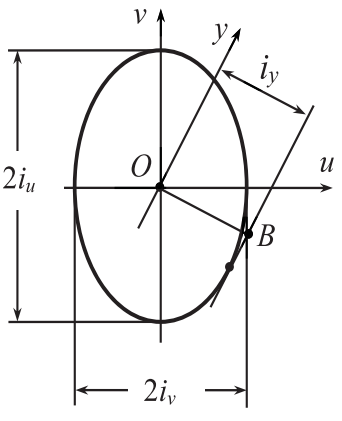


Рис. 4.10

Радіус інерції i_y відносно будь-якої центральної осі *y* за допомогою еліпса інерції визначають як довжину перпендикуляра *OB* (рис. 4.10), проведеного із центра еліпса на дотичну, паралельну осі *y*. Відрізок *OB*, побудований у масштабі еліпса інерції, дорівнює радіусу інерції i_y. Маючи значення i_y, знаходять момент інерції I_y за формулою $I_y = i_y^2 \cdot A$.

Крім розглянутих геометричних характеристик, у розрахунках на міцність балок та валів матимемо справу з осьовими W_x і W_y та полярним W_p моментами опору плоских поперечних перерізів. Осьові моменти опору поперечних перерізів відносно осей x та y визначають таким чином:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}; \qquad W_y = \frac{I_y}{x_{max}}.$$

Полярний момент опору плоского поперечного перерізу дорівнює

$$W_p = I_p / \rho_{max}.$$

Приклад 1. Для плоскої фігури *LNBMDK,* яка складається з прямокутника *NDKL* та трикутника *NMB* (рис. 4.11), визначити положення головних центральних осей інерції u і v, навести їх на рисунку та визначити значення головних моментів інерції I_u, I_v, якщо $a = 2$ см.

Розв'язування. 1. Виберемо допоміжну систему координат x, y (рис. 4.11), відносно якої визначимо положення центра ваги фігури. Для спрощення підрахунків допоміжну систему координат x, y доцільно прив'язувати до сторін фігури у такий спосіб, щоб уся фігура знаходилась у першому квадранті, при цьому координати центрів ваги складових фігур будуть додатними. Креслення фігури доцільно виконувати в певному масштабі.

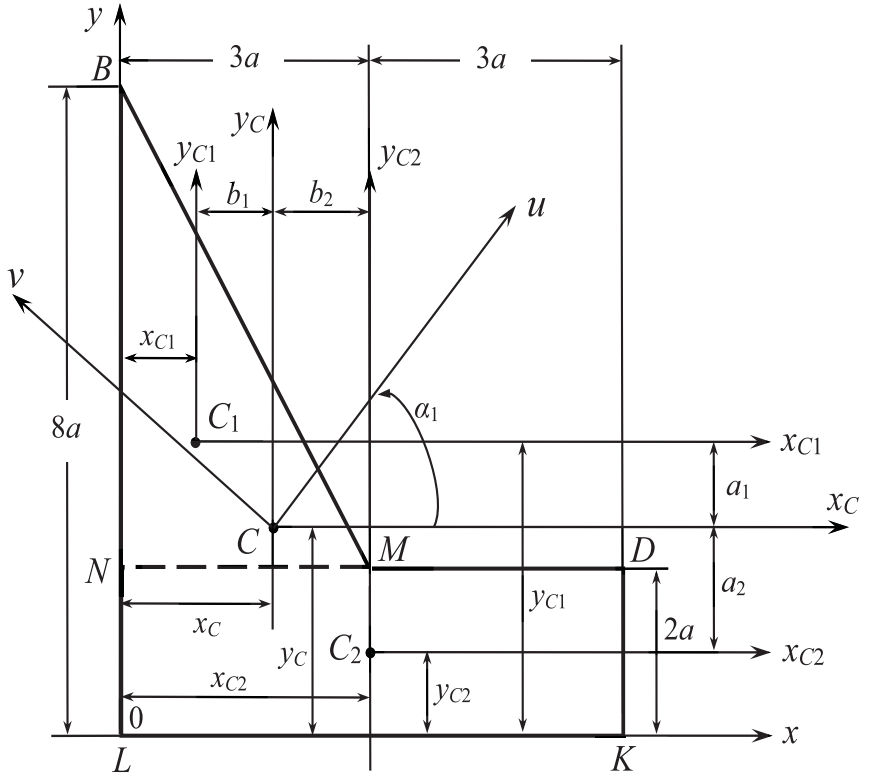


Рис. 4.11

2. Далі поділяємо фігуру на більш прості фігури так, щоб для кожної простої фігури можна було визначити площу і вказати положення центра ваги. У нашому випадку простими фігурами вибираємо трикутник *NBM*, площа якого $A_1 = \frac{1}{2} 3a \cdot 6a = 36 \text{см}^2$, а координати центра ваги C_1 складають $x_{C_1} = a = 2$ см; $y_{C_1} = 4a = 8$ см, і прямокутник *NDKL* з площею $A_2 = 6a \cdot 2a = 48$ см^2 та координатами центра ваги C_2, які дорівнюватимуть $x_{C_2} = 3a = 6$ см; $y_{C_2} = a = 2$ см.

3. Знаходимо координати центра ваги C усієї фігури за формулами:

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{x_{C_1} A_1 + x_{C_2} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{2 \cdot 36 + 6 \cdot 48}{36 + 48} = \frac{360}{84} = 4{,}29 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{\sum y_{C_i} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{y_{C_1} A_1 + y_{C_2} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{8 \cdot 36 + 2 \cdot 48}{36 + 48} = \frac{384}{84} = 4{,}57 \text{ см}.$$

Відкладаємо в певному масштабі x_C, y_C відносно осей x, y та будуємо точку C – центр ваги усієї фігури. Проводимо через точку C центральні осі x_C, y_C, паралельні відповідним допоміжним осям x та y, а також центральні осі трикутника x_{C_1}, y_{C_1} і прямокутника x_{C_2}, y_{C_2} (рис. 4.11) паралельно центральним осям усього перерізу x_C, y_C. Відстані між центральними осями x_C, y_C та x_{C_1}, y_{C_1} позначимо через a_1, b_1, а між центральними осями x_C, y_C та x_{C_2}, y_{C_2} позначимо a_2, b_2, які відповідно дорівнюють:

$$a_1 = y_{C_1} - y_C; \qquad a_2 = y_C - y_{C_2};$$

$$b_1 = x_C - x_{C_1}; \qquad b_2 = x_{C_2} - x_C.$$

4. Знаходимо моменти інерції усієї фігури відносно її центральних осей I_{x_C}, I_{y_C}, $I_{x_C y_C}$, як суми моментів інерції складових фігур, користуючись залежностями між моментами інерції фігури відносно паралельних осей (4.26), (4.27), (4.28), обчислимо

$$I_{x_C} = I^{\text{I}}_{x_C} + I^{\text{II}}_{x_C} = I^{\text{I}}_{x_{C_1}} + A_1 \cdot a_1^2 + I^{\text{II}}_{x_{C_2}} + A_2 a_2^2 = \frac{3a \cdot (6a)^3}{36} + \frac{1}{2} 3a \cdot 6a \cdot \left(y_{C_1} - y_C\right)^2 + \frac{6a \cdot (2a)^3}{12} +$$

$$+6a \cdot 2a \cdot \left(y_C - y_{C_2}\right)^2 = \frac{6 \cdot 12^3}{36} + \frac{6 \cdot 12 \cdot (8 - 4{,}57)^2}{2} + \frac{12 \cdot 4^3}{12} + 12 \cdot 4 (4{,}57 - 2)^2 = 1092{,}5 \text{ см}^4,$$

де $I^{\text{I}}_{x_C}$ – момент інерції трикутника відносно центральної осі x_C усієї фігури, яка по відношенню до першої фігури є довільною і паралельною центральній осі трикутника x_{C_1}; $I^{\text{II}}_{x_C}$ – момент інерції прямокутника відносно осі x_C; $I^{\text{I}}_{x_{C1}}$ – момент інерції трикутника відносно власної центральної осі x_{C_1}, який відомий із попередніх підрахунків; $I^{\text{II}}_{x_{C2}}$ – момент інерції прямокутника відносно власної центральної осі x_{C_2}, відома величина для простої фігури;

$$I_{y_C} = I^{\mathrm{I}}_{y_C} + I^{\mathrm{II}}_{y_C} = I^{\mathrm{I}}_{y_{C_1}} + A_1 b_1^2 + I^{\mathrm{II}}_{y_{C_2}} + A_2 b_2^2 = \frac{6a(3a)^3}{36} + \frac{1}{2}3a \cdot 6a\left(x_C - x_{C_1}\right)^2 + \frac{2a(6a)^3}{12} +$$

$$+6a \cdot 2a\left(x_{C_2} - x_C\right)^2 = \frac{12 \cdot 6^3}{36} + \frac{6 \cdot 12}{2}(4,29-2)^2 + \frac{4(12)^3}{12} + 12 \cdot 4(6-4,29)^2 = 977,3 \text{ см}^4,$$

де I^{I}_{yC}, I^{II}_{yC} – осьові моменти інерції трикутника та прямокутника відносно центральної осі y_C усієї фігури; I^{I}_{yC1} – момент інерції трикутника відносно власної центральної осі y_{C_1}, який відомий; I^{II}_{yC2} – момент інерції прямокутника відносно власної центральної осі y_{C_2}, який відомий;

$$I_{x_C y_C} = I^{\mathrm{I}}_{x_C y_C} + I^{\mathrm{II}}_{x_C y_C} = I^{\mathrm{I}}_{x_{C_1} y_{C_1}} + A_1 a_1 b_1 + I^{\mathrm{II}}_{x_{C_2} y_{C_2}} + A_2 a_2 b_2 =$$

$$= \frac{-(3a)^2(6a)^2}{72} + \frac{1}{2}3a \cdot 6a\left(y_{C_1} - y_C\right)\left(x_C - x_{C_1}\right) + 0 + 6a \cdot 2a\left(y_C - y_{C_2}\right)\left(x_{C_2} - x_C\right) =$$

$$= \frac{-6^2 \cdot 12^2}{72} - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12(8-4,57)(4,29-2) + 0 - 12 \cdot 4(4,57-2)(6-4,29) =$$

$$= -72 - 36 \cdot 3,43 \cdot 2,29 - 48 \cdot 2,57 \cdot 1,71 = -493,7 \text{ см}^4.$$

5. Знаходимо кут нахилу α_1 головних осей u, v відносно центральних x_C, y_C за формулою (4.36)

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2I_{x_C y_C}}{I_{x_C} - I_{y_C}}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot 493,7}{1092,5 - 977,3}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(8,51) \approx 41°.$$

Проводимо головні центральні осі u, v (рис. 4.11), повертаючи осі x_C, y_C на кут α_1 проти руху стрілки годинника.

6. За формулою (4.38) визначаємо головні центральні моменти інерції усієї фігури

$$I_{u/v} = I_{max/min} = \frac{I_{x_C} + I_{y_C}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{x_C} - I_{y_C}\right)^2 + 4I^2_{x_C y_C}} = \frac{1092,5 + 977,3}{2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{(1092,5 - 977,3)^2 + 4 \cdot 421,7^2} = 1034,9 \pm \frac{851,2}{2} = 1034,9 \pm 425,6 \ ,$$

звідки

$$I_u = I_{max} = 1460,5 \text{ см}^4;$$

$$I_v = I_{min} = 609,3 \text{ см}^4.$$

Виконуємо перевірку отриманих результатів за формулою (4.34):

$$I_u + I_v = 1460{,}5 + 609{,}3 = 2069{,}8 \text{ см}^4;$$

$$I_{xC} + I_{yC} = 1092{,}5 + 977{,}3 = 2069{,}8 \text{ см}^4.$$

Перевірка підтверджує правильність розрахунків.

Приклад 2. Визначити головні центральні моменти інерції перерізу, який складається зі швелера № 20 та двотавра № 20 (рис. 4.12).

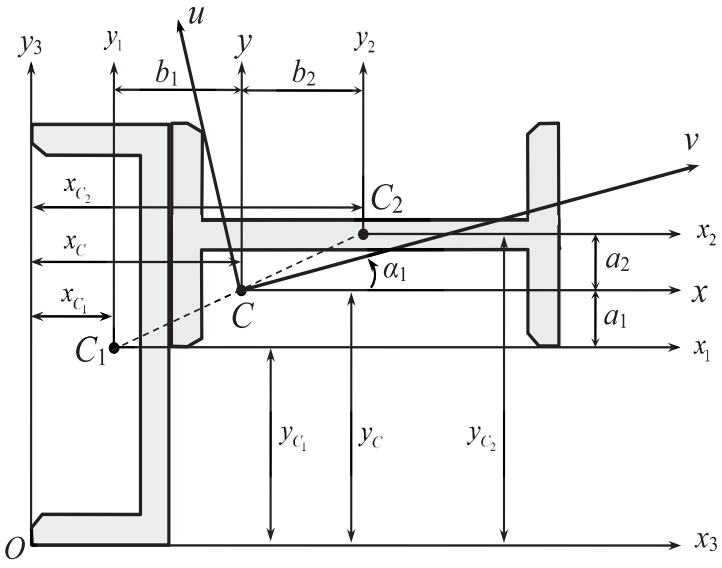


Рис. 4.12

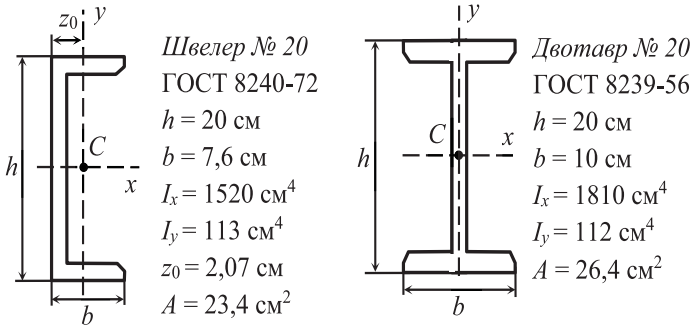


Рис. 4.13

Виконуємо у певному масштабі креслення перерізу (рис. 4.12) і з таблиць сортаменту прокатної сталі виписуємо усі необхідні розміри та відповідні геометричні характеристики складових фігур (рис. 4.13).

Розв'язування. Вибираємо допоміжну систему координат Ox_3y_3, відносно якої весь складний переріз знаходиться в першому квадранті. Визначаємо координати центра ваги C усієї фігури за формулами:

$$x_C = \frac{\sum x_{C_i} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{(b^{ш} - z_0)A_1 + (b^{ш} + \frac{h^{д}}{2})A_2}{A_1 + A_2} = \frac{5{,}53 \cdot 23{,}4 + 17{,}6 \cdot 26{,}4}{49{,}8} = 11{,}9\,\text{см};$$

$$y_C = \frac{\sum y_{C_i} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{h^{ш}}{2} \cdot A_1 + (h^{ш} - \frac{b^{д}}{2}) \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{10 \cdot 23{,}4 + 15 \cdot 26{,}4}{49{,}8} = 12{,}6\,\text{см}.$$

Проводимо через т. C центральні осі x, y паралельно допоміжним осям x_3 і y_3 та осі x_1, y_1 і x_2, y_2 – власні центральні осі швелера та двотавра. Відстані між центральними осями всієї фігури x, y та власними центральними осями складових фігур відповідно дорівнюють:

$a_1 = y_{C_1} - y_C = 10 - 12{,}6 = -2{,}6$ см; $\quad a_2 = y_{C_2} - y_C = 15 - 12{,}6 = 2{,}4$ см;

$b_1 = x_{C_1} - x_C = 5{,}53 - 11{,}9 = -6{,}37$ см; $\quad b_2 = x_{C_2} - x_C = 17{,}6 - 11{,}9 = 5{,}7$ см.

Осьові та відцентровий моменти інерції усієї фігури відносно центральних осей x, y дорівнюватимуть:

$$I_x = I_x^{\text{I}} + I_x^{\text{II}} = I_{x_1}^{\text{I}} + A_1 \cdot a_1^2 + I_{x_2}^{\text{II}} + A_2 a_2^2 = 1520 + 23{,}4 \cdot (-2{,}6)^2 + \\ + 112 + 26{,}4 \cdot 2{,}4^2 = 1678{,}2 + 264{,}1 = 1942{,}3\ \text{см}^4;$$

$$I_y = I_y^{\text{I}} + I_y^{\text{II}} = I_{y_1}^{\text{I}} + A_1 b_1^2 + I_{y_2}^{\text{II}} + A_2 b_2^2 = 113 + 23{,}4 \cdot (-6{,}37)^2 + \\ + 1810 + 26{,}4 \cdot 5{,}7^2 = 1062{,}5 + 2667{,}7 = 3730{,}2\ \text{см}^4;$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{\text{I}} + I_{xy}^{\text{II}} = I_{x_1y_1}^{\text{I}} + A_1 a_1 b_1 + I_{x_2y_2}^{\text{II}} + A_2 a_2 b_2 = 0 + 23{,}4 \cdot (-2{,}6) \cdot (-6{,}37) + \\ + 0 + 26{,}4 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}7 = 387{,}5 + 361{,}1 = 748{,}6\ \text{см}^4.$$

Визначаємо кут нахилу головних осей u, v відносно центральних осей x, y

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2 \cdot 748{,}6}{1942{,}3 - 3730{,}2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(0{,}8374) \approx 20°.$$

Проводимо головні центральні осі u, v, повертаючи центральні осі x, y на кут α_1 проти руху стрілки годинника.

Головні центральні моменти інерції усієї фігури дорівнюватимуть

$$I_{u/v} = I_{max/min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2} = \frac{1942,3 + 3730,2}{2} \pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(1942,3 - 3730,2\right)^2 + 4 \cdot 748,6^2} = 2836,2 \pm \frac{2332}{2} = 2836,2 \pm 1166 \ ,$$

звідки:

$$I_u = I_{max} = 4002,2 \text{ см}^4;$$

$$I_v = I_{min} = 1670,2 \text{ см}^4.$$

Виконуємо перевірку отриманих результатів

$$I_u + I_v = 4002,2 + 1670,2 = 5672,4 \text{ см}^4;$$

$$I_x + I_y = 1942,3 + 3730,2 = 5672,5 \text{ см}^4.$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha_1 + I_{xy}\cos 2\alpha_1 = \frac{1942,3 - 3730,2}{2}\sin 40° + 748,6 \cdot \cos 40° =$$

$$= -574,62 + 573,5 \approx 0.$$

ГЛАВА 5. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ БАЛОК ТА РАМ

Згином називають такий вид напружено-деформованого стану стержня, за якого в його поперечних перерізах виникають внутрішні згинальні моменти. З геометричної точки зору згин характеризується зміною кривизни осі стержня і всіх його поздовжніх волокон. Елементи конструкцій та деталі машин, які працюють в основному на згин, називають балками. Якщо згинальний момент у поперечному перерізі балки є єдиним внутрішнім силовим фактором, що не дорівнює нулю, то згин називають чистим. На практиці здебільшого маємо справу з поперечним згином, за якого, крім згинального моменту в поперечних перерізах балок, виникають і внутрішні поперечні сили.

У сільськогосподарських машинах, транспортних засобах, промислових та цивільних спорудах часто зустрічаємо елементи та деталі, розрахункові схеми яких зводяться до балок, що мають поздовжню площину симетрії. Ця поздовжня площина симетрії є однією з головних площин інерції балки. Вважатимемо, що зовнішні навантаження і відповідні реакції опор балки розміщені в поздовжній площині симетрії балки, тобто силова площина співпадає з однією з головних площин інерції балки. У цьому випадку зігнута вісь балки є плоскою кривою та залишається в тій же самій площині. Такий вид згину називають плоским або прямим згином.

Згин балки можна викликати як поперечним, так і поздовжнім навантаженням. У випадку згину балки від поздовжнього навантаження всі поперечні перерізи переміщуватимуться, по-перше, від згину, а по-друге, від розтягу або стиску. У чистому виді, не ускладненому розтягом або стиском, згин балки виникає за дії поперечного навантаження. Прикладами розрахунку на міцність та жорсткість за схемою плоского згину балок можуть слугувати кран-балки, які сприймають навантаження від декількох десятків кілограм до декількох сотень тонн,

несучі балки передньої підвіски автомобіля, ресори, зуби шестерні, стояки корпуса плуга для кріплення лемешів, стояки культиваторів для кріплення лап, осі вагонів, лопатки компресорів, несучі балки крил літака, перемички дверних та віконних прольотів будинків тощо. Завершити цей практично нескінченний перелік можна, назвавши плоскі пружини електричних реле, вимикачів та інших приладів автоматичного керування. Отже, навчившись розраховувати балку на міцність та жорсткість за плоского поперечного згину, в подальшому зможемо розраховувати цілий клас деталей машин, елементів конструкцій та інженерних споруд, які, на перший погляд, не мають між собою нічого спільного. Вказані розрахунки потрібні не тільки на етапі проектування машин, конструкцій та їх побудови, але й під час їхньої експлуатації для технічного нагляду та з'ясування і усунення причин їх виходу з ладу чи руйнування.

5.1. Внутрішні силові фактори у поперечних перерізах балок при плоскому згині та їх визначення. Правила знаків Q і M

За плоского поперечного згину в поперечних перерізах балки відмінними від нуля із шести внутрішніх силових факторів є тільки два: поперечна сила Q_y і згинальний момент M_x, які надалі позначатимемо без індексів, тобто Q і M. Внутрішні силові фактори Q та M визначатимемо, користуючись методом перерізів.

Розглянемо, наприклад, шарнірно обперту балку AB, навантажену, як показано на рис. 5.1,*а*. Реакції в опорах Y_A та Y_B визначаються із рівнянь рівноваги балки AB як абсолютно твердого тіла. Будемо вважати, що Y_A і Y_B визначені.

Припустимо, нас цікавить величина внутрішньої поперечної сили Q і внутрішнього згинального моменту M у поперечному перерізі C, який знаходиться на відстані z від лівої опори. Тоді в перерізі C площиною, перпендикулярною до осі балки, уявно розділяємо балку на дві частини AC і CB.

Дії однієї частини на іншу (внутрішні сили), відповідно до третього закону Ньютона, рівні за величиною і протилежні за напрямком (рис. 5.1,*b*). За плоского

поперечного згину, як уже відзначалося, ці внутрішні сили зводяться до поперечної сили Q і згинального моменту M. Складемо рівняння рівноваги однієї з частин балки (лівої AC або правої CB). Наприклад, для лівої частини:

$$\sum Y = Y_A - F_1 + F_2 - F_3 - Q = 0;$$
$$\sum mom_C(\bar{F}_i) = Y_A \cdot z - F_1(z-a_1) + F_2(z-a_2) - F_3(z-a_3) - M = 0,$$

звідки:

$$Q = Y_A - F_1 + F_2 - F_3;$$
$$M = Y_A \cdot z - F_1(z-a_1) + F_2(z-a_2) - F_3(z-a_3).$$

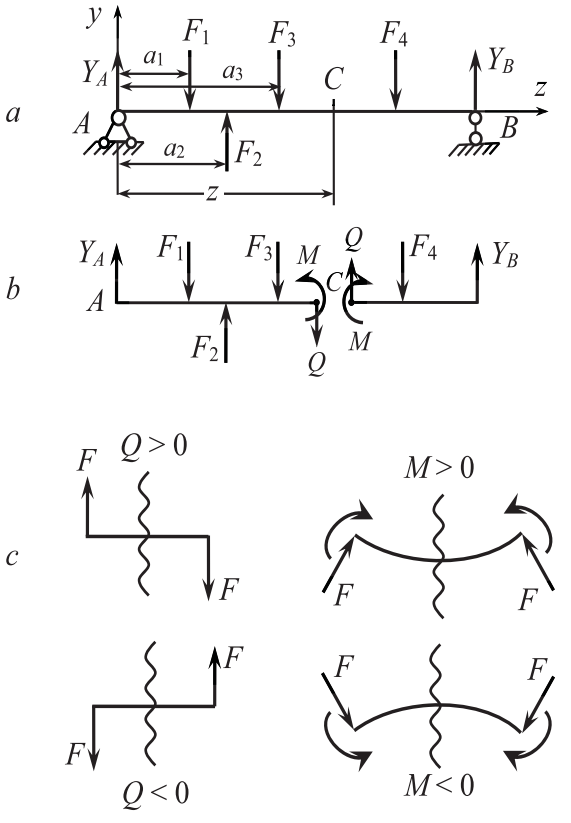


Рис. 5.1

Аналізуючи одержані вирази для Q і M, можна зробити висновки:

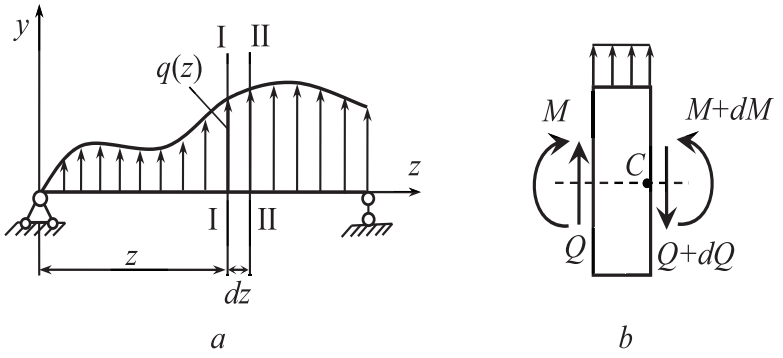
- внутрішня поперечна сила Q у довільному поперечному перерізі балки дорівнює сумі проекцій усіх зовнішніх сил (у тому числі і реакцій опор), що розташовані по один бік від поперечного перерізу, на площину цього перерізу;
- внутрішній згинальний момент M у довільному поперечному перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил (у тому числі і реакцій опор), що розташовані по один бік від поперечного перерізу відносно центра ваги цього перерізу.

Поперечну силу Q вважають додатною, якщо зовнішня сила, що її викликала, утворює момент відносно центра ваги перерізу, направлений за рухом стрілки годинника, і від'ємною – у протилежному напрямку.

Згинальний момент M у поперечному перерізі вважається додатним, якщо момент зовнішньої сили, що діє ліворуч від перерізу, відносно центра ваги перерізу направлений у напрямку руху стрілки годинника, і від'ємним – у протилежному напрямку. Якщо зовнішня сила діє праворуч від перерізу, то згинальний момент вважається додатним, коли момент цієї сили направлений проти руху стрілки годинника, і від'ємним – у протилежному напрямку. Правила знаків для Q і M можна проілюструвати схематично, як це наведено на рис. 5.1,*c*.

5.2. Диференціальні залежності між згинальним моментом *M*, поперечною силою *Q* та інтенсивністю розподіленого навантаження *q*

Розглянемо балку на шарнірних опорах, навантажену розподіленим навантаженням інтенсивністю $q(z)$ – рис. 5.2,*a*.



a *b*

Рис. 5.2

Виділимо в балці поперечними перерізами I та II елемент нескінченно малої довжини dz і розглянемо його рівновагу. На виділений елемент балки діє розподілене навантаження $q(z)$, згинальний момент $M(z)$ і поперечна сила $Q(z)$ в поперечному перерізі I, а також згинальний момент $M + dM$ і поперечна сила $Q + dQ$ в поперечному перерізі II (рис. 5.2,*b*). Враховуючи малість довжини елемента dz, інтенсивність розподіленого навантаження на ділянці цього елемента вважатимемо сталою. Запишемо рівняння рівноваги виділеного елемента балки:

$$\sum Y = Q + qdz - (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum mom_C(\bar{F}_i) = M + Qdz + qdz \cdot \frac{dz}{2} - \left(M + dM\right) = 0,$$

звідки, нехтуючи добутком $q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2}$, як величиною другого порядку малості, матимемо:

$$\frac{dQ}{dz} = q(z); \tag{5.1}$$

$$\frac{dM}{dz} = Q(z). \tag{5.2}$$

Диференціальні співвідношення (5.1), (5.2) називають теоремою Шведлера–Журавського (Посацький, 1973).

Взявши другу похідну від згинального моменту (5.2) по z, отримаємо

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz},$$

або

$$\frac{d^2M}{dz^2} = q(z). \tag{5.3}$$

Диференціальні залежності між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження (5.1), (5.2), (5.3) у подальшому використаємо в правилах контролю епюр поперечних сил і згинальних моментів, а також при визначенні деформацій балок та складанні диференціальних рівнянь поперечних коливань балок.

5.3. Епюри поперечних сил і згинальних моментів та їх побудова

На основі сформульованих правил для визначення поперечної сили Q та згинального моменту M у довільному поперечному перерізі балки та правил їх знаків за відомими з математики правилами будують графіки зміни поперечних сил і згинальних моментів при переході від перерізу до перерізу вподовж осі балки. Ці графіки називають епюрами поперечних сил Q і згинальних моментів M для балки. Отже, епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M являють собою графіки,

ординати яких є величинами поперечної сили або згинального моменту у відповідному поперечному перерізі балки. За побудованими епюрами визначають положення небезпечних перерізів балки, в яких виникають найбільші за модулем значення поперечної сили Q_{max}, згинального моменту M_{max} та безпосередньо значення Q_{max} і M_{max}. Епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M можна будувати, визначаючи в окремих перерізах величини Q і M відповідно до правил їх визначення і правил знаків, які сформульовані у §5.1, або ж інтегруючи диференціальні рівняння (5.1), (5.2), (5.3) і визначаючи сталі інтегрування з умов закріплення поперечних перерізів балки, так званих граничних умов задачі.

Використаємо перший із названих способів побудови епюр і продемонструємо техніку їх побудови на конкретних прикладах.

Будемо дотримуватися певного порядку побудови епюр поперечних сил Q і згинальних моментів M для балки:

1) вибираємо систему координат Ozy, прив'язуючи, як правило, початок системи координат до центра ваги одного з поперечних перерізів балки, що знаходиться в недеформованому стані. Вісь Oz направляємо вздовж недеформованої осі стержня, вісь Oy розташовуємо в площині згину;

2) визначаємо опорні реакції балки, складаючи та розв'язуючи рівняння статики;

3) розділяємо балку на ділянки. Границями ділянок є поперечні перерізи, в яких прикладені зосереджені сили, пари сил, розпочинаються або закінчуються ділянки розподілених навантажень;

4) записуємо аналітичні вирази для функцій поперечної сили $Q(z)$ і згинального моменту $M(z)$ для довільного поперечного перерізу з абсцисою z на кожній із ділянок балки;

5) користуючись аналітичними виразами для функцій $Q(z)$ та $M(z)$, за відомими правилами математики будуємо графіки цих функцій. Якщо виникає потреба, підраховуємо значення Q та M в окремих характерних перерізах (наприклад

на границях ділянок), досліджуємо функції на екстремум і т. ін. Остаточно відкладаємо в масштабі величини ординат Q і M та будуємо епюри;

6) виконуємо перевірку побудованих епюр.

Приклад 1. Для двохопорної шарнірно опертої балки, розрахункова схема якої наведена на рис. 5.3, побудувати епюри Q і M.

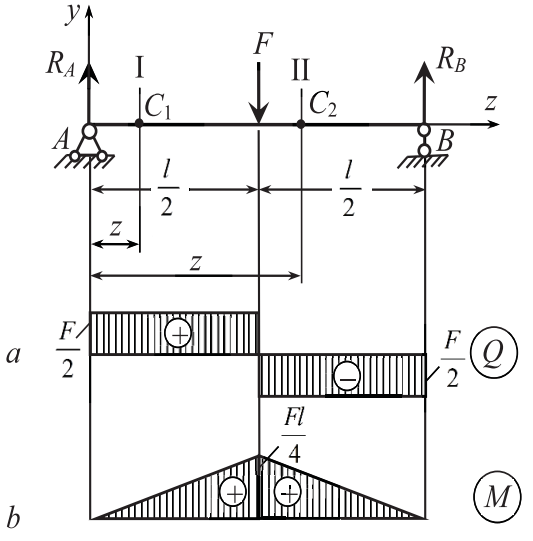


Рис. 5.3

Розв'язування. Початок координат пов'язуємо з лівою опорою A. Реакції в опорах, враховуючи симетрію навантаження, дорівнюватимуть

$$R_A = R_B = F / 2.$$

Маємо дві ділянки: I ділянка $0 \le z \le l/2$, II ділянка $l/2 \le z \le 0$. Вибираємо довільний поперечний переріз I–I на першій ділянці з центром ваги C_1 і відстанню z від початку координат та визначаємо $Q(z)$ і $M(z)$ у цьому перерізі:

$$Q(z) = R_A = \frac{F}{2}. \tag{5.4}$$

Поперечна сила залишається сталою величиною в межах I ділянки, а графік сталої функції, як відомо, є пряма, паралельна осі z, з ординатами $F/2$ (рис. 5.3,*a*). Згинальний момент у поперечному перерізі дорівнює добутку сили R_A на плече z, взятому зі знаком плюс

$$M(z) = R_A \cdot z = \frac{F}{2} \cdot z. \tag{5.5}$$

Із виразу (5.5) бачимо, що згинальний момент викликається тільки реакцією R_A, знак моменту додатний, оскільки момент реакції, що діє зліва від перерізу, відносно центра ваги перерізу C_1 має напрямок за рухом стрілки годинника.

Функція (5.5) – лінійна, а графіком лінійної функції є пряма лінія, для побудови якої треба мати дві точки. Визначимо M при $z = 0$ і при $z = l/2$:

$$M(0) = 0; \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F\,l}{4}.$$

Відклавши отримані значення згинальних моментів, як ординати точок, через які проходить графік, проводимо пряму. Таким чином маємо епюру M на І ділянці балки (рис. 5.3,*b*). Переходимо на ІІ ділянку балки, де $l/2 \le z \le l$.

Аналогічно записуємо аналітичні вирази $Q(z)$ і $M(z)$ для довільного перерізу ІІ ділянки:

$$Q(z) = R_A - F = \frac{F}{2} - F = -\frac{F}{2};$$

$$M(z) = R_A z - F\left(z - \frac{l}{2}\right) = -\frac{F\,z}{2} + \frac{F\,l}{2}.$$

Із отриманих виразів видно, що на ІІ ділянці Q є сталою величиною, яка зображується горизонтальною прямою, а графік згинального моменту є теж прямою лінією, що з'єднує точки $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F\,l}{4}$ і $M(l) = 0$. Звернемо увагу на те, що в перерізі, де прикладено зосереджену силу F, на епюрі Q маємо стрибок на величину цієї сили. Епюра M у цьому перерізу має злом.

Приклад 2. Двохопорна шарнірно оперта балка навантажена парою сил з моментом M_0 (рис. 5.4). Побудувати епюри поперечних сил Q та згинальних моментів M.

Розв'язування. Спочатку визначаємо реакції в опорах за відомими методами статики. Склавши рівняння рівноваги для балки та розв'язавши їх, отримаємо такий вираз для опорних реакцій:

$$R_A = R_B = M_0 / l.$$

Розділяємо балку на ділянки. Ділянок буде дві: І ділянка $0 \le z \le l/2$, ІІ ділянка $l/2 \le z \le 0$.

Записуємо вирази функцій $Q(z)$ і $M(z)$ для довільного перерізу I–I з поточною абсцисою z на I ділянці.

Поперечна сила дорівнюватиме опорній реакції $Q(z) = R_A = M_0/l$ і, як видно, є сталою величиною, а графік сталої функції – пряма, паралельна осі z, з ординатами M_0/l (рис. 5.4,*a*). Згинальний момент дорівнює добутку опорної реакції R_A на плече z, взятий зі знаком плюс

$$M(z) = R_A \cdot z = \frac{M_0}{l} z .$$

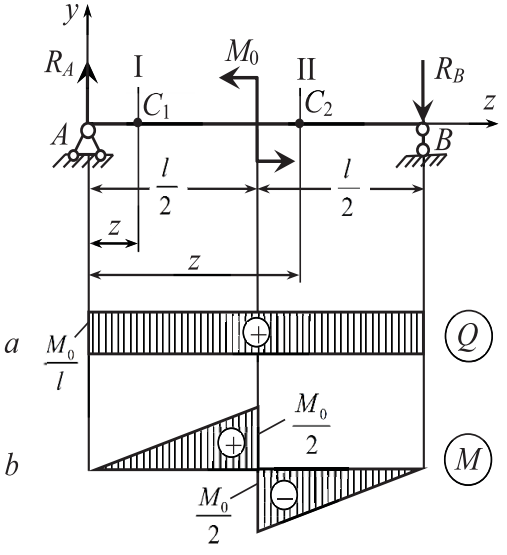


Рис. 5.4

Функція моменту – лінійна, а графік лінійної функції – пряма лінія, для проведення якої визначаємо дві точки. Для побудов епюри M на I ділянці знаходимо значення згинального моменту M при z=0 і $z = l/2$: $M(0) = 0$, $M(l/2) = M_0/2$. За отриманими значеннями M відкладаємо ординати 0 та $M_0/2$, з'єднуємо їх прямою і маємо епюру M на I ділянці (рис. 5.4,*b*).

Розглянемо довільний переріз II–II на ділянці II. У цьому перерізі $Q(z) = R_A = M_0/l$, тобто перерізуюча сила залишається незмінною і на II ділянці, а тому продовжуємо горизонтальну пряму з ординатами M_0/l (рис. 5.4,*a*).

Функція згинального моменту для довільного перерізу II–II матиме вигляд

$$M(z) = R_A z - M_0 = \frac{M_0}{l} z - M_0 .$$

Функція є лінійною і її графік – це пряма лінія. Щоб побудувати цей графік, знаходимо значення функції у двох перерізах при $z = l/2$ та при $z = l$:

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{M_0}{2}; \quad M(l) = 0 .$$

Відклавши ці значення ординат, з'єднуємо їх прямою та одержуємо епюру згинальних моментів M на ІІ ділянці (рис. 5.4,*b*).

Звернемо увагу на те, що в поперечному перерізі, де прикладена пара сил, на епюрі M маємо стрибок на величину моменту M_0 цієї пари.

Приклад 3. Побудувати епюри Q та M для двохопорної шарнірно опертої балки, навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q (рис. 5.5).

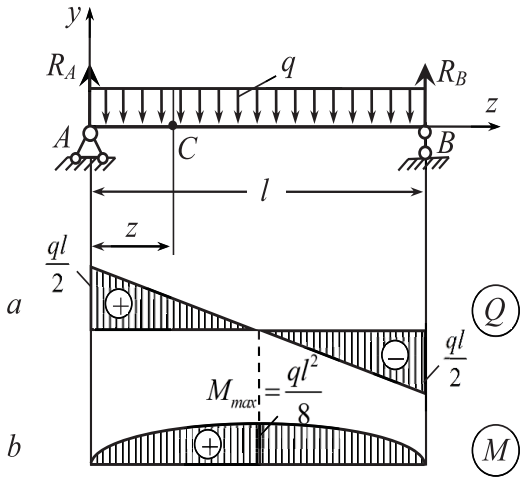


Рис. 5.5

Розв'язування. Враховуючи симетрію балки і навантаження, реакції в опорах одинакові $R_A = R_B = ql/2$. Маємо одну ділянку між опорами, яку називають прольотом або прогоном балки.

Розглянемо довільний поперечний переріз балки з абсцисою z. Аналітичний вираз для поперечної сили у цьому перерізі має вигляд $Q(z) = \frac{ql}{2} - qz$, тобто функція поперечної сили – лінійна, а графіком цієї функції є пряма. Перша складова в правій частині $Q(z)$ – проекція реакції опори на площину перерізу (або на вертикальну вісь), друга складова – проекція рівнодійної розподіленого навантаження на ділянці довжиною z. Визначивши два значення поперечної сили при $z = 0$ і $z = l$, по цих значеннях будуємо епюру Q (рис. 5.5,*a*).

$$Q(0) = \frac{ql}{2}; \quad Q(l) = -\frac{ql}{2}.$$

Аналітичний вираз для згинального моменту в наведеному перерізі має вигляд $M(z) = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}$, тобто функція згинального моменту вже квадратична і

її графіком, як відомо, є парабола. Перша складова у цьому виразі являє собою згинальний момент від опорної реакції R_A, взятий зі знаком "плюс", оскільки момент діє ліворуч від перерізу і направлений за рухом стрілки годинника. Друга складова є згинальним моментом від рівномірно розподіленого навантаження на ділянці довжиною z, розташованої ліворуч від перерізу, відносно центра C. Рівнодійна цього навантаження qz і прикладена посередині ділянки, тобто на відстані $z/2$ від центра перерізу. Отже, момент від цього навантаження дорівнює $qz \cdot z/2$ зі знаком "мінус", оскільки момент діє ліворуч від перерізу і направлений проти руху стрілки годинника.

Щоб побудувати параболічну епюру $M(z)$, визначимо три ординати M:

$$M\big|_{z=0} = 0; \quad M\big|_{z=l/2} = \frac{ql^2}{8}; \quad M\big|_{z=l} = 0.$$

Відклавши значення отриманих ординат, будуємо епюру M, яка є параболою, наведеною на рис. 5.5,*b*. Звернемо увагу на той факт, що згинальний момент M набирає максимуму в тому поперечному перерізі, де поперечна сила Q обертається в нуль, змінюючи знак з "плюса" на "мінус", що є слідством диференціального співвідношення (5.2).

5.4. Правила контролю епюр поперечних сил Q та згинальних моментів M

Як відомо з §5.2, між згинальним моментом M, поперечною силою Q та інтенсивністю розподіленого навантаження q існують диференціальні залежності:

$$\frac{dQ}{dz} = q(z); \qquad \frac{dM}{dz} = Q(z); \qquad \frac{d^2M}{dz^2} = q(z).$$

Використовуючи ці диференціальні залежності, отримаємо правила контролю побудованих епюр поперечних сил та згинальних моментів.

Із першої диференціальної залежності між поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження маємо такі правила:

1) якщо на деякій ділянці розподілене навантаження додатне $q > 0$, то згідно з диференціальною залежністю $dQ/dz > 0$ і відповідно епюра поперечної сили $Q(z)$ буде функцією зростаючою;

2) якщо на деякій ділянці $q < 0$, то $dQ/dz > 0$ і функція $Q(z)$ спадаюча;

3) якщо на деякій ділянці $q = 0$, то $Q(z) = const$, то бто епюра поперечних сил обмежена прямою паралельною осі;

Із другої диференціальної залежності між згинальним моментом та поперечною силою отримуємо такі правила:

4) якщо на деякій ділянці поперечна сила $Q(z) > 0$, то $dM/dz > 0$, а це означає, що епюра згинальних моментів $M(z)$ є функцією зростаючою;

5) якщо на деякій ділянці поперечна сила $Q < 0$, то відповідно функція $M(z)$ спадаюча;

6) якщо на деякій ділянці поперечна сила $Q = 0$, то $M = const$ і відповідно епюра згинальних моментів буде обмежена прямою паралельною осі епюри;

7) якщо поперечна сила Q обертається у деякому поперечному перерізі в нуль, змінюючи знак з "плюса" на "мінус", то в цьому перерізі згинальний момент M досягає максимуму; якщо Q змінює знак з "мінуса" на "плюс", то M досягає мінімуму.

Враховуючи, що друга похідна d^2M/dz^2 пропорційна кривизні кривої $M(z)$, із третьої диференціальної залежності між згинальним моментом та інтенсивністю розподіленого навантаження матимемо:

8) якщо на деякій ділянці розподілене навантаження $q > 0$, то $d^2M/dz^2 > 0$, і епюра згинальних моментів обмежена кривою $M(z)$, яка має опуклість вниз;

9) якщо на деякій ділянці балки $q < 0$, то епюра згинальних моментів $M(z)$ на цій ділянці обмежена кривою, яка має опуклість вгору;

10) якщо на деякій дільниці $q = 0$, то епюра M окреслюється на цій дільниці відрізком прямої; якщо $q = 0$ в окремій точці, то крива $M(z)$ в цій точці має перегин;

11) у перерізах балки, де прикладені зосереджені сили, на епюрі Q будуть стрибки, які дорівнюють величинам зосереджених сил у відповідних перерізах;

12) у перерізах балки, де прикладені пари сил, на епюрі M будуть стрибки, які рівні за величиною моментам відповідних пар;

13) згинальні моменти в кінцевих шарнірах та у врізаних шарнірах дорівнюють нулю за винятком тих випадків, коли пари сил безпосередньо прикладені у цих шарнірах.

Використовуючи сформульовані вище правила контролю епюр поперечних сил та згинальних моментів, побудову епюр Q та M можна здійснювати, не складаючи аналітичних виразів для $Q(z)$ і $M(z)$, а обмежуючись підрахунком значень поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах балки. Проілюструємо це на конкретних прикладах.

У першому прикладі з'ясуємо спочатку, як будуються епюри Q та M, використовуючи безпосередньо правила їх визначення та правила знаків, а далі покажемо, як цю побудову можна спростити, з використанням диференціальних залежностей між M, Q і q та правил перевірки правильності побудови епюр Q і M.

Приклад 4. Побудувати епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M для шарнірно опертої балки, $l = 2$ м (рис. 5.6,*а*). Таку розрахункову схему можна одержати при вивченні міцності та жорсткості несучих балок перекриття механізованого току сільськогосподарського підприємства та інших споруд.

Розв'язування. При побудові епюр будемо дотримуватися такої послідовності:

1) вибираємо систему координат Ozy, розташовуючи її початок у центрі ваги одного із поперечних перерізів недеформованої балки. Вісь Oz направляємо вздовж недеформованої осі балки, вісь Oy розміщуємо в площині згину;

2) визначаємо реакції опор;

3) розбиваємо балку на ділянки. Межами ділянок є поперечні перерізи, в яких прикладені зосереджені сили, пари сил, починаються або закінчуються ділянки розподілених навантажень;

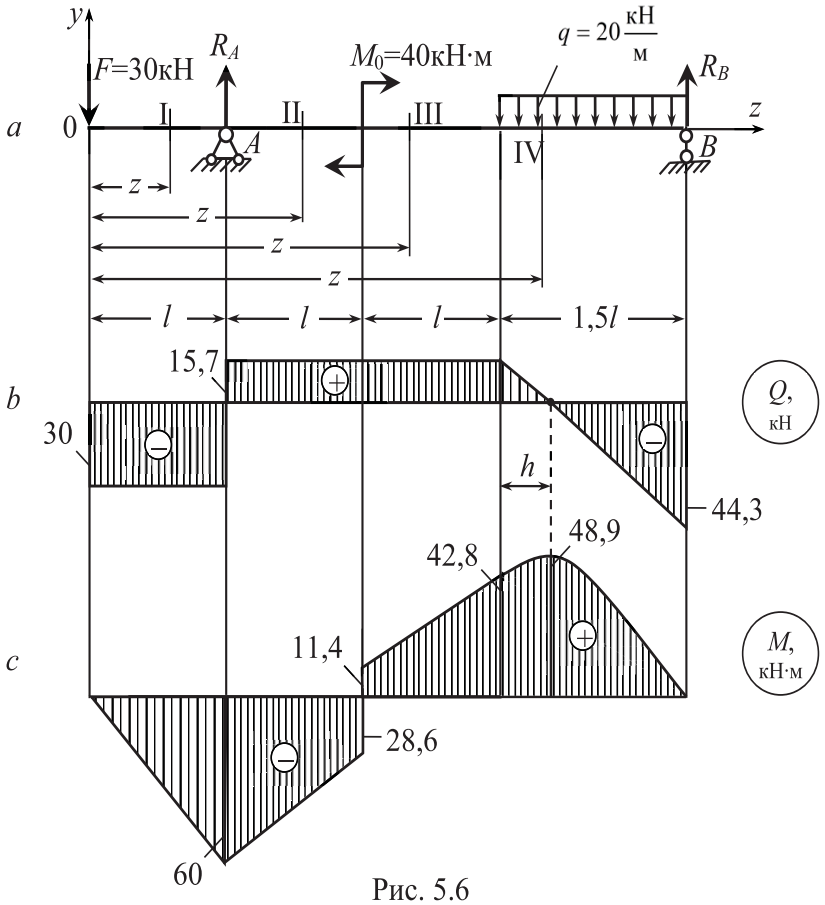


Рис. 5.6

4) на кожній ділянці беремо довільний поперечний переріз з абсцисою z від початку координат і записуємо аналітичні вирази для поперечної сили $Q(z)$ і згинального моменту $M(z)$, які виникають у цьому перерізі, використовуючи правила для визначення Q і M та правила їх знаків. За початок системи координат рекомендовано брати центр ваги лівого крайнього поперечного перерізу балки;

5) за відомими правилами математики будуємо графіки функцій $Q(z)$ і $M(z)$. У разі потреби надають аргументу z кілька значень на кожній ділянці (частіше на межах ділянок), отримують відповідні значення Q і M, які використовують при побудові епюр;

6) базові лінії епюр (осі графіків) Q і M проводимо паралельно недеформованій осі балки;

7) додатні значення поперечної сили відкладаємо вгору від базової лінії, від'ємні – вниз; епюру згинальних моментів будуватимемо на стиснутих волокнах балки. Тоді, згідно з правилом знаків для M, додатні значення згинального моменту відкладаємо вгорі від базової лінії, а від'ємні – внизу. Склавши рівняння рівноваги для наведеної балки

$$\sum mom_A(\bar{F}_i) = F \cdot l - M_0 + R_B \cdot 3,5l - q \cdot 1,5l \cdot \left(2l + \frac{1,5l}{2}\right) = 0;$$

$$\sum mom_B(\bar{F}_i) = F \cdot 4,5l - R_A \cdot 3,5l - M_0 + q \cdot 1,5l \cdot \frac{1,5l}{2} = 0,$$

визначаємо опорні реакції

$$R_A = 45,7 \text{ кН}; \quad R_B = 44,3 \text{ кН}.$$

Розіб'ємо балку на чотири ділянки та запишемо аналітичні вирази для функцій $Q(z)$ і $M(z)$ для довільних перерізів з абсцисою z на кожній з ділянок, підрахуємо величини Q і M у найбільш характерних поперечних перерізах балки та побудуємо графіки функцій $Q(z)$ і $M(z)$.

І ділянка: $0 \le z \le 2$ м.

Поперечна сила $Q = -F = -30$ кН є сталою величиною. Згинальний момент $M = -F \cdot z$ є лінійною функцією. У системі координат OzM це рівняння прямої. Щоб її побудувати, треба знати дві точки, через які вона проходить, або значення згинальних моментів у двох поперечних перерізах, наприклад на межах І ділянки:

$$M\big|_{z=0} = 0; \quad M\big|_{z=2} = -30 \cdot 2 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Так як на І ділянці поперечна сила стала, то, відклавши у певному масштабі від осі епюри Q ординату -30, проведемо пряму, паралельну осі. Це і буде епюра Q на І ділянці (рис. 5.6,*b*).

Відклавши у певному вибраному масштабі від осі епюри M ординати 0 при $z = 0$ і -60 при $z = 2$ і з'єднавши їх кінцеві точки прямою, отримаємо епюру M на І ділянці (рис. 5.6,*c*). Переходимо до ІІ ділянки, не змінюючи початку системи координат.

ІІ ділянка: $2\text{ м} \le z \le 4\text{ м}$.

Поперечна сила $Q(z) = -F + R_A = -30 + 45{,}7 = 15{,}7\text{ кН}$ є сталою величиною. Відклавши у відповідному масштабі ординату $+15{,}7\text{ кН}$ від осі епюри Q, проводимо через її кінець горизонтальну пряму – епюру Q на ІІ ділянці (рис. 5.6,*b*). Причиною стрибка епюри Q від -30 до $+15{,}7\text{ кН}$ є реакція опори R_A. Величина стрибка дорівнює величині реакції R_A.

Аналітичний вираз для згинального моменту на ІІ ділянці матиме вигляд:

$$M(z) = -Fz + R_A(z-2) = -30z + 45{,}7(z-2) = 15{,}7z - 91{,}4.$$

Отримане рівняння є рівнянням прямої лінії, тому знаходимо значення M на межах ІІ ділянки при $z = 2\text{ м}$ та при $z = 4\text{ м}$:

$$M\big|_{z=2} = 15{,}7 \cdot 2 - 91{,}4 = -60\text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M\big|_{z=4} = 15{,}7 \cdot 4 - 91{,}4 = -28{,}6\text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Відклавши у певному масштабі одержані ординати у відповідних поперечних перерізах і провівши через них пряму, одержимо епюру M на ІІ ділянці (рис. 5.6,*c*).

Розглянемо ІІІ ділянку: $4\text{ м} \le z \le 6\text{ м}$.

Поперечна сила $Q(z) = -F + R_A = -30 + 45{,}7 = 15{,}7\text{ кН}$.

Як бачимо, поперечна сила залишилася сталою і за значенням такою ж, як і на ІІ ділянці, а тому продовжимо її графік і на ІІІ ділянку (рис. 5.6,*b*). Згинальний момент для довільного перерізу на ІІІ ділянці дорівнюватиме

$$M(z) = -Fz + R_A(z-2) + M_0 = -30z + 45{,}7(z-2) + 40 = 15{,}7z - 51{,}4.$$

Обчислюємо значення згинального моменту на межах ІІІ ділянки:

$$M\big|_{z=4} = 11{,}4\text{ кН}\cdot\text{м}; \qquad M\big|_{z=6} = 42{,}8\text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Відклавши від осі епюри ці ординати і з'єднавши їх прямою, одержимо епюру M на ІІІ ділянці (рис. 5.6,*c*). Стрибок в епюрі M виник за рахунок прикладеної пари сил з моментом M_0. Величина стрибка дорівнює моменту пари.

Переходимо до IV ділянки: $6\text{ м} \le z \le 9\text{ м}$.

Аналітичний вираз для поперечної сили $Q(z)$ має вигляд

$$Q(z) = -F + R_A - q(z-6) = -30 + 45{,}7 - 20(z-6) = -20z + 135{,}5.$$

Графіком цієї функції є пряма, тобто епюра Q на IV ділянці є нахиленою до осі епюри пряма лінія. Для її побудови знаходимо дві точки, через які вона проходитиме, а саме значення поперечної сили на кінцях ділянки становитимуть:

$$Q\big|_{z=6} = 15{,}7 \text{ кН}; \qquad Q\big|_{z=9} = -44{,}3 \text{ кН}.$$

Відклавши ці ординати і провівши через них пряму, маємо епюру Q на IV ділянці (рис. 5.6,*b*).

Аналітичний вираз для згинального моменту на IV ділянці

$$M(z) = -Fz + R_A(z-2) + M_0 - \frac{q(z-6)^2}{2} =$$

$$= -30z + 45{,}7(z-2) + 40 - 10(z-6)^2 = -10z^2 + 135{,}7z - 411{,}4.$$

Як бачимо, функція згинального моменту є квадратичною, а епюра M на IV ділянці описується квадратною параболою. Для її побудови знаходимо значення згинального моменту M у трьох точках.

Перші дві точки візьмемо на межах ділянки при $z = 6$ м і $z = 9$ м:

$$M\big|_{z=6} = 42{,}8 \text{ кН}\cdot\text{м}; \qquad M\big|_{z=9} = 0.$$

Третє значення згинального моменту краще знайти в тому перерізі, де $Q = 0$. Оскільки $dM/dz = Q$, то знайдемо z, за якого $Q = 0$. При цьому ж значенні z згинальний момент набере екстремального значення.

Прирівнявши Q нулю $Q(z) = -20 \cdot z + 135{,}7 = 0$, знаходимо $z = 6{,}78$ м. Оскільки епюра Q, перетинаючи вісь, змінює знак “плюс” на “мінус”, то при $z = 6{,}78$ м згинальний момент набирає максимального значення

$$M_{max} = M\big|_{z=6,78} = -10 \cdot 6{,}78^2 + 135{,}7 \cdot 6{,}78 - 411{,}4 = 48{,}9 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Відклавши від осі епюри ці три ординати і провівши через них параболу, одержимо епюру M на IV ділянці (рис. 5.6,*c*).

Побудову епюр Q і M можна провести і не записуючи аналітичні вирази для Q і M, а обмежуючись знаходженням їхніх значень у характерних перерізах, наприклад на межах ділянок, або там, де вони досягають екстремальних значень.

Для цього треба користуватися правилами визначення поперечної сили Q і згинального моменту M через зовнішні сили, правилами їх знаків та диференціальними залежностями між M, Q, q.

Зокрема, коли до балки не прикладено розподілених навантажень, епюри поперечних сил будуть обмеженими відрізками прямих ліній, паралельних осі епюри, стрибки в епюрах матимемо в тих перерізах, де прикладені зосереджені сили, у тому числі й опорні реакції. Епюри згинальних моментів у цьому випадку будуть обмеженими відрізками нахилених до осі прямих. При переміщенні зліва направо функція M буде зростати, якщо на цій ділянці поперечна Q додатна, і спадати, якщо поперечна сила Q від'ємна. Стрибки на епюрі M будуть у тих перерізах, де прикладені пари сил.

Проілюструємо це на попередньому прикладі. Визначивши реакції опор та розбивши балку на ділянки, будуємо епюру Q, міркуючи таким чином. На I, II, III ділянках (рис. 5.6,*b*) епюра Q обмежена прямими, паралельними базовій лінії, оскільки на цих ділянках відсутнє розподілене навантаження. На I ділянці Q стала і дорівнює $F = -30$ кН, бо ліворуч від будь-якого поперечного перерізу цієї ділянки діє направлена вниз сила F. На межі I і II ділянок поперечна сила стрибком змінюється на 45,7 кН тому, що там діє зосереджена сила $R_A = 45{,}7$ кН. На II і III ділянках поперечна сила залишається сталою величиною. На IV ділянці поперечна сила спадає за прямолінійним законом, оскільки інтенсивність розподіленого навантаження стала і від'ємна. На правому кінці балки поперечна сила дорівнює реакції опори R_B. При побудові епюри M міркуємо таким чином. На I, II і III ділянках розподілене навантаження відсутнє, а тому епюра M обмежена відрізками прямих і для її побудови достатньо підрахувати значення M на початку і в кінці кожної ділянки: на початку I ділянки $M = 0$, у кінці I та на початку II ділянок $M = -30 \cdot 2 = -60$ кН·м; у кінці II ділянки $M = -30 \cdot 4 + 45{,}7 \cdot 2 = -28{,}6$ кН·м; на початку III ділянки $M = -30 \cdot 4 + 45{,}7 \cdot 2 + 40 = 11{,}4$ кН·м; у кінці III і на початку IV ділянок $M = -30 \cdot 6 + 45{,}7 \cdot 4 + 40 = 42{,}8$ кН·м. Наголосимо, що значення M у кінці II і на початку III ділянок відрізняються на

40 кН·м, має місце стрибок на величину моменту пари. На IV ділянці епюра M обмежена квадратною параболою, направленою опуклістю догори (назустріч потоку розподіленого навантаження). Значення згинального моменту M на лівому кінці IV ділянки дорівнює 42,8 кН·м, на правому кінці IV ділянки $M = 0$. Вершину параболи маємо в тому перерізі, де $Q = 0$. Із рис. 5.6,*b* маємо, що відстань від початку IV ділянки до перерізу, в якому $Q = 0$ дорівнює $h = 0{,}78$ м. У цьому перерізі згинальний момент набирає максимального значення

$$M_{max} = -30 \cdot 6{,}78 + 45{,}7 \cdot 4{,}78 + 40 - 20 \cdot 0{,}78 \cdot \frac{0{,}78}{2} = 48{,}9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Приклад 5. Для двохопорної балки, розрахункова схема якої наведена на рис. 5.7,*a*, знайти величини поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах та побудувати їх епюри.

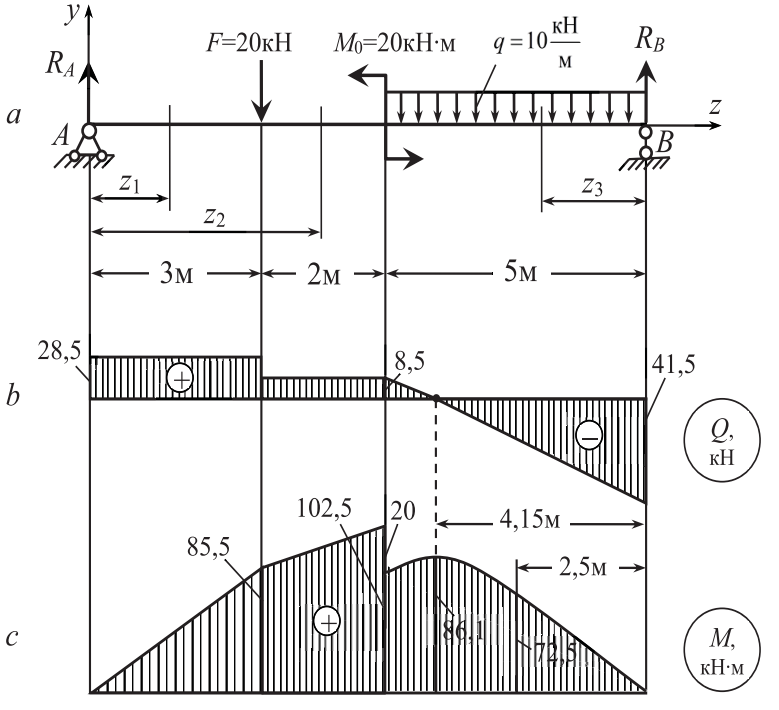


Рис. 5.7

Розв'язування. Для двохопорних балок у першу чергу визначаємо реакції опор R_A, R_B. Склавши рівняння рівноваги

$$\sum mom_A(\bar{F}_i) = -F \cdot 3 + M_0 - q \cdot 5 \cdot 7{,}5 + R_B \cdot 10 = 0;$$

$$\sum mom_B(\bar{F}_i) = -R_A \cdot 10 + F \cdot 7 + M_0 + q \cdot 5 \cdot 2{,}5 = 0,$$

знаходимо $R_A = 28{,}5$ кН; $R_B = 41{,}5$ кН.

Розділяємо балку на три ділянки і розглядаємо дві перші ділянки, переміщуючись від лівої опори A, а третю ділянку розглядаємо, переміщуючись від правої опори B. Величинам z, Q, M будемо приписувати для зручності індекси 1, 2, 3, підкреслюючи, що вони належать відповідно I, II, чи III ділянці.

I ділянка: $0 \le z_1 \le 3$ м.

Поперечна сила на цій ділянці дорівнює сумі проекцій усіх сил, які лежать ліворуч від перерізу, на площину перерізу

$$Q_1 = R_A = 28{,}5 \text{ кН}$$

і стала на всій ділянці. Епюрою Q буде пряма паралельна осі епюри (рис. 5.7,*b*). Згинальний момент на I ділянці змінюється за лінійним законом. Це є наслідком того, що на цій ділянці $q = 0$, а також з аналітичного виразу $M_1 = R_A \cdot z_1 = 28{,}5 \cdot z_1$.

Визначивши $M_1\big|_{z_1=0} = 0$ і $M_1\big|_{z_1=3} = 28{,}5 \cdot 3 = 85{,}5$ кН·м та відклавши в масштабі ці ординати від осі епюри, проводимо через їхні кінці пряму, яка є епюрою M на I ділянці (рис. 5.7,*c*).

II ділянка: $3 \text{ м} \le z_2 \le 5$ м.

$$Q_2 = R_A - F = 28{,}5 - 20 = 8{,}5 \text{ кН}.$$

Поперечна сила на ділянці також стала. Епюра Q буде обмежена горизонтальною прямою з ординатою 8,5 кН у певному масштабі. Стрибок епюри Q на межі I і II ділянок спричинений наявністю діючої зосередженої сили $F = 20$ кН (рис. 5.7,*b*).

Згинальний момент $M_2 = R_A \cdot z_2 - F(z_2 - 3)$ є лінійною функцією. Для побудови її графіка і проведення прямої лінії знаходимо значення M_2 на межах II ділянки:

$$M_2\big|_{z_2=3} = 85{,}5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \qquad M_2\big|_{z_2=5} = 102{,}5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Відкладаємо у вибраному масштабі ординати M_2 на межах ІІ ділянки і проводимо через них пряму, яка і обмежує епюру згинальних моментів (рис. 5.7,*c*).

На ІІІ ділянці z_3 відраховуємо від правого крайнього перерізу B балки, $0 \le z_3 \le 5$ м. Аналітичний вираз для поперечної сили з урахуванням правила знаків, при розгляді діючих сил праворуч від перерізу, має вигляд $Q_3 = -R_B + qz_3$. Як бачимо, поперечна сила на цій ділянці є лінійною функцією, а її графіком – пряма лінія. Визначаємо дві точки, через які вона проходить. Якщо $z_3 = 0$, то $Q_3 = -R_B = -41{,}5$ кН; якщо $z_3 = 5$ м, то $Q_3 = 8{,}5$ кН. Відклавши ординати Q_3 в межових перерізах і провівши через них пряму, одержимо епюру поперечної сили на ІІІ ділянці (рис. 5.7,*b*).

Урахувавши, що на ІІІ ділянці діє рівномірно розподілене навантаження, робимо висновок, що згинальний момент тут буде змінюватись за параболічним законом. Опуклість параболи буде направлена вгору назустріч потоку розподіленого навантаження q. Парабола матиме вершину у перерізі, де $Q_3 = 0$, тобто перетинає вісь епюри. Дійсно, аналітичний вираз для згинального моменту має вигляд $M_3 = R_B \cdot z_3 - qz_3 \dfrac{z_3}{2} = 41{,}5z_3 - 5 \cdot z_3^2$.

При $z_3 = 0$, $M_3 = 0$; при $z_3 = 2{,}5$ м, $M_3 = 41{,}5 \cdot 2{,}5 - \dfrac{10 \cdot 2{,}5^2}{2} = 72{,}5$ кН·м;

при $z_3 = 5$ м, $M_3 = 41{,}5 \cdot 5 - \dfrac{10 \cdot 5^2}{2} = 82{,}5$ кН·м.

Маючи три значення згинального моменту M на ІІІ ділянці, будуємо за трьома точками параболу. Знайдемо положення вершини параболи і максимальне значення згинального моменту. Для цього із рис. 5.7,*b* знаходимо $z_3 = h = 4{,}15$ м, при якому $Q_3 = 0$, а

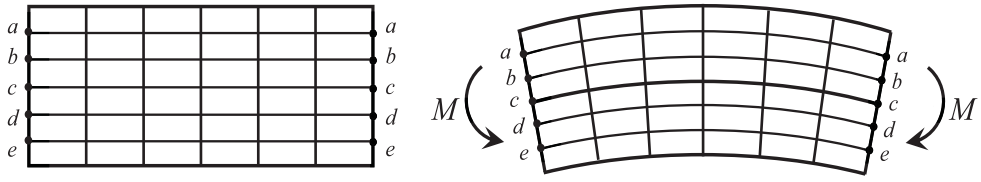
$$M_{max} = M_3\Big|_{z_3=4{,}15} = 41{,}5 \cdot 4{,}15 - 20 \cdot 4{,}15 \cdot \frac{4{,}15}{2} = 86{,}1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Епюра згинального моменту на ІІІ ділянці має вигляд, наведений на рис. 5.7,*c*.

5.5. Нормальні напруження у поперечних перерізах балки при чистому згині та їх визначення

За чистого згину в поперечних перерізах балки виникають тільки згинальні моменти. Розглянемо плоский чистий згин, за якого силова площина і поздовжня площина симетрії балки співпадають. Нанесемо на бокову поверхню призматичної балки прямокутного поперечного перерізу (рис. 5.8,*a*) прямокутну сітку, у якій горизонтальні лінії зображують поздовжні волокна балки, а вертикальні зображують лінії перетину поперечних перерізів з боковою поверхнею балки. Спостереження за поведінкою нанесеної прямокутної сітки на бокову поверхню гумової балки в процесі деформації чистого згину парами сил з моментом M (рис. 5.8,*b*) дають змогу прийняти такі гіпотези:

а) поперечні перерізи балки, які є плоскими до деформації, залишаються плоскими і в процесі деформації;



a *b*

Рис. 5.8

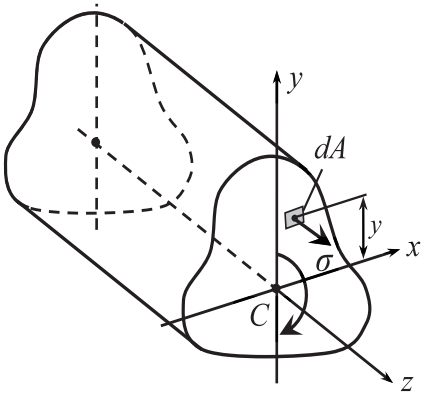


Рис. 5.9

б) поздовжні волокна *a–a*, *b–b* при згині видовжуються, а волокна *d–d*, *e–e* скорочуються. Довжина волокна *c–c* залишається незмінною, сталою. Це волокно називають нейтральним. За шириною перерізу волокна *c–c* утворюють шар, який називають нейтральним шаром. Лінію перетину нейтрального шару і поперечного перерізу балки називають нейтральною віссю даного поперечного перерізу балки. На рис. 5.9 вісь

x співпадає з нейтральною віссю поперечного перерізу. За шириною перерізу деформації поздовжніх волокон однакові, отже, і нормальні напруження не змінюються за шириною перерізу;

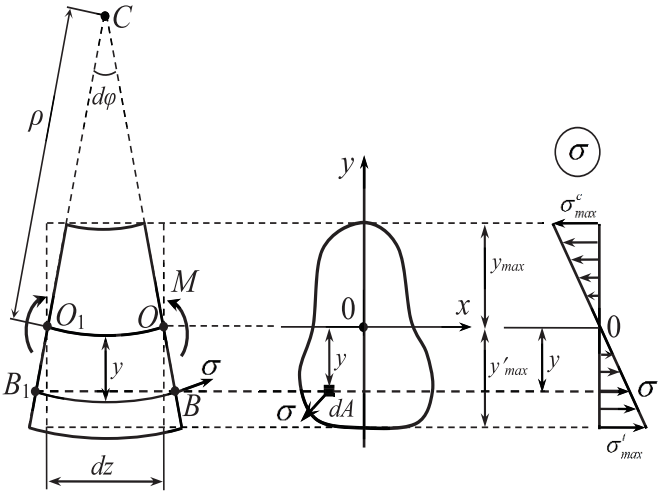


Рис. 5.10

в) поздовжні волокна одне на одне не тиснуть, отже, знаходяться в умовах простого розтягу або стиску.

Крім означених гіпотез, вважатимемо, що:

а) балка має хоча б одну поздовжню площину симетрії, і всі зовнішні сили розташовані в цій площині;

б) матеріал балки під час деформації підкорюється закону Гука, а модулі пружності за розтягу і стиску однакові;

в) співвідношення між розмірами балки (l – довжина, h – висота поперечного перерізу) $h/l \le 1/5$ такі, що балка працює в умовах плоского згину без скручування і жолоблення.

Розглянемо елемент балки малої довжини dz, який при згинанні скривлюється. Два суміжних поперечних перерізи повернуться, утворивши між собою кут $d\varphi$. Верхні волокна при цьому будуть стиснуті, а нижні розтягнуті. Волокна O_1O залишаються недеформованими і утворюють нейтральний шар. Радіус кривизни нейтрального шару позначимо ρ. Розглянемо довільне волокно B_1B, яке

знаходиться на відстані y від нейтрального шару. Абсолютне видовження довільного волокна B_1B дорівнюватиме

$$\Delta dz = (\rho + y)d\varphi - dz = \rho d\varphi + yd\varphi - \rho d\varphi = yd\varphi .$$

Визначимо відносне видовження цього волокна:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{yd\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho} y .$$

Враховуючи, що окремі волокна не тиснуть одне на одне, можна вважати, що кожне з них знаходиться в умовах простого розтягу або стиску. У цьому випадку відповідно до закону Гука нормальні напруження у цих волокнах дорівнюватимуть

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho} y .$$

Визначимо положення нейтральної осі поперечного перерізу, від якої відраховується відстань *y*. Для цього скористаємося тим фактом, що за чистого згину рівнодійна елементарних нормальних сил σdA, тобто нормальна сила *N*, у поперечному перерізі дорівнює нулю

$$N = \int_{(A)} \sigma dA = 0 ,$$

або

$$N = \int_{(A)} \frac{E}{\rho} ydA = \frac{E}{\rho} \int_{(A)} ydA = 0 ,$$

звідки

$$\int_{(A)} ydA = 0 .$$

Одержаний інтеграл являє собою статичний момент S_x площі поперечного перерізу відносно нейтральної осі O*x*, який дорівнює нулю тільки в тому випадку, коли вісь O*x* проходить через центр ваги перерізу. Отже, за чистого згину нейтральна вісь проходить через центр ваги поперечного перерізу, тобто є центральною віссю поперечного перерізу.

Визначимо тепер величину внутрішнього згинального моменту відносно нейтральної осі O*x* як суму моментів елементарних внутрішніх сил σdA відносно цієї осі

$$M = \int\limits_{(A)} \sigma dA \cdot y \,.$$

З урахуванням виразу для $\sigma = \dfrac{E}{\rho} y$,

матимемо

$$M = \int\limits_{(A)} \left(\frac{E}{\rho} y dA \right) y = \frac{E}{\rho} \int\limits_{(A)} y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_x \,,$$

де $I_x = \int\limits_{(A)} y^2 dA$ – осьовий момент інерції поперечного перерізу відносно осі О*x*.

З отриманої залежності матимемо, що $1/\rho = M / EI_x$, тобто кривизна зігнутої деформованої осі балки пропорційна згинальному моменту і обернено пропорційна жорсткості поперечного перерізу балки на згин EI_x. Жорсткість поперечного перерізу на згин, як бачимо, характеризує здатність балки чинити опір деформації згину. Вона забезпечується розмірами, конфігурацією поперечного перерізу і відповідно осьовим моментом інерції I_x та пружною характеристикою матеріалу балки, зокрема, модулем пружності *E*. Отриману залежність між кривизною балки та згинальним моментом можна розглядати як математичний вираз закону Гука при згині, який відображає лінійну залежність між переліченими величинами. Підставляючи значення кривизни у вираз для σ, одержимо формулу, яку називають формулою Нав'є, за прізвищем видатного французького вченого-механіка (1785–1836), який першим записав її у такому вигляді:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x} \,. \tag{5.6}$$

Формула Нав'є дає можливість визначити нормальні напруження при чистому згині у довільній точці довільного поперечного перерізу балки. З достатньою для практики точністю її використовують і у випадку поперечного згину. Аналіз формули Нав'є показує, що нормальні напруження залежать від *y* лінійно і за висотою поперечного перерізу змінюються за лінійним законом. Епюра розподілу нормальних напружень за висотою поперечного перерізу наведена на рисунку 5.10.

Врахуємо той факт, що внутрішній згинальний момент у горизонтальній площині, тобто відносно осі Оy,

$$M_y = \int\limits_{(A)} \sigma dA \cdot x = 0 .$$

Маючи на увазі, що $\sigma = E\dfrac{y}{\rho}$, вираз для M_y перепишемо у вигляді

$$\frac{E}{\rho}\int\limits_{(A)} yx dA = 0 ,$$

звідки отримаємо

$$\int\limits_{(A)} yx\, dA = I_{yx} = 0 ,$$

де I_{yx} є відцентровим моментом інерції поперечного перерізу відносно осей y, x. Отже, для того щоб згин був плоским і площина згинального моменту співпадала з площиною зігнутої осі балки, необхідно, щоб відцентровий момент інерції поперечного перерізу відносно осей y, x дорівнював нулю. А це означає, що осі y, x повинні бути головними. У нашому випадку вісь Оy є віссю симетрії поперечного перерізу, отже, осі y, x є головними, і умова $I_{yx} = 0$ виконується. Балки несиметричного поперечного перерізу розглянемо пізніше. Аналіз формули Нав'є для визначення нормальних напружень у довільній точці довільного поперечного перерізу балки за чистого згину показує, що найбільші нормальні напруження виникають у точках периферії поперечного перерізу при $y = y_{max}$, тобто в точках перерізу, найбільш віддалених від нейтральної осі Оx, причому додатні в розтягнутих волокнах та від'ємні в стиснутих волокнах. Найбільше за модулем значення нормального напруження, яке виникатиме в точках периферії $y = y_{max}$ небезпечного перерізу балки, тобто поперечного перерізу, в якому виникає максимальний за модулем згинальний момент $M = M_{max}$, дорівнюватиме

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I_x},$$

або

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_x / y_{max}} = \frac{M_{max}}{W_x},$$

де величину $W_x = I_x / y_{max}$ називають осьовим моментом опору поперечного перерізу балки відносно осі О*x*. Зрозуміло, що для поперечного перерізу, симетричного і відносно горизонтальної осі О*x*, відстані до найбільш віддалених верхніх і нижніх точок будуть однакові, і найбільші стискуючі та розтягуючі нормальні напруження будуть за модулем рівні. У противному разі нормальні напруження у верхніх крайніх точках та в нижніх крайніх точках поперечних перерізів не будуть однаковими.

На рис. 5.10 найбільші стискуючі напруження будуть при $y = y_{max}$, а найбільші розтягуючі при $y = y'_{max}$:

$$\sigma^c_{max} = \frac{M \cdot y_{max}}{I_x};$$

$$\sigma^t_{max} = \frac{M \cdot y'_{max}}{I_x}.$$

Відношення $\frac{I_x}{y_{max}}$ та $\frac{I_x}{y'_{max}}$ позначимо відповідно W_x та W'_x. Ці величини називають осьовими моментами опору поперечного перерізу. Якщо нейтральна лінія поперечного перерізу є його віссю симетрії, тоді $y_{max} = y'_{max}$ і найбільші розтягуючі і стискуючі напруження в перерізі рівні за абсолютною величиною. Осьові моменти опору відносно головних центральних осей для прямокутника зі сторонами b, h та круга з діаметром d відповідно дорівнюватимуть:

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; \quad W_x = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Для стандартних прокатних профілів у вигляді двотаврів, швелерів та кутників, моменти опору W_x, відповідні номеру профілю, знаходимо у спеціальних таблицях сортаменту прокатної сталі. Ще раз підкреслимо, що формула для визначення нормальних напружень (5.6) отримана для випадку плоского чистого згину, але з достатньою для практики точністю вона придатна для визначення нормальних напружень і у випадку плоского поперечного згину.

Аналіз формули (5.6) дає можливість зробити висновок, що, на відміну від центрального розтягу–стиску, при згині, як і при крученні, напруження за висотою перерізу розподіляються нерівномірно. Нормальні напруження набирають найбільшого значення в точках периферії перерізу, у точках нейтральної осі вони відсутні, тобто дорівнюють нулю, а в точках поблизу нейтральної осі – малі; матеріал балки, розташований поблизу нейтрального шару, є недонапруженим. Тому з метою економії матеріалу і зменшення матеріалоємності та ваги конструкції для елементів, що працюють на згин, слід підбирати такі форми поперечних перерізів, у яких більша частина матеріалу була б віддалена від нейтральної лінії.

Найближчим до раціонального перерізу, що використовується в інженерній практиці, є двотавровий переріз, форма якого має вигляд двох спарених літер Т. Більшу частину матеріалу балки двотаврового поперечного перерізу містять полички, вони ж сприймають на себе нормальні напруження та працюють в основному на розтяг–стиск. Стінка двотавра необхідна в першу чергу для забезпечення роботи поличок як одного цілого.

5.6. Умова міцності балки за нормальними напруженнями. Два типи (три види) розрахунків балок на міцність

Міцність балки буде забезпечена в тому випадку, якщо найбільші нормальні напруження в точках периферії ($y = y_{max}$) небезпечного поперечного перерізу балки ($M = M_{max}$) не перевищуватимуть допустимих значень нормальних напружень, встановлених для балки, а саме:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \le \sigma_{adm}, \tag{5.7}$$

де M_{max} – максимальне значення згинального моменту в поперечних перерізах балки, яке визначаємо за епюрою згинальних моментів; W_x – осьовий момент опору поперечного перерізу балки відносно нейтральної осі перерізу; σ_{adm} – допустиме значення нормального напруження для балки.

На основі записаної умови міцності балки за нормальними напруженнями (5.7), яка з достатньою для практики точністю придатна і у випадку поперечного згину, виконують два типи (три види) розрахунків балок на міцність.

До першого типу проектувальних розрахунків балок на міцність відносять два види. У першому виді розрахунків відомим є зовнішнє навантаження балки та значення допустимого нормального напруження для неї. За відомим навантаженням будують епюри поперечних сил та згинальних моментів, звідки знаходять найбільше за модулем значення згинального моменту M_{max}. Маючи значення M_{max} та допустиме значення нормального напруження σ_{adm} для балки, з правої частини умови міцності обчислюють необхідне значення осьового моменту опору поперечного перерізу балки

$$W_x = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}}.$$

Маючи значення осьового моменту опору поперечного перерізу, за відомими формулами або таблицями сортаменту визначають необхідні розміри поперечних перерізів балки.

У другому виді розрахунків балок на міцність відомими є розміри поперечних перерізів і відповідно W_x та значення допустимого нормального напруження σ_{adm} для балки. Значення ж максимального згинального моменту, який може виникати у поперечних перерізах балки без порушення її міцності, визначають з правої частини умови міцності

$$M_{max} = \sigma_{adm} \cdot W_x. \qquad (5.8)$$

Другий тип розрахунків та водночас третій вид називають перевірочним або контрольним. Тут нам все відомо для балки: максимальне значення згинального моменту M_{max} у поперечних перерізах, розміри поперечних перерізів і відповідно осьовий момент їх опору W_x, допустиме значення нормального напруження σ_{adm}. Усі ці величини підставляємо в умову міцності балки за нормальними напруженнями (5.7) і перевіряємо її виконання. У разі виконання міцність балки буде забез-

печена, у протилежному випадку щось треба змінити: чи то навантаження зменшити, чи збільшити розміри поперечних перерізів балки, чи вибрати міцніший матеріал, з якого виготовлена балка. Потреба у перевірочних розрахунках балок виникає під час реконструкції, модернізації та форсажу машин і обладнання.

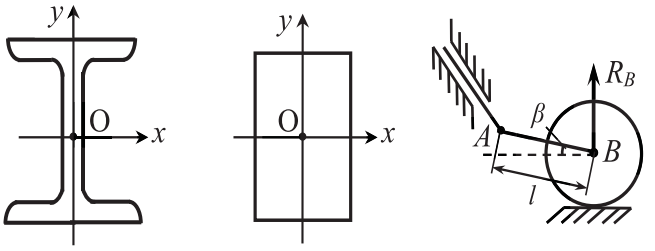
Витрати матеріалу, і відповідно вага балки, пропорційні площі її поперечного перерізу A. Отже, чим більше відношення W_x / A, тим більший згинальний момент витримає переріз із заданою площею та відповідно із заданою вагою, або менше матеріалу треба витратити на виготовлення балки, яка витримає заданий згинальний момент. Відношення W_x / A є характеристикою якості поперечного перерізу балки. Визначивши, відносно якої осі перерізу осьовий момент опору перерізу W буде максимальним, можна вказати, в якій площині слід навантажувати балку, щоб вона могла витримати найбільше навантаження. Наприклад, двотаврову балку і балку з наведеним прямокутним профілем (рис. 5.11,*a*, *b*) більш раціонально навантажувати в площинах Ozy (у вертикальних площинах). Підкреслимо, що формули (5.6), (5.7) придатні у тому випадку, коли площина згинального моменту містить одну з головних осей інерції поперечного перерізу балки, тоді друга головна вісь інерції поперечного перерізу буде нейтральною віссю. Зокрема, якщо переріз балки симетричний, то вісь симетрії є однією із головних осей інерції. Якщо площина згинального моменту не співпадає з жодною із головних осей інерції поперечного перерізу, тоді має місце так званий косий згин. Випадок косого згину розглянемо далі.

Як приклад, визначимо переріз двотаврового профілю, використовуючи умову міцності за нормальними напруженнями для балки, наведеної на рис. 5.6, при допустимих значеннях нормальних напружень σ_{adm} = 160 МПа. Із побудованої епюри (рис. 5.6,*c*) визначаємо найбільше за модулем значення згинального моменту M_{max} = 60 кН·м. Із правої частини умови міцності $\sigma_{adm} = M_{max} / W_x \le \sigma_{adm}$ визначаємо необхідне значення осьового моменту опору поперечного перерізу балки $W_x \ge \dfrac{M_{max}}{\sigma_{adm}} = \dfrac{60 \cdot 10^4}{160 \cdot 10} = 375$ см^3. За таблицею сортаменту двотаврових балок

(ГОСТ 8239-56) вибираємо двотавр № 27, у якого $W_x = 371$ см^2. Найбільші нормальні напруження становитимуть

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{60 \cdot 10^4}{371} = 1617 \text{ кг/см}^2 = 161{,}7 \text{ МПа}.$$

Перевантаження становить $\frac{161{,}7 - 160}{160} \cdot 100\% \approx 1\%$, що допустимо.



a *b* *c*

Рис. 5.11

Приклад 6. Визначити діаметр задньої осі плуга *AB*, яка працює за схемою, зображеною на рис. 5.11,*c*, якщо реакція $R_B = 220$ кг, $l = 33$ см, $\sigma_{adm} = 1200$ кг/см^2.

Розв'язування. У робочому стані кут β малий, і вісь *AB* можна вважати горизонтальною, а згинальний момент $M_{max} = R_B \cdot l$.

Умову міцності запишемо

$$\sigma_{max} = M_{max} / W_x \le \sigma_{adm}.$$

Враховуючи, що осьовий момент опору для круглого поперечного перерізу $W_x = \pi d^3 / 32 \approx 0{,}1 d^3$, із умови міцності матимемо $\frac{R_B \cdot l}{0{,}1 d^3} \le \sigma_{adm}$, звідки

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{R_B \cdot l}{0{,}1 \sigma_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{220 \cdot 33}{0{,}1 \cdot 1200}} = 3{,}9 \text{ см}.$$

Приймаємо $d = 40$ мм.

5.7. Дотичні напруження у поперечних перерізах балки та їх визначення. Умова міцності балки за дотичними напруженнями

За плоского чистого згину в поперечних перерізах балки виникають тільки нормальні напруження. Відповідні нормальним напруженням внутрішні сили приводяться до згинальних моментів у поперечних перерізах. У випадку поперечного згину в поперечних перерізах балки виникають не тільки згинальні моменти M, а й поперечні сили Q, які є рівнодійними внутрішніх розподілених сил, що виникають у площині поперечного перерізу. Таким чином, у точках поперечних перерізів балки за поперечного згину виникають не тільки нормальні, а й дотичні напруження. Інакше кажучи, згинальний момент M у поперечному перерізі зв'язаний з нормальними напруженнями σ, а поперечна сила Q пов'язана з дотичними напруженнями τ.

За плоского поперечного згину гіпотеза плоских перерізів не виконується. Дотичні напруження за законом парності виникають і в поздовжніх перерізах балки. За рахунок дотичних напружень відбувається зсув між поздовжніми волокнами і відповідно викривлення, депланація поперечних перерізів. Але депланація поперечних перерізів несуттєво впливає на величину нормальних напружень, тому для визначення нормальних напружень і у випадку поперечного згину використовують формулу (5.6), отриману для випадку чистого згину.

Для виведення формули визначення дотичних напружень τ розглянемо шарнірно оперту балку (рис. 5.12,*а*), навантажену силою F. Поперечні перерізи балки симетричні відносно вертикальної осі Oy (рис. 5.12,*d*). Згинальний момент M і перерізуюча сила Q діють у вертикальній площині yz.

Нехай нам треба визначити дотичні напруження τ в точках прямої BB_1, що знаходиться на відстані y від нейтральної осі x поперечного перерізу. Ширина поперечного перерізу в цьому місці буде $b(y)$. Приймемо дві спрощуючі гіпотези щодо характеру розподілу дотичних напружень:

1) дотичні напруження τ паралельні поперечній (перерізуючій) силі Q, тобто вони вертикальні й утворюють вертикальний потік, рівнодійна якого являє собою поперечну силу Q;

2) дотичні напруження τ постійні за шириною поперечного перерізу, тобто однакові в усіх точках прямої BB_1.

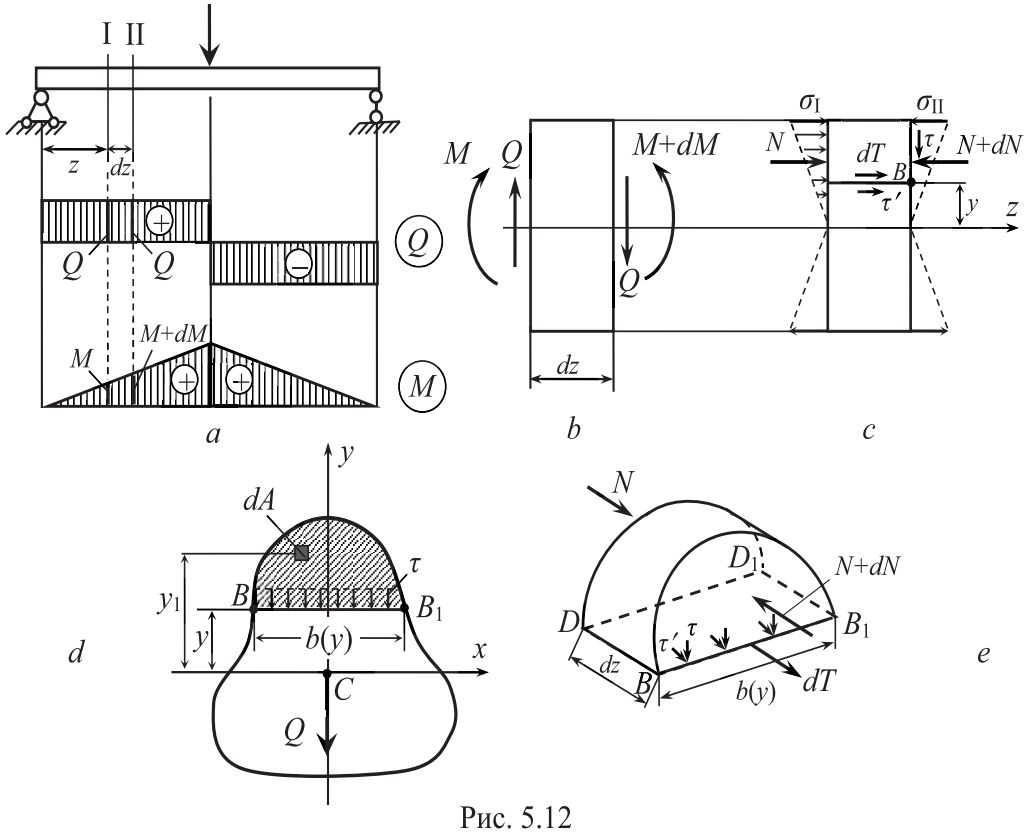


Рис. 5.12

Виділимо двома нескінченно близькими поперечними перерізами I–I та II–II елемент балки довжиною dz. Як видно з епюр Q та M, вони в обох перерізах додатні, причому поперечна сила не змінюється, а згинальний момент у перерізі II–II змінився на величину dM (рис. 5.12,*b*). Нормальні напруження в перерізах I–I та II–II відповідно будуть:

$$\sigma_{\text{I}} = \frac{M \cdot y_1}{I_x}; \qquad \sigma_{\text{II}} = \frac{(M + dM) \cdot y_1}{I_x},$$

де через y_1 позначена (на відміну від y) відстань від осі x до точки, в якій визначаються нормальні напруження. Поздовжньою горизонтальною площиною, що

проходить на відстані y від осі x (тобто проходить через пряму BB_1), відсічемо верхню частину елемента і розглянемо її рівновагу. Заштрихована частина поперечного перерізу називається відсіченою площею поперечного перерізу $A^{відс}$. Розглянемо рівновагу сил, що діють на верхню відсічену частину вподовж осі z.

Рівнодійна нормальних сил $\sigma_{\text{I}} \cdot dA$, що діють у лівому перерізі, складатиме

$$N = \int\limits_{A^{відс}} \sigma_{\text{I}} dA = \int\limits_{A^{відс}} \frac{M \cdot y_1}{I_x} dA = \frac{M}{I_x} \int\limits_{A^{відс}} y_1 dA = \frac{M}{I_x} S_x^{відс}.$$

Одержаний інтеграл $\int\limits_{A^{відс}} y_1 dA$ є статичним моментом $S_x^{відс}$ відсіченої площі перерізу відносно осі x.

Рівнодійна нормальних сил $\sigma_{\text{II}} \cdot dA$, що діють у правому перерізі, буде іншою:

$$N + dN = \frac{(M + dM)}{I_x} S_x^{відс}.$$

Крім указаних сил, уздовж осі z діє ще сила dT, що виникає за рахунок дотичних напружень, які за законом парності діють у горизонтальній площині BDD_1B_1. Ця площина шириною dz і завдовжки $b(y)$. За законом парності дотичних напружень на цій площині діють такі самі дотичні напруження τ', як і в точках прямої BB_1 поперечного перерізу τ.

Вважаючи, що дотичні напруження τ в площині BDD_1B_1 розподілені рівномірно, рівнодійна цих сил $dT = \tau \cdot b(y)dz$.

Отже, сума проекцій на вісь z сил, що діють на відсічену частину, буде

$$N - (N + dN) + dT = 0,$$

звідки $dT = dN$.

Таким чином, одержимо

$$\tau \cdot b(y)dz = \frac{dM}{I_x} S_x^{відс},$$

звідки $\tau = \frac{dM}{dz} \frac{S_x^{відс}}{I_x \cdot b(y)}$. Оскільки $\frac{dM}{dz} = Q$, то

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{відс}(y)}{I_x \cdot b(y)}, \tag{5.9}$$

де Q – поперечна (перерізуюча) сила в даному перерізі; $S_x^{відс}(y)$ – статичний момент відсіченої площі поперечного перерізу (заштрихованої частини перерізу) відносно нейтральної осі x; I_x – осьовий момент інерції всього поперечного перерізу відносно осі x; $b(y)$ – ширина перерізу на рівні точок, де визначаються дотичні напруження.

Формула (5.9) носить ім'я видатного російського вченого-механіка Д.І. Журавського (1821–1891).

Зауважимо, що із-за спрощуючих гіпотез щодо характеру розподілу дотичних напружень, формула Журавського дає результати, близькі до точних (визначених методами теорії пружності) тільки в окремих випадках. Наприклад для балок прямокутних поперечних перерізів, у яких ширина значно менша від висоти. Але, враховуючи простоту формули, у практичних розрахунках її широко застосовують для балок з довільними поперечними перерізами (Цурпал, 2005).

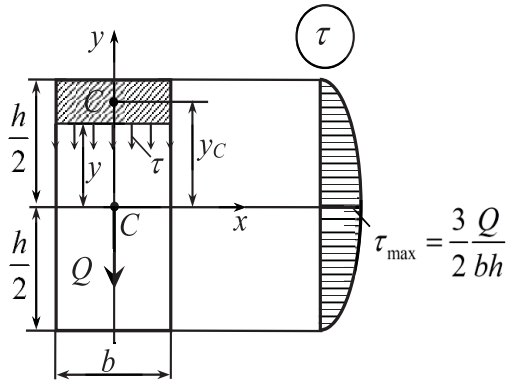


Рис. 5.13

Визначимо закон розподілу дотичних напружень по висоті перерізу для балки прямокутного поперечного перерізу, наведеного на рис. 5.13. Оскільки ширина перерізу b по висоті не змінюється, то закон розподілу дотичних напружень визначиться законом зміни $S_x^{відс}(y)$. Статичний момент площі відсіченої частини перерізу відносно осі x дорівнюватиме добутку площі відсіченої частини перерізу на відстань центра ваги цієї частини перерізу від осі x

$$S_x^{відс} = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Осьовий момент інерції прямокутника відносно власної центральної осі x дорівнює $I_x = \frac{bh^3}{12}$.

Остаточно, після деяких перетворень, отримаємо, що дотичні напруження τ по висоті прямокутного поперечного перерізу балки змінюються за законом параболи

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \tag{5.10}$$

У точках периферії поперечного перерізу, тобто в точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії, при $y = \pm h/2$ дотичні напруження дорівнюють нулю. У точках, які належать нейтральній осі x, при $y = 0$ дотичні напруження досягають максимального значення

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}. \tag{5.11}$$

Епюра розподілу дотичних напружень τ наведена на рис. 5.13. Як бачимо, визначені за формулою Журавського, найбільші дотичні напруження в 1,5 раза перевищують значення напружень, які б ми одержали, якби припустили, що вони розподілені у поперечному перерізі рівномірно, тобто $\tau = Q/bh$.

Для складних перерізів, що утворені із прямокутників, наприклад для двотаврового, епюра розподілу дотичних напружень τ зображена на рис. 5.14.

Визначимо дотичні напруження в точках I–I, які належать полиці і знаходяться на відстані y_n від осі x. Статичний момент площі заштрихованої частини дорівнюватиме

$$S_{xn}^{відс} = \frac{b_n}{2}\left(\frac{h^2}{2} - y_n^2\right).$$

Тоді
$$\tau_n = \frac{QS_{xn}^{відс}}{I_x \cdot b_n} = \frac{Q}{2I_x}\left(\frac{h^2}{2} - y_n^2\right), \tag{5.12}$$

тобто дотичні напруження по висоті поличок розподіляються за законом параболи, яка у випадку постійної ширини перерізу пройшла б через точки 1, 2, 3, 4,

5 (рис. 5.14,*b*). У точках переходу від полички до стінки ширина перерізу різко змінюється, дотичні напруження стрибком зростають у стільки разів, у скільки разів ширина полички більша за товщину стінки. На епюрі (рис. 5.14,*b*) маємо відповідно стрибки.

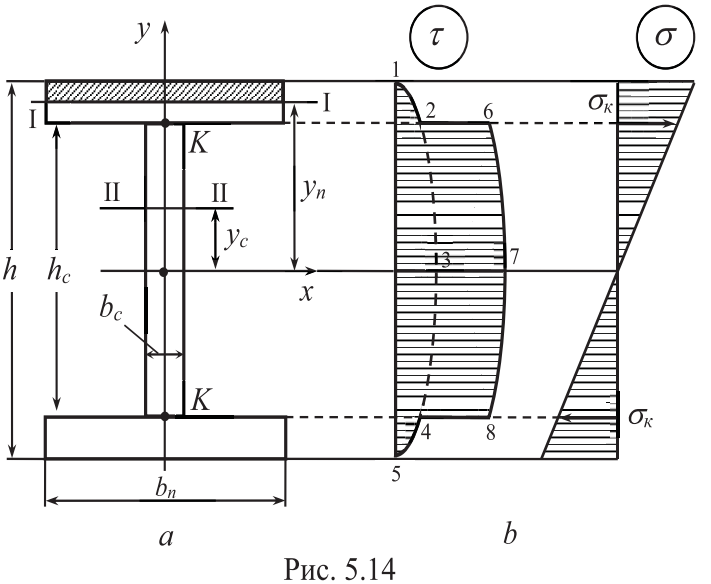


Рис. 5.14

У точках стінки, розташованих на відстані y_c від осі x, дотичні напруження дорівнюватимуть

$$\tau_c = \frac{Q S_x^{відс}}{I_x b_c},$$

де $S_x^{відс}$ – статичний момент відсіченої площі, розташованої вище прямої ІІ–ІІ (рис. 5.14,*a*), відносно осі x визначається як сума статичних моментів двох прямокутників: один – це поперечний переріз полички, другий – частина перерізу стінки

$$S_x^{відс} = b_n\left(\frac{h}{2}-\frac{h_c}{2}\right)\left(\frac{h_c}{2}+\frac{\frac{h}{2}-\frac{h_c}{2}}{2}\right)+\frac{b_c}{2}\left(\frac{h_c^2}{4}-y_c^2\right).$$

Дотичні напруження в точках стінки

$$\tau_c = \frac{Q}{I_x b_c}\left[\frac{b_n}{8}\left(h^2-h_c^2\right)+\frac{b_c}{2}\left(\frac{h_c^2}{4}-y_c^2\right)\right]. \qquad (5.13)$$

Епюра τ_c пройде через точки 6, 7, 8 (рис. 5.14,*b*). Умова міцності за дотичними напруженнями для даного перерізу матиме вигляд

$$\tau_{max} = \tau_c\big|_{y_c=0} = \frac{Q}{I_x b_c}\left[\frac{b_n}{8}\left(h^2-h_c^2\right)+\frac{h_c^2}{8}\right] \le \tau_{adm}. \qquad (5.14)$$

Умову міцності балки за дотичними напруженнями запишемо

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{I_x}\left(\frac{S_x^{відс}}{b(y)}\right)_{max} \le \tau_{adm}. \qquad (5.15)$$

Практика розрахунків балок на міцність за поперечного згину показує, що найчастіше нормальні напруження значно більші, ніж дотичні, а тому міцність балки залежить у першу чергу від величини максимальних нормальних напружень в її небезпечному перерізі. Ось чому проводити перевірку міцності балки, підбирати поперечні перерізи рекомендується в першу чергу з умови міцності за нормальними напруженнями, а потім з'ясовувати, чи виконується умова міцності за дотичними напруженнями. З умови міцності балки за нормальними напруженнями (5.7) визначаємо осьовий момент опору поперечного перерізу балки

$$W_x \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}}. \qquad (5.16)$$

Установивши його, визначають відповідні розміри поперечних перерізів балки або за відомим уже значенням осьового моменту опору підбирають відповідний стандартний профіль.

Приклад 7. Для стальної балки, розрахункова схема якої наведена на рис. 5.15, підібрати двотавровий, круглий і прямокутний поперечні перерізи. Для прямокутника відношення висоти h до ширини b прийняти рівним 2. Порівняти вагу одного метра довжини балки кожного перерізу. Допустиме нормальне напруження для балки взяти σ_{adm} = 160 МПа = 16 кН/см^2 = 1600 кг/см^2.

Розв'язування. Склавши рівняння рівноваги, знаходимо реакції опор

$$R_A = R_B = \frac{q\,l}{2} = 40 \text{ кН}.$$

Аналітичні вирази для поперечної сили та згинального моменту мають вигляд:

$$Q(z) = R_A - qz = 40 - 20z;$$

$$M(z) = R_A z - \frac{qz^2}{2} = 40 \cdot z - 10z^2.$$

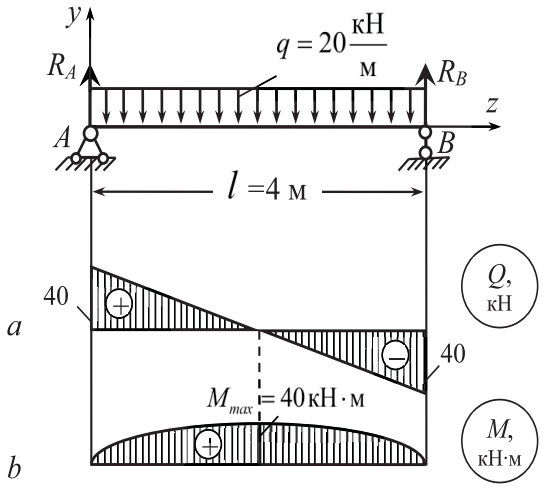


Рис. 5.15

Знаючи величину поперечної сили в перерізах над опорами, відклавши ці ординати і з'єднавши їх прямою, маємо епюру Q (рис. 5.15). Епюра згинальних моментів буде обмежена квадратною параболою. Максимальний згинальний момент виникає в поперечному перерізі посередині прольоту балки і дорівнює

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{20 \cdot 4^2}{8} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

З умови міцності балки за нормальними напруженнями (5.7) визначаємо потрібний осьовий момент опору її поперечного перерізу

$$W_x = \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{40 \cdot 10^2}{16} = 250 \text{ см}^3.$$

Підбираємо за таблицею сортаменту (ГОСТ 8239-56) двотавр № 22а, у якого W_x = 251 см^3, а площа поперечного перерізу A = 32,4 см^2. Для прямокутного перерізу, висота якого h, а ширина b, момент опору дорівнює $W_x = bh^2/6$. Ураховуючи, що $h/b = 2$, знаходимо

$$W_x = \frac{b(2b)^2}{6} = 250 \text{ см}^3.$$

Звідси $b = \sqrt[3]{375} = 7{,}2$ см; $h = 2\,b = 14{,}4$ см; $A = b\,h = 7{,}2 \cdot 14{,}4 = 103{,}7$ см^2.

Для визначення діаметра круглого поперечного перерізу скористаємося формулою для визначення осьового моменту опору $W_x = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0{,}1D^3$. Тоді $0{,}1D^3 = 250$; $D = \sqrt[3]{250/0{,}1} = 13{,}6$ см та площа поперечного перерізу балки A = 145,2 см^2.

Відношення площ поперечних перерізів підібраних балок і відповідно відношення погонної ваги цих балок дорівнюють 32,4 : 103,7 : 145,2 = 1 : 3,2 : 4,48. Отримані результати показують, у скільки разів балка двотаврового поперечного перерізу легша від розглянутих балок інших перерізів, що свідчить про можливість економії матеріалу при забезпеченні тієї ж самої міцності.

За поперечного згину балок з тонкостінними перерізами, наприклад двотавровими, у точках нейтральної осі таких перерізів можуть виникати значні дотичні напруження, особливо у випадках, коли в поперечному перерізі з'являється велика поперечна сила. За таких умов необхідно перевірити міцність балки за дотичними напруженнями. Умова міцності балки за дотичними напруженнями має вигляд

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{x\,max}^{відс}}{I_x b} \le \tau_{adm},$$

де $S_{x\max}^{відс}$ – статичний момент площі половини перерізу двотавра відносно нейтральної осі x; I_x – осьовий момент інерції перерізу; b – товщина стінки двотавра; τ_{adm} – допустиме дотичне напруження.

Для балок, виготовлених з пластичних матеріалів, допустимі дотичні напруження приймаються наближено рівними $0{,}5\sigma_{adm}$. У нашій задачі допустимі значення дотичних напружень для балки дорівнюватимуть

$$\tau_{adm} = 0{,}5 \cdot \sigma_{adm} = 8 \text{ кН/см}^2.$$

Враховуючи, що $Q_{max} = 40$ кН, а за таблицею сортаменту для двотавра № 22а матимемо

$$S_{x\,max}^{відс} = 141 \text{см}^3; \quad I_x = 2760 \text{ см}^4; \quad b = 0{,}53 \text{ см},$$

знаходимо

$$\tau_{max} = \frac{40 \cdot 141}{2760 \cdot 0{,}53} = 3{,}86 \text{ кН/см}^2 \le \tau_{adm}.$$

Отже, найбільші значення дотичних напружень, які виникають у поперечних перерізах балки, не перевищують допустимих значень, і міцність балки за дотичними напруженнями забезпечена.

5.8. Перевірка міцності балки за головними напруженнями

На рис. 5.16 наведена ділянка фасаду балки в тому місці, де розташовані перерізи з найбільшим значенням згинального моменту (переріз I–I) та поперечної сили (переріз II–II). Використовуючи умову міцності балки за нормальними напруженнями

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \le \sigma_{adm} \tag{5.17}$$

і умову міцності балки за дотичними напруженнями

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_x^{відс}}{I_x b} \le \tau_{adm}, \tag{5.18}$$

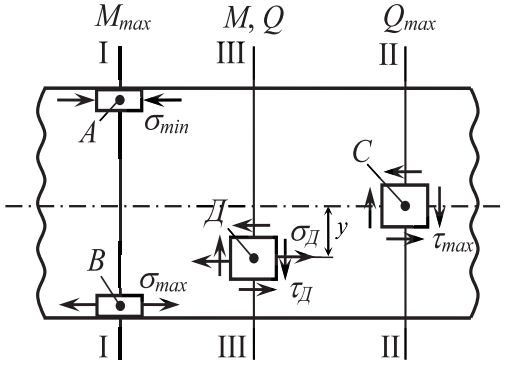


Рис. 5.16

ми фактично перевіряємо міцність балки в трьох точках *A*, *B*, C відповідних перерізів: точки *A*, *B*, навколо яких виділені елементи, розтягнуті (*B*) або стиснуті (*A*), дотичні напруження на гранях цих елементів дорівнюють нулю; точка *C* – належить нейтральному шару, нормальні напруження на гранях елемента дорівнюють нулю, а дотичні досягають максимального значення. Елемент, виділений навколо точки *C*, знаходиться в умовах чистого зсуву.

Природно, що виникає питання, чи не знайдеться такий переріз, а в самому перерізі така точка, навколо якої виникають і нормальні, і дотичні напруження, хоч і не максимальні, але достатньо великі, а їхня спільна дія створює більш небезпечний напружений стан, ніж у точках *A*, *B* і *C*.

Для вирішення цього питання розглянемо в довільному перерізі ІІІ–ІІІ точку *Д*, яка розташована на відстані *y* від нейтрального шару і виділимо навколо цієї точки малий елемент (рис. 5.16). На гранях цього елемента, перпендикулярних осі балки, діють нормальні напруження $\sigma_Д$ і дотичні напруження $\tau_Д$ – на чотирьох бокових гранях. Оскільки поперечний переріз ІІІ–ІІІ вибраний довільно, *M* і *Q* – не максимальні. Напруження на гранях елемента навколо точки *Д* визначаться за формулами:

$$\sigma_Д = \frac{M \cdot y}{I_x}; \tag{5.19}$$

$$\tau_Д = \frac{Q S_x^{відс}}{I_x b}. \tag{5.20}$$

Дві грані елемента вільні від напружень, тобто навколо точки *Д* ми маємо плоский напружений стан. Незважаючи на те, що $\sigma_Д$ і $\tau_Д$ не максимальні, їх спільна дія може викликати в точці *Д* більш небезпечний напружений стан, ніж у точках *A*, *B* і *C*, де діють або тільки максимальні нормальні напруження, або тільки максимальні дотичні напруження.

За складного напруженого стану, як відомо, перевірку міцності виконують, використовуючи одну із теорій міцності. Зокрема, перша теорія міцності спирається на гіпотезу про те, що вирішальним фактором, який визначає небезпечний напружений стан, є головні напруження. Скористаємося І теорією міцності і перевіримо міцність елемента за головними напруженнями. Визначимо, наприклад, головні напруження на площинах елемента навколо точки *Д*. За плоского напруженого стану

$$\sigma_{\max\diagup\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{yx}^2}.$$

У нашому випадку: $\sigma_x = \sigma_Д$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{yx} = \tau_Д$, тоді

$$\sigma_{\max\diagup\min} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_Д}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_Д^2 + 4\tau_Д^2}.$$

Перевірку міцності проводимо за головними напруженнями за І теорією міцності

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_Д}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_Д^2 + 4\tau_Д^2} \le \sigma_{adm}. \qquad (5.21)$$

Отже, якщо в якійсь точці виникають хоч і не максимальні, але достатньо великі нормальні і дотичні напруження, то їх спільна дія може викликати більш небезпечний напружений стан, аніж дія найбільших нормальних і дотичних напружень в інших точках.

Виникнення в тій самій точці водночас достатньо великих нормальних і дотичних напружень можливо, якщо виконано дві умови:

1) згинальний момент і поперечна сила досягають максимальних або близьких до них значень у тому ж самому поперечному перерізі;

2) ширина перерізу різко змінюється поблизу верхнього або нижнього країв перерізу, наприклад двотавровий переріз.

Епюри напружень для таких профілів (рис. 5.14) показують, що в точках переходу від полиці до стінки нормальні і дотичні напруження мають величини, близькі до відповідних максимальних значень у даному перерізі. Виконання водночас двох наведених вище умов визначає необхідність перевірки міцності балки за однією із теорій міцності і вказує на той поперечний переріз і відповідну точку в цьому перерізі, де ця перевірка повинна бути зроблена. Поперечні перерізи балки, в яких водночас і поперечна сила, і згинальний момент набирають максимальних значень або значень, близьких до максимальних, називають *небезпечними*. Точки поперечних перерізів, у яких водночас нормальні і дотичні напруження набирають значень, близьких до максимальних, називають *небезпечними* точками перерізу. Таким чином, повну перевірку міцності балок за головними напруженнями за однією з теорій міцності проводимо у небезпечних точках небезпечних поперечних перерізів балки.

Може статися так, що M і Q не досягають максимального значення в жодному із перерізів, а мають місце великі значення в декількох перерізах. Тоді ви-

бирають декілька перерізів і декілька точок у перерізах, які можуть дати найбільші значення зведених (еквівалентних) напружень, тобто використовують метод проб. Нагадаємо, що для перевірки міцності балок, виготовлених з крихких матеріалів, більш придатні I та II класичні теорії міцності, а для балок, виготовлених з пластичних матеріалів, використовують III та IV теорії міцності.

Приклад 8. Розглянемо балку, розрахункова схема якої наведена на рис. 5.17. Необхідно визначити розміри круглого, квадратного, прямокутного і двотаврового поперечних перерізів цієї балки. Порівняти витрати матеріалу для балок різних поперечних перерізів. За необхідності перевірити достатність підібраних розмірів поперечних перерізів в умовах міцності за дотичними і головними напруженнями. Для прямокутника $h / b = 2$; $\sigma_{adm} = 160$ МПа = 1600 кг/см^2; $\tau_{adm} = 100$ МПа = 1000 кг/см^2.

Розв'язування. Щоб виявити найбільш навантажені перерізи, необхідно побудувати епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M.

Побудову епюр розпочнемо з вільного кінця балки, що дасть можливість обійтися без визначення опорних реакцій у затисненні. Аналітичні вирази для Q і M на I ділянці $(0 \le z_1 \le 1)$ мають вигляд:

$$Q(z_1) = F + qz_1; \quad M(z_1) = -Fz_1 - \frac{qz_1^2}{2};$$

$$Q(0) = F = 20 \text{ кН}; \quad M(0) = 0;$$

$$Q(1) = 20 + 15 \cdot 1 = 35 \text{ кН}; \quad M(1) = -20 \cdot 1 - \frac{15 \cdot 1^2}{2} = -27{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Відповідно матимемо на II ділянці $(0 \le z_2 \le 1)$:

$$Q(z_2) = F + q(1 + z_2); \quad M(z_2) = -F(1 + z_2) - \frac{q(1 + z_2)^2}{2} + M_0;$$

$$Q(0) = 35 \text{ кН}; \quad M(0) = -7{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad Q(1) = 50 \text{ кН}; \quad M(1) = -60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

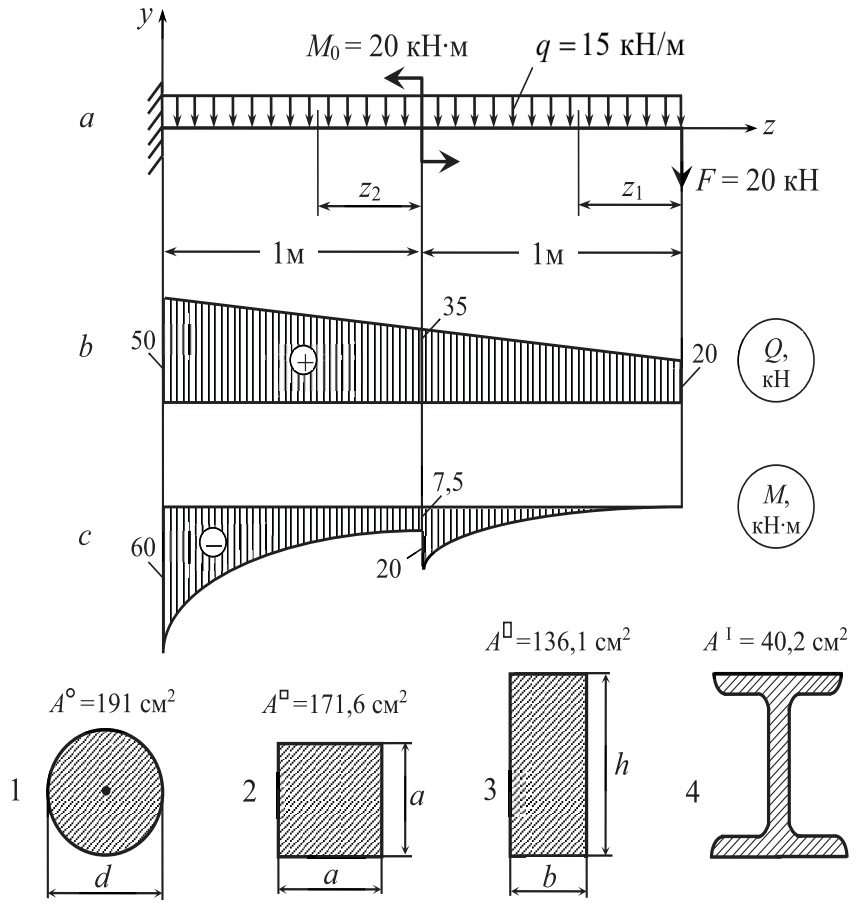


Рис. 5.17

За отриманими значеннями Q та M будуємо їхні епюри (рис. 5.17,*b*, *c*). Найбільший за абсолютним значенням згинальний момент маємо в затиснутому перерізі. Із умови міцності за нормальними напруженнями

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \le \sigma_{adm}$$

маємо

$$W_x \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{60 \cdot 10^4}{1600} = 375 \text{ см}^3.$$

Визначимо тепер, які розміри повинні мати поперечні перерізи, щоб їхній осьовий момент опору $W_x \ge 375$ см^3.

1. Для круглого поперечного перерізу $W_x = \pi D^3 / 32 = 375$ см^3, звідки $D = \sqrt[3]{32 \cdot 375/3{,}14} = 15{,}6$ см, площа перерізу дорівнюватиме $A^{\circ} = \pi D^2 / 4 = 191$ см^2.

2. Для квадратного перерізу $W_x = a^3/6 = 375$ см^3, тоді $a = \sqrt[3]{6 \cdot 375} = 13{,}1$ см, площа $A^{\square} = a^2 = 171{,}6$ см^2.

3. Для прямокутного перерізу із співвідношенням $h = 2\,b$

$W_x = \dfrac{b\,h^2}{6} = \dfrac{h^3}{12} = 375$ см^3, звідки $h = \sqrt[3]{12 \cdot 375} = 16{,}5$ см, $b = 8{,}25$ см і відповідно площа перерізу визначиться як $A^{\square} = b\,h = 136{,}1$ см^2.

4. За таблицею сортаменту двотаврових балок осьовий момент опору $W'_x = 371$ см^3 має двотавр № 27, а $W''_x = 407$ см^3 – двотавр № 27а.

Перевіримо міцність балки з поперечним перерізом у вигляді двотавра № 27. Найбільше нормальне напруження в її поперечних перерізах дорівнюватиме

$$\sigma'_{max} = \frac{M_{max}}{W'_x} = \frac{60 \cdot 10^4}{371} = 1617 \text{ кг/см}^2 = 161{,}7 \text{ МПа}.$$

Перевантаження становить

$$\frac{\sigma'_{max} - \sigma_{adm}}{\sigma_{adm}} \cdot 100\% = \frac{161{,}7 - 160}{160} \cdot 100\% = 1\%.$$

Перевіримо міцність балки з двотавром № 27а. Найбільші нормальні напруження дорівнюватимуть

$$\sigma''_{max} = \frac{M_{max}}{W''_x} = \frac{6000}{407} \approx 147{,}4 \text{ МПа} = 1474 \text{ кг/см}^2$$

і недовантаження відповідно становитиме

$$\frac{\sigma_{adm} - \sigma''_{max}}{\sigma_{adm}} \cdot 100\% = \frac{160 - 147{,}4}{160} \cdot 100\% \approx 8\%.$$

Оскільки недовантаження дорівнює 8%, тобто більше 5%, то вибираємо балку з двотавром № 27, для якої $A^{\text{I}} = 40{,}2$ см^2. Враховуючи, що вага балки

пропорційна площі поперечного перерізу, порівняти витрати матеріалу на балку з різними поперечними перерізами можна, порівнюючи величини площ поперечних перерізів. З точки зору матеріалоємкості та відповідно ваги найбільш вигідною в нашому випадку є балка двотаврового поперечного перерізу. За однакової міцності вага двотаврової балки буде в 191 : 40,2 = 4,75 раза менша від ваги балки круглого перерізу і в 171 : 40,2 = 4,25 раза менша від ваги балки квадратного поперечного перерізу.

Визначивши розміри поперечних перерізів балки за умовою міцності за нормальними напруженнями, перевіримо міцність балки за дотичними напруженнями, для чого виконаємо її перевірочний розрахунок, використовуючи умову міцності балки за дотичними напруженнями,

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x^{відс}}{I_x b} \le \tau_{adm}.$$

Максимальне значення поперечної сили $Q_{max} = 50$ кН = 5000 кг.

Для круглого перерізу:

$$Q_{max} = 50 \text{ кН} = 5000 \text{ кг}; \quad I_x = \frac{\pi D^4}{64}; \quad b = D = 15{,}6 \text{ см}; \quad S_x^{відс} = \frac{2}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{D^3}{12};$$

$$\tau_{max} = \frac{16 Q_{max}}{3\pi d^2} = \frac{16 \cdot 5000}{3 \cdot 3{,}14 \cdot 15{,}6^2} = 34{,}9 \ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \ < \ \tau_{adm}.$$

Переконаємося так само в тому, що найбільші дотичні напруження в балках квадратного, прямокутного перерізів не перевищують допустимих значень τ_{adm}.

Для балки двотаврового поперечного перерізу (№ 27) необхідні геометричні характеристики знаходимо за таблицею сортаменту:

$$I_x = 5010 \text{ см}^4; \quad S_x^{відс} = 210 \text{ см}^3; \quad b = 0{,}6 \text{ см}.$$

Після підстановки всіх параметрів перевіряємо виконання умови міцності за дотичними напруженнями

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_x^{відс}}{I_x b} = \frac{5000 \cdot 210}{5010 \cdot 0{,}6} \approx 350 \text{ кг}/\text{см}^2 \ < \ \tau_{adm}.$$

Враховуючи, що в затиснутому поперечному перерізі згинальний момент і поперечна сила водночас досягають максимальних значень, дійдемо висновку, що для двотаврової балки необхідно виконати перевірку на міцність і за головними напруженнями. Зробимо перевірочний розрахунок за І теорією міцності. Для цього знаходимо нормальні σ_K і дотичні τ_K напруження в точці K стінки двотавра під полицею (рис. 5.14):

$$\sigma_K = \frac{M_{max} \cdot y_K}{I_x}; \quad y_K = \frac{h}{2} - t = 12{,}52 \text{ см},$$

де h = 27 см – висота двотавра; t = 0,98 см – товщина полиці; I_x = 5010 см^4 – осьовий момент інерції.

Отже, нормальні напруження у точці K дорівнюватимуть

$$\sigma_K = \frac{6 \cdot 10^5 \cdot 12{,}52}{5010} = 1499 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} = 149{,}9 \text{ МПа}.$$

Дотичні напруження у точці K визначимо за формулою Журавського

$$\tau_к = \frac{Q_{max} S_{x\,n}^{відс}}{I_x \cdot b}.$$

Тут $S_{x\,n}^{відс}$ – статичний момент площі полиці відносно осі x, який визначимо як різницю між статичним моментом площі половини перерізу двотавра $S_x^{відс}$, що розташована вище нейтральної осі x, і $S_{xc}^{відс}$ – статичним моментом площі половини стінки двотавра, відносно нейтральної осі x. Значення $S_x^{відс}$ статичного моменту площі половини перерізу двотавра відносно центральної осі x наведено в таблиці сортаменту. Для двотавра № 27 $S_x^{відс} = 210$ см^3. Статичний момент площі половинки стінки двотавра відносно осі x дорівнюватиме

$$S_{xc}^{відс} = b\left(\frac{h}{2} - t\right)\left(\frac{\frac{h}{2} - t}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h}{2} - t\right)^2.$$

Тоді статичний момент площі полиці двотавра відносно осі x визначиться

$$S_{xn}^{відс} = S_x^{відс} - S_{xc}^{відс} = 210 - 0{,}3 \cdot 12{,}52^2 \approx 163 \text{ см}^3$$

і відповідно дотичні напруження у точці K дорівнюватимуть

$$\tau_K = \frac{5000 \cdot 163}{5010 \cdot 0,6} = 271 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} = 27,1 \text{ МПа}.$$

Після підстановки обчислених значень нормальних та дотичних напружень у небезпечній точці K небезпечного затиснутого поперечного перерізу балки в умову міцності за першою класичною теорією міцності матимемо

$$\sigma_p^I = \sigma_{max} = \frac{\sigma_K}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_K^2 + 4\tau_K^2} = \frac{1499}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1499^2 + 4 \cdot 271^2} =$$

$$= 1546 \text{ кг/см}^2 < 1600 \text{ кг/см}^2.$$

Отже, умова міцності виконується і міцність балки двотаврового поперечного перерізу № 27, розрахункова схема якої наведена на рис. 5.17, забезпечена.

Приклад 9. Для балки, розрахункова схема якої наведена на рис. 5.18, визначити двотавровий поперечний переріз, виконати перевірочний розрахунок балки на міцність за дотичними напруженнями та повну перевірку міцності балки за однією із теорій міцності. Прийняти для балки значення допустимого нормального напруження σ_{adm} = 16 кН/см^2 = 160 МПа = 1600 кг/см^2 та допустимого значення дотичного напруження τ_{adm} = 9 кН/см^2 = 90 МПа = 900 кг/см^2.

Розв'язування. З рівнянь рівноваги, враховуючи симетрію балки і навантаження, знаходимо опорні реакції R_A = 90 кН; R_B = 90 кН. Епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки наведені на рис. 5.18. Найбільше значення згинального моменту, як видно з епюри, дорівнює

$$M_{max} = 40 \text{ кН·м} = 4000 \text{ кН·см}$$

і виникає в поперечному перерізі під силою F. Із умови міцності балки за нормальними напруженнями

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \le \sigma_{adm}$$

знаходимо необхідне значення осьового моменту опору поперечного перерізу балки $W_x \ge M_{max} / \sigma_{adm}$ = 4000 / 16 = 250 см^3.

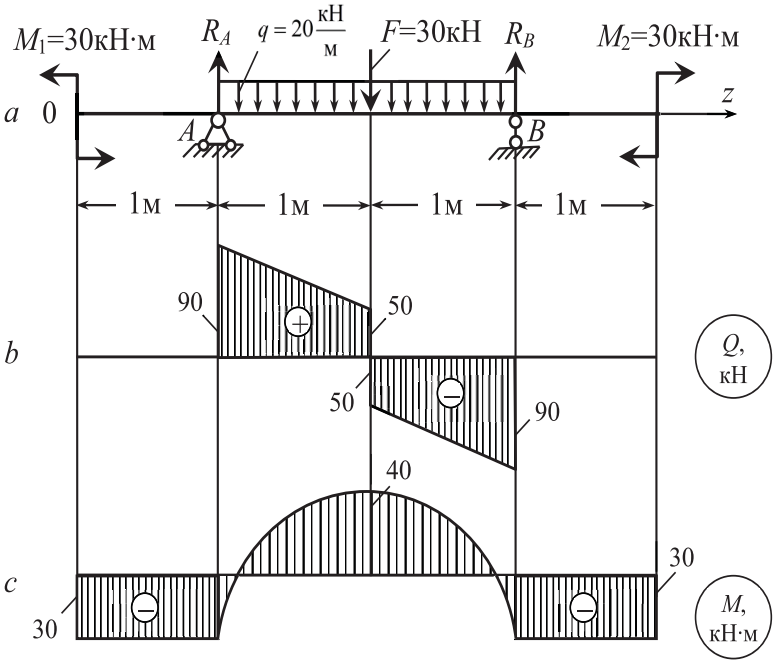


Рис. 5.18

За таблицею сортаменту (ГОСТ 8239-56) підбираємо двотавр № 22а, у якого осьовий момент опору $W_x = 251$ см^3.

Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{x\,max}^{відс}}{I_x \cdot b} \le \tau_{adm}.$$

Найбільше значення поперечної сили $Q_{max} = 90$ кН . Для двотавра № 22а за таблицею сортаменту знаходимо необхідні геометричні характеристики:

$$S_x^{відс} = 141 \text{ см}^3; \quad I_x = 2760 \text{ см}^4; \quad b = 0{,}53 \text{ см}.$$

Після підстановки цих величин в умову міцності балки за дотичними напруженнями матимемо

$$\tau_{max} = \frac{90 \cdot 141}{2760 \cdot 0{,}53} = 8{,}7 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad < \quad \tau_{adm}.$$

Тобто умови міцності балки за нормальними і за дотичними напруженнями виконуються. Але в цій задачі мають місце дві умови, які потребують повної перевірки міцності балки. Дійсно, у перерізі під силою F ми маємо максимальний

згинальний момент M_{max} = 40 кН·м; і хоч не максимальну, але ж порівняно велику поперечну силу Q = 50 кН. У перерізах на опорах маємо максимальні поперечні сили Q_{max} = 90 кН; і хоч не максимальні, але ж порівняно великі за значенням згинальні моменти M = 30 кН·м. Крім того, поперечний переріз балки є тонкостінним двотавром, епюри нормальних і дотичних напружень для якого наведені схематично на рис. 5.19.

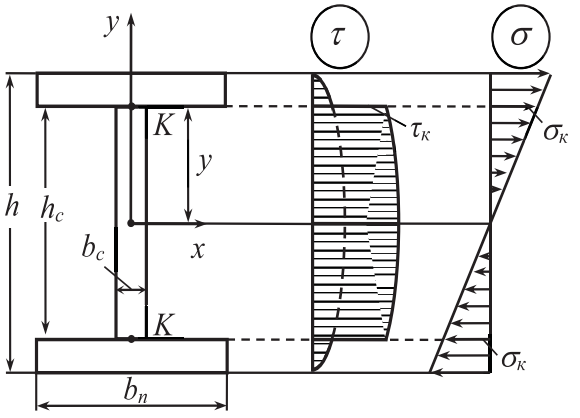


Рис. 5.19

Як видно з епюр, небезпечними точками в перерізі є точки K стінки під полицями двотавра, у яких водночас виникають близькі до максимальних значень у перерізі і нормальні, і дотичні напруження. Нормальні і дотичні напруження в цих точках знаходимо за відомими формулами:

$$\sigma_к = \frac{M \cdot y}{I_x}; \qquad \tau_к = \frac{Q \cdot S_{x\,п}^{відс}}{I_x \cdot b}.$$

Тут y – відстань від нейтральної осі до точки K, яка дорівнює 10,1 см за таблицею сортаменту; b – товщина стінки двотавра дорівнює 0,53 см; $S_{xп}^{відс}$ – статичний момент площі полиці, тобто різниця між статичним моментом площі половини перерізу і статичним моментом площі половини перерізу стінки відносно нейтральної осі x

$$S_{x\,п}^{відс} = S_{x\,max} - y \cdot b \cdot \frac{y}{2} = 141 - 10{,}1 \cdot 0{,}53 \cdot \frac{10{,}1}{2} = 114 \text{ см}^3.$$

Для поперечного перерізу балки, де прикладена сила F, ці напруження дорівнюватимуть:

$$\sigma_K = \frac{4000 \cdot 10{,}1}{2760} = 14{,}6 \text{ кН/см}^2; \qquad \tau_K = \frac{50 \cdot 114}{2760 \cdot 0{,}53} = 3{,}9 \text{ кН/см}^2.$$

Використовуючи умову міцності за ІІІ класичною теорією міцності, матимемо

$$\sigma_{зв.}^{III} = \sqrt{\sigma_K^2 + 4\tau_K^2} = \sqrt{14{,}6^2 + 4 \cdot 3{,}9^2} = \sqrt{274} = 16{,}5 \; > \; \sigma_{adm}.$$

Зведене нормальне напруження, як бачимо, перевищує допустиме, але перевищення становить $\frac{16{,}5 - 16}{16} \cdot 100 = 3{,}1\,\%$, що допустимо і не потребує збільшення розмірів поперечного перерізу.

Аналогічно зробимо перевірку міцності балки в поперечному перерізі на опорі, де Q_{max} = 90 кН, а M = 3000 кН·см. Для небезпечної точки двотавра K у цьому перерізі матимемо:

$$\sigma_n = \frac{3000 \cdot 10{,}1}{2760} = 10{,}98 \text{ кН/см}^2; \qquad \tau_K = \frac{90 \cdot 114}{2760 \cdot 0{,}53} = 7{,}01 \text{ кН/см}^2 .$$

Умова міцності за третьою класичною теорією міцності матиме вигляд

$$\sigma_{зв.}^{III} = \sqrt{\sigma_n^2 + 4\tau_K^2} = \sqrt{10{,}98^2 + 4 \cdot 7{,}01^2} = 17{,}8 \text{ кН/см}^2 \; > \; \sigma_{adm}.$$

Розрахункове нормальне напруження перевищує допустиме значення на 11%, а тому визначений номер двотавра треба збільшити і повторити перевірку міцності балки для наступного номера за такою ж самою схемою.

5.9. Деформації балок при згині та їх визначення. Повне та наближене диференціальні рівняння зігнутої осі балки

Спостереження за поведінкою балок при згині показують, що під дією зовнішніх сил вісь балки скривлюється. Поперечні перерізи балки переміщуються і водночас повертаються на деякий кут відносно свого початкового положення. Переміщення центра ваги поперечного перерізу балки в напрямку, перпендикулярному до початкової недеформованої осі, називають *прогином балки* в цьому перерізі. Кут, на який повертається поперечний переріз навколо власної нейтральної осі відносно свого початкового положення, називають *кутом повороту* даного поперечного перерізу. Для нормальної, надійної роботи балок, як елементів

конструкцій та деталей машин, забезпечення тільки їхньої міцності є недостатнім. У багатьох випадках необхідним є забезпечення їхньої жорсткості, тобто деформації балок під дією зовнішніх сил, зокрема прогини та кути повороту поперечних перерізів, не повинні перевищувати допустимих значень, які встановлюються з огляду на технічні вимоги.

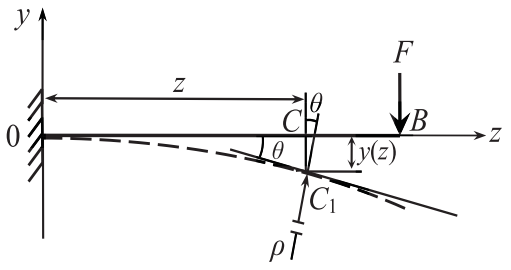


Рис. 5.20

Нагадаємо, що за прямого згину (рис. 5.20) вісь балки є плоскою кривою, площина якої збігається зі силовою площиною і з однією з головних площин інерції балки. Зігнуту, деформовану вісь балки, яка отримує тільки пружні деформації, називають також *пружною віссю* або пружною лінією балки. Переміщення CC_1 (рис. 5.20) центра ваги перерізу C у напрямку, перпендикулярному недеформованій осі балки, називають прогином балки в даному перерізі і позначають через y. Наголосимо, що центри ваги поперечних перерізів з абсцисою z переміщуються за дугою радіуса z, тобто мають і горизонтальні складові переміщень у напрямку осі z, але ці складові здебільшого малі і ними нехтуватимемо.

Кут θ, на який поперечний переріз повертається навколо власної нейтральної осі x по відношенню до свого початкового положення, називають кутом повороту поперечного перерізу (рис. 5.20). Неважко довести, що для малих деформацій в умовах придатності гіпотези плоских перерізів, замість кута повороту поперечного перерізу, можемо визначати кут, який утворює дотична до зігнутої осі балки в точці C_1 з недеформованої віссю балки. З математики відомо, що тангенс цього кута, а при малих кутах і сам кут, наближено дорівнюватиме першій похідній від функції $y = y(z)$, яка описує деформовану вісь балки,

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz}. \tag{5.22}$$

Таким чином, для визначення прогинів $y(z)$ та кутів повороту поперечних перерізів балки $\theta(z)$, які є функціями z положення поперечних перерізів, необхідно визначити функцію $y = y(z)$, яка описує зігнуту вісь балки. Маючи цю функцію, для визначення прогину та кута повороту будь-якого поперечного перерізу балки з абсцисою, наприклад z_1, необхідно знайти значення цієї функції та її першої похідної від аргументу z_1. Величина $y(z_1)$ дає нам прогин поперечного перерізу, а величина $y'(z_1) = \theta(z_1)$ визначає кут повороту поперечного перерізу.

Виводячи формулу для визначення нормальних напружень у поперечних перерізах балки за чистого згину, отримали таку залежність між кривизною зігнутої осі балки та згинальним моментом:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M(z)}{E I_x}, \tag{5.23}$$

де $k = 1/\rho$ – кривизна пружної лінії балки; ρ – радіус кривизни пружної лінії балки; $M(z)$ – згинальний момент; E – модуль пружності матеріалу балки; I_x – осьовий момент інерції поперечного перерізу балки відносно нейтральної осі; EI_x – жорсткість поперечного перерізу балки на згин.

Із математики відомо, що кривизна кривої, яка описується функцією $y = y(z)$, визначається за формулою

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\dfrac{d^2y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{5.24}$$

З урахуванням залежності (5.23) повне диференціальне рівняння зігнутої осі балки для визначення функції $y = y(z)$, яка описує деформовану вісь балки, набирає вигляду

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} = \pm \frac{M(z)}{E I_x}. \tag{5.25}$$

Це диференціальне рівняння вважається точним, воно нелінійне відносно похідної і використовується при визначенні великих переміщень у досить гнучких балках. Розглядаючи малі деформації балок, коли прогини та кути повороту поперечних перерізів балок невеликі, величиною $(dy/dz)^2 = \theta^2$ у диференціальному рівнянні (5.25) знехтуємо, як набагато меншою від одиниці, та отримаємо наближене диференціальне рівняння осі балки

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \pm\frac{M(z)}{EI_x}. \tag{5.26}$$

У разі використання правої системи координат (рис. 5.20) знаки другої похідної d^2y/dz^2 і згинального моменту співпадають. За додатного згинального моменту знак другої похідної d^2y/dz^2 буде також додатним, за від'ємного згинального моменту знак d^2y/dz^2 також буде від'ємним, а тому в правій системі відліку в наближеному диференціальному рівнянні (5.26) беремо знак плюс

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI_x}. \tag{5.27}$$

Для визначення функції кутів повороту $\theta(z) = dy/dz$ і функції прогинів $y(z)$ потрібно провести інтегрування рівняння (5.27). Проінтегрувавши один раз, отримаємо вираз для функції кутів повороту поперечних перерізів балки

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz} = \int\frac{M(z)}{EI_x}dz + C,$$

де C – стала інтегрування.

Після інтегрування вдруге отримаємо функцію прогинів поперечних перерізів балки

$$y(z) = \int\left[\int\frac{M(z)}{EI_x}dz\right]dz + Cz + D\ , \tag{5.28}$$

де D – друга стала інтегрування.

Сталі інтегрування визначаються з крайових умов, тобто з умов закріплення балки. Так, для консольної балки із затиснутим краєм кут повороту і прогин затиснутого поперечного перерізу мають дорівнювати нулю. Для балки зі шарнірними

опорами прогини опорних поперечних перерізів дорівнюють нулю. Зокрема, для консольної балки, наведеної на рис. 5.20, маємо $M(z) = -F(l - z)$. Наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки матиме вигляд

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{F(l-z)}{EI_x}.$$

Після інтегрування цього рівняння двічі матимемо:

$$\theta = \frac{dy}{dz} = -\frac{Flz}{EI_x} + \frac{Fz^2}{2EI_x} + C;$$

$$y = -\frac{Flz^2}{2EI_x} + \frac{Fz^3}{6EI_x} + Cz + D.$$

Із умов жорсткого затиснення балки на лівому краї одержимо, що $\theta\big|_{z=0} = 0$; $y\big|_{z=0} = 0$, звідки $C = 0, D = 0$.

Отже, остаточно функції кутів повороту та прогинів поперечних перерізів балки матимуть вигляд:

$$\theta(z) = -\frac{Flz}{EI_x} + \frac{Fz^2}{2EI_x};$$

$$y(z) = -\frac{Flz^2}{2EI_x} + \frac{Fz^3}{6EI_x}.$$

Вирази для кута повороту та прогину поперечного перерізу B з абсцисою $z = l$, в якому прикладена сила F, відповідно матимуть вигляд:

$$\theta_B = \theta\big|_{z=l} = -\frac{Fl^2}{2EI_x}; \qquad y_B = y\big|_{z=l} = -\frac{Fl^3}{3EI_x}. \tag{5.29}$$

Добуток EI_x, який присутній у знаменниках формул (5.29), називають *поперечною* або *згинною жорсткістю* поперечного перерізу балки, яка залежить від матеріалу балки, про що свідчить модуль Юнга матеріалу E, та від розмірів і форми самого поперечного перерізу, на що вказує наявність у добутку осьового моменту інерції поперечного перерізу I_x.

Приклад 10. Для балки, розрахункова схема якої наведена на рис. 5.21,*а*, необхідно підібрати двотавровий поперечний переріз, виконати повну перевірку міцності та навести її пружну лінію, якщо $\sigma_{adm} = 16$ кН/см^2; $E = 2 \cdot 10^4$ кН/см^2; $\tau_{adm} = 0{,}5\ \sigma_{adm}$.

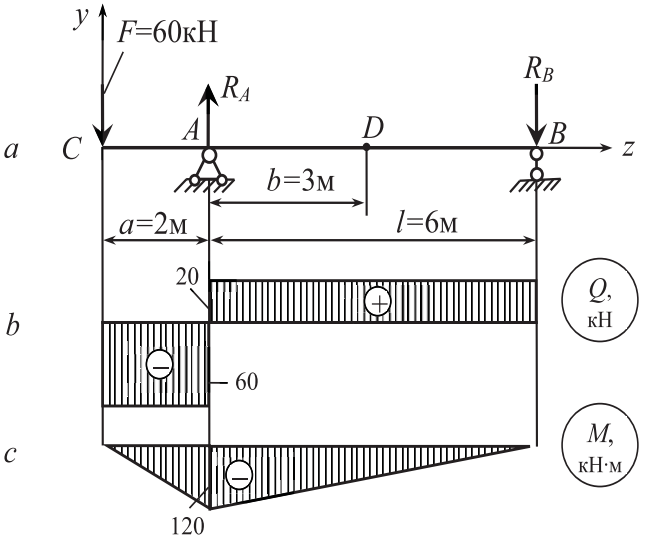


Рис. 5.21

Розв'язування. Для двохопорної балки визначаємо в першу чергу опорні реакції R_A, R_B, для чого розглядаємо рівновагу балки та складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum mom_B(\bar{F}_i) = -F \cdot (a+l) + R_A \cdot l = 0,$$

звідки

$$R_A = \frac{F(a+l)}{l} = \frac{60 \cdot 8}{6} = 80\,\text{кН};$$

$$\sum mom_A(\bar{F}_i) = -F \cdot a + R_B \cdot l = 0,$$

звідки

$$R_B = \frac{F \cdot a}{l} = \frac{60 \cdot 2}{6} = 20\,\text{кН}.$$

Після визначення опорних реакцій за відомими правилами будуємо епюри поперечних сил та згинальних моментів, які наведені на рис. 5.21,*b*, *c*.

Максимальне за модулем значення згинального моменту, як видно за епюрою згинальних моментів, дорівнює $M_{max} = 120$ кН·м. Потрібний осьовий момент опору

поперечного перерізу балки W_x знаходимо згідно з умовою міцності балки за нормальними напруженнями

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \le \sigma_{adm},$$

звідки

$$W_x \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{120 \cdot 100}{16} = 750 \text{ см}^3.$$

За таблицею сортаменту визначаємо номер двотавра, осьовий момент опору якого дорівнює 750 см^3. Беремо двотавр № 36 (ГОСТ 8239-56) з такими геометричними характеристиками: $W_x = 743$ см^3; $I_x = 13380$ см^4; $S_x = 423$ см^3; $b = 14{,}5$ см; $d = 0{,}75$ см; $t = 1{,}23$ см.

Визначаємо найбільші значення нормального напруження в точках периферії небезпечного перерізу для двотавра № 36

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{120 \cdot 100}{743} = 16{,}15 \text{ кН/см}^2.$$

Перевантаження становить

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{adm}}{\sigma_{adm}} \cdot 100\% = \frac{16{,}15 - 16}{16} \cdot 100\% \approx 1\%,$$

що допустимо.

Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{I_x \cdot d} = \frac{60 \cdot 423}{13380 \cdot 0{,}75} = 2{,}53 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad < \quad \tau_{adm}.$$

Умова міцності за дотичними напруженнями виконується.

Оскільки в небезпечному поперечному перерізі балки над опорою A виникають водночас максимальний згинальний момент і максимальна поперечна сила, а поперечний переріз балки – двотавр, у перерізі є небезпечні точки K стінки під полицями двотавра, де водночас виникають близькі до відповідних максимальних значень нормальні й дотичні напруження (рис. 5.22).

Для повної перевірки міцності балки за головними напруженнями визначаємо нормальні й дотичні напруження в небезпечній точці K її небезпечного перерізу A:

$$\sigma_K = \frac{M_{max}}{I_x} \cdot y_K = \frac{120 \cdot 100 \cdot 16{,}77}{13380} = 15{,}04 \text{ кН/см}^2;$$

$$\tau_K = \frac{Q_{max} \cdot S_{x\,n}^{відс.}}{I_x \cdot d} = \frac{60 \cdot 14{,}5 \cdot 1{,}23 \cdot 17{,}39}{13380 \cdot 0{,}75} = 1{,}85 \text{ кН/см}^2.$$

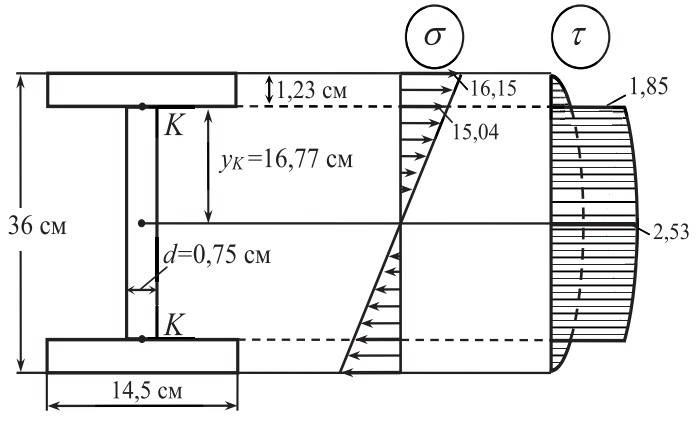


Рис. 5.22

Для визначення статичного моменту площі полиці $S_{xn}^{відс}$ відносно осі x використовуємо методику та залежності, які наведені у прикладі 8. Повну перевірку міцності балки виконуємо за ІІІ теорією міцності

$$\sigma_{зв.}^{III} = \sqrt{\sigma_K^2 + 4\tau_K^2} = \sqrt{15{,}04^2 + 4 \cdot 1{,}85^2} = 15{,}5 \text{ кН/см}^2 > \sigma_{adm}.$$

Отже, усі три перевірки показують, що міцність балки забезпечена.

Далі визначимо прогини поперечних перерізів балки та зображення її пружної деформованої осі. Для цього виберемо систему координат zy з початком у центрі ваги лівого крайнього поперечного перерізу балки, у точці C (рис. 5.21). Розіб'ємо балку на дві ділянки: І ділянка $0 \le z \le 2$ м; ІІ ділянка $2 \le z \le 8$ м. Згинальні моменти в поперечних перерізах І та ІІ ділянок, визначені за правилами, відповідно дорівнюватимуть $M(z) = -F \cdot z$ та $M(z) = -F \cdot z + R_A(z - a)$. Оскільки аналітичні вирази для функцій згинального моменту на різних ділянках різні, то наближені диференціальні рівняння зігнутої осі балки вимушені записувати для кожної ділянки окремо:

І ділянка
$$\frac{d^2 y_1}{dz^2} = \frac{M(z)}{E I_x} = \frac{-F z}{E I_x}; \qquad (5.30)$$

ІІ ділянка
$$\frac{d^2 y_2}{dz^2} = \frac{M(z)}{E I_x} = \frac{-Fz + R_A(z - a)}{E I_x}. \qquad (5.31)$$

Індекси 1, 2 біля y поставлені для прогинів поперечних перерізів відповідно І та ІІ ділянок.

Проінтегруємо двічі наближені диференціальні рівняння зігнутої осі балки на І та ІІ ділянках (5.30) і (5.31).

Маємо на І ділянці:

$$\frac{dy_1}{dz} = -\int \frac{F\,z\,dz}{E\,I_x} + C_1 = -\frac{F\,z^2}{2E\,I_x} + C_1\,; \tag{5.32}$$

$$y_1 = \int\left(-\frac{F\,z^2}{2E\,I_x} + C_1\right)dz + D_1 = -\frac{F\,z^3}{6E\,I_x} + C_1 z + D_1\,, \tag{5.33}$$

та відповідно на ІІ ділянці:

$$\frac{dy_2}{dz} = \int \frac{-F\,z + R_A\left(z-a\right)}{E\,I_x}dz + C_2 = -\frac{F\,z^2}{2E\,I_x} + \frac{R_A z^2}{2E\,I_x} - \frac{R_A a z}{E\,I_x} + C_2; \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \int\left(-\frac{Fz^2}{2E\,I_x} + \frac{R_A z^2}{2E\,I_x} - \frac{R_A a z}{E\,I_x} + C_2\right)dz + D_2 = \\ &= -\frac{Fz^3}{6EI_x} + \frac{R_A z^3}{6EI_x} - \frac{R_A a z^2}{2EI_x} + C_2 z + D_2. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Остаточно вирази для прогинів поперечних перерізів балки на обох ділянках отримаємо, коли знайдемо сталі інтегрування C_1, D_1, C_2, D_2.

Сталі інтегрування знайдемо із крайових умов закріплення балки. Так, прогин поперечного перерізу балки над опорою A дорівнює нулю. Прогин у цьому перерізі ми отримаємо, якщо у виразах для прогинів (5.33), (5.34) покладемо z, рівним a

$$y_1\big|_{z=a} = y_2\big|_{z=a} = 0\,. \tag{5.36}$$

Умова (5.36) також означає, що прогин правого крайнього перерізу І ділянки і прогин лівого крайнього перерізу ІІ ділянки рівні і дорівнюють нулю.

Що стосується кута повороту поперечного перерізу над опорою A, то можна стверджувати, що кут повороту правого крайнього перерізу І ділянки і кут повороту лівого крайнього перерізу ІІ ділянки рівні, тобто

$$\left.\frac{dy_1}{dz}\right|_{z=a} = \left.\frac{dy_2}{dz}\right|_{z=a}. \tag{5.37}$$

Нарешті, прогин поперечного перерізу над опорою B також дорівнює нулю, тобто прогин правого крайнього перерізу ІІ ділянки дорівнює нулю. Вираз для прогину поперечного перерізу B отримаємо, якщо в рівняння (5.35) покладемо $z = a + l$, тобто

$$y_2\big|_{z=a+l} = 0. \tag{5.38}$$

Розпишемо тепер умови (5.36), (5.37), (5.38) з урахуванням виразів (5.32)–(5.35):

$$\left.\begin{aligned}
&y_1\big|_{z=a} = 0; && -\frac{Fa^3}{6EI_x} + C_1 a + D_1 = 0;\\
&y_2\big|_{z=a} = 0; && -\frac{Fa^3}{6EI_x} + \frac{R_A a^3}{6EI_x} - \frac{R_A a^3}{2EI_x} + C_2 a + D_2 = 0;\\
&\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{z=a} = \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{z=a}; && -\frac{Fa^2}{2EI_x} + C_1 = -\frac{Fa^2}{2EI_x} + \frac{R_A a^2}{2EI_x} - \frac{R_A a^2}{EI_x} + C_2;\\
&y_2\big|_{z=a+l} = 0; && -\frac{F(a+l)^3}{6EI_x} + \frac{R_A(a+l)^3}{6EI_x} - \frac{R_A a(a+l)^2}{2EI_x} + C_2(a+b) + D_2 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

Маємо систему чотирьох алгебраїчних рівнянь (5.39) відносно чотирьох невідомих C_1, D_1, C_2, D_2.

Розв'язавши систему (5.39), знаходимо чотири невідомі сталі інтегрування:

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= +\frac{F}{6EI_x l}\left[(a+l)^3 - a^3\right] - \frac{R_A}{6EI_x l}\left[3a^2 l + (a+l)^3 - 3a(a+l)^2 + a^3\right];\\
D_1 &= \frac{Fa}{6EI_x l}\left[a^2 l - (a+l)^3 + a^3\right] + \frac{R_A a}{6EI_x l}\left[3a^2 l + (a+l)^3 - 3a(a+l)^2 + a^3\right];\\
C_2 &= \frac{F}{6EI_x l}\left[(a+l)^3 - a^3\right] - \frac{R_A}{6EI_x l}\left[(a+l)^3 - 3a(a+b)^2 + a^3\right];\\
D_2 &= \frac{F(a+l)}{6EI_x l}\left[(a+l)^2 l - (a+b)^3 + a^3\right] +\\
&\quad + \frac{R_A(a+l)}{6EI_x l}\left[-(a+l)^2 l + 3a(a+l)l + (a+l)^3 - 3a(a+l)^2 + a^3\right].
\end{aligned}\right\} \tag{5.40}$$

Після підстановки виразів для C_1, D_1, C_2, D_2 у формули (5.33) та (5.35), отримаємо остаточно вирази для визначення прогинів поперечних перерізів балки на I і II ділянках:

$$y_1 = -\frac{Fz^3}{6EI_x} + \frac{F}{6EI_x l}\left[(a+l)^3 - a^3\right]z - \frac{R_A}{6EI_x l}\left[3a^2 l + (a+l)^3 - 3a(a+l)^2 + a^3\right]z + \\ + \frac{Fa}{6EI_x l}\left[a^2 l - (a+l)^3 + a^3\right] + \frac{R_A a}{6EI_x l}\left[3a^2 l + (a+l)^3 - 3a(a+l)^3 + a^3\right]; \tag{5.41}$$

$$y_2 = -\frac{Fz^3}{6EI_x} + \frac{R_A z^3}{6EI_x} - \frac{R_A a z^2}{2EI_x} + \frac{F}{6EI_x l}\left[(a+l)^3 - a^3\right]z - \\ - \frac{R_A}{6EI_x l}\left[(a+l)^3 - 3a(a+l)^2 + a^3\right]z + \frac{F(a+b)}{6EI_x l}\left[(a+l)^2 l - (a+l)^3 + a^3\right] + \\ + \frac{R_A(a+l)}{6EI_x l}\left[-(a+l)^2 l + 3a(a+l)l + (a+l)^3 - 3a(a+l)^2 + a^3\right]. \tag{5.42}$$

Остаточні вирази для кутів повороту поперечних перерізів I та II ділянок балки отримаємо, продиференціювавши по z функції (5.41) і (5.42):

$$\theta_1(z) = \frac{dy_1}{dz} = -\frac{Fz^2}{2EI_x} + \frac{F}{6EI_x l}\left[(a+l)^3 - a^3\right] - \\ - \frac{R_A}{6EI_x l}\left[3a^2 l + (a+l)^3 - 3a(a+l)^2 + a^3\right]; \tag{5.43}$$

$$\theta_2(z) = \frac{dy_2}{dz} = -\frac{Fz^2}{2EI_x} + \frac{R_A z^2}{2EI_x} - \frac{R_A a z}{EI_x} + \frac{F}{6EI_x l}\left[(a+l)^3 - a^3\right] - \\ - \frac{R_A}{6EI_x l}\left[(a+l)^3 - 3a(a+l)^2 + a^3\right]. \tag{5.44}$$

Ураховуючи значення F, R_A, a, l, E, I_x, вирази (5.41)–(5.44) перепишемо у вигляді:

$$y_1 = \frac{10^6}{6\cdot 2\cdot 10^4 \cdot 13380 \cdot 600}\left(-\frac{36}{10^3}z^3 + 13600z - 2432\cdot 10^3\right); \tag{5.45}$$

$$y_2 = \frac{10^6}{6\cdot 2\cdot 10^4 \cdot 13380 \cdot 600}\left(\frac{12}{10^3}z^3 - 28{,}8z^2 + 20640z - 320\cdot 10^4\right); \tag{5.46}$$

$$\theta_1 = \frac{10^6}{6\cdot 2\cdot 10^4 \cdot 13380 \cdot 600}\left(\frac{-36\cdot 3}{10^3}z^2 + 13600\right); \tag{5.47}$$

$$\theta_2 = \frac{10^6}{6\cdot 2\cdot 10^4\cdot 13380\cdot 600}\left(\frac{36}{10^3}z^2 - 57{,}6z + 20640\right). \qquad (5.48)$$

Прогин поперечного перерізу C, у якому прикладена сила F, визначимо, поклавши у виразі (5.45) $z = 0$,

$$y_C = y_1\big|_{z=0} = -\frac{10^6\cdot 2432\cdot 10^3}{6\cdot 2\cdot 10^4\cdot 13380\cdot 600} = -2{,}52\,\text{см}.$$

Поклавши $z = 500$ см у виразі (5.46), знайдемо прогин поперечного перерізу посередині прольоту AB

$$y_D = y_2\big|_{z=500} = \frac{10^6\cdot 10^3\cdot 1420}{6\cdot 2\cdot 10^4\cdot 13380\cdot 600} = \frac{142}{72\cdot 1{,}338} = 1{,}47\,\text{см}.$$

Аналогічно знайдемо кути повороту θ_A, θ_B опорних перерізів:

$$\theta_A = \theta_1\big|_{z=200} = \frac{10^6}{6\cdot 2\cdot 10^4\cdot 13380\cdot 600}\left(\frac{-36\cdot 3}{10^3}\cdot 4\cdot 10^4 + 13600\right) =$$

$$= \frac{128{,}8}{13380} \approx 0{,}0096 \text{ рад} \approx 0{,}55°;$$

$$\theta_B = \theta_2\big|_{z=800} = \frac{10^6}{6\cdot 2\cdot 10^4\cdot 13380\cdot 600}\left(\frac{36\cdot 64\cdot 10^4}{10^3} - 56{,}4\cdot 800 + 20640\right) =$$

$$= -\frac{33{,}3}{13380} = -0{,}0025\,\text{рад} = -0{,}14°.$$

За отриманими значеннями прогинів поперечних перерізів балки будуємо епюру прогинів балки, яка наведена на рис. 5.23 і являє собою пружну деформовану вісь балки під дією зовнішньої сили F.

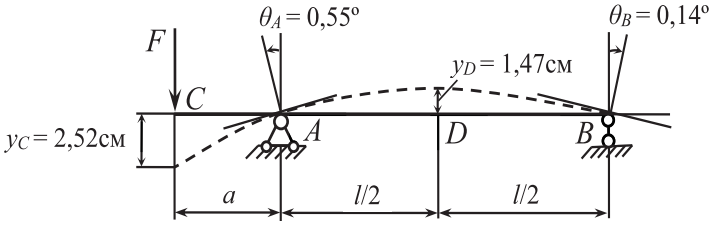


Рис. 5.23

5.10. Метод початкових параметрів визначення деформацій балок. Універсальні рівняння зігнутої осі балки

Інтегрування наближеного диференціального рівняння зігнутої осі балки за наявності в межах балки n ділянок призводить, як було показано, до необхідності визначення $2n$ сталих інтегрування, що пов'язано з певними труднощами. Для балки сталої згинної жорсткості EI_x за будь-якої кількості ділянок можна значно зменшити кількість невідомих сталих інтегрування і звести їх число до двох, якщо при складанні наближених диференціальних рівнянь пружної лінії балки по ділянках та їх інтегруванні дотримуватися таких правил:

1) відрахунок абсцис усіх поперечних перерізів вести від однієї точки правої системи координат, тобто від крайньої лівої точки осі балки;

2) при складанні аналітичного виразу для згинального моменту розглядати частину балки, яка містить початок координат;

3) усі складові аналітичного виразу для згинального моменту повинні мати співмножник $(z - a_i)$, де a_i – абсциса точки прикладення зосередженої сили, пари сил або початку ділянки рівномірно розподіленого навантаження;

4) якщо при переміщенні вздовж балки від початку координат на якійсь ділянці зустрічається розподілене навантаження, то воно повинне розповсюджуватися потім і на інші ділянки. У випадку обривання розподіленого навантаження його продовжують на інші ділянки, а для відновлення дійсних навантажень вводять компенсуюче розподілене навантаження тієї ж самої інтенсивності, але протилежного напрямку;

5) інтегрування диференціальних рівнянь на всіх ділянках слід проводити, не розкриваючи дужки.

Розглянемо балку з навантаженнями, які найчастіше зустрічаються в інженерних розрахунках на практиці (рис. 5.24). Серед показаних сил, як рівноправні, виступають і реакції опор. Вважатимемо, що балка під дією прикладеної системи сил знаходиться у стані рівноваги.

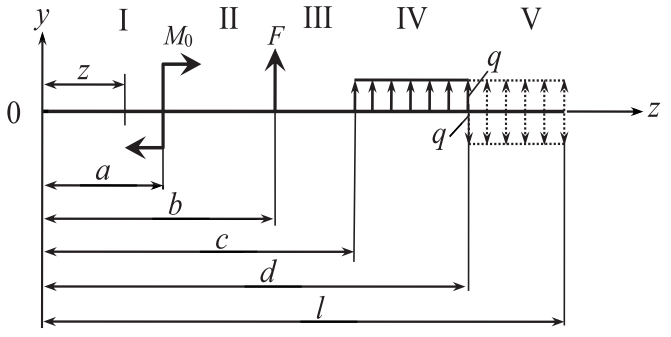


Рис. 5.24

Наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки для окремих ділянок матиме вигляд:

I ділянка, $0 \le z \le a$, $EI_x y''_1 = 0$;

II ділянка, $a \le z \le b$, $EI_x y''_2 = M_0(z-a)^0$;

III ділянка, $b \le z \le c$, $EI_x y''_3 = M_0(z+a)^0 + F(z-b)$;

IV ділянка, $c \le z \le d$, $EI_x y''_4 = M_0(z-a)^0 + F(z-b) + \dfrac{q(z-c)^2}{2}$;

V ділянка, $d \le z \le l$, $EI_x y''_5 = M_0(z-a)^0 + F(z-b) + \dfrac{q(z-c)^2}{2} - \dfrac{q(z-d)^2}{2}$. (5.49)

Як бачимо, аналітичний вираз для згинального моменту на кожній наступній ділянці містить вираз для згинального моменту всіх попередніх ділянок. Вираз для згинального моменту на V ділянці містить вирази для згинальних моментів на всіх попередніх чотирьох ділянках. Для того щоб одержати згинальний момент, наприклад, на III ділянці, необхідно у виразі для згинального моменту на V дільниці усунути складові, які враховують навантаження, що з'явилися на IV і V ділянках.

Проінтегруємо рівняння (5.49), не розкриваючи дужок:

$$EI_x y'_1 = C_1;$$

$$EI_x y'_2 = M_0(z-a) + C_2;$$

$$EI_x y'_3 = M_0(z-a) + \frac{F(z-b)^2}{2} + C_3;$$

$$EI_x y'_4 = M_0(z-a) + \frac{F(z-b)^2}{2} + \frac{q(z-c)^3}{6} + C_4;$$

$$EI_x y'_5 = M_0(z-a) + \frac{F(z-b)^2}{2} + \frac{q(z-c)^3}{6} - \frac{q(z-d)^3}{6} + C_5. \qquad (5.50)$$

Сталі інтегрування C_i знаходяться із умови неперервності функції $y'(z)$ при переході від однієї ділянки до іншої, тобто із вимоги, що кути повороту двох перерізів на межах двох сусідніх ділянок однакові:

$$y'_1\big|_{z=a} = y'_2\big|_{z=a}; \qquad y'_2\big|_{z=b} = y'_3\big|_{z=b};$$

$$y'_3\big|_{z=c} = y'_4\big|_{z=c}; \qquad y'_4\big|_{z=d} = y'_5\big|_{z=d}. \qquad (5.51)$$

Використовуючи умови (5.51) з урахуванням того, що балка має по довжині сталу згинну жорсткість EI_x, отримаємо

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5. \qquad (5.52)$$

Кут повороту перерізу на початку координат позначимо через θ_0, тоді із першого рівняння (5.50) маємо

$$EI_x\theta_0 = C_1. \qquad (5.53)$$

Проінтегрувавши рівняння (5.50) з урахуванням виразів (5.52) і (5.53) ще раз, матимемо:

$$EI_x y_1 = EI_x\theta_0 z + D_1;$$

$$EI_x y_2 = EI_x\theta_0 z + \frac{M_0(z-a)^2}{2} + D_2;$$

$$EI_x y_3 = EI_x\theta_0 z + \frac{M_0(z-a)^2}{2} + \frac{F(z-b)^3}{6} + D_3;$$

$$EI_x y_4 = EI_x\theta_0 z + \frac{M_0(z-a)^2}{2} + \frac{F(z-b)^3}{6} + \frac{q(z-c)^4}{24} + D_4;$$

$$EI_x y_5 = EI_x\theta_0 z + \frac{M_0(z-a)^2}{2} + \frac{F(z-b)^3}{6} + \frac{q(z-c)^4}{24} - \frac{q(z-d)^4}{24} + D_5. \qquad (5.54)$$

Сталі інтегрування D_i визначимо з умов рівності прогинів сумісних перерізів, тобто з умов нерозривності пружної лінії балки:

$$y_1\big|_{z=a} = y_2\big|_{z=a}; \qquad y_2\big|_{z=b} = y_3\big|_{z=b};$$

$$y_3\big|_{z=c} = y_4\big|_{z=c}; \qquad y_4\big|_{z=d} = y_5\big|_{z=d}. \tag{5.55}$$

Задовільнивши умови (5.55), отримаємо, що

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5. \tag{5.56}$$

Якщо прогин поперечного перерізу, який співпадає з початком системи координат позначити через y_0, то із першого рівняння (5.54) визначимо

$$D_1 = EI_x y_0. \tag{5.57}$$

Рівняння (5.54) з урахуванням виразів (5.56), (5.57) зручно записати у вигляді одного загального універсального рівняння зігнутої осі балки

$$EI_x y(z) = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z + \frac{M_0(z-a)^2}{2} + \frac{F(z-b)^3}{6} + \frac{q(z-c)^4}{24} - \frac{q(z-d)^4}{24},$$

або $$y(z) = y_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI_x}\left[\frac{M_0(z-a)^2}{2} + \frac{F(z-b)^3}{6} + \frac{q(z-c)^4}{24} - \frac{q(z-d)^4}{24}\right]. \tag{5.58}$$

При цьому для визначення прогину будь-якого поперечного перерізу балки за допомогою універсального рівняння зігнутої осі балки (5.58) у квадратних дужках ураховуються тільки ті силові фактори, у тому числі й реакції опор, які діють між початком системи координат і поперечним перерізом, прогин якого визначаємо. Треба також мати на увазі, що силові фактори, підставляючи їх в універсальне рівняння, беремо зі знаком плюс у тому випадку, якщо вони мають напрямки, наведені на рис. 5.24. У противному разі підставляємо їх зі знаком мінус.

У випадку, якщо на балку діють декілька зосереджених сил, пар сил, декілька ділянок розподілених навантажень, універсальне рівняння для визначення прогинів поперечних перерізів записують, використовуючи принцип суперпозиції, перенумерувавши сили, пари сил і розподілені навантаження

$$y(z) = y_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI_x}\left[\sum_i \frac{M_i(z-a_i)^2}{2} + \sum_i \frac{F_i(z-b_i)^3}{6} + \sum_i \frac{q_i(z-c_i)^4}{24}\right]. \tag{5.59}$$

Для визначення функції кутів повороту поперечних перерізів балки беремо від функції прогинів першу похідну по абсцисі z

$$\theta(z)=y'(z)=\theta_0+\frac{1}{EI_x}\left[\sum_i M_i(z-a_i)+\sum_i\frac{F_l(z-b_i)^2}{2}+\sum_i\frac{q_i(z-c_i)^3}{6}\right]. \quad (5.60)$$

Зауважимо, що перевага використання універсальних рівнянь зігнутої осі балки (5.59), (5.60) для визначення прогинів і кутів повороту її поперечних перерізів полягає в тому, що ми позбавляємося за наявності декількох ділянок у межах балки громіздкої роботи визначення великої кількості сталих інтегрування. У найскладнішому випадку необхідно визначати тільки дві сталі інтегрування y_0 і θ_0, тобто прогин і кут повороту поперечного перерізу, який співпадає з початком системи координат. Величини y_0 і θ_0, які являють собою прогин та кут повороту поперечного перерізу, що співпадає з початком системи координат, тобто лівого крайнього поперечного перерізу балки, називають *початковими параметрами*. Метод визначення прогинів та кутів повороту поперечних перерізів балки за плоского згину, де використовують початкові параметри y_0 і θ_0, називають *методом початкових параметрів*. Функція (5.60) є універсальним рівнянням кутів повороту поперечних перерізів балки. Рівняння (5.59), (5.60) часто називають універсальними рівняннями пружної деформованої осі балки або зігнутої осі балки. За допомогою цих рівнянь можна знайти прогин та кут повороту будь-якого поперечного перерізу статично визначеної балки з будь-яким числом ділянок за плоского згину, визначаючи при цьому всього дві сталі інтегрування, зокрема початкові параметри y_0 і θ_0. Обчислення початкових параметрів y_0 і θ_0 для різних розрахункових схем статично визначених балок розглянемо далі на прикладах. У випадках статично невизначених балок спочатку необхідно розкрити статичну невизначеність, для розкриття якої також можна використовувати метод початкових параметрів.

У зв’язку з необхідністю обмежень деформацій балок, тобто прогинів та кутів повороту поперечних перерізів, часто виникає потреба в розрахунках балок на жорсткість. Умови жорсткості балки запишемо у вигляді:

$$y_{max} \le y_{adm};$$

$$\theta_{max} \le \theta_{adm}.$$

Допустимі значення прогинів та кутів повороту поперечних перерізів встановлюють на підставі експериментальних та експлуатаційних даних.

Приклад 11. Для балки, розрахункова схема якої наведена на рис. 5.25, необхідно підібрати двотавровий поперечний переріз, визначити прогин y_B поперечного перерізу B і кути повороту поперечних перерізів θ_A, θ_C, розташованих над опорами, якщо $l = 1$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_{adm} = 160$ МПа.

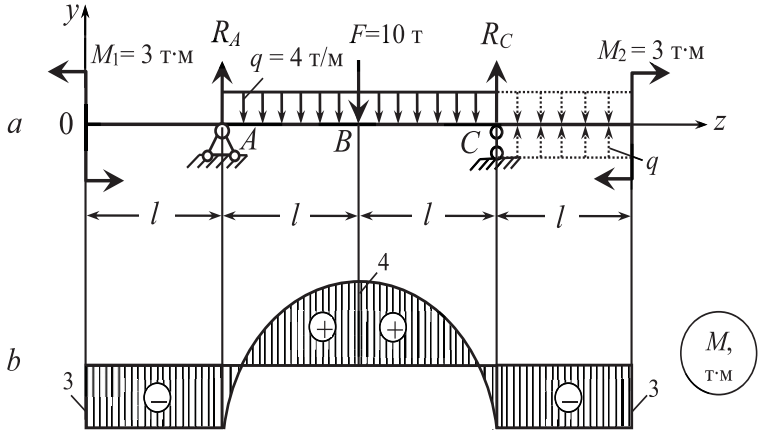


Рис. 5.25

Розв'язування. Початок правої системи координат zy пов'яжемо з лівою крайньою точкою осі балки; осі z, y направимо, як показано на рис. 5.25. Складаючи рівняння рівноваги, визначимо з них опорні реакції $R_A = R_C = 9$ т. Побудувавши епюру згинальних моментів (рис. 5.25,*b*), обчислимо максимальне значення згинального моменту $M_{max} = 4$ т·м.

З умови міцності балки за нормальними напруженнями

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \le \sigma_{adm}$$

знаходимо необхідне значення осьового моменту опору поперечного перерізу

$$W_x \ge \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{400000}{1600} = 250 \text{ см}^3.$$

За таблицею сортаменту (ГОСТ 8239-56) вибираємо двотавр № 22а, для якого осьовий момент опору поперечного перерізу балки $W_x = 251$ см^3, а осьовий момент інерції $I_x = 2760$ см^4. Відповідно до методу початкових параметрів розподілене навантаження продовжуємо до кінця балки і прикладаємо "компенсуюче" навантаження (на рис. 5.25,*а* зображено пунктирними лініями).

Величини a_i, $в_i$, c_i у формулах (5.59), (5.60) є абсцисами точок прикладання пар сил, зосереджених сил, початку ділянок розподіленого навантаження, z – абсциса довільного перерізу. В універсальному рівнянні враховуються тільки ті навантаження, у тому числі й реакції опор, які прикладені між початком системи координат і тим поперечним перерізом, прогин або кут повороту якого визначаємо. Функція, яка описує пружну деформовану вісь балки, має вигляд

$$y = y_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EI_x}\left[-\frac{M_1(z-0)^2}{2} + \frac{R_A(z-1)^3}{6} - \frac{F(z-2)^3}{6} + \right.$$
$$\left. + \frac{R_C(z-3)^3}{6} - \frac{q(z-1)^4}{24} + \frac{q(z-3)^4}{24}\right]. \qquad (5.61)$$

Момент M_2 не ввійшов явно до рівняння (5.61), але його вплив на прогини у неявній формі враховується через опорні реакції, які залежать і від моменту M_2. Щоб знайти прогин поперечного перерізу y_B, необхідно у виразі (5.61) покласти $z = 2$ м, а у квадратних дужках залишити ті силові фактори, які прикладені ліворуч від перерізу B,

$$y_B = y_0 + \theta_0 \cdot 2 + \frac{1}{EI_x}\left[-\frac{M_1(2-0)^2}{2} + \frac{R_A(2-1)^3}{6} - \frac{q(2-1)^4}{24}\right]. \qquad (5.62)$$

У формулах (5.61), (5.62) для наведеної розрахункової схеми балки з лівою консоллю є невідомими початкові параметри y_0, θ_0. Їх визначимо із граничних умов, тобто умов кріплення поперечних перерізів балки, які у нашому випадку матимуть вигляд:

$$y_A = y\big|_{z=1\text{м}} = 0; \qquad (5.63)$$

$$y_C = y\big|_{z=3\text{м}} = 0 \qquad (5.64)$$

і виражатимуть той факт, що прогини поперечних перерізів, які лежать на опорах, дорівнюють нулю. Виходячи із формули (5.61), запишемо вирази для прогинів поперечних перерізів y_A і y_C та прирівняємо їх нулю:

$$y_A = y\big|_{z=1} = y_0 + \theta_0 \cdot 1 + \frac{1}{EI_x}\left[-\frac{M_1(1-0)^2}{2}\right] = 0; \tag{5.65}$$

$$y_C = y\big|_{z=3} = y_0 + \theta_0 \cdot 3 + \\ + \frac{1}{EI_x}\left[-\frac{M_1(3-0)^3}{2} + \frac{R_A(3-1)^3}{6} - \frac{F(3-2)^3}{6} - \frac{q(3-1)^4}{24}\right] = 0. \tag{5.66}$$

Розв'язуючи систему двох алгебраїчних рівнянь (5.65), (5.66) відносно двох невідомих y_0 і θ_0, з урахуванням числових значень навантажень та жорсткості EI_x, знайдемо початкові параметри $y_0 = -0{,}12$ см, $\theta_0 = 0{,}0039$ рад. Підставивши одержані значення y_0, θ_0 у формулу (5.61), можемо визначити прогин будь-якого поперечного перерізу балки. Зокрема,

$$y_B = y\big|_{z=200см} = -0{,}12 + 0{,}0039 \cdot 200 + \\ + \frac{10^9}{2 \cdot 10^6 \cdot 2790}\left[-\frac{3(2-0)^2}{2} + \frac{9(2-1)^3}{6} - \frac{4(2-1)^4}{24}\right] = -0{,}18 \text{ см}.$$

Для визначення кута повороту θ_A необхідно в загальному рівнянні для кутів повороту

$$\theta(x) = y'(z) = \theta_0 + \frac{1}{EI_x}\left[-\frac{M_1(z-0)}{1} + \frac{R_A(z-1)^2}{2} - \frac{F(z-2)^2}{2} + \right. \\ \left. + \frac{R_C(z-3)^2}{2} - \frac{q(z-1)^3}{6} + \frac{q(z-3)^3}{6}\right]$$

покласти $z = 1$ м, а в квадратних дужках залишити тільки першу складову:

$$\theta_A = \theta\big|_{z=1} = 0{,}0039 + \frac{10^7}{2 \cdot 10^6 \cdot 2790}\left[-3(1-0)\right] = -0{,}0015 \text{ рад}.$$

Враховуючи симетрію конструкції і навантажень, $\theta_C = 0{,}0015$ рад.

Приклад 12. Для статично невизначеної балки, розрахункову схему якої наведено на рис. 5.26, визначити опорні реакції.

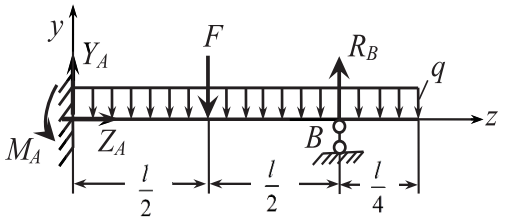


Рис. 5.26

Розв'язування. Невідомих реакцій в опорах чотири: Z_A, Y_A, M_A, R_B. Лінійно незалежних рівнянь рівноваги для плоскої довільної системи сил можемо скласти тільки три. Отже, задача один раз статично невизначена. Для її розв'язування треба скласти, крім рівнянь рівноваги, додаткове рівняння сумісності деформацій.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum Z = Z_A = 0; \qquad \sum Y = Y_A - q \cdot 1{,}25l - F + R_B = 0;$$

$$\sum mom_B\left(\bar{F}_i\right) = -M_A + Y_A l - ql \cdot \frac{l}{2} - F \cdot \frac{l}{2} + q\frac{l}{4} \cdot \frac{l}{8} = 0. \qquad (5.67)$$

Рівняння сумісності деформації випливає з умови, що прогин поперечного перерізу балки над опорою B дорівнює нулю

$$y_B = 0. \qquad (5.68)$$

За допомогою методу початкових параметрів записуємо вираз для визначення прогину y_B і прирівнюємо його нулю. Для цього вибираємо початок системи координат у затиснутому перерізі, тобто у центрі ваги лівого крайнього поперечного перерізу балки. Відповідно до універсального рівняння і враховуючи, що прогин y_0 і кут повороту θ_0 затиснутого лівого поперечного перерізу балки дорівнюють нулю, запишемо вираз для прогину поперечного перерізу y_B ($z_B = l$):

$$y_B = \frac{1}{EI_x}\left[-\frac{M_A(l-0)^2}{2} + \frac{Y_A(l-0)^3}{6} - \frac{F(l-l/2)^2}{6} - \frac{q(l-0)^4}{24}\right] = 0. \qquad (5.69)$$

Розв'язуючи спільно систему рівнянь (5.67), (5.69), знаходимо реакції в опорах.

5.11. Балки змінного поперечного перерізу. Розрахунок автомобільних ресор

Розраховуючи на міцність балку сталого по довжині поперечного перерізу, розміри поперечних перерізів визначалися згідно з умовою міцності за нормальними напруженнями у небезпечному перерізі, тобто перерізі, у якому згинальний момент досягає максимального значення M_{max}. Розміри інших поперечних перерізів, менш завантажених, приймалися такими самими, як і небезпечного. Відповідно несуча здатність матеріалу балки повністю використовувалася тільки в найбільш завантаженому, небезпечному перерізі. В інших поперечних перерізах матеріал балки залишався недовантаженим, тобто використовувався нераціонально. Зрозуміло, що для більш раціонального використання матеріалу необхідно проектувати балки змінного поперечного перерізу, розміри яких змінювалися б залежно від зміни силових факторів і в першу чергу згинального моменту.

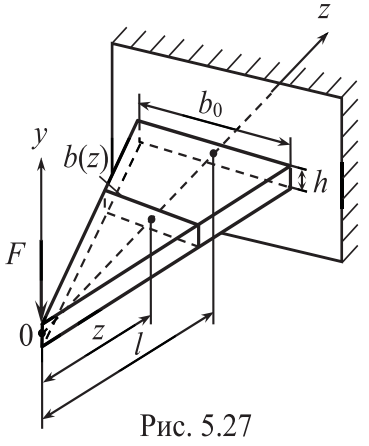


Рис. 5.27

Проаналізуємо приклад розрахунку балки змінного поперечного перерізу, який покладено в основу розрахунку автомобільних ресор. Розглянемо консольну балку прямокутного поперечного перерізу, у якої ширина поперечного перерізу $b(z)$ змінюється за лінійним законом, а висота h – стала (рис. 5.27). Із геометричних міркувань ширину довільного поперечного перерізу з абсцисою z запишемо як $b(z)=\frac{b_0 \cdot z}{l}$, де b_0 – ширина затиснутого поперечного перерізу балки. Осьовий момент інерції довільного поперечного перерізу відносно власної центральної осі x визначається, як відомо, за формулою

$$I_x(z)=\frac{b(z)\cdot h^3}{12}=\frac{b_0 \cdot z}{l}\,\frac{h^3}{12}=\frac{b_0 \cdot h^3}{12}\cdot\frac{z}{l}=I_0\frac{z}{l}, \qquad (5.70)$$

де I_0 – осьовий момент інерції поперечного перерізу в затисненні. Згинальний момент у довільному поперечному перерізі балки з абсцисою z дорівнює

$$M(z) = -F z. \tag{5.71}$$

Наближене диференціальне рівняння зігнутої осі цієї балки матиме вигляд

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI_x(z)} = -\frac{Fz}{EI_0\frac{z}{l}} = -\frac{Fl}{EI_0}. \tag{5.72}$$

Права частина диференціального рівняння (5.72) – величина стала, і його інтегрування не викликає труднощів. Інтегруючи послідовно (5.72), матимемо:

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{Fl}{EI_0}z + C; \tag{5.73}$$

$$y = -\frac{Fl}{EI_0}\frac{z^2}{2} + Cz + D. \tag{5.74}$$

Граничні умови запишемо у вигляді:

$$\text{при} \quad z = l \qquad \theta = \frac{dy}{dz} = 0; \qquad y = 0.$$

Із першої граничної умови визначаємо сталу інтегрування C:

$$-\frac{Fl^2}{EI_0} + C = 0; \quad C = \frac{Fl^2}{EI_0}.$$

Із другої граничної умови знайдемо сталу інтегрування D:

$$-\frac{Fl^3}{2EI_0} + \frac{Fl^2}{EI_0}l + D = 0; \quad D = -\frac{Fl^3}{2EI_0}.$$

Підставивши значення C і D у формули (5.73) та (5.74), отримаємо аналітичні вирази функцій кутів повороту та прогинів балки наведеного змінного поперечного перерізу:

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz} = -\frac{Fl}{EI_0}z + \frac{Fl^2}{EI_0}; \tag{5.75}$$

$$y(z) = -\frac{Fl}{EI_0}\frac{z^2}{2} + \frac{Fl^2}{EI_0}z - \frac{Fl^3}{2EI_0}. \tag{5.76}$$

Поклавши у вираз (5.76) $z = 0,$ знаходимо найбільше значення прогину консолі під дією сили F

$$y_{max} = -\frac{Fl^3}{2EI_0}. \tag{5.77}$$

Найбільші значення нормальних напружень у довільному перерізі визначимо за формулою (5.6)

$$\sigma = \frac{M \cdot \frac{h}{2}}{I_x} = \frac{Fz \cdot \frac{h}{2}}{I_0 \cdot \frac{z}{l}} = \frac{F\,hl}{2I_0} = const, \tag{5.78}$$

тобто найбільші значення нормальних напружень в усіх поперечних перерізах цієї балки однакові на відміну від консольної балки сталого по довжині поперечного перерізу, в якій найбільші нормальні напруження виникають в затиснутому поперечному перерізі. Балка, в усіх поперечних перерізах якої найбільші нормальні напруження однакові, носить назву *балки однакового опору*. Отже, повернемося до консольної балки довжиною l, з постійними по довжині розмірами поперечних перерізів: висотою h і шириною b_0, тобто такими, як розміри перерізу в затисненні для балки однакового опору. Прогин поперечного перерізу, в якому прикладена сила F, як відомо, дорівнює $y = -Fl^3/3EI_0$, а найбільші нормальні напруження в затисненні дорівнюють $\sigma = Flh/2I_0$. Отже, маючи таку ж саму міцність, що й балка сталого по довжині поперечного перерізу, прогини поперечних перерізів балки однакового опору в 1,5 раза більші, тобто балка однакового опору має більшу гнучкість. Цю властивість використовують у процесі конструювання ресор, які повинні бути достатньо міцними і разом з цим мати досить велику гнучкість. Наприклад, автомобільна ресора змінюється за таким самим законом зміни жорсткості, як і розглянута балка однакового опору.

Якщо стальний лист розрізати на смуги, як показано на рис. 5.28,*a*, потім скласти смуги з однаковими номерами, то одержимо ряд смуг різної довжини (рис. 5.28,*b*). Покладемо тепер ці смуги одну на одну так, щоб вони працювали

без тертя, одержимо ресору (рис. 5.28,*c*). Розрахунок цієї ресори проводять, використовуючи результати, отримані для балки однакового опору.

Від розрахунку консольної ресори легко перейти до розрахунку двохопорної ресори. На рис. 5.28,*e* наведена двохопорна ресора, яка при навантаженні силою $2F$ працює у такий самий спосіб, як і консольна ресора (рис. 5.28,*d*). Кут повороту середнього поперечного перерізу, де прикладена сила, дорівнює нулю, оскільки конструкція і навантаження симетричні, а тому можна вважати, що кожна половина двохопорної ресори еквівалентна консольній.

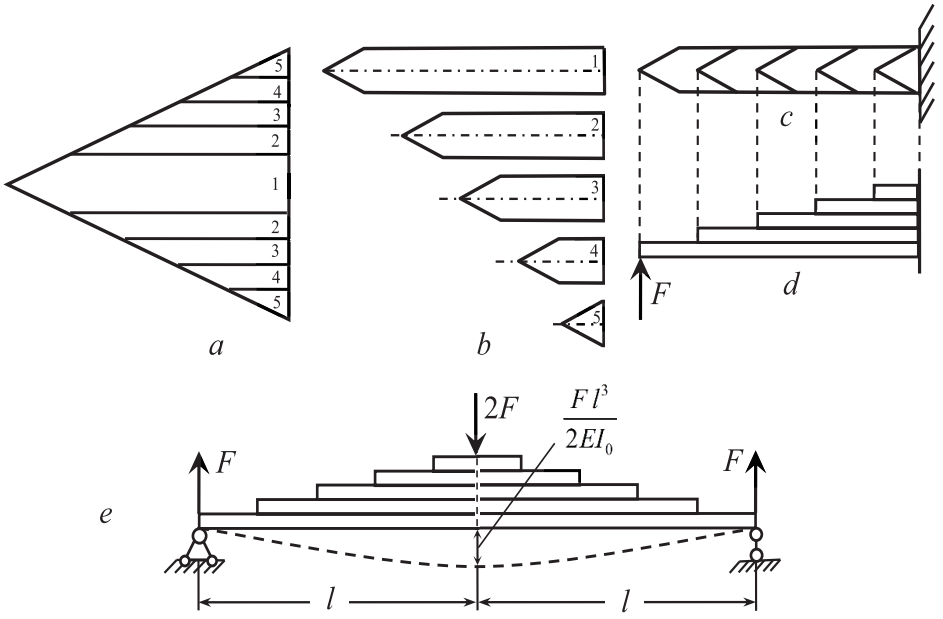


Рис. 5.28

Зауважимо, що в поперечних перерізах над опорами згинальні моменти дорівнюють нулю, а поперечна сила дорівнює F. Тому ширина поперечного перерізу над опорою повинна бути не менша, ніж величина b_1, яка знаходиться із умови міцності за дотичними напруженнями

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A} \le \tau_{adm}.$$

Враховуючи, що $A = b_1 \cdot h$, визначаємо

$$b_1 = \frac{3}{2}\frac{F}{h\tau_{adm}}.$$



Рис. 5.29

Таким чином, при проектуванні листових ресор ширина листа має бути не меншою b_1. Перший, корінний, лист ресори в плані набуває вигляду, наведеного на рис. 5.29 (Мошинський та ін., 2009).

Приклад 13. Стальна ресора (рис. 5.30) складається із 10 листів шириною 7,5 см і товщиною 1 см. Довжина прольоту ресори $l = 1$ м. Допустиме нормальне напруження $\sigma_{adm} = 4000$ кг/см^2. Визначити вантажопідйомність ресори та величину прогину посередині прольоту.

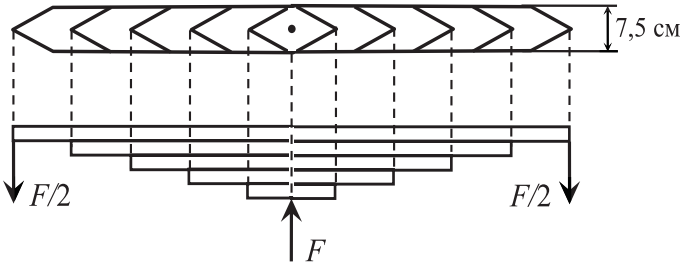


Рис. 5.30

Розв'язування. Оскільки конструкція і навантаження є симетричними, то кут повороту поперечного перерізу над силою F дорівнює нулю. Цей переріз можна вважати умовно затиснутим, тобто перейти від розрахунку двохопорної ресори до розрахунку консольної ресори, як балки однакового опору (рис. 5.27). Висота перерізу балки однакового опору дорівнюватиме товщині листа $h = 1$ см, а ширина перерізу в затисненні – ширині десяти листів $b_0 = 7{,}5 \cdot 10 = 75$ см; довжина консолі $l/2 = 0{,}5$ м; осьовий момент інерції поперечного перерізу в затисненні $I_0 = b_0 h^3 / 12$; навантаження на кінці консолі $F/2$. З умови міцності балки за нормальними напруженнями

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I_x} = \frac{\frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b_0 h^3}{12}} \le \sigma_{adm}$$

визначаємо $F = 2000$ кг.

Величина прогину згідно з формулою (5.77) дорівнюватиме

$$f = -\frac{\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3}{2EI_0} = -5 \text{ см}.$$

5.12. Балки ступінчастого поперечного перерізу та їх розрахунки графоаналітичним методом

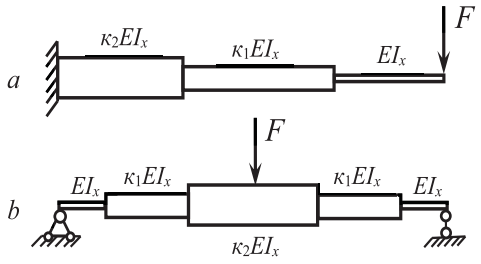


Рис. 5.31

З метою зменшення матеріалоємкості та ваги конструкцій іноді використовують балки ступінчастого поперечного перерізу (рис. 5.31). Жорсткість поперечних перерізів на згин у таких балках на окремих ділянках різна. Визначення прогинів та кутів повороту поперечних перерізів таких балок доцільно проводити, використовуючи графоаналітичний метод, який ґрунтується на подібності диференціальних залежностей між прогином, згинальним моментом та інтенсивністю розподіленого навантаження.

Розглянемо балку з довільним навантаженням. Наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки матиме вигляд

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI_x}. \tag{5.79}$$

Під заданою балкою побудуємо другу балку тієї ж самої довжини, навантажену поки що невідомим розподіленим навантаженням інтенсивності q_f, додатний напрямок якого приймемо вгору. Опори цієї балки залишаємо теж поки що невизначеними, підкреслимо лише, що опорні реакції урівноважують навантаження q_f. Другу балку називатимемо фіктивною (уявною), а всі величини, що відносяться до неї, будемо позначати з індексом f.

Для фіктивної балки справедлива залежність

$$\frac{d^2M_f}{dz^2} = q_f. \tag{5.80}$$

Порівняємо вирази (5.79) та (5.80). Якщо прийняти, що

$$q_f = \frac{M(z)}{EI_x}, \tag{5.81}$$

то

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d^2M_f}{dz^2}. \tag{5.82}$$

Якщо при інтегруванні формули (5.82) досягти рівності сталих інтегрування в лівій і правій частинах рівняння, то одержимо:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dM_f}{dz}; \tag{5.83}$$

$$y = M_f. \tag{5.84}$$

Враховуючи, що $\frac{dy}{dz} = \theta$, $\frac{dM_f}{dz} = Q_f$, маємо:

$$\theta = Q_f. \tag{5.85}$$

Прогин перерізу дійсної балки дорівнює фіктивному згинальному моменту в тому ж самому перерізі фіктивної балки.

Кут повороту поперечного перерізу дійсної балки дорівнює фіктивній перерізуючій силі в тому ж самому перерізі фіктивної балки. Отримані результати будуть виконуватися в тому випадку, коли при інтегруванні (5.82) досягнемо рівності сталих інтегрування в лівій і правій частинах, які визначаються із граничних умов, тобто умов кріплення поперечних перерізів балки. Отже, досягти рівності сталих інтегрування при інтегруванні виразу (5.82) можна шляхом такого закріплення фіктивної балки, за якого задовольнялися б певні умови, що випливають із рівнянь (5.84) та (5.85):

1) якщо прогин дійсної балки $y = 0$, то згинальний момент фіктивної балки $M_f = 0$;
2) якщо $\theta = 0$, то $Q_f = 0$;
3) якщо $y \neq 0$; $\theta \neq 0$, то $M_f \neq 0$; $Q_f \neq 0$.

Наведемо приклади умов кріплення поперечних перерізів дійсної балки та відповідні цим умовам кріплення поперечних перерізів фіктивної балки.

Дійсна балка	***Прогин***	***Згинальний момент***	***Фіктивна балка***
Шарнірна кінцева опора	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_f = 0$ $Q_f \neq 0$	Шарнірна кінцева опора
Затиснений кінець	$y = 0$ $\theta = 0$	$M_f = 0$ $Q_f \neq 0$	Вільний кінець
Вільний кінець	$y \neq 0$ $\theta \neq 0$	$M_f = 0$ $Q_f \neq 0$	Затиснення
Проміжна шарнірна опора	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_f = 0$ $Q_f \neq 0$	Проміжний врізаний шарнір
Проміжний врізаний шарнір	$y \neq 0$ $\theta \neq 0$	$M_f = 0$ $Q_f \neq 0$	Проміжна опора

Такі умови кріплення можна схематично навести у вигляді рис. 5.32.

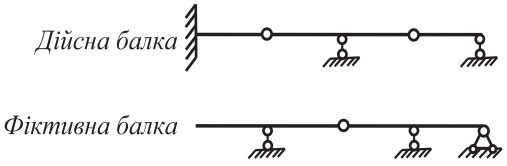


Рис. 5.32

Отже, щоб знайти y і θ поперечного перерізу дійсної балки треба послідовно виконати деякі операції:

1) накреслити схему дійсної балки;

2) побудувати епюру згинальних моментів $M(z)$ для дійсної балки;

3) накреслити фіктивну балку і навантажити її розподіленим фіктивним навантаженням $q_f = M(z) / EI_x$;

4) визначити опорні реакції фіктивної балки;

5) розрахувати M_f і Q_f в потрібних перерізах.

Приклад 14. Для консольної балки ступінчастого поперечного перерізу (рис. 5.33) визначити прогин y_B та кут повороту θ_B поперечного перерізу B, у якому прикладена сила F. Жорсткість на згин балки на ділянці AC дорівнює $2EI_x$, на ділянці CB – EI_x.

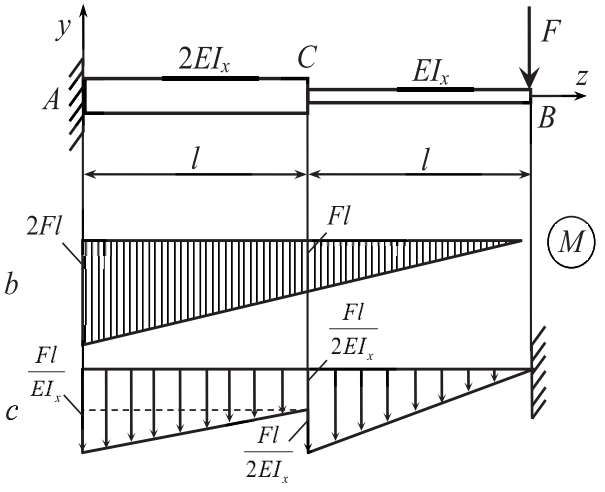


Рис. 5.33

Розв'язування. Будуємо епюру $M(z)$ для дійсної балки (рис. 5.33,*b*). Накреслимо фіктивну балку (рис. 5.33,*c*) і навантажимо її фіктивним навантаженням $q_f = M / EI_x$ на ділянці BC і $q_f = M / 2EI_x$ на ділянці CA.

Знаходимо прогин перерізу B

$$y_B = M_{fB} = -\frac{Fl^2}{2EI_x}\cdot\frac{3}{2}l - \frac{1Fl^2}{4EI_x}\cdot\frac{5}{3}l - \frac{Fl^2}{2EI_x}\cdot\frac{2}{3}l = -\frac{3}{2}\frac{Fl^3}{EI_x}$$

та кут повороту θ_B

$$\theta_B = Q_{fB} = -\frac{1Fl^2}{2EI_x} - \frac{1}{4}\cdot\frac{Fl^2}{EI_x} - \frac{1Fl^2}{2EI_x} = -\frac{5}{4}\frac{Fl^2}{EI_x}.$$

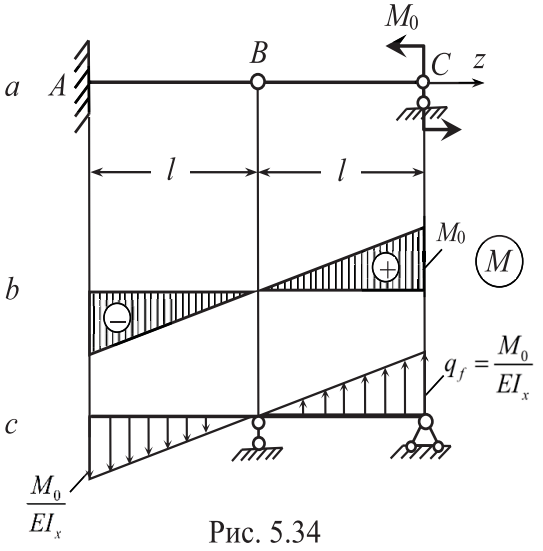


Рис. 5.34

Приклад 15. Балка, розрахункова схема якої наведена на рис. 5.34,*a*, має сталу жорсткість на згин EI_x, навантажена парою сил з моментом M_0. Знайти прогин шарніра B.

Розв'язування. Будуємо епюру згинальних моментів для дійсної балки (рис. 5.34,*b*), фіктивну балку (рис. 5.34,*c*) і навантажуємо її фіктивним розподіленим навантаженням $q_f = M / EI_x$. Визначаємо прогин шарніра B

$$y_B = M_{fB} = -\frac{1}{2}\frac{M_0}{EI_x}l\cdot\frac{2}{3}l = -\frac{M_0 l^2}{3EI_x}.$$

ГЛАВА 6. СКЛАДНИЙ ОПІР. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ТА ДЕТАЛЕЙ МАШИН СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

У загальному випадку навантаження довільного просторового елемента конструкції чи деталі машини довільною просторовою системою зовнішніх сил в їх поперечних перерізах виникають, як відомо, шість внутрішніх силових факторів: поздовжня сила N, поперечні сили Q_y, Q_x, крутний момент $T = M_z$ та згинальні моменти M_y, M_x у двох взаємно перпендикулярних площинах.

Можливі частинні випадки навантаження, коли в поперечних перерізах виникають не всі водночас силові фактори, а тільки окремі з них: осьовий розтяг–стиск, коли виникає тільки одна поздовжня сила N; кручення, коли виникає тільки один крутний момент $T = M_z$; плоский поперечний згин, коли виникають тільки поперечна сила та згинальний момент Q_y, M_x або Q_x, M_y. Такі частинні види навантаження елемента чи деталі зовнішньою системою сил, а відповідно і їх напружено-деформовані стани, називають *простими видами*. На практиці досить часто трапляються випадки, коли у поперечних перерізах елементів конструкцій та деталей машин під дією зовнішніх сил виникають водночас силові фактори, які відповідають різним комбінаціям простих видів навантаження. Такі види навантаження елементів конструкцій та деталей машин, а відповідно і їх напружено-деформовані стани, називають *складним опором*, тобто під складним опором розуміють різні комбінації раніше розглянутих простих видів навантаження, простих напружених станів елемента чи деталі – розтягу, стиску, зсуву, кручення та згину.

Аналіз напружено-деформованого стану за складного опору проводять, використовуючи принцип суперпозиції, згідно з яким результат дії на пружне тіло системи сил дорівнює сумі результатів дії окремих складових сил цієї системи,

незалежно від порядку їх прикладання. За цим принципом складний напружено-деформований стан розбивають на складові, прості напружено-деформовані стани, спричинені тим чи іншим зовнішнім навантаженням. Визначають за відомими формулами напруження і деформації при простих напружено-деформованих станах, а потім остаточно беруть їх відповідну суму. Принцип суперпозиції, як відомо, можна застосовувати в усіх випадках, коли деформації малі та існує лінійна залежність між напруженнями та деформаціями, тобто придатний закон Гука. Отже, розрахунки елементів конструкцій та деталей машин на міцність і жорсткість в умовах складного опору зводять до розрахунків в умовах простих видів навантаження. На практиці комбінація водночас усіх простих видів навантаження зустрічається не дуже часто. Частіше маємо справу із косим згином, крученням зі згином та позацентровим розтягом або стиском, які і розглянемо далі.

6.1. Складний та косий згин

Згин балки, викликаний зовнішніми силами та моментами, розташованими в різних площинах, які проходять через її вісь, називають *складним* або *неплоским згином*. За такого згину зігнута вісь балки є просторовою, а не плоскою кривою. У випадку, коли усі зовнішні навантаження розташовані в одній силовій площині, яка проходить через вісь балки та не співпадає з жодною із головних площин інерції балки, такий згин називають *косим*. Головною площиною балки називатимемо площину, яка проходить через вісь балки та через одну з головних осей інерції її поперечних перерізів (рис. 6.1).

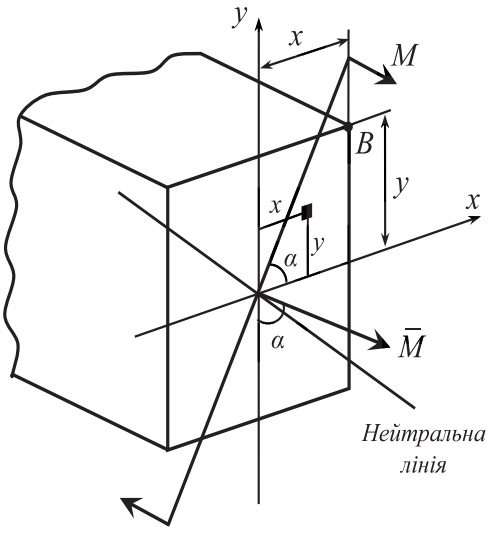


Рис. 6.1

Розкладаючи згинальний момент $\bar{M}$ на складові по головних осях y і x, матимемо:

$$M_x = M\sin\alpha; \quad M_z = M\cos\alpha. \tag{6.1}$$

Складова згинального моменту M_x викликає згин балки у вертикальній площині, складова M_y викликає згин балки у горизонтальній площині. Таким чином, косий згин можемо розглядати як водночас два плоских згина у двох взаємно перпендикулярних головних площинах інерції балки zy і xz. Використовуючи принцип суперпозиції та відому формулу для визначення нормальних напружень у довільній точці довільного поперечного перерізу за плоского згину, знаходимо нормальне напруження в довільній точці поперечного перерізу балки з додатними координатами x, y за косого згину

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} \tag{6.2}$$

або з урахуванням виразів (6.1) одержимо

$$\sigma = M\left(\frac{y}{I_x}\sin\alpha + \frac{x}{I_y}\cos\alpha\right). \tag{6.3}$$

Рівняння нейтральної лінії перерізу як геометричного місця точок перерізу, в яких нормальні напруження дорівнюють нулю, отримаємо, прирівнявши нулю праву частину виразу для визначення нормальних напружень (6.3),

$$\frac{y}{I_x}\sin\alpha + \frac{x}{I_y}\cos\alpha = 0,$$

звідки

$$y = -\left(\frac{I_x}{I_y}\operatorname{ctg}\alpha\right)\cdot x. \tag{6.4}$$

Неважко переконатися в тому, що за косого згину нейтральна лінія не перпендикулярна до площини згинального моменту, а повернута в бік осі мінімального моменту інерції поперечного перерізу. Для цього запишемо рівняння сліду площини згинального моменту у вигляді

$$y = k_1 x, \quad \text{де} \quad k_1 = \operatorname{tg}\alpha, \tag{6.5}$$

а рівняння нейтральної лінії (6.4) перепишемо таким чином:

$$y = k_2 x, \quad \text{де} \quad k_2 = -\frac{I_x}{I_y}\operatorname{ctg}\alpha . \tag{6.6}$$

Умова перпендикулярності двох прямих, як відомо, має вигляд

$$k_1 k_2 = -1 . \tag{6.7}$$

У загальному випадку, коли $I_x \neq I_y$, умова перпендикулярності (6.7) не виконується, бо

$$k_1 k_2 = -\frac{I_x}{I_y} \neq -1 .$$

Тільки в окремих випадках, наприклад для круглого або квадратного поперечних перерізів балки, коли $I_x = I_y$ – нейтральна лінія перпендикулярна площині згинального моменту.

Найбільші нормальні напруження за косого згину виникають у точках перерізу, які найбільш віддалені від нейтральної лінії. Нехай точка B (рис. 6.1) є найбільш віддаленою від нейтральної лінії і має координати y_B, x_B, тоді

$$\sigma_{max} = \sigma_B = \frac{M_x \cdot y_B}{I_x} + \frac{M_y \cdot x_B}{I_y} . \tag{6.8}$$

У випадку, коли поперечний переріз має просту форму (круг, прямокутник), найбільш небезпечна точка визначається просто. У випадку складної форми перерізу:

1) виконують креслення перерізу в масштабі;

2) знаходять положення головних центральних осей u і v та значення головних моментів інерції I_u, I_v;

3) визначають складові M_u, M_v;

4) будують нейтральну лінію, користуючись формулою (6.4),

$$v = -\left(\frac{I_u}{I_v}\operatorname{ctg}\alpha\right) u ;$$

5) за допомогою лінійки і кутника знаходять точку B, найбільш віддалену від нейтральної лінії, та визначають з креслення за масштабом її координати u_B, v_B;

6) за формулою (6.8) визначають найбільші нормальні напруження в перерізі

$$\sigma_{max} = \frac{M_u \cdot v_B}{I_u} + \frac{M_v \cdot u_B}{I_v}.$$

Для визначення прогинів перерізів за косого згину розраховують прогини f_u і f_v у двох головних площинах інерції балки, а повний прогин перерізу f визначають як геометричну суму прогинів f_u і f_v $f = \sqrt{f_u^2 + f_v^2}$.

Приклад 1. Визначити найбільше значення вильоту різця l, на який у площині, перпендикулярній поздовжній осі різця Oz, діє сила F = 1000 Н, відхилена під кутом $\alpha = 30^o$ від вертикальної осі (рис. 6.2), якщо допустимий прогин поперечних перерізів різця f_{adm} = 0,03 мм. Різець жорстко затиснутий у лівому, заштрихованому на рисунку, перерізі. Розміри поперечного перерізу різця: h = 20 мм, b = 10 мм; модуль пружності матеріалу різця $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Перевірити міцність різця, якщо для нього σ_{adm} = 200 МПа.

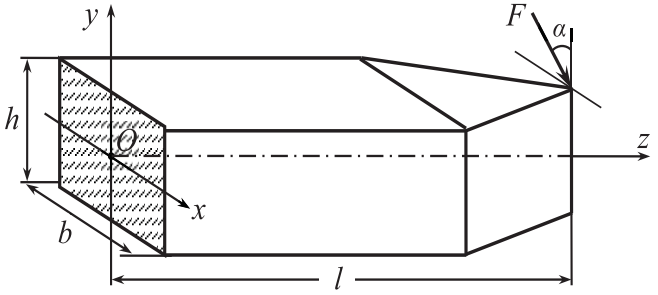


Рис. 6.2

Розв'язування. Оскільки сила F направлена перпендикулярно до поздовжньої осі різця і водночас під кутом α до головних центральних осей перерізу, то різець знаходиться в умовах косого згину. Розкладаючи силу F на складові у вертикальній площині $F_y = F\cos\alpha$ і у горизонтальній площині $F_x = F\sin\alpha$, знаходимо прогини f_y і f_x вільного перерізу різця у вертикальній і горизонтальній площинах за відомими формулами (5.29) для плоского згину консольної балки:

$$f_y = \frac{F_y l^3}{3EI_x}; \quad f_x = \frac{F_x l^3}{3EI_y}.$$

Повний прогин кінцевого поперечного перерізу різця дорівнюватиме

$$f = \sqrt{\left(\frac{F_y l^3}{3EI_x}\right)^2 + \left(\frac{F_x l^3}{3EI_y}\right)^2}.$$

Відповідно умова жорсткості різця набирає вигляду

$$\frac{l^3}{3E}\sqrt{\frac{F_y^2}{I_x^2} + \frac{F_x^2}{I_y^2}} \le f_{adm},$$

звідки, маючи на увазі, що

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \cdot 2^3}{12} = 0,667\,\text{см}^4; \quad I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{2 \cdot 1^3}{12} = 0,1667\,\text{см}^4;$$

$$F_x = F \cdot \sin\alpha = 1000 \cdot 0,5 = 500\ \text{Н}; \quad F_y = F \cdot \cos\alpha = 1000 \cdot 0,866 = 866\ \text{Н},$$

отримаємо

$$l_{max} = \sqrt[3]{\frac{f_{adm} \cdot 3E}{\sqrt{\frac{F_y^2}{I_x^2} + \frac{F_x^2}{I_y^2}}}} = \sqrt[3]{\frac{0,03 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^7}{\sqrt{\frac{866^2}{0,667^2} + \frac{500^2}{0,1667^2}}}} = 3,8\ \text{см}.$$

Виконаємо перевірочний розрахунок різця на міцність

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x\,max}}{W_x} + \frac{M_{y\,max}}{W_y} = \frac{6F_y l}{bh^2} + \frac{6F_x l}{hb^2} = \frac{6 \cdot 86,6 \cdot 3,8}{1 \cdot 2^2} + \frac{6 \cdot 50 \cdot 3,8}{2 \cdot 1^2} =$$

$$= 1064\ \text{кг}/\text{см}^2 = 106,4\ \text{МПа} < \sigma_{adm},$$

тобто умова міцності виконується і міцність різця забезпечена.

6.2. Позацентровий розтяг–стиск прямого стояка

Якщо поздовжня сила не співпадає з віссю стержня, як за центрального розтягу або стиску, а зміщена відносно поздовжньої осі *z* та залишається їй паралельною, то має місце так званий позацентровий розтяг або стиск стержня.

Визначимо нормальні напруження в точках поперечних перерізів стержня за позацентрового розтягу.

Припустимо, що осі x, y – головні центральні осі поперечного перерізу, точка C_0 (рис. 6.3) є точкою прикладення поздовжньої сили F, а її координати – відповідно x_F, y_F. Сила F не тільки розтягує стержень, але й утворює відносно головних осей Cy та Cx згинальні моменти:

$$M_y = F \cdot x_F; \qquad M_x = F \cdot y_F.$$

Отже, позацентровий розтяг або стиск стояка можна розглядати як центральний розтяг або стиск плюс косий згин. У довільній точці перерізу з координатами x та y нормальні напруження визначаться за формулою

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_F \cdot y}{I_x} + \frac{F \cdot x_F \cdot x}{I_y} =$$

$$= \frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_F \cdot y}{\frac{I_x}{A}} + \frac{x_F \cdot x}{\frac{I_y}{A}}\right) = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2}\right). \tag{6.9}$$

Рівняння нейтральної лінії отримаємо, прирівнявши нулю праву частину виразу (6.9),

$$1 + \frac{y_F\, y}{i_x^2} + \frac{x_F\, x}{i_y^2} = 0. \tag{6.10}$$

Найбільші напруження будуть виникати в точці B, найбільш віддаленій від нейтральної лінії. Нехай координатами цієї точки є x_B, y_B, тоді

$$\sigma_{max} = \sigma_B = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_F y_B}{i_x^2} + \frac{x_F x_B}{i_y^2}\right). \tag{6.11}$$

Умова міцності стержня матиме вигляд $\sigma_{max} \le \sigma_{adm}$. Для знаходження найбільш небезпечної точки в перерізі, тобто точки B, найбільш віддаленої від нейтральної осі, зручно використати засіб, наведений для випадку косого згину. Нейтральну лінію накреслимо, користуючись рівнянням (6.10),

$$\text{при} \quad y = 0 \qquad x = -i_y^2 / x_F;$$

$$\text{при} \quad x = 0 \qquad y = -i_x^2 / y_F. \tag{6.12}$$

Будуємо точки C_1 та C_2. Проводимо нейтральну лінію через точки C_1, C_2 (рис. 6.3). Підкреслимо, що напруження в точках, які лежать по різні боки від нейтральної лінії, будуть різні за знаком. У нашому випадку напруження в точках праворуч від нейтральної лінії будуть додатними – розтягуючими, а ліворуч – від'ємними, стискуючими. Відстань від центра перерізу до нейтральної лінії *CD* знаходимо із геометричних міркувань

$$CD = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_F^2}{i_y^4} + \frac{y_F^2}{i_x^4}}}. \qquad (6.13)$$

Із формули (6.13) випливає, що при наближенні точки прикладання поздовжньої сили до центра перерізу, тобто при $x_F \to 0$ і $y_F \to 0$, нейтральна лінія виходить за межі поперечного перерізу і напруження в усіх точках перерізу будуть одного знаку. При $x_F = 0$, $y_F = 0$ нейтральна лінія віддаляється у нескінченність, напруження в усіх точках перерізу будуть однакові і матимемо центральний розтяг або стиск, за яких $\sigma = F / A$.

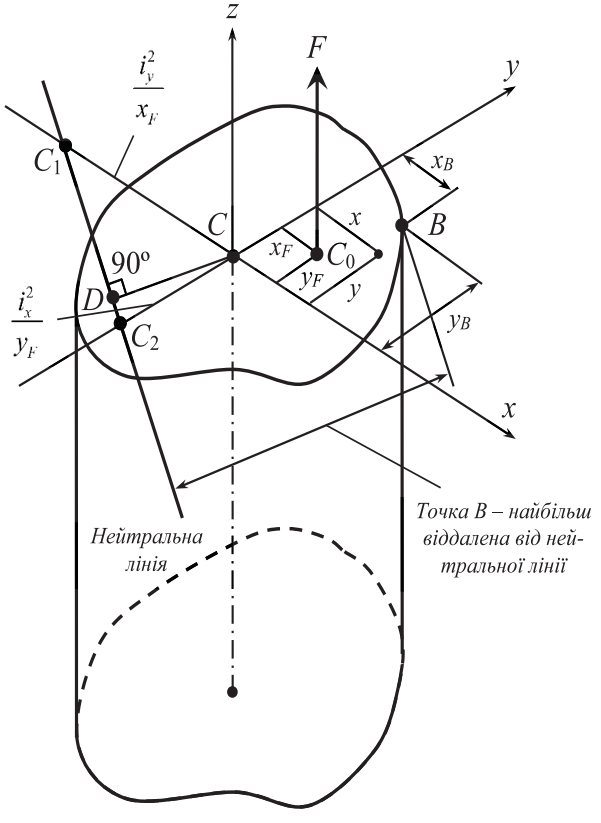


Рис. 6.3

І навпаки, при збільшенні x_F, y_F, тобто при збільшенні ексцентриситету – відстані між центром перерізу і точкою прикладення поздовжньої сили *F*, нейтральна лінія буде наближатися до перерізу і за деякого положення торкнеться контуру перерізу. У разі подальшого збільшення ексцентриситету нейтральна

лінія перетне переріз, причому нормальні напруження в перерізі будуть обох знаків, по один бік нейтральної лінії – розтягуючі, по іншій – стискуючі.

Навколо центра перерізу можна визначити зону, яку називають *ядром перерізу* та яка характерна тим, що у разі прикладання зовнішньої сили в точках цієї зони нормальні напруження в усіх точках перерізу будуть одного знака. Якщо ж поздовжня сила буде прикладена поза межами цієї зони, то нормальні напруження в перерізі будуть мати різні знаки. Визначати межі ядра перерізу важливо, наприклад, для стиснутих стержнів, виготовлених із матеріалів, які погано чинять опір розтягу. У першу чергу це крихкі будівельні матеріали – цегла, бетон, граніт, чавун. Якщо колону із цегляної кладки стиснути поздовжньою силою, прикладеною поза межами ядра перерізу, то в поперечному перерізі виникнуть, крім стискуючих, і розтягуючі напруження, які можуть викликати руйнування. Для побудови ядра перерізу задаються різними положеннями нейтральної лінії, дотичними до контуру перерізу, обчислюють координати відповідних точок прикладення сили F за формулами, що випливають із виразу (6.12):

$$x_F = -\frac{i_y^2}{a}; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{b}, \tag{6.14}$$

де a, b – відрізки, які відсікаються нейтральною лінією на осях x, y. Обчислені координати визначають точки, що лежать на межі ядра перерізу.

6.3. Сумісна дія згину і кручення. Розрахунки валів круглого поперечного перерізу на міцність при сумісній дії згину і кручення

У главі 3 розглянуто розрахунки валів круглого поперечного перерізу на міцність та жорсткість, які працюють в умовах тільки кручення. У реальних умовах експлуатації вали працюють в умовах складного опору і в більшості випадків – за сумісного кручення та згину. Справа в тому, що вже під дією власної ваги горизонтально розташовані вали працюють на згин. Крім того, різноманітні навантаження, що діють на вали, наприклад натяг пасів пасових

передач, вага шківів, шестерень, сили тиску на шестерні і т.ін., викликають поперечний згин валів. У поперечних перерізах таких валів можуть виникати внутрішні силові фактори, які належать і до кручення, і до згину, а саме: крутний момент T, згинальні моменти M_y, M_x та поперечні сили Q_y і Q_x у двох площинах. Відповідно у будь-якому поперечному перерізі вала водночас можуть виникнути нормальні напруження від згину у двох площинах і дотичні напруження від дії крутного моменту та дії поперечних сил. Що стосується складових дотичних напружень від дії поперечних сил Q_y та Q_x, то ними нехтують, оскільки вони набагато менші за дотичні напруження від кручення та за нормальні напруження від згину. До того ж у небезпечних точках поперечних перерізів валів, у точках, найбільш віддалених від осі вала, дотичні напруження від поперечних сил дорівнюють нулю.

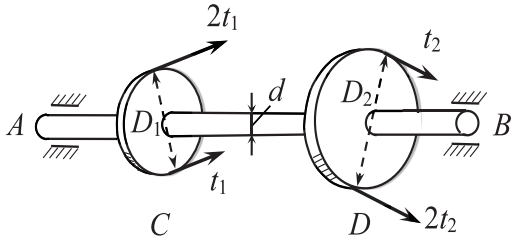


Рис. 6.4

Розглянемо суцільний вал AB діаметром d, на якому насаджені два шківи C і D пасової передачі з діаметрами відповідно D_1 і D_2 (рис. 6.4).

Сили натягу пасів пасових передач позначимо через t_1 і t_2. Розрахункова схема вала пасової передачі зображена на рис. 6.5,*а*. Тертям у підшипниках A і B нехтуємо. Система сил, що прикладена до шківа C, зведеться до сили $F_1 = 2t_1 + t_1 = 3t_1$ і крутного моменту $T_1 = (2t_1 - t_1) \cdot \frac{D_1}{2} = t_1 \cdot \frac{D_1}{2}$; система сил, що прикладена до шківа D, зведеться до сили $F_2 = 2t_2 + t_2 = 3t_2$ і крутного моменту $T_2 = (2t_2 - t_2) \cdot \frac{D_2}{2} = t_2 \cdot \frac{D_2}{2}$.

Сили F_1 і F_2 розкладають на вертикальні та горизонтальні складові. Вертикальні складові F_{1y}, F_{2y} викликають у підшипниках вертикальні складові реакцій R_{Ay} і R_{By}, а горизонтальні сили F_{1x} і F_{2x} – горизонтальні складові реакцій R_{Ax} і R_{Bx}.

Величини складових реакцій визначають як для балки, що лежить на двох опорах, складаючи рівняння рівноваги. Епюра згинальних моментів M_x побудована від вертикальних сил (рис. 6.5,*c*), епюра згинальних моментів M_y побудована в горизонтальній площині від дії горизонтальних сил (рис. 6.5,*e*). Епюру сумарних згинальних моментів $M_{зг}$ (рис. 6.5,*f*) будують на основі епюр M_x і M_y за формулою

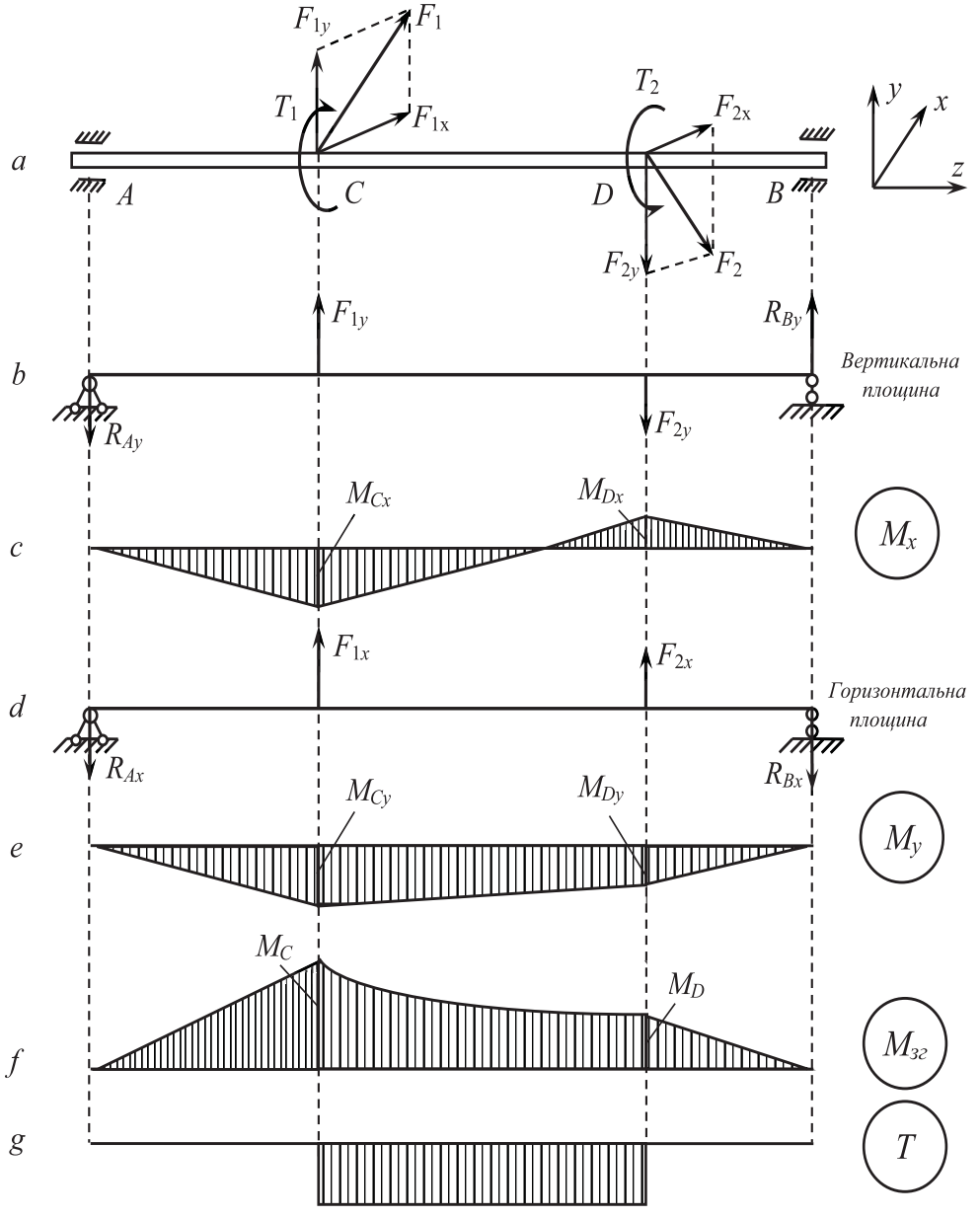


Рис. 6.5

$$M_{зг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\,. \tag{6.15}$$

Епюра крутних моментів наведена на рис. 6.5,*g*, де $T = T_1 = T_2$ з умови рівноваги. Небезпечним перерізом буде той, у якому сумарний згинальний момент $M_{зг}$ і крутний момент T водночас набирають найбільших значень. У нашому випадку таким перерізом є поперечний переріз C. У цьому перерізі діє найбільший згинальний момент $M_{зг}$, а також максимальний крутний момент T. Згинальний момент викличе найбільші нормальні напруження в точці K, що знаходиться в площині дії $M_{зг}$ (рис. 6.6)

$$\sigma_K = \frac{M_{зг}}{W_y}, \tag{6.16}$$

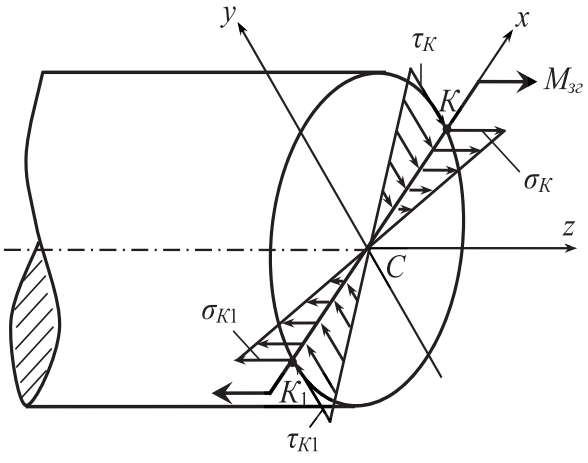


Рис. 6.6

де W_y – момент опору поперечного перерізу відносно осі y, яка перпендикулярна до площини xCy дії згинального моменту $M_{зг}$. Крутний момент T викликає найбільші дотичні напруження в точках периферії перерізу, у тому числі і в точці K. Таким чином, за небезпечну точку перерізу приймаємо точку K (за небезпечну можна прийняти і точку K_1, де нормальні напруження є стискуючими). Максимальні за абсолютною величиною нормальні та дотичні напруження в точці K дорівнюють відповідно:

$$\sigma_K = \frac{M_{зг}}{W_y}; \tag{6.17}$$

$$\tau_K = \frac{T}{W_\rho}. \tag{6.18}$$

Враховуючи, що для круглого поперечного перерізу полярний момент опору перерізу W_p удвічі більший за осьовий момент опору W_y, тобто $W_p = 2W_y$, формули (6.17) і (6.18) перепишемо у вигляді:

$$\sigma_K = \frac{M_{зг}}{W_y}; \tag{6.19}$$

$$\tau_K = \frac{T}{2W_y}. \tag{6.20}$$

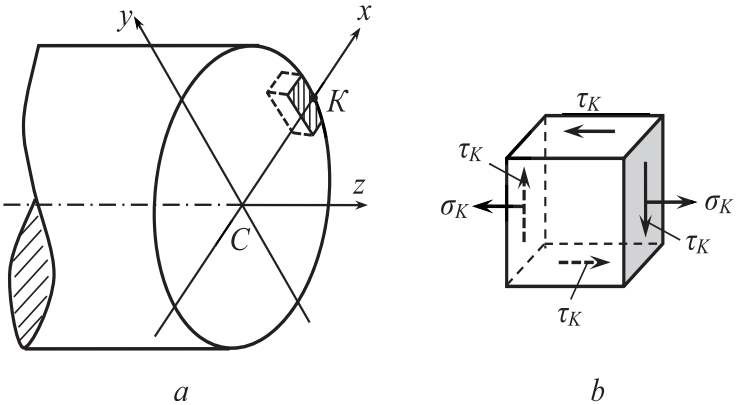
Для дослідження напруженого стану в точці K вилучимо навколо цієї точки елементарний об'єм (рис. 6.7,*a*) так, щоб його заштрихована грань була паралельна поперечному перерізу вала.

Тоді на гранях паралелепіпеда, паралельних поперечному перерізу вала, діють нормальні $\sigma_к$ і дотичні $\tau_к$ напруження, значення яких з'ясовуємо за формулами (6.19) і (6.20). На підставі закону парності дотичних напружень дотичні напруження $\tau_к$ виникають також на верхній і нижній гранях елемента. Інші дві паралельні грані вільні від нормальних напружень, оскільки відсутні сили, що розтягують або стискують вал у напрямі, перпендикулярному його осі. Отже, в небезпечній точці K маємо випадок плоского напруженого стану. Розрахунок проводимо з використанням однієї із теорій міцності. Розглядаючи вал, виготовлений із пластичного матеріалу, використовуємо третю або четверту теорію міцності. Умова міцності за третьою теорією міцності має вигляд

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma_K^2 + 4\tau_K^2} \le \sigma_{adm} \tag{6.21}$$

і за четвертою теорією міцності

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_K^2 + 3\tau_K^2} \le \sigma_{adm}. \tag{6.22}$$



a *b*

Рис. 6.7

Враховуючи формули (6.15) (6.19), (6.20), бачимо, що умови міцності вала (6.21), (6.22) набирають вигляду:

$$\sigma_{екв}^{III} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + T^2}}{W_y} \le \sigma_{adm}; \tag{6.23}$$

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75T^2}}{W_y} \le \sigma_{adm}. \tag{6.24}$$

Умови міцності вала (6.23) і (6.24) можна переписати так:

$$\sigma_{екв}^{III} = \frac{M_{екв}^{\text{III}}}{W_y} \le \sigma_{adm}; \tag{6.25}$$

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{M_{екв}^{IV}}{W_y} \le \sigma_{adm}. \tag{6.26}$$

Виходячи з цих умов, бачимо, що розрахунки валів на міцність за сумісної дії згину і кручення, можна виконувати у такий самий спосіб, як і у разі згину, тільки замість згинального моменту необхідно використовувати зведений (еквівалентний) момент за тією чи іншою теорією міцності, який враховує і згинальні моменти M_x, M_y від згину у двох площинах, і крутний момент T від кручення. На основі цих умов виконують два типи (три види) розрахунків валів на міцність за сумісної дії згину і кручення. Наприклад, для визначення діаметра вала за третьою теорією міцності найбільших дотичних напружень, за відомого зовнішнього навантаження та допустимого значення нормальних напружень, з умови міцності визначаємо осьовий момент опору поперечного перерізу вала $W_y = M^{III}_{екв} / \sigma_{adm}$.

Враховуючи, що $W_y = \frac{\pi d^3}{32}$, матимемо $\frac{\pi d^3}{32} = \frac{M_{екв}^{III}}{\sigma_{adm}}$, звідки для визначення діаметра вала отримаємо формулу

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{екв}^{III}}{\pi \sigma_{adm}}}.$$

Аналогічно для визначення діаметра вала за четвертою теорією міцності матимемо

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{екв}^{IV}}{\pi\sigma_{adm}}}.$$

Зауважимо, що отримані результати придатні тільки для розрахунків валів круглого та кільцевого поперечних перерізів.

Приклад 2. Перевірити на статичну міцність ведучий вал конічного редуктора (рис. 6.8), до якого прикладено крутний момент T = 126 Н·м. Середній діаметр конічної шестерні d_m = 85,8 мм. Допустиме нормальне напруження для вала σ_{adm} = 60 МПа. Згідно з геометричними параметрами косозубчастої шестерні, розкладаючи просторову силу тиску на шестерню по осях координат, визначаємо складові сили, що діють на неї (рис. 6.8,*b*). У даному випадку приймемо такі значення складових сил, діючих на шестерню: колова F_t = 2938 Н, радіальна F_r = 1020 Н, осьова F_a = 322 Н.

Розв'язування. Оскільки вал зазнає деформації згину з крученням, то його розрахунок проведемо за методикою розрахунку валів на сумісну дію згину і кручення, яка наведена в §6.3. Прикладені до шестерні сили діють у двох площинах – вертикальній і горизонтальній. Вертикальні і горизонтальні складові сил показані на рис. 6.8,*b*. Розглянемо горизонтальну площину zx (рис. 6.8,*c*). Реакції опор визначимо, складаючи суми моментів усіх сил, що діють у горизонтальній площині відносно точок A і B, та прирівнюючи їх нулю:

$$\sum mom_A(\bar{F}_i) = R_{Bx}\cdot L - F_t\left(L+a\right) = 0;$$

$$\sum mom_B(\bar{F}_i) = -R_{Ax}\cdot L + F_t\cdot a = 0,$$

звідки:

$$R_{Bx} = \frac{F_t\left(L+a\right)}{L} = \frac{2938\left(118+47\right)}{118} = 4108 \text{ Н};$$

$$R_{Ax} = \frac{F_t\cdot a}{L} = \frac{2938\cdot 47}{118} = 1170 \text{ Н}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів у горизонтальній площині M_y (рис. 6.8,*c*′).

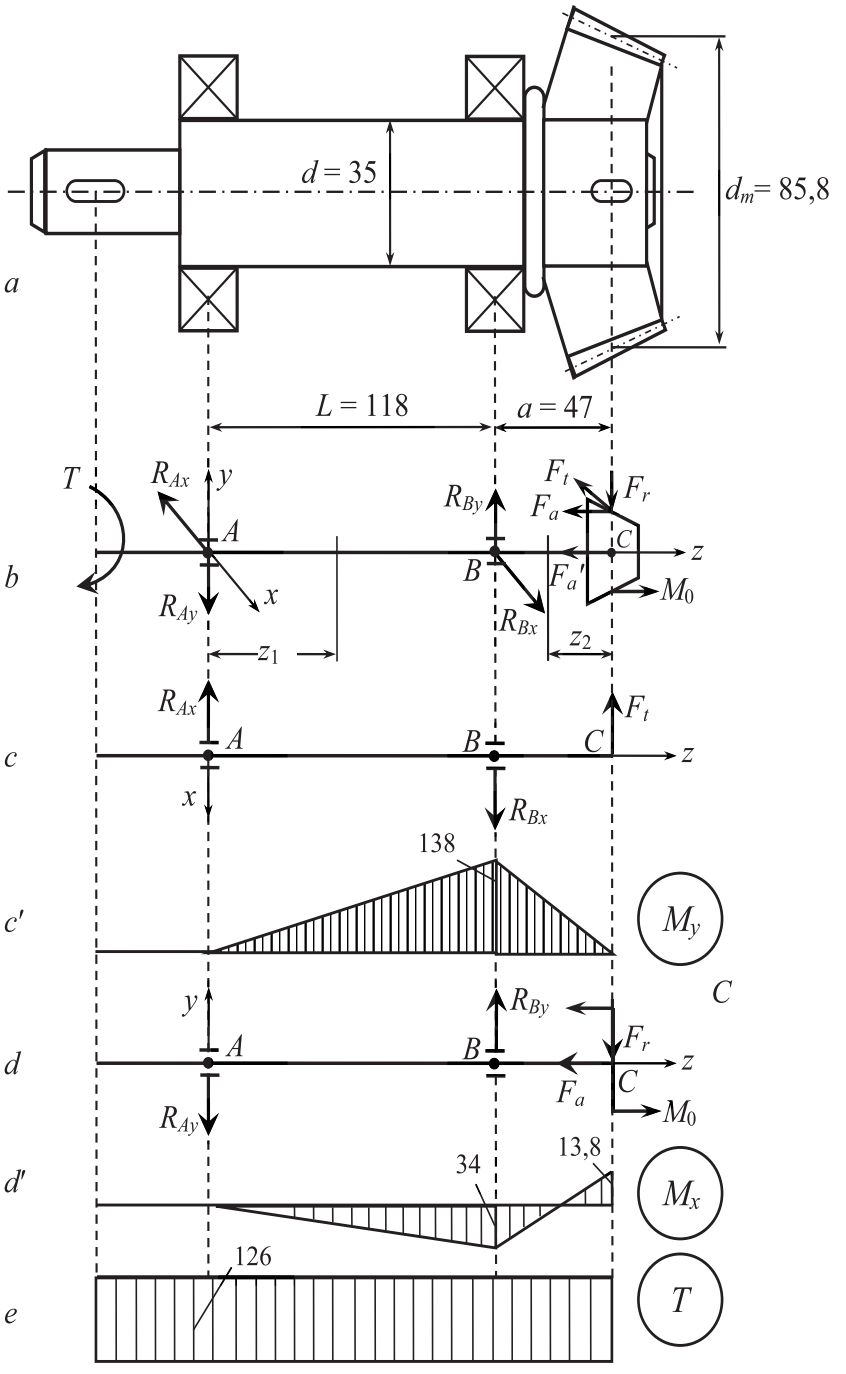


Рис. 6.8

Розглянемо вертикальну площину *yz* (рис. 6.8,*d*). Силу F_a перенесемо до центра перерізу, одержимо центральну поздовжню силу F_a і приєднаний момент $M_0 = F_a \cdot (d_m / 2) = 322 \cdot (0{,}0858 / 2) = 13{,}8$ Н·м. Нормальні напруження від поздов-

жньої сили F_a на порядок менші за напруження від згину, тому цими нормальними напруженнями, а відповідно і силою F_a, в розрахунках вала на міцність нехтуватимемо. Для визначення складових реакцій опор у вертикальній площині складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum mom_A(\bar{F}_i) = R_{By} \cdot L - F_r\left(L + a\right) + M_0 = 0;$$

$$\sum mom_B(\bar{F}_i) = R_{Ay} \cdot L - F_r \cdot a + M_0 = 0,$$

звідки: $$R_{By} = \frac{F_r(L+a) - M_0}{L} = \frac{1020\left(118+47\right) - 13800}{118} = 1309 \text{ Н};$$

$$R_{Ay} = \frac{F_r \cdot a - M_0}{L} = \frac{1020 \cdot 47 - 13800}{118} = 289 \text{ Н}.$$

Епюра згинальних моментів у вертикальній площині M_x наведена на рис. 6.8,*d*′. Епюра крутних моментів показана на рис. 6.8,*e*. Як видно із рис. 6.8, небезпечним є переріз вала *B*, де M_y = 138 Н·м; M_x = 34 Н·м. Сумарний згинальний момент у цьому перерізі дорівнюватиме

$$M_{зг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{34^2 + 138^2} = 142 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Максимальні нормальні напруження в точках периферії перерізу

$$\sigma = \frac{M_{зг}}{W_x} = \frac{M_{зг}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{142 \cdot 32 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 35^3} = 34 \text{ МПа}.$$

Найбільші дотичні напруження

$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{126 \cdot 16 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 35^3} = 15 \text{ МПа}.$$

Згідно з ІІІ теорією міцності

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{34^2 + 4 \cdot 15^2} = 45 \text{ МПа} < \sigma_{adm},$$

умова міцності вала виконується і його міцність буде забезпечена.

6.4. Криві стержні та їх розрахунки

У попередніх розділах розглянуто розрахунки на міцність та жорсткість елементів конструкцій та деталей машин з прямолінійною віссю. На практиці маємо багато випадків застосування елементів конструкцій та деталей машин з криволінійною віссю. Крім стержнів з прямими осями в конструкціях, зокрема у транспортних машинах та машинах сільськогосподарського призначення, часто зустрічаються елементи, у яких осі, тобто лінії, що проходять через центри ваги поперечних перерізів, є кривими. Це – гаки, пружини, кільця, ланки ланцюгів, арки тощо. Умовно розділяють стержні малої і великої кривизни. Основною ознакою такого розділу є відношення висоти перерізу h у площині кривизни до радіуса кривизни осі стержня ρ_0 (рис. 6.9). Якщо це відношення значно менше від одиниці $(h / \rho_0 < 0{,}2)$, то вважається, що брус має малу кривизну. Для бруса великої кривизни відношення h / ρ_0, порівнюване з одиницею. Для розрахунків на міцність і жорсткість стержнів малої кривизни використовують залежності та формули, отримані раніше для прямих стержнів.

У розрахунках кривих стержнів приймемо такі обмеження:

1) поперечні перерізи мають осі симетрії, які утворюють площину симетрії;

2) вісь стержня є плоскою кривою, яка лежить у площині симетрії;

3) силова площина співпадає з площиною симетрії стержня в площині кривизни;

4) під час деформації виконується гіпотеза плоских перерізів, тобто поперечні перерізи стержня, які є плоскими до деформації, залишаються такими самими і в процесі деформації.

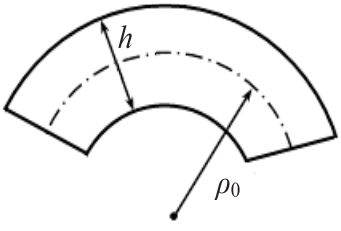


Рис. 6.9

Внутрішні силові фактори, які виникають у поперечних перерізах кривого стержня, а саме: поздовжня сила N, поперечна сила Q та згинальний момент M – визначаються за методом перерізів та за тими ж самими правилами, що і для прямих стержнів.

Внутрішня поздовжня сила N у будь-якому поперечному перерізі кривого стержня дорівнює сумі проекцій усіх зовнішніх сил, які діють по один бік від перерізу, на дотичну до кривої осі стержня в даному перерізі.

У довільному поперечному перерізі кривого стержня внутрішня поперечна сила Q дорівнює сумі проекцій усіх зовнішніх сил, які діють по один бік від цього перерізу, на площину цього перерізу.

Внутрішній згинальний момент M у довільному поперечному перерізі кривого бруса дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, які діють по один бік від цього перерізу, відносно центра його ваги.

Записавши вирази для N, Q, M ряду довільних перерізів, на ділянках кривого стержня, будують відповідні епюри N, Q та M.

Нормальні та дотичні напруження, які виникають у точках поперечних перерізів кривого стержня від поздовжніх та поперечних сил, визначають наближено за формулами, отриманими для прямих стержнів:

$$\sigma = \frac{N}{A}; \tag{6.25}$$

$$\tau = \frac{Q S_x^{відс}}{I_x b}. \tag{6.26}$$

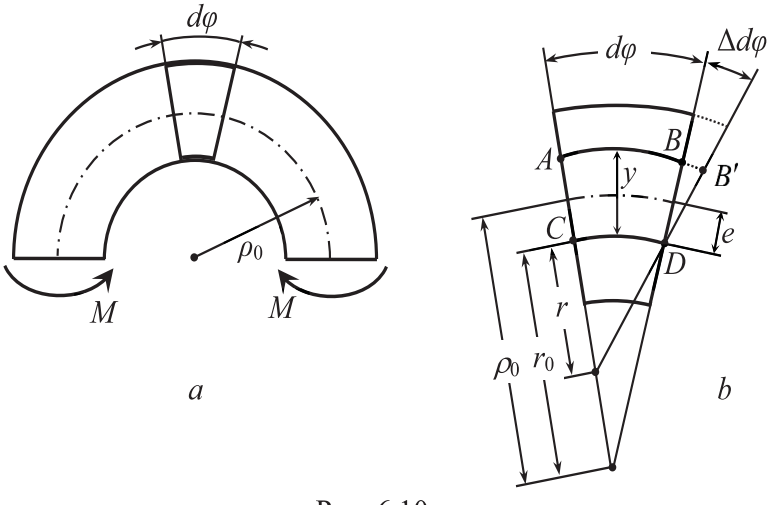


Рис. 6.10

Перейдемо до визначення нормальних напружень у точках поперечних перерізів кривого стержня великої кривизни від згину.

Виділимо із кривого стержня (рис. 6.10) двома близькими нормальними до осі стержня перерізами елемент $d\varphi$. При згинанні суміжні перерізи повернуться один відносно одного на кут $\Delta d\varphi$ (рис. 6.10,*b*). Введемо такі позначення:

ρ_0 – радіус кривизни осі стержня;

r_0 – радіус кривизни нейтрального шару до деформації (величина r_0 поки що невідома, у подальшому ми побачимо, що r_0 завжди менший за ρ_0, а нейтральний шар зміщений відносно осі стержня в бік центра кривизни);

r – радіус кривизни нейтрального шару після деформації;

y – відстань від нейтрального шару CD до довільного волокна (довільного шару волокон) AB;

$e = \rho_0 - r_0$ – відстань від осі стержня до нейтрального шару.

Відносне видовження волокна AB дорівнюватиме

$$\varepsilon = \frac{BB'}{AB} = \frac{y\,\Delta d\varphi}{\left(r_0 + y\right)d\varphi}. \tag{6.27}$$

Вважатимемо, що ордината y не змінюється в процесі згинання.

Із рис. 6.10 видно, що

$$CD = r\left(d\varphi + \Delta d\varphi\right).$$

З іншого боку $CD = r_0\, d\varphi$.

Прирівнявши ці величини, маємо

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = r_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right), \tag{6.28}$$

і вираз (6.27) можна переписати у вигляді

$$\varepsilon = \frac{y}{r_0 + y}\cdot r_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Відповідно до закону Гука визначимо нормальні напруження

$$\sigma = E\,\varepsilon = E\,\frac{y}{r_0 + y}\cdot r_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{6.29}$$

Із виразу (6.29) бачимо, що нормальні напруження розподіляються по висоті поперечного перерізу нелінійно. У випадку, коли стержень має малу кривизну, тобто радіус кривизни r_0 великий і величиною y в знаменнику формули (6.29) можна знехтувати, вираз для визначення нормальних напружень набере вигляду

$$\sigma = E\,y\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

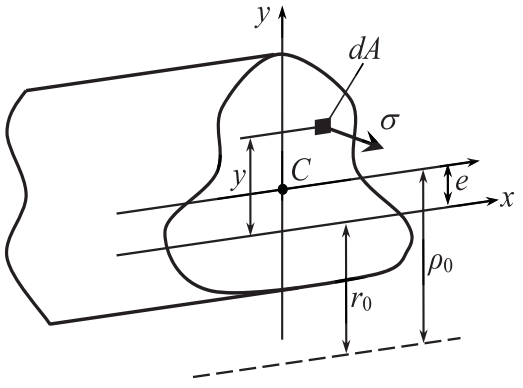


Рис. 6.11

При $1/r_0 = 0$ отримаємо вираз для визначення нормальних напружень у точках поперечних перерізів прямого стержня $\sigma = E(y/r)$.

Розглянемо поперечний переріз кривого стержня. Запишемо вирази для внутрішньої нормальної сили та згинального моменту у цьому перерізі,

$$N = \int\limits_{(A)} \sigma\,dA; \quad M = \int\limits_{(A)} \sigma\,y\,dA,$$

або після підстановки в ці залежності виразу (6.29) отримаємо:

$$N = E\,r_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\int\limits_{(A)} \frac{y\,dA}{r_0 + y}; \tag{6.30}$$

$$M = E\,r_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\int\limits_{(A)} \frac{y^2\,dA}{r_0 + y}. \tag{6.31}$$

Оскільки нормальна сила N при чистому згині дорівнює нулю, то матимемо, що

$$\int\limits_{(A)} \frac{y\,dA}{r_0 + y} = 0; \tag{6.32}$$

$$M = E r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \left[\int\limits_{(A)} y\, dA - r_0 \int\limits_{(A)} \frac{y\, dA}{r_0 + y} \right]. \tag{6.33}$$

З урахуванням формули (6.32) вираз (6.33) набере вигляду

$$M = E r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \int\limits_{(A)} y\, dA,$$

де $\int\limits_{(A)} y\, dA = e\, A$ – статичний момент площі поперечного перерізу стержня відносно нейтральної осі x; $e = \rho_0 - r_0$ – відстань від центра ваги перерізу до нейтральної осі.

Отже,
$$M = E r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) e\, A,$$

звідки
$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{M}{E r_0 e A}. \tag{6.34}$$

Після підстановки виразу (6.34) у формулу (6.29), матимемо

$$\sigma = \frac{M}{A e} \cdot \frac{y}{r_0 + y}. \tag{6.35}$$

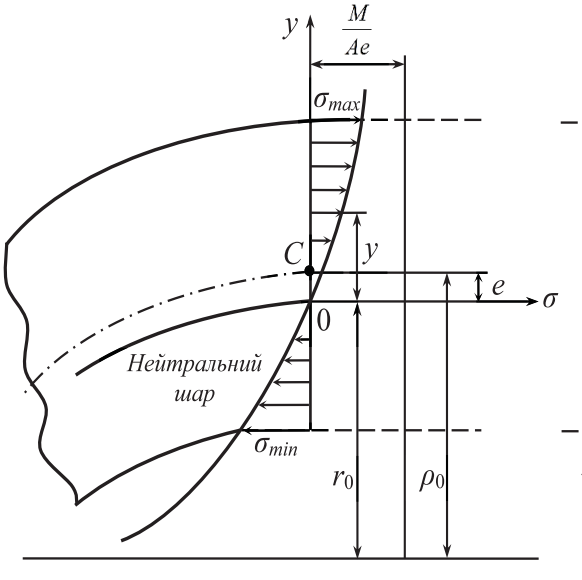


Рис. 6.12

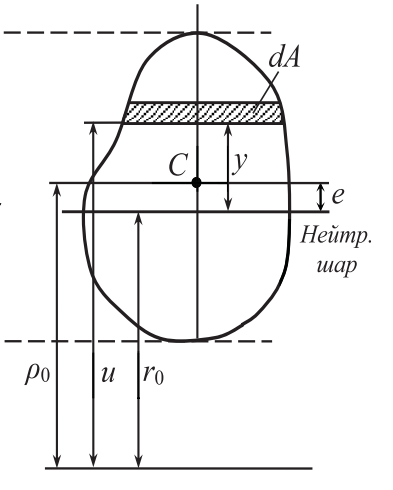


Рис. 6.13

Із отриманої залежності (6.35) бачимо, що нормальні напруження по висоті поперечного перерізу кривого стержня змінюються за законом гіперболи, гілки якої асимптотично наближаються до прямих $y = -r_0$ та $\sigma = M/Ae$ (рис. 6.12). Найбільші за модулем нормальні напруження виникають у верхніх та нижніх точках перерізу.

Для практичного застосування формули (6.34) необхідно визначити величину радіуса кривизни нейтрального шару кривого стержня r_0 до навантаження. Для цього розглянемо інтеграл (6.32) та введемо нову змінну u (рис. 6.13)

$$u = r_0 + y.$$

Після такої заміни вираз (6.32) матиме вигляд

$$\int_{(A)} \frac{u - r_0}{u}\, dA = 0,$$

звідки

$$r_0 = \frac{A}{\int\limits_{(A)} \frac{dA}{u}}. \tag{6.36}$$

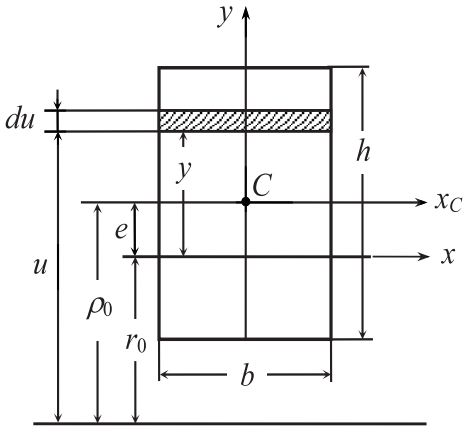


Рис. 6.14

Інтеграл, що стоїть у знаменнику виразу (6.36), є геометричною характеристикою поперечного перерізу. Зокрема, для прямокутного поперечного перерізу (рис. 6.14) маємо:

$$\int_{(A)} \frac{dA}{u} = b \int_{\rho_0 - h/2}^{\rho_0 + h/2} \frac{du}{u} = b \ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}.$$

Тоді, згідно з формулою (6.36), одержимо

$$r_0 = \frac{h}{\ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}},$$

а зміщення нейтральної осі відносно центра ваги перерізу буде

$$e = \rho_0 - \frac{h}{\ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}}. \tag{6.37}$$

У практичних розрахунках користуються наближеним значенням величини e:

$$e \cong \frac{I_{xc}}{\rho_0 A}, \tag{6.38}$$

де I_{xc} – момент інерції перерізу відносно центральної осі x_c.

Приклад 3. Визначити напруження в точці K гака трапецоїдного перерізу (рис. 6.15) за таких розмірів поперечного перерізу: $b_1 = 4$ см; $b_2 = 1$ см; $u_1 = 3$ см; $u_2 = 10$ см; $h = 7$ см, якщо діюча сила $F = 2000$ кг.

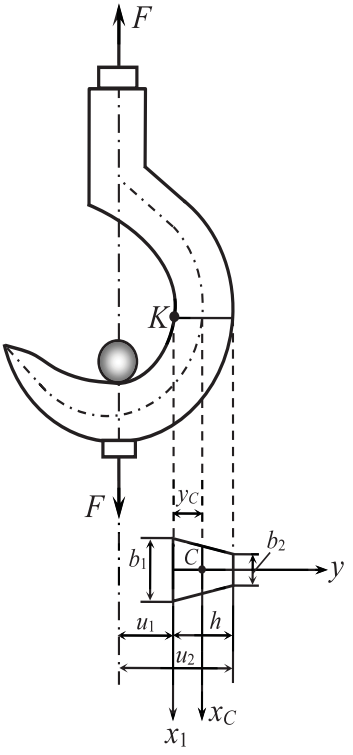


Рис. 6.15

Розв'язування. Спочатку визначимо положення центра ваги перерізу (трапеції) відносно осі x_1, яка проходить уздовж більшої основи трапеції. Для цього знайдемо статичний момент трапеції S_{x1} відносно осі x_1, площу трапеції A і, розділивши S_{x1} на A, одержимо y_C – ординату центра ваги перерізу відносно осі x_1. Статичний момент площі перерізу визначимо, розділивши трапецію на прямокутник висотою h та шириною b_2 і трикутник висотою h і основою b_1–b_2.

Тоді $S_{x_1} = \frac{b_2 h^2}{2} + \frac{b_1 - b_2}{6} h^2$, площа трапеції

$$A = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h = 17{,}5 \text{ см}^2,$$

а

$$y_C = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3} = 2{,}8 \text{ см}.$$

Радіус кривизни осі гака $\rho_0 = y_C + u_1 = 2{,}8 + 3 = 5{,}8$ см.

Осьовий момент інерції трапеції відносно осі x_1

$$I_{x_1} = \frac{b_2 h^3}{3} + \frac{(b_1 - b_2) h^3}{12} = 200{,}1 \text{ см}^4.$$

Осьовий момент інерції трапеції відносно центральної осі x_C

$$I_{x_C} = I_{x_1} - A \cdot y_C^2 = 200{,}1 - 17{,}5 \cdot 2{,}8^2 = 62{,}9 \text{ см}^4 .$$

Величину e знаходимо за формулою (6.38)

$$e \cong \frac{I_{x_C}}{\rho_0 A} = \frac{62{,}9}{5{,}8 \cdot 17{,}5} \approx 0{,}62 \text{ см} .$$

Нормальне напруження в точці K від згину визначимо за формулою (6.35), яка в даному випадку матиме вигляд:

$$\sigma = \frac{F\rho_0}{Ae} \cdot \frac{y_C - e}{u_1} = \frac{2000 \cdot 5{,}8}{17{,}5 \cdot 0{,}62} \cdot \frac{2{,}18}{3} = 777 \text{ кг}/\text{см}^2 .$$

До цього значення нормального напруження додамо ще значення нормального напруження від розтягу

$$\sigma_{розт} = \frac{F}{A} = \frac{2000}{17{,}5} = 114 \text{ кг/см}^2 .$$

Остаточно нормальне напруження у точці K дорівнюватиме

$$\sigma_K = \sigma + \sigma_{розт} = 777 + 114 = 891 \text{ кг}/\text{см}^2 .$$

Якщо величину e підрахувати точніше за формулою (6.37), то матимемо e = 0,598 см, а σ_K = 920 кг/см^2.

6.5. Потенціальна енергія деформації пружної системи. Енергетичні методи визначення деформацій в пружних стержньових системах

Розглянемо загальний випадок навантаження довільного просторового стержня довільною просторовою системою сил, коли в поперечних перерізах можуть виникати поздовжні, поперечні сили, крутні та згинальні моменти водночас. Крім того, окремі стержні пружної системи можуть бути не тільки прямими, мати малу кривизну, а й створювати як плоску, так і просторову систему. Знання методів визначення деформацій є необхідним не тільки для дослідження жорсткості конструкцій, а й для розрахунку статично не визначуваних конструкцій, дослідження питань динаміки пружних систем.

Найбільш простими методами визначення деформацій пружних систем є енергетичні методи, отримані на основі загального виразу потенціальної енергії деформації навантаженої пружної системи. Визначенню потенціальної енергії деформації передує аналіз внутрішніх силових факторів у стержнях системи. Цей аналіз, як відомо, проводиться методом перерізів з подальшою побудовою епюр згинальних, крутних моментів, а за необхідності – побудовою епюр поздовжніх та поперечних сил.

Внутрішня поздовжня сила в довільному поперечному перерізі дорівнює сумі проекцій усіх зовнішніх сил, що діють по один бік від перерізу, на поздовжню вісь (на дотичну до кривої осі в даному перерізі). Внутрішні поперечні сили в довільному перерізі дорівнюють сумі проекцій усіх зовнішніх сил, що діють по один бік від перерізу на площину цього перерізу. Внутрішній крутний момент у довільному поперечному перерізі дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють по один бік від перерізу, відносно поздовжньої осі. Внутрішній згинальний момент у довільному перерізі дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють по один бік від перерізу в тій чи іншій площині, відносно центра ваги цього перерізу.

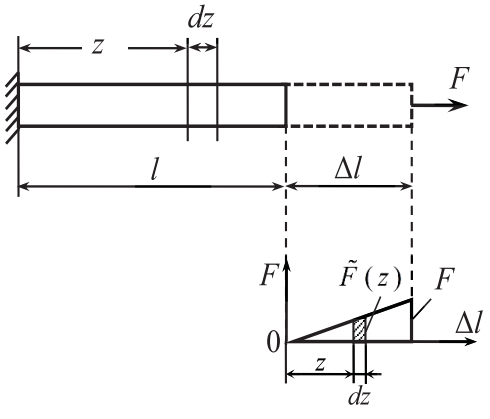


Рис. 6.16

Отже, розглянемо процес деформування пружного тіла з енергетичної точки зору. Зовнішні сили, прикладені до пружного тіла, виконують роботу на переміщеннях, викликаних цими силами. Позначимо цю роботу через W. Якщо процес деформування відбувається повільно, тобто сили прикладені статично і швидкості частинок пружного тіла малі, матеріал ідеально пружний, то робота зовнішніх сил повністю переходить у потенціальну енергію деформації $U = W$.

При розвантажуванні пружної системи внутрішні сили опору виконують роботу, повертаючи пружну систему до початкового недеформованого стану.

Визначимо роботу однієї сили F, що розтягує стержень довжиною l, наведений на рис. 6.16. Його видовження Δl показано для кращого розуміння у збільшеному вигляді, внизу наведений графік зміни сили F.

Оскільки сила F змінюється від нуля до кінцевого значення F, то знайдемо спочатку елементарну роботу сили на нескінченно малому переміщенні dz. Вважаючи, що на цьому переміщенні сила $\tilde{F}(z)$ залишається сталою, одержимо

$$dW = \tilde{F}(z)\,dz\,.$$

Враховуючи, що $\tilde{F}(z) = \dfrac{F}{\Delta l} z$,

$$dW = \frac{F \cdot z}{\Delta l}\,dz\,;$$

$$W = \int_0^{\Delta l} \frac{F \cdot z dz}{\Delta l} = \frac{F\,\Delta l}{2}.$$

Отже, потенціальна енергія деформації стержня, розтягнутого по всій довжині осьовою силою F, дорівнюватиме

$$U = \frac{F\Delta l}{2}. \qquad (6.39)$$

Якби між силою F та переміщенням Δl не було прямо пропорційної залежності, то замість коефіцієнта ½ був би якийсь інший коефіцієнт. Зокрема, коли сила F стала, він дорівнює одиниці. З урахуванням закону Гука за осьового розтягу стержня зі сталими параметрами $\Delta l = Fl / EA$, формула (6.39) набере вигляду

$$U = \frac{F^2 l}{2EA}. \qquad (6.40)$$

Підкреслимо, що вираз (6.40) справедливий тоді, коли поздовжня сила та площа поперечного перерізу по всій довжині є сталими. Якщо ж поздовжня сила змінюється уздовж осі, тобто є функцією $N(z)$, то потенціальна енергія визначається для елементарної ділянки довжиною dz, де поздовжню силу можна вважати сталою

$$dU = \frac{N^2 dz}{2EA}. \tag{6.41}$$

Для всього стержня

$$U = \int_0^l \frac{N^2(z)dz}{2EA}. \tag{6.42}$$

Якщо ж маємо декілька стержнів або декілька ділянок з різним законом зміни поздовжньої сили чи жорсткості поперечного перерізу $EA(z)$, то

$$U = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} \frac{N_i^2(z)dz}{2EA_i(z)}. \tag{6.43}$$

Аналогічним шляхом знаходять вирази для потенціальної енергії при згині у двох площинах

$$U = \sum \int \frac{M_x^2(z)dz}{2EI_x} + \sum \int \frac{M_y^2(z)dz}{2EI_y}, \tag{6.44}$$

при крученні

$$U = \sum \int \frac{T^2(z)dz}{2GI_P} \tag{6.45}$$

та при зсуві від поперечних сил у двох площинах

$$U = \sum \int \frac{k_y Q_y^2(z)dz}{2GA} + \sum \int \frac{k_x Q_x^2(z)dz}{2GA}, \tag{6.46}$$

де A – площа поперечного перерізу; E, G – модулі пружності першого та другого роду матеріалу; I_x, I_y – осьові моменти інерції поперечного перерізу; I_p – полярний момент інерції поперечного перерізу стержня при крученні стержня круглого поперечного перерізу; k_y, k_x – коефіцієнти, які залежать від геометричної форми поперечного перерізу.

У загальному випадку потенціальна енергія деформації стержньової системи може бути записана у вигляді

$$U = \sum \int \frac{N^2(z)dz}{2EA} + \sum \int \frac{M_x^2(z)dz}{2EI_x} + \sum \int \frac{M_y^2(z)dz}{2EI_y} + \sum \int \frac{T^2(z)dz}{2GI_P} +$$

$$+ \sum \int \frac{k_y Q_y^2(z)dz}{2GA} + \sum \int \frac{k_x Q_x^2(z)dz}{2GA}. \tag{6.47}$$

Зауважимо, що в конкретних розрахунках у більшості випадків перша, а також дві останні суми, що виражають потенціальну енергію від дії поздовжньої та поперечних сил, не враховують, оскільки вони малі порівняно з іншими. Для плоских стержньових систем обчислення потенціальної енергії деформації частіше зводиться до розгляду лише однієї суми $\sum\int \frac{M^2(z)\,dz}{2EI}$, тобто до розгляду приймається тільки потенціальна енергія деформації від дії згинального моменту.

6.6. Теорема Кастіліано

В основу визначення переміщень у стержньовій системі може бути покладена теорема Кастіліано, а саме: *частинна похідна від потенціальної енергії деформації системипо силі дорівнює переміщенню точки прикладення сили в напрямку дії цієї сили,* тобто $\partial U / \partial F_i = \Delta_{Fi}$.

Під переміщенням точки прикладення сили в напрямку сили розуміють проекцію повного переміщення цієї точки на напрямок дії сили.

Нехай маємо пружне тіло, закріплене так, що переміщення його як абсолютно твердого тіла відсутні. Навантажимо тіло довільною системою зовнішніх сил F_1, F_2,…F_i,…F_n. У результаті робот зовнішніх сил у пружному тілі накопичується потенціальна енергія деформації $U(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, яка є функцією від зовнішніх сил.

Надамо одній із сил, наприклад F_i, приріст dF_i. Тоді потенціальна енергія одержить приріст $\frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i$ і буде мати величину

$$U + \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i .$$

Змінимо порядок прикладення сил. Спочатку прикладемо до тіла силу dF_i. Точка прикладення цієї сили переміститься в напрямку цієї сили на величину

$d\Delta_{Fi}$. Сила dF_i виконає роботу на переміщенні $d\Delta_{Fi}$, що дорівнює $\frac{1}{2}dF_i \cdot d\Delta_{Fi}$, оскільки сила змінюється від нуля до кінцевого значення.

Тепер прикладемо всю систему зовнішніх сил. Якби сила dF_i була відсутня, то потенціальна енергія системи прийняла б значення U. Але тепер її значення зміниться на величину роботи $\frac{1}{2}dF_i \cdot d\Delta F_i$, крім того, сила dF_i виконає роботу на переміщенні Δ_{Fi}, викликаному всією системою зовнішніх сил. Оскільки сила dF_i залишилася постійною на переміщенні Δ_{Fi}, то робота її буде $dF_i \cdot \Delta_{Fi}$.

Отже, потенціальна енергія набуде значення

$$U + dF_i \cdot \Delta_{F_i} + \frac{1}{2}dF_i \cdot d\Delta_{F_i}.$$

Прирівнявши вирази для потенціальної енергії деформації за прямого і оберненого способах навантаження, нехтуючи величиною більш високого порядку малості $\frac{1}{2}dF_i \cdot d\Delta_{F_i}$, одержимо

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta_{F_i}.$$

Теорема доведена.

Наголосимо, що силу F_i можна розуміти як узагальнену силу, тоді Δ_{Fi} буде узагальненим переміщенням, тобто таким геометричним параметром, на якому узагальнена сила виконує роботу. Наприклад, якщо під силою F_i розуміти зовнішній момент M_i, то Δ_{Mi} буде кутом повороту площини прикладення моменту.

Доводячи теорему, брали до уваги принцип незалежності дії сил і лінійну залежність між силами та деформаціями, тобто справедливість закону Гука. У противному разі теорему Кастіліано прийняти не можна (Мошинський та ін., 2009).

Розглянемо деякі прості приклади застосування теореми Кастіліано.

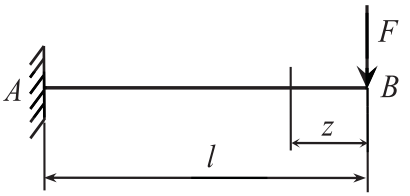


Рис. 6.17

Приклад 4. Визначити прогин поперечного перерізу B консольної балки (рис. 6.17), навантаженої силою F. Жорсткість поперечного перерізу балки стала і дорівнює EI_x.

Розв'язування. Потенціальна енергія деформації балки при згині дорівнює $U = \int_0^l \frac{M^2(z)dz}{2EI_x}$. Згинальний момент у довільному перерізі $M(z) = -Fz$.

Отже, $$U = \int_0^l \frac{(-Fz)^2 dz}{2EI_x} = \frac{F^2 l^3}{6EI_x}.$$

Переміщення Δ_B поперечного перерізу B балки в напрямку дії сили F, згідно з теоремою Кастіліано, дорівнюватиме $\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fl^3}{3EI_x}$.

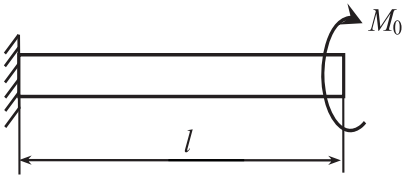


Рис. 6.18

Приклад 5. Визначити кут повороту правого торця вала (рис. 6.18), навантаженого скручуючим моментом M_0, якщо жорсткість поперечного перерізу на кручення GI_p стала по довжині.

Розв'язування. Потенціальна енергія деформації при крученні дорівнює

$$U = \int_0^l \frac{T^2(z)dz}{2GI_P},$$

крутний момент $T(z) = M_0$ – сталий по довжині. Отже,

$$U = \int_0^l \frac{M_0^2 dz}{2GI_P} = \frac{M_0^2 l}{2GI_P}.$$

Взявши першу похідну від потенціальної енергії U по M_0, отримаємо

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{M_0 l}{GI_P},$$

що співпадає з відомим математичним виразом закону Гука при крученні для визначення кута закручування вала сталої крутної жорсткості.

Приклад 6. Знайти вертикальне переміщення Δ_C вузла C кронштейна, навантаженого силою F (рис. 6.19), якщо жорсткості обох стержнів однакові і дорівнюють EA.

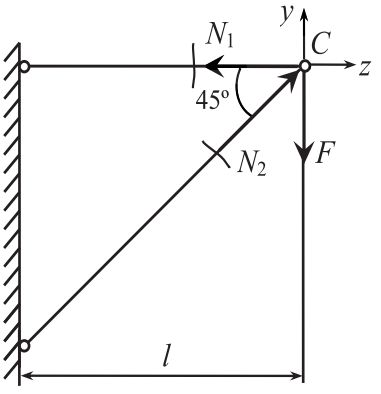


Рис. 6.19

Розв'язування. Із рівнянь рівноваги вузла C знаходимо поздовжні сили в стержнях:

$$\Sigma Z = -N_1 + N_2 \cos 45° = 0;$$

$$\Sigma Y = N_2 \cos 45° - F = 0;$$

$$N_1 = F, \quad N_2 = F\sqrt{2}.$$

Потенціальна енергія деформації кронштейна дорівнюватиме

$$U = \int_0^{l_1} \frac{N_1^2 dz}{2EA} + \int_0^{l_2} \frac{N_2^2 dz}{2EA} = \int_0^{l} \frac{F^2 dz}{2EA} + \int_0^{l\sqrt{2}} \frac{\left(F\sqrt{2}\right)^2 dz}{2EA} =$$

$$= \frac{F^2 l}{2EA} + EA\frac{F^2 l\sqrt{2}}{EA} = \frac{F^2 l\left(1+2\sqrt{2}\right)}{2EA}.$$

Отже,

$$\Delta_C = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fl\left(1+2\sqrt{2}\right)}{EA}.$$

6.7. Метод введення додаткової фіктивної сили

Визначення переміщень за допомогою теореми Кастіліано має той недолік, що дає можливість знайти узагальнені переміщення поперечних перерізів, у яких прикладені узагальнені сили, але тільки в напрямку дії цих сил. На практиці ж доводиться визначати узагальнені переміщення довільних поперечних перерізів і в довільному напрямку, в тому числі поперечних перерізів, у яких узагальнені сили не прикладені. У таких випадках застосовують метод введення додаткової (фіктивної) сили. Ідея методу введення додаткової (фіктивної) сили проста. Якщо треба знайти переміщення поперечного перерізу, в якому узагальнена сила не прикладена, тоді прикладають у потрібному перерізі і в потрібному напрямку додаткову фіктивну силу F_∂. Складають вираз для потенціальної енергії деформації системи з урахуванням F_∂. Знаходять частинну похідну $\partial U / \partial F_\partial$ і в кінцевому виразі приймають $F_\partial = 0$. Таким чином одержують переміщення потрібного поперечного перерізу в потрібному напрямку. Підкреслимо, коли нас цікавить не лінійне переміщення поперечного перерізу, а кут повороту перерізу, як додаткову силу беруть не зосереджену силу, а пару сил M_∂, тобто кутовому переміщенню відповідає узагальнена сила – пара сил з моментом M_∂.

Приклад 7. Визначити прогин та кут повороту поперечного перерізу C консольної балки y_C, θ_C, якщо жорсткість на згин EI_x стала по її довжині (рис. 6.20).

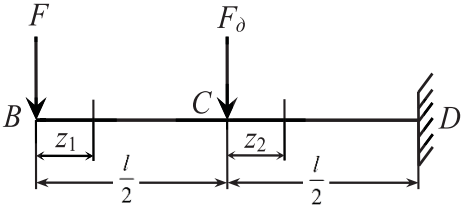


Рис. 6.20

Розв'язування. Для визначення прогину поперечного перерізу C балки прикладаємо у цьому перерізі додаткову фіктивну силу F_∂. Тоді згинальний момент на першій ділянці балки дорівнюватиме $M(z_1) = -Fz_1$ і відповідно на другій

$$M(z_2) = -F\left(\frac{l}{2} + z_2\right) - F_\partial z_2 .$$

Потенціальна енергія деформації балки визначиться як

$$U=\int_0^{l/2}\frac{M^2(z_1)dz_1}{2EI_x}+\int_0^{l/2}\frac{M^2(z_2)dz_2}{2EI_x}=\int_0^{l/2}\frac{(-Fz_1)^2dz_1}{2EI_x}+\int_0^{l/2}\frac{\left[-F(l/2+z_2)-F_\partial z_2\right]^2dz_2}{2EI_x}=$$

$$=\frac{F^2z_1^3}{6EI_x}\Bigg|_0^{l/2}+\frac{1}{2EI_x}\left[\frac{F^2l^2z_2}{4}+\frac{F^2lz_2^2}{2}+\frac{F^2z_2^3}{3}+\frac{FF_\partial lz_2^2}{2}+\frac{2FF_\partial z_2^3}{3}+\frac{F_\partial^2z_2^3}{3}\right]\Bigg|_0^{l/2}=$$

$$=\frac{F^2l^3}{48EI_x}+\frac{7F^2l^3}{48EI_x}+\frac{5FF_\partial l^3}{48EI_x}+\frac{F_\partial^2l^3}{48EI_x}=\frac{1}{48EI_x}\left[8F^2l^3+5FF_\partial l^3+F_\partial^2l^3\right].$$

Знаходимо похідну від виразу потенціальної енергії деформації балки по фіктивній силі $\dfrac{\partial U}{\partial F_\partial}=\dfrac{1}{48EI_x}\left(5Fl^3+2F_\partial l^3\right).$

І відповідно прогин поперечного перерізу C у напрямку дії додаткової зосередженої сили F_∂ становитиме

$$y_C=\Delta_{F_\partial}=\left.\frac{\partial U}{\partial F_\partial}\right|_{F_\partial=0}=\frac{5Fl^3}{48EI_x}.$$

Для визначення кута повороту θ_C треба в точці C прикласти пару сил M_∂. Тоді згинальний момент на першій ділянці балки дорівнюватиме $M(z_1) = -Fz_1$, а на другій $M(z_1)=-F(\dfrac{l}{2}+z_2)-M_\partial$.

Потенціальна енергія деформації визначиться як

$$U=\int_0^{l/2}\frac{M^2(z_1)dz_1}{2EI_x}+\int_0^{l/2}\frac{M^2(z_2)dz_2}{2EI_x}=\int_0^{l/2}\frac{(-Fz_1)^2dz_1}{2EI_x}+\int_0^{l/2}\frac{\left[-F(l/2+z_2)-M_\partial\right]^2dz_2}{2EI_x}=$$

$$=\frac{F^2z_1^3}{6EI_x}\Bigg|_0^{l/2}+\frac{1}{2EI_x}\left[\frac{F^2l^2z_2}{4}+\frac{F^2lz_2^2}{2}+\frac{F^2z_2^3}{3}+FM_\partial lz_2+FM_\partial z_2^2+M_\partial^2z_2\right]\Bigg|_0^{l/2}=$$

$$=\frac{F^2l^3}{48EI_x}+\frac{1}{2EI_x}\left[\frac{F^2l^3}{8}+\frac{F^2l^3}{8}+\frac{F^2l^3}{24}+\frac{FM_\partial l^2}{2}+\frac{FM_\partial l^2}{4}+\frac{M_\partial^2l}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{EI_x}\left[\frac{8F^2l^3}{48}+\frac{3FM_\partial l^2}{8}+\frac{M_\partial^2l}{4}\right].$$

Знаходимо похідну $\dfrac{\partial U}{\partial M_\partial}=\dfrac{3Fl^2}{8EI_x}+\dfrac{M_\partial l}{2EI_x}$. Відповідно кут повороту

$$\theta_C=\Delta_{M_\partial}=\left.\frac{\partial U}{\partial M_\partial}\right|_{M_\partial=0}=\frac{3Fl^2}{8EI_x}.$$

6.8. Інтеграли Мора та спосіб Верещагіна

Розглянемо стержньову конструкцію, навантажену довільною просторовою системою сил. У поперечних перерізах стержнів цієї конструкції в загальному випадку під дією зовнішніх сил можуть виникати усі шість внутрішніх силових факторів, а саме: поздовжня сила $N(z)$, згинальні моменти $M_x(z)$, $M_y(z)$, крутний момент $T(z)$ та поперечні сили $Q_y(z)$, $Q_x(z)$. Епюри внутрішніх силових факторів, які виникають у поперечних перерізах елементів конструкцій під дією зовнішніх сил, називають *вантажними епюрами*. Якщо в потрібному поперечному перерізі K у необхідному напрямку прикласти додаткову силу F_∂, то величини внутрішніх силових факторів зміняться і відповідно дорівнюватимуть:

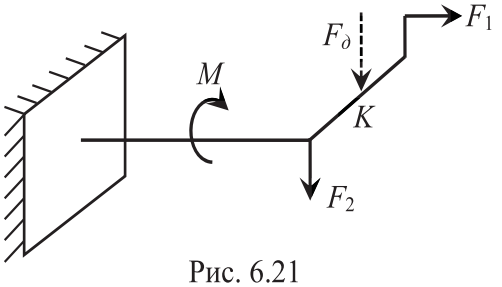


Рис. 6.21

$$\begin{aligned}&N(z)+N_\partial(z);\quad M_x(z)+M_{x\partial}(z);\quad M_y(z)+M_{y\partial}(z);\\&T(z)+T_\partial(z);\quad Q_y(z)+Q_{y\partial}(z);\quad Q_x(z)+Q_{x\partial}(z).\end{aligned}\tag{6.48}$$

Додаткові складові величин внутрішніх силових факторів, які виникають від дії тільки додаткової фіктивної сили, представимо у вигляді:

$$\begin{aligned}&N_\partial=\bar N\cdot F_\partial;\quad M_{x\partial}=\bar M_x\cdot F_\partial;\quad M_{y\partial}=\bar M_y\cdot F_\partial;\\&T_\partial=\bar T\cdot F_\partial;\quad Q_{y\partial}=\bar Q_y\cdot F_\partial;\quad Q_{x\partial}=\bar Q_x\cdot F_\partial,\end{aligned}\tag{6.49}$$

де відповідно $\bar N$, $\bar M_x$, $\bar M_y$, $\bar T$, $\bar Q_y$, $\bar Q_x$ – величини внутрішніх силових факторів, викликані одиничною додатковою силою $\bar F_\partial=1$. Отже, повна додаткова вели-

чина внутрішнього силового фактора визначається як додаткова величина, викликана одиничною силою $\bar{F}_\partial = 1$ та збільшена в F_∂ разів. Вираз для потенціальної енергії деформації з урахуванням дії додаткової фіктивної сили запишемо

$$U = \int\limits_{(L)} \frac{\left(N + \bar{N} \cdot F_\partial\right)^2 dz}{2EA} + \int\limits_{(L)} \frac{\left(M_x + \bar{M}_x \cdot F_\partial\right)^2 dz}{2EI_x} + \int\limits_{(L)} \frac{\left(M_y + \bar{M}_y \cdot F_\partial\right)^2}{2EI_y} dz +$$

$$+ \int\limits_{(L)} \frac{\left(T + \bar{T} \cdot F_\partial\right)^2 dz}{2GI_P} + \int\limits_{(L)} \frac{k_y \left(Q_y + \bar{Q}_y \cdot F_\partial\right)^2 dz}{2GA} + \int\limits_{(L)} \frac{k_x \left(Q_x + \bar{Q}_x \cdot F_\partial\right)^2 dz}{2GA}. \qquad (6.50)$$

У цьому виразі замість знаків Σ введено знак L, що означає інтегрування по довжині усіх стержнів системи. Після диференціювання виразу (6.50) по F_∂ та поклавши $F_\partial = 0$, визначимо переміщення поперечного перерізу K у напрямку дії сили F_∂

$$\Delta_K = \left.\frac{\partial U}{\partial F_\partial}\right|_{F_\partial = 0} = \int\limits_{(L)} \frac{N(z)\bar{N}(z)dz}{EA} + \int\limits_{(L)} \frac{M_x(z)\bar{M}_x(z)dz}{EI_x} + \int\limits_{(L)} \frac{M_y(z)\bar{M}_y(z)dz}{EI_y} +$$

$$+ \int\limits_{(L)} \frac{T(z)\bar{T}(z)dz}{GI_P} + \int\limits_{(L)} \frac{k_y Q_y(z)\bar{Q}_y(z)dz}{GA} + \int\limits_{(L)} \frac{k_x Q_x(z)\bar{Q}_x(z)dz}{GA}. \qquad (6.51)$$

Отримані інтеграли носять назву інтегралів Мора (Булгаков, 2007).

Приклад 8. Визначити горизонтальне переміщення поперечного перерізу K рами, зображеної на рис. 6.22. Поперечна жорсткість на всіх ділянках рами однакова і дорівнює EI_x.

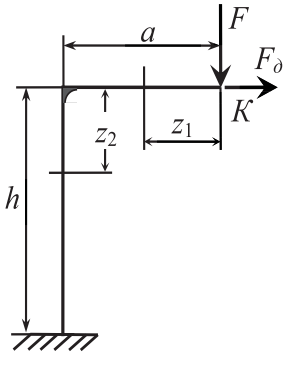


Рис. 6.22

Розв'язування. У цій рамі основну роль відіграють переміщення за рахунок згину. Переміщення за рахунок стиску та зсуву малі порівняно з переміщеннями від згину, оскільки потенціальна енергія деформації від розтягу та зсуву мала порівняно з енергією згину. Отже, із шести інтегралів Мора розглядаємо один, який враховує згин у вертикальній площині. У точці K в горизонтальному напрямку прикладаємо

одиничну додаткову силу $\bar{F}_{\partial} = 1$. Визначаємо згинальний момент від заданого навантаження F. На горизонтальній ділянці $M(z_1) = -Fz_1$, на вертикальній ділянці $M(z_2) = -Fa$. Згинальний момент від одиничної сили відповідно буде на горизонтальній ділянці $\bar{M}(z_1) = 0$, на вертикальній ділянці $\bar{M}(z_2) = -\bar{F}_{\partial} \cdot z_2 = -1 \cdot z_2$. Отже, на горизонтальній ділянці інтеграл Мора дорівнює нулю, а переміщення визначиться як

$$\Delta_K^{гориз} = \int_0^h \frac{M(z_2)\bar{M}(z_2)dz_2}{EI_x} = \int_0^h \frac{(-Fa)(-1 \cdot z_2)dz_2}{EI_x} = \frac{Fah^2}{2EI_x}.$$

У тому випадку, коли стержньова конструкція складається із прямих елементів зі сталою згинною жорсткістю в межах кожного стержня, операцію визначення інтегралу Мора можна спростити і замінити так званим перемноженням епюр. Під інтегралом маємо добуток двох функцій, одна з яких, наприклад $M(z)$, довільна, окреслюється кривою (вантажна епюра), а інша $\bar{M}(z)$ – лінійна функція, епюра від одиничної сили, яка окреслюється прямою лінією (рис. 6.23). Для визначення інтегралів типу $\int_0^l M(z)\bar{M}(z)dz$ маємо $M(z)dz = d\omega$, яка є площею елементарної смужки вантажної епюри, а $\bar{M}(z) = (h + z)\,\mathrm{tg}\alpha$.

З урахуванням отриманих виразів матимемо

$$\int_0^l M(z)\bar{M}(z)dz = \int_{(\omega)} (h + z)\,\mathrm{tg}\alpha\, d\omega = h\,\mathrm{tg}\alpha \int_{(\omega)} d\omega + \mathrm{tg}\alpha \int_{(\omega)} z d\omega =$$

$$= (h + z_C)\omega\,\mathrm{tg}\alpha = \omega \cdot \bar{M}_C. \qquad (6.52)$$

Таким чином, визначення інтегралу звелося до перемноження площі криволінійної (вантажної) епюри ω на ординату прямолінійної епюри (одиничної епюри), що розташована під центром ваги криволінійної. Спосіб Верещагіна можна застосувати до будь-якого із шести інтегралів Мора (6.51). Перемноження можна виконувати як епюр згинальних моментів, так і епюр поздовжніх сил, крутних моментів. Різниця полягає тільки в тому, що добуток епюр згинальних моментів

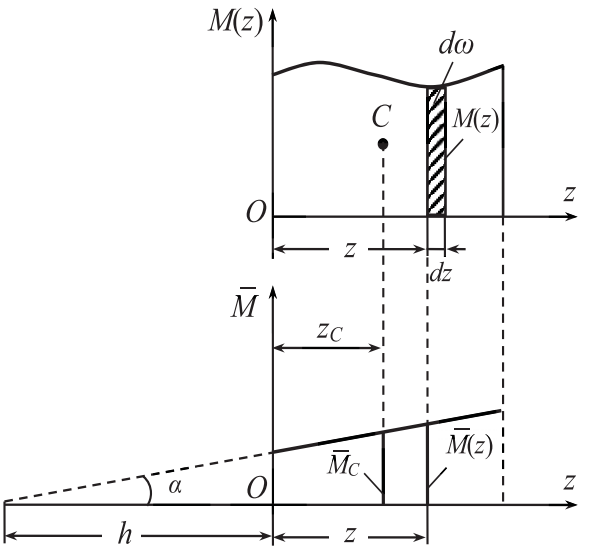


Рис. 6.23

ділиться на згинну жорсткість EI, добуток епюр поздовжніх сил ділиться на жорсткість при розтягу–стиску EA, а добуток епюр крутних моментів – на крутну жорсткість GI_P. Оскільки в практичних розрахунках вантажні епюри можна розбити на більш прості фігури у вигляді прямокутників, трикутників, параболічних трикутників, для яких площі та положення центрів ваги відомі, спосіб Верещагіна дає суттєве спрощення розрахунків при визначенні деформацій та обчисленні інтегралів Мора. Неважко довести, що у випадку, коли обидві функції $M(z)$ і $\bar{M}(z)$ є лінійними, то операція перемноження має властивість комутативності.

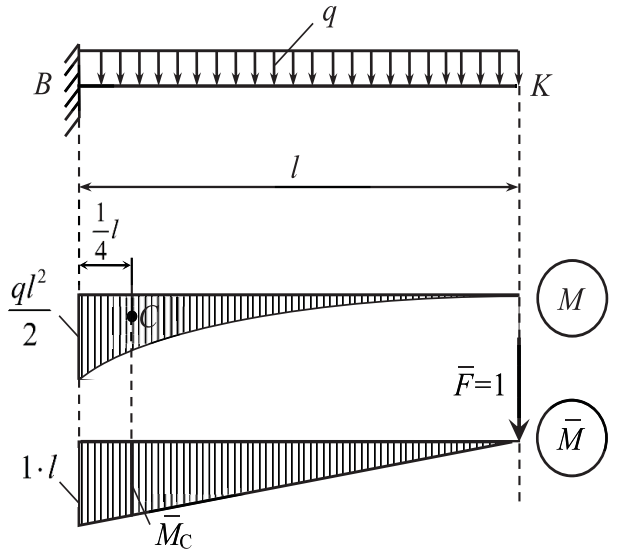


Рис. 6.24

Приклад 9. Визначити вертикальне переміщення y_K перерізу K консольної балки (рис. 6.24), навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q. Жорсткість поперечних перерізів стала по довжині і дорівнює EI.

Розв'язування. Будуємо епюру згинальних моментів від заданих сил (вантажну епюру) і епюру згинальних моментів від одиничної сили, прикладеної в точці *K*.

Площа параболічного трикутника (вантажної епюри) $\omega = \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l$. Центр ваги *C* параболічного трикутника знаходиться на відстані $l/4$ від вершини прямого кута. Із геометричних міркувань знаходимо $\frac{\bar{M}_C}{3l/4} = \frac{1 \cdot l}{l}$, отже $\bar{M}_C = 3l/4$, а переміщення точки *K*

$$y_K = \frac{\omega \cdot \bar{M}_C}{EI} = \frac{ql^3 3l}{6 \cdot 4EI} = \frac{ql^4}{8EI}.$$

6.9. Статично невизначені стержньові системи. Розрахунок статично невизначених рам методом сил

Стержньові системи, для яких число невідомих зусиль більше від числа лінійно незалежних рівнянь рівноваги, називають *статично невизначеними.* Стержньову систему називають *n* разів статично невизначеною, якщо число невідомих сил на *n* одиниць більше від числа лінійно незалежних рівнянь рівноваги, які можемо скласти для їх визначення. Ступінь статичної невизначеності системи визначають ще і за числом так званих "зайвих" в'язей, тобто в'язей, усунення яких не приводить до геометричної змінюваності системи, тобто не порушує її положення як твердого тіла. Нагадаємо, що *геометрично незмінюваною* називається система, зміна форми якої можлива лише за рахунок деформації її елементів. Термін "зайві" в'язі вживається в тому розумінні, що ці в'язі не потрібні для забезпечення рівноваги системи як абсолютно твердого тіла. Для забезпечення ж міцності і жорсткості реальної пружної конструкції ці в'язі необхідні. "Зайвими" можуть бути як зовнішні, так і внутрішні в'язі. Тому розрізняють статично невизначені системи зовнішнім і внутрішнім чином. При статичній невизначеності зовнішнім чином "зайвими" в'язями є опорні в'язі (рис. 6.25), а при статичній

невизначеності внутрішнім чином “зайвими” в’язями є елементи самої системи (рис. 6.26).

Для визначення внутрішніх сил із умов рівноваги відсіченої частини (рис. 6.26,b) маємо тільки три рівняння статики, а число невідомих – шість: N_1, N_2, Q_1, Q_2, M_1, M_2. Отже, замкнений контур є системою тричі статично невизначеною. Якщо система складається із K замкнених контурів, її ступінь статичної невизначеності буде $3K$.

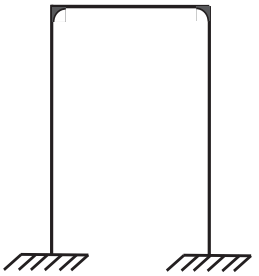
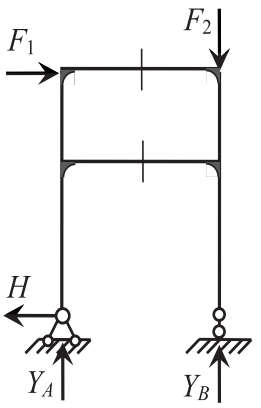
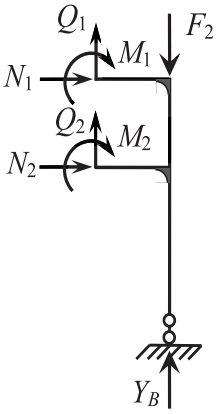


Рис. 6.25

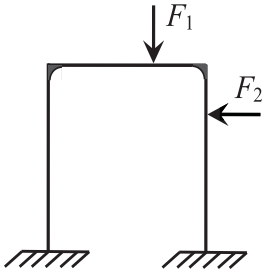


a

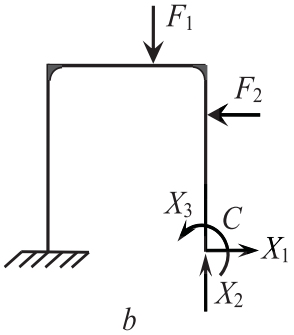


b

Рис. 6.26



a



b

Рис. 6.27

Найбільш універсальним методом розрахунку статично невизначених систем є метод сил. Він полягає в тому, що в статично невизначеній системі усувають “зайві” в’язі. Усунуті в’язі замінюються їх реакціями. Отримана у такий спосіб статично визначена і геометрично незмінна система називається *основною*

системою. Щоб основна система відповідала початковій системі, на її переміщення накладаються такі обмеження, які б вона зазнавала за наявності усунутих в'язей. Інакше кажучи, величини реакцій усунутих в'язей визначаються так, щоб переміщення основної системи відповідали тим обмеженням, які накладалися на початкову систему усунутими в'язями. Складають рівняння, які виражають умови еквівалентності основної системи (навантаженої зовнішнім навантаженням і реакціями усунутих в'язей) і початкової системи. Ці рівняння складають за єдиним правилом і називають їх *канонічними рівняннями методу сил*. Визначивши коефіцієнти канонічних рівнянь і розв'язавши систему канонічних рівнянь, визначають реакції усунутих в'язей. Подальше розв'язування проводиться як для статично визначеної стержньової системи. Невідомими в канонічних рівняннях є реакції в'язей, тобто сили, звідси і назва – метод сил.

Не порушуючи загальність міркувань, проаналізуємо суть методу сил на конкретному прикладі. Розглянемо раму (рис. 6.27), яка три рази статично невизначена зовнішнім чином. Звільнившись від "зайвої" в'язі, тобто жорсткого затиснення, замінимо її відповідними реакціями, які позначимо X_1, X_2, X_3. У цій рамі відкинута опора C – жорстке затиснення. Це означає, що в перерізі C горизонтальне переміщення, вертикальне переміщення і кут повороту дорівнюють нулю (рис. 6.27,*b*):

$$\begin{aligned} \Delta_{1[X_1,X_2,X_3,F]} &= 0; \\ \Delta_{2[X_1,X_2,X_3,F]} &= 0; \\ \Delta_{3[X_1,X_2,X_3,F]} &= 0, \end{aligned} \tag{6.53}$$

де перший індекс 1 означає, що йдеться про переміщення перерізу C в напрямку сили X_1, а другий індекс $[X_1, X_2, X_3, F]$ показує, що переміщення викликане системою усіх сил, заданих F і невідомих – X_1, X_2, X_3 і т.д. Вирази для переміщень (6.53) з урахуванням принципу додавання та незалежності дії сил (принципу суперпозиції) можна записати у розгорнутому вигляді

$$\Delta_{i[X_1,X_2,X_3,F]} = \Delta_{iX_1} + \Delta_{iX_2} + \Delta_{iX_3} + \Delta_F = 0, \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{6.54}$$

Кожна із складових Δ_{iX_k}, що входять в рівняння (6.54), означає переміщення в напрямку дії сили з першим індексом під дією сил, які позначені другим індексом. Оскільки кожне переміщення є пропорціональним відповідній силі, то величину Δ_{iX_k} можна представити у вигляді

$$\Delta_{iX_k} = \delta_{ik} X_k, \tag{6.55}$$

де δ_{ik} – переміщення точки прикладення *i-тої* сили в напрямку *i-тої* сили під дією одиничної *k-тої* сили $\overline{X}_k = 1$, прикладеної замість сили X_k.

У переміщеннях Δ_{1F}, Δ_{2F} та інших під індексом F розуміють не просто одну зовнішню силу F, а всю систему зовнішніх діючих сил. Тому величини Δ_{1F}, Δ_{2F}, …, в рівняннях (6.54) запишемо незмінними, а інші запишемо з урахуванням (6.55). Система рівнянь (6.54) набирає такого розгорнутого вигляду:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0;\\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0;\\
&\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0.
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Ці рівняння носять назву канонічних рівнянь методу сил. Число їх дорівнює ступеню статичної невизначеності системи. Для n раз статично невизначеної стержньової конструкції система канонічних рівнянь методу сил має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{1i}X_i + \ldots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0;\\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots + \delta_{2i}X_i + \ldots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0;\\
&\text{– –}\\
&\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \ldots + \delta_{ii}X_i + \ldots + \delta_{in}X_n + \Delta_{iF} = 0;\\
&\text{– –}\\
&\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{ni}X_i + \ldots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0.
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Коефіцієнти, які мають однакові індекси $\delta_{11}, \delta_{22}, \ldots, \delta_{nn}$, називаються головними. Вони завжди додатні. Коефіцієнти з різними індексами $\delta_{12}, \delta_{23}, \ldots$ називаються побічними. Вони можуть бути додатними, від'ємними і рівними нулю. Відповідно до теореми про взаємність переміщень $\delta_{ik} = \delta_{ki}$. Вільні члени $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \ldots$, називають вантажними членами канонічних рівнянь методу сил.

Підкреслимо, що геометричний зміст кожного із канонічних рівнянь методу сил полягає в тому, що сумарне переміщення точки прикладення невідомої сили, прикладеної замість усунутої в'язі, у напрямку цієї ж сили під дією заданого навантаження та невідомих сил, дорівнює нулю. Для визначення коефіцієнтів і вантажних членів у канонічних рівняннях використовують інтеграли Мора. У розрахунках статично невизначених систем з криволінійними елементами безпосередньо обчислюють інтеграли Мора, а для систем з прямолінійними елементами для їх обчислення застосовують спосіб Верещагіна. Якщо при визначенні переміщень враховують, наприклад, тільки згинальні моменти, то

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI_x} dz; \quad \Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F}{EI_x} dz. \tag{6.58}$$

Для прямолінійних елементів, як зазначено раніше, обчислення інтегралів у виразах (6.58) замінюється перемноженням епюр $\bar{M}_i$ на $\bar{M}_k$ або $\bar{M}_i$ на M_F та діленням отриманих результатів на величину згинної жорсткості поперечних перерізів відповідної ділянки і подальшим підсумовуванням результатів.

Визначивши коефіцієнти і вантажні члени канонічних рівнянь, розв'язують систему канонічних рівнянь і знаходять величину реакцій "зайвих" в'язей.

Тепер основна система, на яку діють задані навантаження, а також визначені із канонічних рівнянь реакції "зайвих" в'язів, є статично визначеною системою, еквівалентною початковій системі. Наступні етапи розрахунків проводяться так само, як і для статично визначеної системи. Наприклад, для побудови епюр згинальних моментів необхідно із рівнянь рівноваги визначити величину реакцій опор, що залишилися невизначеними, а потім скласти аналітичні вирази для $M(z)$ у перерізах і побудувати їх епюри. У розрахунках складних систем побудову епюр зручно проводити, використовуючи принцип додавання та незалежності дії сил. На етапі визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь епюри $\bar{M}_i$ від одиничних сил, а також епюри M_F від заданих навантажень для основної системи уже були побудовані. Враховуючи викладене і принцип додавання та незалежності дії сил, повні значення внутрішніх силових факторів у перерізі дорівнюватимуть

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 . \qquad (6.59)$$

Інакше кажучи, для побудови кінцевих епюр необхідно скласти вантажні епюри з одиничними, збільшеними в $X_1, X_2, ..., X_n$ разів.

Приклад 10. Побудувати епюру згинальних моментів для рами (рис. 6.28,*a*). Жорсткість на згин усіх елементів рами однакова *EI*.

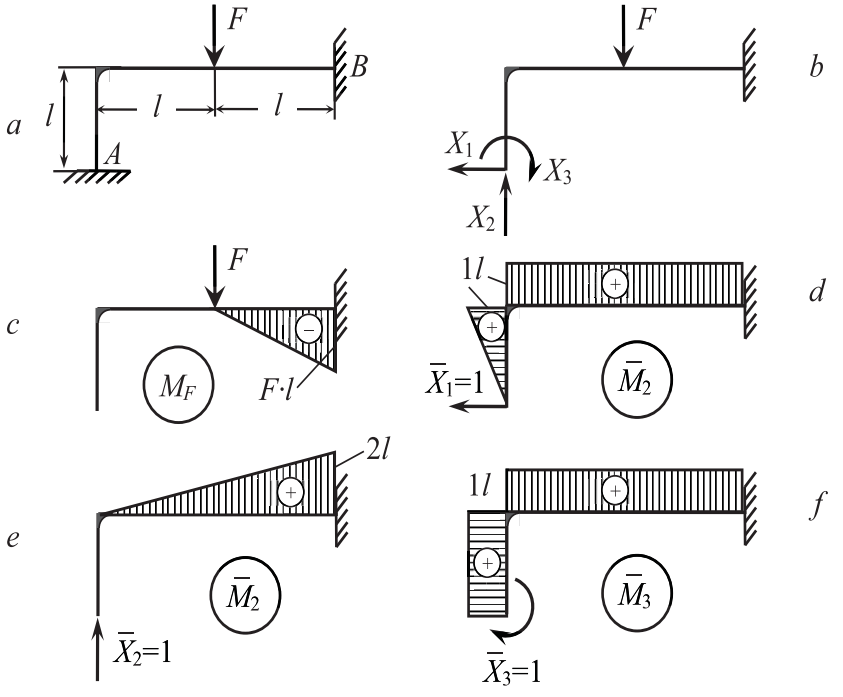


Рис. 6.28

*Розв'язування***.** Для побудови епюри згинальних моментів необхідно знати величину реакцій в опорах. Задача три рази статично невизначена. Усунемо "зайві" в'язі – жорстке затиснення (рис. 6.28,*b*) і прикладемо замість усунутих в'язей невідомі реакції X_1, X_2, X_3, які можна вважати зовнішніми силами, але поки що невідомими. Канонічні рівняння будуть мати вигляд:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1F} = 0;$$
$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2F} = 0;$$
$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

Геометричний зміст цих рівнянь полягає в тому, що переміщення в горизонтальному і вертикальному напрямках, а також кут повороту перерізу A (місця усунутого жорсткого затиснення) повинні дорівнювати нулю. Інакше кажучи, на переміщення основної системи накладаються такі ж обмеження, як і на переміщення початкової системи усунутими в'язями.

Обчислюючи переміщення у цій системі, будемо враховувати тільки згинання. Побудуємо епюри згинальних моментів для основної системи від заданих зовнішніх сил (рис. 6.28,*c*) і одиничних сил $\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2 = 1$, $\bar{X}_3 = 1$, прикладених замість сил X_1, X_2, X_3 (рис. 6.28,*d*, *e*, *f*). Перемножуючи відповідні епюри за методом Верещагіна, одержимо коефіцієнти канонічних рівнянь:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}l^2 \cdot \frac{2}{3}l + 2l^2 l\right) = \frac{7}{3}\frac{l^3}{EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2l^3}{EI}; \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{5}{2}\frac{l^2}{EI}; \quad \delta_{22} = \frac{8}{3}\frac{l^3}{EI};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{2l^2}{EI}; \quad \delta_{33} = \frac{3l}{EI}; \quad \Delta_{1F} = \frac{-Fl^3}{EI}; \quad \Delta_{2F} = -\frac{5}{6}\frac{Fl^3}{EI}; \quad \Delta_{3F} = -\frac{Fl^2}{2EI}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в канонічні рівняння методу сил, матимемо:

$$\frac{7}{3}lX_1 + 2lX_2 + \frac{5}{2}X_3 = \frac{Fl}{2};$$

$$2lX_1 + \frac{8}{3}lX_2 + 2X_3 = \frac{5}{6}Fl;$$

$$\frac{5}{2}lX_1 + 2lX_2 + 3X_3 = \frac{Fl}{2}.$$

Розв'язавши цю систему трьох алгебраїчних рівнянь відносно трьох невідомих , знайдемо реакції відкинутої в'язі:

$$X_1 = -\frac{1}{4}F; \quad X_2 = \frac{7}{16}F; \quad X_3 = \frac{1}{12}Fl.$$

Розкриття статичної невизначеності на цьому завершено. Початкова статично невизначена система замінена тепер еквівалентною статично визначеною системою (рис. 6.29,*a*), де X_1, X_2, X_3 виступають як сили рівноправні зі заданою зовнішньою силою F.

Побудова епюр згинальних моментів, визначення переміщень проводиться для основної системи як для статично визначеної системи.

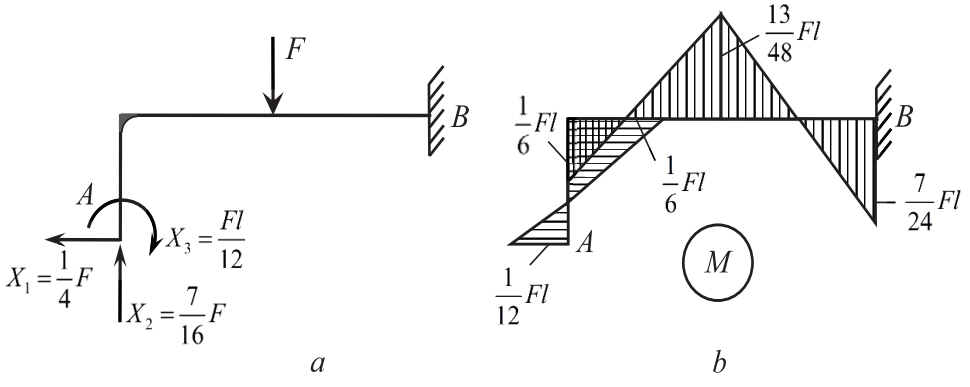


Рис. 6.29

Епюри згинальних моментів (рис. 6.29,*b*) зручно будувати методом накладення епюр від кожної сили окремо. Враховуючи, що епюра M_F від заданого зовнішнього навантаження побудована, побудовані також епюри від одиничних сил $\bar{X}_1 = 1, \bar{X}_2 = 1, \bar{X}_3 = 1$, кінцеве значення згинального моменту отримаємо, склавши епюру M_F з епюрами $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$, збільшеними відповідно у X_1, X_2, X_3 разів

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3.$$

Таким самим шляхом будуються епюри поздовжніх та поперечних сил.

ГЛАВА 7. СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ТА ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Під стійкістю пружної конструкції чи споруди розуміють їх здатність зберігати певну початкову форму рівноваги. Стан конструкції, яка володіє такою властивістю, називають стійким, у протилежному випадку її стан вважають нестійким. Ще у далекі часи люди використовували в будівництві довгі стержні, колони і з досвіду їх застосування усвідомили, що опір колон зовнішнім стискуючим силам залежить не тільки від площі їх поперечних перерізів, а і від форми поперечних перерізів та висоти колон. До розрахункової схеми "довгий стержень під дією стискуючої поздовжньої сили" зводяться розрахунки багатьох елементів конструкцій, споруд та деталей машин, у тому числі і агропромислового виробництва. Наприклад, шток в гідроциліндрі комбайна, трактора чи екскаватора

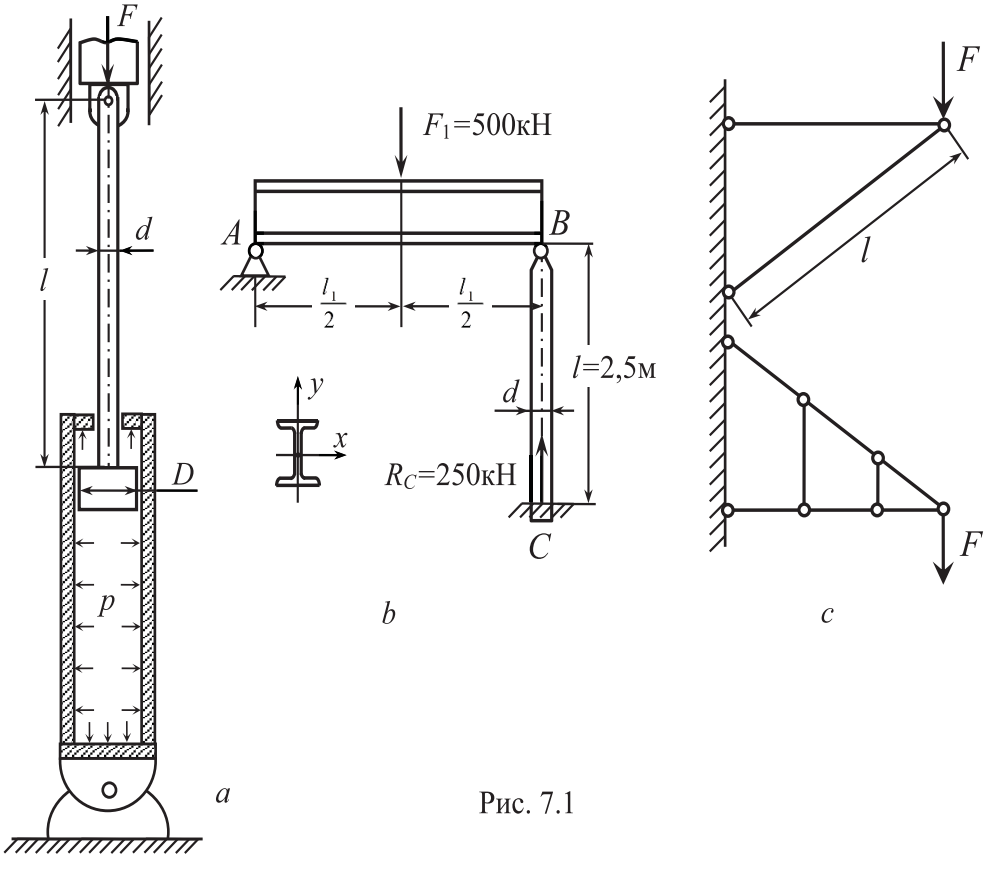


Рис. 7.1

(рис. 7.1,*a*); опори, виконані у вигляді довгих стояків (рис. 7.1,*b*); окремі стержні ферм кронштейнів навантажувачів, що знаходяться у стиснутому стані (рис. 7.1,*c*) і таке інше. У розрахунках таких систем умови міцності та умови жорсткості доповнюють умовою стійкості, виконання якої передбачає збереження початкової форми пружної рівноваги конструкції або окремих її елементів під впливом діючого на неї навантаження.

7.1. Поняття про стійкий та нестійкий стан пружної рівноваги

Під дією поздовжньої стискуючої сили, яка поступово зростає, стержень (рис. 7.2) проходить три форми рівноваги: стійку, байдужу та нестійку. Поведінку стиснутого стержня можна порівняти з відомим з теоретичної механіки явищем стійкості кульки, яка знаходиться на ввігнутій, горизонтальній та випуклій поверхнях. У першому випадку (рис. 7.2,*a*) кулька знаходиться у стані стійкої рівноваги. При відхиленні кульки від початкового положення вона після зняття збурення повертається у початковий стан. Стиснутий стержень перебуває у стані стійкої рівноваги, якщо стискуюча сила F не перевищує критичного значення F_{cr}. За невеликого збурення стержня, наприклад викривлення прямолінійної форми осі стержня шляхом прикладення бокової сили Q, він повернеться до початкової прямолінійної форми рівноваги після припинення дії сили Q.

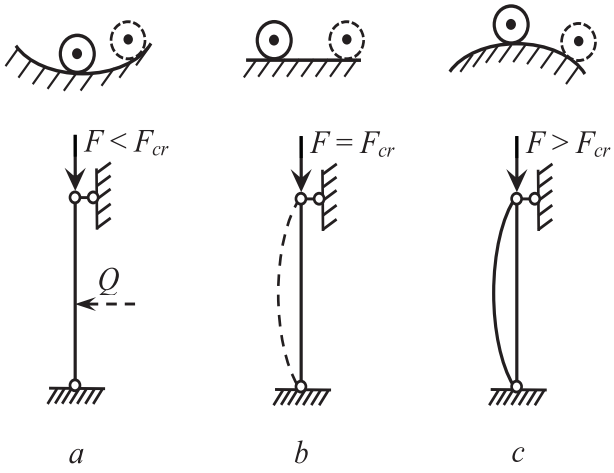


Рис. 7.2

На горизонтальній поверхні (рис. 7.2,*b*) кулька перебуває в стані байдужої рівноваги, оскільки після відхилення від початкового стану вона може повернутися, а може і не повернутися до початкового стану. Для стиснутого стержня форма рівноваги буде байдужою, коли стискуюча сила F досягає критичного значення F_{cr}. При цьому стержень може зберігати як початкову прямолінійну форму рівноваги, так і близьку до прямолінійної нову криволінійну форму рівноваги. Нарешті, кулька на випуклій поверхні (рис. 7.2,*c*) перебуває у стані нестійкої рівноваги. У разі виведення кульки з цього положення у початковий стан вона не повертається. Стиснутий стержень перебуває у стані нестійкої рівноваги, якщо стискуюча сила перевищує критичне значення $F > F_{cr}$. Прямолінійна форма рівноваги стержня стає нестійкою, а явище появи нової криволінійної форми рівноваги називають *втратою* стержнем *стійкості*. Значення стискуючої сили, перевищення якого приводить до втрати стійкості початкової форми рівноваги стержня, називають критичним значенням або просто *критичною силою* і позначають F_{cr}. Підкреслимо, що втрата стійкості стержня може відбуватися навіть тоді, коли нормальні напруження в його поперечних перерізах під дією критичної сили ще не досягають границі пропорційності. Тобто, незважаючи на те, що умова міцності ще виконується, несуча здатність стержня може бути вичерпана, при цьому стержень не чинить опору діючій силі. Це означає, що стиснуті стержні у деяких випадках слід перевіряти не тільки на міцність та жорсткість, а й на стійкість. Зазначимо також, що пружні деформації до настання критичного стану, як правило, невеликі і їх зростання мало помітне. Досягаючи критичного стану, деформації зростають надто швидко за незначного зростання стискуючої сили, часу для запобігання небезпеці практично немає. Отже, за наявності втрати стійкості критичне навантаження аналогічне руйнуючому при порушенні умови міцності.

Випадків катастроф та руйнування споруд унаслідок втрати стійкості чимало. Найчастіше в літературі наводиться приклад руйнування в 1907 році Квебекського мосту через ріку св. Лаврентія у Канаді. Через помилковий розрахунок відбулася втрата стійкості стиснутого стержня ферми, що спричинило втрату

ним несучої здатності і перевантаження інших стержнів ферми, в результаті чого міст і зруйнувався.

Для безпечної роботи стиснутих стержнів необхідно, щоб стискуюча сила не перевищувала допустимого значення сили в розрахунках на стійкість

$$F \le F_{adm}^{st}, \quad \text{де} \quad F_{adm}^{st} = \frac{F_{cr}}{k_{st}}, \tag{7.1}$$

де k_{st} – коефіцієнт запасу в розрахунках на стійкість, який більше за одиницю.

Щоб запобігти втраті стійкості конструкції, необхідно забезпечити виконання умови стійкості (7.1), для чого треба оволодіти методами визначення критичних навантажень F_{cr}. Явище втрати стійкості може мати місце і в багатьох інших елементах конструкцій іншої форми, наприклад, циліндрична тонкостінна оболонка або пластинка, стиснуті поздовжніми силами; кільце, яке зазнає всебічного стиску і таке інше. Уваги заслуговує так звана термостійкість, наприклад, стержня, затиснутого по краях і нагрітого до деякого значення температури, за якої в його поперечних перерізах виникають нормальні напруження, що перевищують критичні значення σ_{cr}.

Розглянемо детально лише стійкість поздовжньо стиснутого довгого стержня с прямолінійною віссю, яку ще називають поздовжнім згином.

7.2. Критична сила для стиснутого стержня та її визначення. Формула Ейлера

Розглянемо стержень з прямолінійною віссю, шарнірно закріплений по краях (рис. 7.3), який знаходиться у байдужому стані, тобто стискується поздовжньою силою F, яка дорівнює критичному значенню сили F_{cr}. Припустимо, що напруження в поперечних перерізах стержня під дією критичної сили не перевищують границі пропорційності. Стан пружної рівноваги у випадку $F = F_{cr}$ буде байдужим, тобто поряд з прямолінійною формою рівноваги стержня можлива близька до неї криволінійна форма рівноваги.

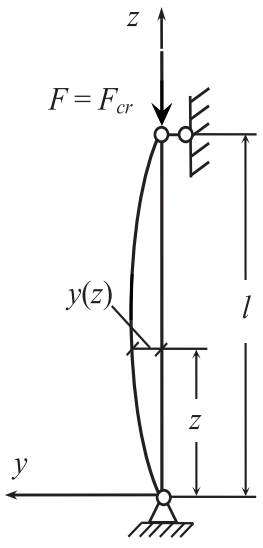


Рис. 7.3

Дослідимо криволінійну форму рівноваги стержня за малих відхилень осі стержня від прямолінійної форми. Спостереження за явищем втрати стійкості показують, що втрата стійкості стержня відбувається в площині найменшої згинної жорсткості стержня, тобто в площині, у якій згинна жорсткість поперечного перерізу стержня EI_{min} мінімальна. Для дослідження критичного стану стержня використаємо наближене диференціальне рівняння зігнутої осі стержня

$$E I_{min} y''(z) = M(z), \tag{7.2}$$

де згинальний момент у довільному поперечному перерізі з абсцисою z дорівнює

$$M(z) = -F_{cr} \cdot y(z);$$

I_{min} – мінімальний момент інерції поперечного перерізу стержня; $y(z)$ – поперечний прогин довільного перерізу з абсцисою z у площині найменшої згинної жорсткості.

Остаточно рівняння (7.2) набирає вигляду

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{F_{cr}}{EI_{min}} \cdot y(z) = 0,$$

або, ввівши позначення $k^2 = \dfrac{F_{cr}}{EI_{min}}$,

$$\frac{d^2y}{dz^2} + k^2 y = 0. \tag{7.3}$$

Диференціальне рівняння (7.3) є звичайним однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. З математики відомо, що загальний розв'язок рівняння (7.3) має вигляд

$$y = A\sin kz + B\cos kz, \tag{7.4}$$

де A та B – сталі інтегрування, які визначають з граничних умов. За шарнірного закріплення стержня відхилення його в крайніх закріплених точках відсутні, звідки матимемо:

$$\text{при } z = 0 \quad y = 0, \text{ тобто } y(0) = 0; \tag{7.5}$$

$$\text{при } z = l \quad y = 0, \text{ тобто } y(l) = 0. \tag{7.6}$$

Підкорюючи розв'язок (7.4) граничним умовам (7.5) та (7.6), отримаємо:

$$B = 0; \tag{7.7}$$

$$A \sin k l = 0. \tag{7.8}$$

Стала інтегрування A не повинна дорівнювати нулю, оскільки в цьому випадку вісь стержня не буде деформованою. Отже, нулю дорівнює другий множник рівняння (7.8): $\sin k l = 0$. Розв'язуючи це рівняння, з умови нетривіальності розв'язку матимемо:

$$k l = n \pi, \tag{7.9}$$

де $n = 1, 2, 3, \ldots$ – довільне ціле число.

Враховуючи введене позначення $k = \sqrt{\dfrac{F_{cr}}{E I_{min}}}$, із виразу (7.9) знаходимо множину критичних значень стискуючої сили

$$F_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 E I_{min}}{l^2}. \tag{7.10}$$

У розрахунках на стійкість практичне значення має найменше значення критичної сили, яке відповідає $n = 1$:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l^2}. \tag{7.11}$$

Вираз (7.11) для визначення критичного значення стискуючої сили називають *формулою Ейлера* (1707–1783), члена Російської академії наук, який першим сформулював і розв'язав цю задачу в 1744 році. Отже, зігнута вісь стержня у байдужому стані рівноваги буде описуватися рівнянням синусоїди

$$y = A \sin \frac{\pi z}{l}, \tag{7.12}$$

де A – невизначене найбільше відхилення зігнутої осі стержня, яке згідно з початковими припущеннями є малим. При $n = 1$ на довжині стержня вміщується півхвиля синусоїди, оскільки відхилення дорівнюють нулю при $z = 0$ та $z = l$.

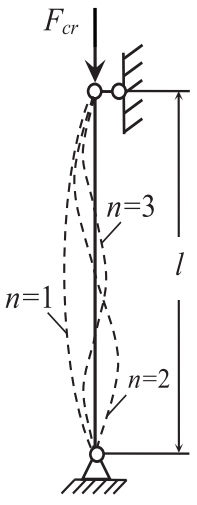


Рис. 7.4

Якщо n більше одиниці, зігнута вісь буде описуватися рівнянням

$$y = A\sin\frac{n\pi z}{l}$$

і вміщуватиме більше ніж одну півхвилю синусоїди (рис. 7.4). Відповідно збільшується і величина критичної сили. На практиці легко здійснюється тільки втрата стійкості за найменшого значення критичної сили. Для здійснення втрати стійкості стержнем з двома та більше півхвилями синусоїди необхідні додаткові умови.

7.3. Вплив умов закріплення стержня на величину критичної сили

Формула Ейлера для визначення критичного значення стискуючої сили (7.11) отримана для стержня з шарнірно обіпертими краями. На практиці зустрічаються інші способи закріплення стиснутих стержнів, найбільш поширені серед яких наведені на рис. 7.5.

Розглянемо випадок, коли стержень має один вільний кінець, а інший край затиснутий (рис. 7.5,*а*). По аналогії з попереднім випадком згинальний момент у довільному поперечному перерізі стержня з абсцисою z у байдужому стані набере вигляду

$$M(z) = F_{cr}[y(l) - y(z)],$$

і відповідно диференціальне рівняння зігнутої осі стержня у цьому випадку буде

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{F_{cr}\left[y(l) - y(z)\right]}{EI_{min}}.$$

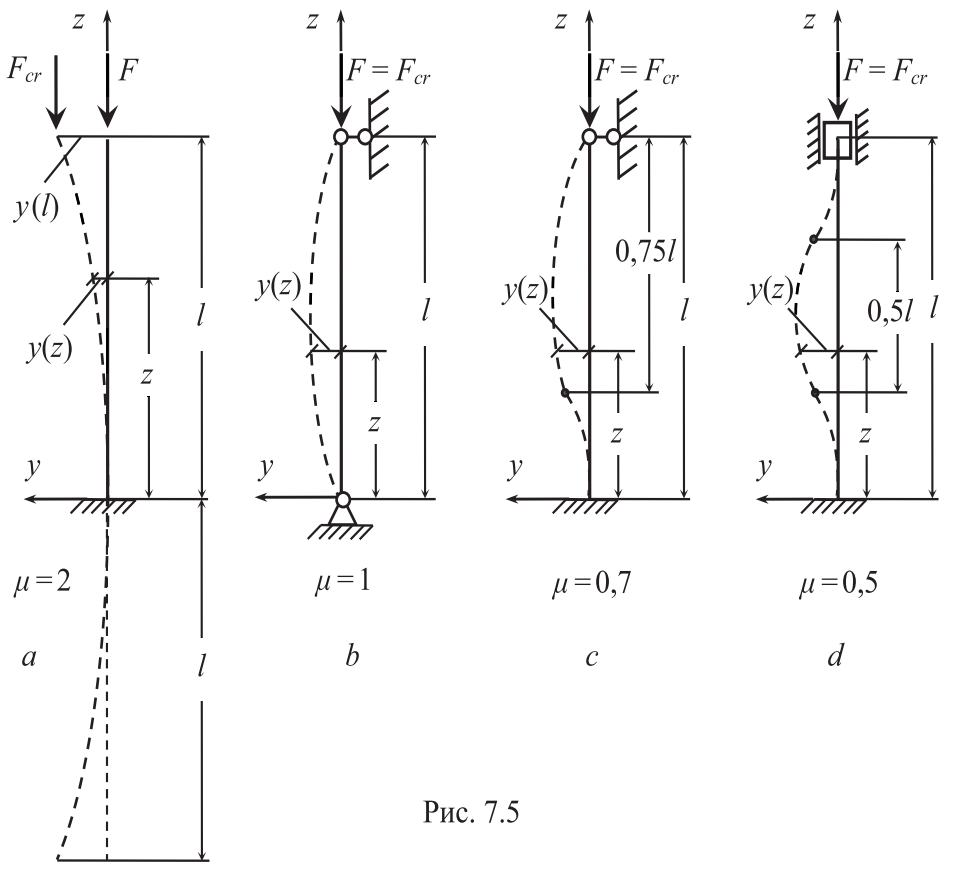


Рис. 7.5

Перепишемо отримане рівняння так:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + k^2 \cdot y(z) = k^2 \cdot y(l), \tag{7.13}$$

де, як і раніше, $k^2 = \dfrac{F_{cr}}{EI_{min}}$; $y(l)$ – прогин вільного краю стержня. Загальний розв'язок диференціального рівняння (7.13) відшукаємо у вигляді

$$y(z) = A\sin kz + B\cos kz + y(l). \tag{7.14}$$

Із граничних умов при $z = 0$ матимемо:

$$y\,(0) = B + y\,(l) = 0, \text{ звідки } B = -y\,(l);$$

$$y'(0) = A\,k = 0, \text{ звідки } A = 0.$$

Отже, остаточно розв'язок рівняння (7.14) матиме вигляд

$$y(z) = -y(l)\cos kz + y(l) = y(l)(1 - \cos kz). \tag{7.15}$$

Рівняння (7.15) зберігається при $z = l$, якщо $\cos kl = 0$. Із умови $\cos kl = 0$ знаходимо

$$kl = \frac{n\pi}{2} \quad \left(n = 1, 3, 5, ...\right).$$

Найменше значення критичної сили F_{cr} матимемо при $n = 1$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4l^2} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{\left(2l\right)^2}. \tag{7.16}$$

Як бачимо, значення критичної сили в чотири рази менше, ніж для такого ж стержня, але з шарнірно закріпленими краями (рис. 7.5,*b*). Цей результат легко отримати, якщо консольний стержень уявити собі у вигляді шарнірно обіпертого стержня подвоєної довжини (рис. 7.5,*a*). Іншими словами, в основному випадку [рис. 7.5,*b*, формула (7.11)] втрата стійкості відбувається в умовах, коли зігнута вісь є півхвилею синусоїди, довжина якої дорівнює довжині стержня *l*. Продовжимо тепер зігнуту вісь стержня (рис. 7.5,*a*) у бік затиснутого кінця, одержавши дзеркальне зображення. Одержаний уявний стержень має довжину 2*l*, зігнута вісь якого є теж півхвилею синусоїди з подвійною довжиною. Отже, в формулі (7.11) довжина стержня буде становити 2*l*.

Розглянемо випадок (рис. 7.5,*c*), коли нижній кінець стержня жорстко закріплений (затиснутий), а верхній шарнірно опертий. У цьому випадку в шарнірі виникає горизонтальна реакція *H*, відповідно згинальний момент у довільному поперечному перерізу з абсцисою *z* дорівнює

$$M(z) = -F_{cr} \cdot y + H(l - z)$$

і диференціальне рівняння зігнутої осі матиме вигляд

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{-F_{кр} y + H\left(l - z\right)}{E\, I_{min}}. \tag{7.17}$$

Усунемо із диференціального рівняння (7.17) невідому реакцію *H* шляхом його дворазового диференціювання. У результаті отримаємо однорідне диференціальне рівняння четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^4y}{dz^4} + k^2 \frac{d^2y}{dz^2} = 0. \tag{7.18}$$

Оскільки це рівняння четвертого порядку, то при інтегруванні виникне чотири сталих інтегрування, які визначимо із чотирьох граничних умов, які відповідають умовам закріплення:

$$\text{при } z = 0 \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0, \tag{7.19}$$

оскільки прогин та кут повороту затиснутого перерізу дорівнюють нулю;

$$\text{при } z = l \quad y(l) = 0; \quad y''(l) = 0, \tag{7.20}$$

оскільки прогин перерізу та згинальний момент в перерізі, який закріплений шарнірно, дорівнюють нулю.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (7.18) шукатимемо у вигляді

$$y(z) = A\sin kz + B\cos kz + Cz + D. \tag{7.21}$$

Задовільняючи функцію (7.21) граничним умовам (7.19) та (7.20), отримаємо систему чотирьох алгебраїчних рівнянь для визначення чотирьох сталих інтегрування:

$$\begin{aligned} &y(0) = 0 + B + 0 + D = 0; \\ &y'(0) = Ak + 0 + C + 0 = 0; \\ &y(l) = A\sin kl + B\cos kl + Cl + D = 0; \\ &y''(l) = -Ak^2 \sin kl - Bk^2 \cos kl + 0 + 0 = 0. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Розв'язок системи (7.22) буде ненульовим, якщо її визначник дорівнюватиме нулю

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & l & 1 \\ \sin kl & \cos kl & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, матимемо трансцендентне рівняння: $tg\,kl = kl$, корінь якого $kl = 4{,}49$. Отже, $k^2 = 4{,}49^2/l^2$, а значення критичної сили дорівнюватиме

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(0,7l)^2}. \tag{7.23}$$

Аналогічним шляхом можна визначити критичну силу, якщо обидва кінці стержня затиснуті (рис. 7.5,*d*),

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(0,5l)^2}. \tag{7.24}$$

Отже, узагальнена формула Ейлера для визначення критичної сили при різних способах закріплення стержнів може бути записана у вигляді

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(\mu \cdot l)^2}, \tag{7.25}$$

де $\mu \cdot l$ – зведена довжина стержня; μ – коефіцієнт зведеної довжини, який залежить від способу закріплення перерізів стержня.

Як видно із рис. 7.5 та формул (7.11), (7.16), (7.23), (7.24), посилення умов закріплення перерізів стержня приводить до зменшення зведеної довжини стержня і збільшення критичного значення стискуючої сили.

7.4. Межа застосування формули Ейлера

У байдужому стані, коли $F = F_{cr}$, стержень знаходиться у звичайному осьовому стиску і нормальні напруження, які виникають у його поперечних перерізах, як відомо, визначають за формулою

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A}.$$

Після підстановки в цю формулу виразу (7.25) для значення критичної сили отримаємо

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{A(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E \frac{I_{\min}}{A}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\lambda)^2}. \tag{7.26}$$

Отже, вираз для визначення критичних значень нормальних напружень у поперечних перерізах стиснутого стержня у байдужому стані має вигляд

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{7.27}$$

де $\lambda = \mu l / i_{min}$ – максимальна гнучкість стержня, яка характеризує вплив розмірів стержня, форми поперечного перерізу та умов його закріплення на величину критичних нормальних напружень; $i_{min} = \sqrt{I_{min} / A}$ – радіус інерції поперечного перерізу.

Залежність (7.27) між критичним нормальним напруженням та гнучкістю стержня для пластичної маловуглецевої сталі можна подати у вигляді кривої, так званої гіперболи Ейлера (рис. 7.6).

Оскільки при виводі формули Ейлера використане наближене диференціальне рівняння пружної зігнутої осі балки, при отриманні якого в основу покладено закон Гука, то нормальні напруження, які виникають у поперечних перерізах стиснутого стержня, повинні знаходитися у межах придатності закону Гука і не повинні перевищувати границі пропорційності матеріалу стержня. Таким чином, для придатності отриманої узагальненої формули Ейлера з урахуванням виразу (7.27) має виконуватися умова

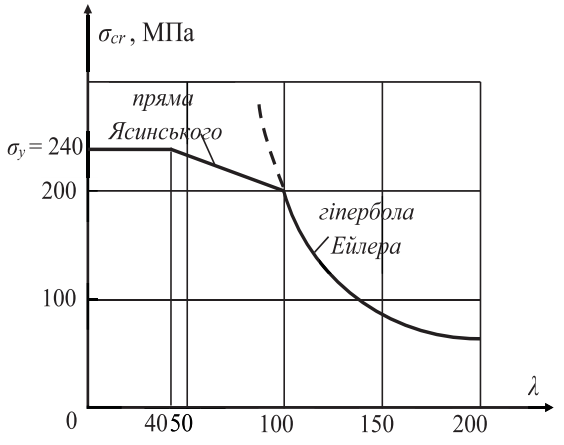


Рис. 7.6

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{pr}, \tag{7.28}$$

звідки

$$\lambda \ge \pi \sqrt{E / \sigma_{pr}}. \tag{7.29}$$

Отже, формула Ейлера дійсна для стержнів, які мають гнучкість, що задовольняє умові (7.29), тобто стержнів достатньо гнучких. Наприклад, для стержнів, виготовлених із сталі-3 із модулем пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа і границею пропорцій-

ності σ_{pr} = 200 МПа,

$$\lambda = 3{,}14\sqrt{\frac{2\cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Таким чином, для стержнів, виготовлених із такого матеріалу, формула Ейлера застосовується, коли їх гнучкість $\lambda > 100$. Для стержнів, виготовлених із чавуну, $\lambda > 80$, із легованих сталей $\lambda > 70$.

Значення гнучкості, яке визначають за формулою (7.29), називають граничним. Загальний вираз умови придатності узагальненої формули Ейлера має вигляд: $\lambda_{max} \geq \lambda_{lim.}$

Зауважимо, що гранична гнучкість λ_{lim}, яка визначається за формулою (7.29), залежить тільки від матеріалу стержня.

7.5. Розрахунки стержнів на стійкість за межею придатності закона Гука та, відповідно, формули Ейлера

Як бачимо із формули (7.27), зі зменшенням гнучкості стержня критичне напруження зростає і, якщо гнучкість нижча від граничного значення, критичне напруження перевищує границю пропорційності, закон Гука стає не придатним і формулу Ейлера для визначення критичної сили використовувати неможливо. У практичних розрахунках користуються напівемпіричними формулами, зокрема для елементів конструкцій із гнучкістю $40 \leq \lambda \leq 100$, які виготовлені з маловуглецевої сталі з граничною гнучкістю λ_{lim} = 100, застосовують формулу Ф.С. Ясинського

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \tag{7.30}$$

де a та b – коефіцієнти, що залежать від матеріалу та визначаються експериментально. Наприклад, для сталі-3 a = 310 МПа; b = 1,14 МПа. Прямо пропорційна залежність між σ_{cr} та λ на рис. 7.6 наведена прямою – прямою Ясинського (Кагадій та ін., 2011).

Стержні малої гнучкості $0 < \lambda < 40$, тобто короткі, з низьким співвідношенням поздовжнього і поперечного розмірів, виготовлені із маловуглецевої сталі-3, на стійкість не розраховують, оскільки відповідні критичні напруження перевищують границю текучості, тобто такі стержні умовно руйнуються внаслідок втрати міцності. За умовну границю міцності вважають таке значення нормального напруження, за якого висота стержня зменшується, наприклад на одну третину від початкової. На діаграмі (рис. 7.6) залежність $\sigma_{cr} \sim \lambda$ для стержнів малої гнучкості зображена прямою, паралельною осі абсцис, і має ординату, яка дорівнює границі текучості матеріалу, тобто сталі-3, σ_y = 240 МПа. Стержні великої гнучкості, гнучкість яких $\lambda > 200$, нормативами взагалі не рекомендуються для використання у вигляді елементів конструкцій промислового та сільськогосподарського призначення.

7.6. Практичні методи розрахунків стиснутих стержнів на стійкість

У розрахунках елементів конструкцій на стійкість критичне нормальне напруження вважається таким же небезпечним, як границя текучості для пластичного матеріалу або границя міцності для крихкого матеріалу в розрахунках на міцність. Тому введено поняття допустимого нормального напруження на стійкість

$$\sigma_{adm}^{st} = \frac{\sigma_{cr}}{k_{st}}, \tag{7.31}$$

де k_{st} – коефіцієнт запасу на стійкість.

Коефіцієнти запасу на стійкість k_{st} беруть дещо більшими, ніж коефіцієнти запасу міцності k_0. Наприклад, k_{st} для сталі – в межах від 1,8 до 3, у той час як k_0 приймається 1,6. Це пояснюється наявністю початкової кривизни осі стержнів, ексцентриситетом прикладення стискуючої сили, які мало впливають на міцність та жорсткість при роботі стержня, а для гнучких стиснутих стержнів ця обставина може суттєво вплинути на стійкість та на несучу здатність стержня. Умова

стійкості вимагає, щоб напруження, які виникають у поперечних перерізах при стиску, не перевищували допустимого нормального напруження на стійкість

$$\sigma_{max} = \frac{F_{max}}{A} \le \sigma_{adm}^{st}. \tag{7.32}$$

Таблиця 7.1. Значення коефіцієнтів поздовжнього згину φ

λ	*Сталь*-2, *сталь*-3, *сталь*-4	*Сталь*-5	*Деревина*	*Чавун*
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,99	0,97
20	0,96	0,95	0,97	0,91
30	0,94	0,92	0,93	0,81
40	0,92	0,89	0,87	0,69
50	0,89	0,86	0,80	0,57
60	0,86	0,82	0,71	0,44
70	0,81	0,76	0,60	0,34
80	0,75	0,70	0,48	0,26
90	0,69	0,62	0,38	0,20
100	0,6	0,51	0,31	0,16
110	0,52	0,43	0,25	-
120	0,45	0,36	0,22	-
130	0,40	0,33	0,18	-
140	0,36	0,29	0,16	-
150	0,32	0,26	0,14	-
160	0,29	0,24	0,12	-
170	0,26	0,21	0,11	-
180	0,23	0,19	0,10	-
190	0,21	0,17	0,09	-
200	0,19	0,16	0,08	-

Для розрахунків доцільно визначити залежність між допустимим напруженням на стійкість та допустимим напруженням на міцність при стиску. Розглянемо їх відношення

$$\frac{\sigma_{adm}^{st}}{\sigma_{adm}^{c}} = \frac{\sigma_{cr} \cdot k_0}{k_{st} \cdot \sigma_0} = \varphi, \tag{7.33}$$

де σ^c_{adm} – допустиме напруження на міцність при стиску; k_0 – коефіцієнт запасу міцності; σ_0 – границя текучості для пластичних матеріалів або границя міцності для крихких матеріалів. Із виразу (7.33) маємо, що

$$\sigma^{st}_{adm} = \varphi \sigma^c_{adm}, \tag{7.34}$$

де коефіцієнт φ називають коефіцієнтом поздовжнього згину або коефіцієнтом зниження основного допустимого напруження на стиск, який обчислюють за виразом (7.33). Коефіцієнт φ для кожного матеріалу визначають за різних значень гнучкості і подають у вигляді табл. 7.1 або графіка залежності φ від λ. Отже, умову стійкості (7.32) можна записати

$$\sigma_{max} = \frac{F_{max}}{A} \le \varphi \sigma^c_{adm} \tag{7.35}$$

або

$$\sigma_{max} = \frac{F_{max}}{\varphi A} \le \sigma^c_{adm}, \tag{7.36}$$

де A – площа поперечного перерізу стержня; σ^c_{adm} – основне допустиме напруження на стиск.

За допомогою умови стійкості (7.36) виконують два типи (три види) розрахунків стиснутих стержнів на стійкість.

І. *Перевірочні розрахунки на стійкість*. У цьому типі розрахунків відомі розміри стержня, матеріал, навантаження, характер кріплення. Перевірка умови стійкості (7.36) виконується в такій послідовності:

- визначають мінімальний момент інерції I_{min} та мінімальний радіус інерції поперечного перерізу стержня $i_{min} = \sqrt{I_{min} / A}$;
- обчислюють максимальну гнучкість стержня за формулою $\lambda = \mu l / i_{min}$;
- за табл. 7.1 визначають коефіцієнт зниження основного допустимого напруження φ;
- вихідні дані – значення стискуючої сили F, площі поперечного перерізу A, допустимого нормального напруження для матеріалу стержня на стиск σ^c_{adm} і значення розрахованого коефіцієнта φ підставляють в умову стійкості (7.36) та перевіряють її виконання. У випадку її виконання стійкість стержня буде забезпечена,

у протилежному випадку щось треба змінювати: чи то значення сили зменшити, чи то площу поперечного перерізу збільшити і таке інше.

ІІ. У другому *проектувальному типі розрахунків стержнів на стійкість* маємо два види розрахунків:

а) відомі розміри стержня, матеріал, характер кріплення. Необхідно встановити максимальне значення стискуючої сили, яку можна прикласти до стержня без втрати його стійкості. Як і в попередньому випадку, розраховують значення коефіцієнта поздовжнього згину φ. Потім з правої частини умови стійкості (7.36) визначають найбільше значення діючої сили $F_{max} \le \varphi \sigma^{c}_{adm} A$;

б) відоме навантаження, матеріал, довжина стержня та умови його кріплення. Визначають розміри поперечного перерізу стержня. Виходячи з правої частини умови стійкості (7.36), розраховують площу поперечного перерізу A стержня

$$A \ge \frac{F}{\varphi \sigma^{c}_{adm}}, \tag{7.37}$$

після чого визначають за відомою формою поперечного перерізу його розміри і за необхідності методом послідовних наближень уточнюють.

Зауважимо, що до нерівності (7.37) входять дві невідомі величини: площа поперечного перерізу стержня A і значення коефіцієнта поздовжнього згину φ, яке залежить від невизначених ще розмірів поперечного перерізу. Відомо, що φ залежить від гнучкості, а гнучкість від радіуса інерції поперечного перерізу i_{min}, який у свою чергу від осьового моменту інерції та площі поперечного перерізу, тобто від розмірів та форми поперечного перерізу, які поки що невизначені. Тому розв'язування проводять методом послідовних наближень з перевіркою проміжних результатів за умовою стійкості. Наближення будують у такій послідовності:

- першим наближенням коефіцієнта φ вибирають φ_1 = 0,5–0,6 і обчислюють площу A_1 поперечного перерізу $A_1 = \dfrac{F}{\varphi_1 \sigma^{c}_{adm}}$;

➢ відповідно до визначеної площі A_1 розраховують розміри поперечного перерізу або вибирають номер профілю із таблиці сортаменту;

➢ визначають радіус інерції $i_{min} = \sqrt{I_{min} / A}$; та гнучкість стержня $\lambda = \mu l / i_{min}$. За гнучкістю по табл. 7.1 знаходять φ'_1;

➢ порівнюють коефіцієнти φ_1 та φ'_1. Якщо розбіжність невелика, перевіряють умову стійкості (7.36). Якщо ж значення φ_1 та φ'_1 істотно відрізняються, здійснюють друге наближення, для якого коефіцієнт φ_2 беруть як середнє арифметичне між попередніми значеннями $\varphi_2 = (\varphi_1 + \varphi'_1) / 2$. Після цього повторюють усі зазначені вище дії.

Приклад 1. Стояк ангару для зберігання сільськогосподарської техніки, виготовлений із сталі-3, має поперечний переріз у вигляді двотавра № 18 та висоту l = 2,5 м. Стояк стискується силою F = 250 кН (рис. 7.1,*b*). Умови закріплення стояка однакові у двох площинах, у верхньому краї – шаровий шарнір, нижній край – жорстке затиснення. Перевірити стояк на стійкість, якщо σ^c_{adm} = 160 МПа.

Розв'язування. Задача відноситься до перевірочного типу. Перевірка стояка на стійкість полягає у перевірці виконання умови стійкості (7.36)

$$\sigma_{max} = \frac{F}{\varphi A} \le \sigma^c_{adm}.$$

У таблиці сортаменту знаходимо, що площа поперечного перерізу двотавра № 18 A = 23,4 см^2, мінімальний радіус інерції $i_{min} = i_y$ = 1,88 см. Коефіцієнт зведеної довжини для заданих умов закріплення μ = 0,7. Визначаємо гнучкість стояка

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 250}{1,88} = 93,1.$$

За табл. 7.1 визначаємо, що для λ = 90 φ = 0,69, а для λ = 100 φ = 0,6. Провівши інтерполяцію, одержимо

$$\varphi' = 0,69 - \frac{0,69 - 0,6}{10} \cdot 3,1 = 0,66.$$

Тоді максимальне нормальне напруження становитиме

$$\sigma_{max} = \frac{F}{\varphi' A} = \frac{240 \cdot 10^3}{0,66 \cdot 23,4 \cdot 10^{-4}} = 155,4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 155,4 \text{ МПа}.$$

Як бачимо з викладеного, умова стійкості виконується, оскільки $\sigma_{max} \le \sigma^c_{adm}$.

Приклад 2. Стояк двотаврового поперечного перерізу має розміри, умови кріплення і допустиме нормальне напруження на стиск, які наведені в прикладі 1. Треба визначити допустиме навантаження на стояк.

Розв'язування. Виконавши усі розрахунки, як і при розв'язуванні прикладу 1, і визначивши, що $\varphi' = 0,66$, з умови стійкості (7.36) матимемо

$$F \le \varphi' \sigma^c_{adm} A = 0,66 \cdot 1600 \cdot 23,4 = 24710 \text{ кг} = 247,1 \text{ кН}.$$

Отже, навантаження F_1 на всю конструкцію, яка наведена на рис. 7.1,*b*, дорівнюватиме

$$F_1 = 2F = 494,2 \text{ кН}.$$

Приклад 3. У гідроциліндрі екскаватора з внутрішнім діаметром D = 8 см тиск масла становить p = 2 МПа. Підібрати діаметр d штока з умови стійкості, якщо матеріал штока сталь-5, а допустиме нормальне напруження на стиск σ^c_{adm} = 200 МПа. Довжина штока l = 1,2 м. Умови закріплення – рухомий шарнір на верхньому кінці і затиснення на нижньому (рис. 7.1,*a*).

Розв'язування. Виконаємо проектувальний розрахунок штока практичним методом послідовних наближень. Визначимо стискуючу шток силу

$$F = \rho \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 20 \cdot 10^6 \frac{3,14 \cdot \left(8 \cdot 10^{-2}\right)^2}{4} = 100,5 \text{ кН}.$$

Із правої частини умови стійкості стержня $\sigma_{max} = \dfrac{F}{\varphi A} \le \sigma^c_{adm}$ знаходимо площу поперечного перерізу

$$A = \frac{F}{\varphi \sigma^c_{adm}}.$$

Взявши для першого наближення $\varphi_1 = 0,6$, визначаємо площу поперечного перерізу штока

$$A_1 = \frac{100{,}5 \cdot 10^3}{0{,}6 \cdot 200 \cdot 10^6} = 8{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2 = 8{,}4\ \text{см}^2 .$$

Площа круга $A_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4}$, звідки $d_1 = \sqrt{\dfrac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 8{,}4}{3{,}14}} = 3{,}3$ см.

Визначаємо радіус інерції поперечного перерізу штока

$$i = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d_1^4 \cdot 4}{64 \pi d_1^2}} = \frac{d_1}{4} = \frac{3{,}3}{4} = 0{,}83\ \text{см}.$$

Для наведеного в умові задачі закріплення коефіцієнт зведеної довжини $\mu = 0{,}7$. Тоді гнучкість штока буде $\lambda_1 = \dfrac{\mu l}{i_{min}} = \dfrac{0{,}7 \cdot 120}{0{,}83} = 101{,}2$. Із табл. 7.1 маємо для сталі-5 при $\lambda = 100$ $\varphi = 0{,}51$; при $\lambda = 110$ $\varphi = 0{,}43$.

Визначаємо φ'_1 при $\lambda = 101{,}2$ шляхом лінійної інтерполяції

$$\varphi'_1 = 0{,}51 - \frac{0{,}51 - 0{,}43}{10} \cdot 1{,}2 = 0{,}50 .$$

Розбіжність між вибраним φ_1 та обчисленим φ'_1 значна, а тому потрібно зробити друге наближення. За друге наближення φ_2 візьмемо середнє арифметичне

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0{,}6 + 0{,}5}{2} = 0{,}55 .$$

Площа поперечного перерізу штока A_2 у другому наближенні дорівнюватиме

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 \sigma^c_{adm}} = \frac{100{,}5 \cdot 10^3}{0{,}55 \cdot 200 \cdot 10^6} = 9{,}14 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2 = 9{,}14\ \text{см}^2 .$$

Визначаємо діаметр штока у другому наближенні

$$d_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9{,}14}{3{,}14}} = 3{,}4\ \text{см}.$$

Радіус інерції $i_{min} = d_2 / 4 = 3{,}4 / 4 = 0{,}85$ см. Гнучкість штока у другому наближенні дорівнюватиме

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{0{,}7 \cdot 120}{0{,}85} = 98{,}8 .$$

У табл. 7.1 знаходимо: при $\lambda = 100$ $\varphi = 0{,}51$; при $\lambda = 90$ $\varphi = 0{,}62$.

Отже, $$\varphi_2' = 0,62 - \frac{0,62 - 0,51}{10} \cdot 8,8 = 0,52.$$

Коефіцієнти φ_2 і φ_2' відрізняються мало. Перевіряємо у другому наближенні виконання умови стійкості

$$\sigma_{max} = \frac{F}{\varphi_2' A_2} = \frac{100,5 \cdot 10^3}{0,52 \cdot 9,14 \cdot 10^{-4}} = 211,5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 211,5 \text{ МПа}.$$

Перенапруження становить

$$\frac{211,5 - 200}{200} \cdot 100\,\% = 5,75\%,$$

що перевищує допустиме значення 5 %. Необхідно виконати третє наближення, для якого

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,55 + 0,52}{2} = 0,535.$$

Визначаємо площу перерізу у третьому наближенні

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 \sigma_{adm}^c} = \frac{100,5 \cdot 10^3}{0,535 \cdot 200 \cdot 10^6} = 9,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 9,4 \text{ см}^2,$$

звідки діаметр штока $d_3 = \sqrt{4 \cdot 9,4/3,14} = 3,46$ см. Радіус інерції $i_{min} = d_3 / 4 =$ $= 3,46 / 4 = 0,865$ см. Тоді гнучкість штока $\lambda_4 = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 120}{0,865} = 97,1.$

Визначаємо коефіцієнт φ'_3: при $\lambda = 100$ $\varphi = 0,51$; при $\lambda = 90$ $\varphi = 0,62$.

Отже, $$\varphi_3' = 0,62 - \frac{0,62 - 0,51}{10} \cdot 7,1 = 0,54.$$

Перевіряємо умову стійкості у третьому наближенні при $\varphi'_3 = 0,54$

$$\sigma_{max} = \frac{F}{\varphi_3' A_3} = \frac{100,5 \cdot 10^3}{0,54 \cdot 9,4 \cdot 10^{-4}} = 198 \text{ МПа} < \sigma_{adm}^c.$$

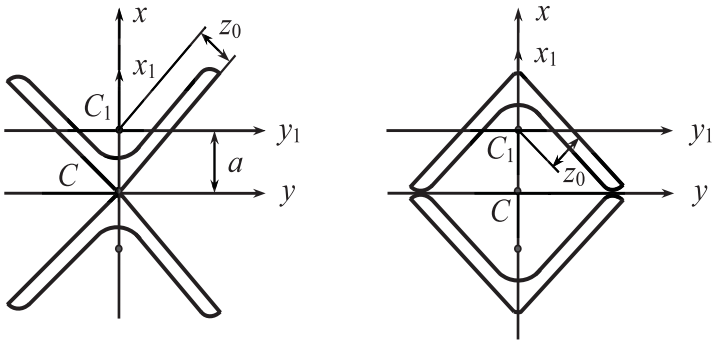
Умова стійкості виконується. Розрахункове значення діаметра штока $d = d_3 = 3,46$ см. Остаточно приймаємо $d = 3,5$ см.

Приклад 4. Поперечний переріз стержнів кронштейна навантажувача (рис. 7.1,*с*) складається з двох рівнобічних кутників 100×100×10 мм, як наведено на рис. 7.7,*а*. Матеріал стержнів кронштейна сталь-3, допустиме напруження для

стержнів $\sigma^c_{adm} = 160$ МПа. Довжина розкосу $l = 2$ м. Закріплення розкосу шарнірне на обох кінцях і однакове в двох площинах zx та yz. Визначити допустиме значення стискуючої сили розкосу F_{adm}.

Розв'язування. У таблиці сортаментів для рівнобічного кутника № 10 знаходимо: площа поперечного перерізу $A^{\llcorner} = 19{,}2$ см^2, момент інерції відносно власної центральної осі y_1 $I_{y1} = 74{,}1$ см^4, момент інерції відносно осі x_1 $I_{x1} = 284$ см^4, відстань від центра ваги C_1 до сторін кутника $z_0 = 2{,}83$ см, відстань між осями y_1 та y $a = z_0\sqrt{2} = 2{,}83\sqrt{2}$ см. Із умови стійкості (7.36) допустиме навантаження

$$F_{adm} = \varphi\sigma^c_{adm}A = \varphi\sigma^c_{adm}\cdot 2A^{\llcorner}.$$



a *b*

Рис. 7.7

Для знаходження коефіцієнта φ треба обчислити максимальну гнучкість $\lambda = \mu l / i_{min}$, де з умови кріплення $\mu = 1$, довжина $l = 2$ м, а i_{min} – радіус інерції, значення якого необхідно попередньо обчислити. Для цього знайдемо моменти інерції складної фігури відносно головних центральних осей всього перерізу y та x.

$$I_y = 2\left(I_{y_1} + A^{\llcorner}a^2\right) = 2\left[74{,}1 + 19{,}2\cdot\left(2{,}83\sqrt{2}\right)^2\right] = 762{,}6\,\text{см}^4;$$

$$I_x = 2I_{x_1} = 2\cdot 284 = 568\,\text{см}^4.$$

Отже, мінімальний радіус інерції

$$i_{min} = i_x = \sqrt{\frac{I_x}{2A^{\llcorner}}} = \sqrt{\frac{568}{2\cdot 19{,}2}} = 3{,}85 \text{ см}.$$

Тоді максимальна гнучкість розкосу дорівнюватиме

$$\lambda_{max} = \frac{1 \cdot 200}{3{,}85} = 52 .$$

За табл. 7.1 знаходимо: якщо $\lambda = 50$, то $\varphi = 0{,}89$, а якщо $\lambda = 60$, то $\varphi = 0{,}86$. Отже, для $\lambda = 52$ шляхом інтерполяції маємо

$$\varphi = 0{,}89 - \frac{0{,}89 - 0{,}86}{10} \cdot 2 = 0{,}884 .$$

Допустиме навантаження для розкосу кронштейна

$$F_{adm} = 0{,}884 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 19{,}2 \cdot 10^{-4} = 543 \cdot 10^3 \text{ Н} = 54{,}3 \text{ кН}.$$

Пропонуємо самостійно розв'язати цю ж задачу при розташуванні кутників, наведених на рис. 7.7,*b*.

7.7. Поздовжнє згинання стиснутого стержня при наявності ексцентриситету

На практиці поздовжня стискуюча сила часто може бути прикладена з деяким ексцентриситетом (рис. 7.8). У цьому разі стержень згинається навіть за невеликого значення зовнішньої сили *F*. Наближене диференціальне рівняння зігнутої осі матиме вигляд

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{F(y+e)}{E I_{min}}, \tag{7.38}$$

де e – ексцентриситет прикладення стискуючої сили.

Позначивши через $k^2 = \frac{F}{E I_{min}}$, перепишемо диференціальне рівняння (7.38) так:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 y = -k^2 e . \tag{7.39}$$

Розв'язок рівняння (7.39) складаємо із загального розв'язку однорідного рівняння y_1 та частинного розв'язку неоднорідного рівняння y_2

$$y(z) = y_1(z) + y_2(z) = A \sin kz + B \cos kz - e . \tag{7.40}$$

Для визначення сталих інтегрування функцію (7.40) задовільняємо таким граничним умовам:

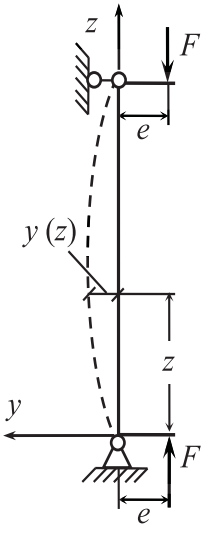


Рис. 7.8

$$\text{при } z = 0 \quad y = 0; \tag{7.41}$$

$$\text{при } z = l \quad y = 0. \tag{7.42}$$

Із граничних умов (7.41), (7.42) з урахуванням виразу (7.40) отримаємо рівняння

$$B - e = 0;$$

$$A\sin kl + B\cos kl - e = 0,$$

звідки визначаємо сталі інтегрування

$$B = e;$$

$$A = -\frac{e\left(coskl - 1\right)}{\sin kl}.$$

Остаточно матимемо розв'язок у вигляді

$$y\left(z\right) = -\frac{e\left(\cos kl - 1\right)}{\sin kl}\sin kz + e\left(\cos kz - 1\right).$$

Найбільший прогин, цілком імовірно, матиме поперечний переріз посередині довжини стержня $(z = l / 2)$:

$$y_{max} = \frac{1 - \cos\dfrac{kl}{2}}{\cos\dfrac{kl}{2}} \cdot e,$$

або, маючи на увазі, що $k = \sqrt{F / EI_{min}}$, визначимо

$$y_{max} = \frac{1 - \cos\dfrac{\pi}{2\sqrt{F/F_{cr}}}}{\cos\dfrac{\pi}{2\sqrt{F/F_{cr}}}} \cdot e, \tag{7.43}$$

де $F_{cr} = \dfrac{\pi^2 E I_{min}}{l^2}$ – сила Ейлера. Із формули (7.43) маємо, що прогин збільшується необмежено, якщо значення стискуючої сили F наближається до критичного значення Ейлерової сили F_{cr}. Максимальний згинальний момент, що виникає у поперечному перерізі посередині довжини стержня, дорівнюватиме

$$M_{max} = F\left(e + y_{max}\right) = \frac{F\,e}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{F/F_{cr}}}\right)}.$$

Отже, максимальне нормальне напруження в поперечних перерізах за позацентрового стиску стержня становитиме

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{max}}{W_{min}} = \frac{F}{A} + \frac{F\,e}{W_{min}} \cdot \frac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{F/F_{cr}}}\right)}.$$

Як бачимо з отриманого виразу, в разі необмеженого зростання прогину нормальне напруження теж необмежено зростає.

ЧАСТИНА ІІІ. ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

ГЛАВА 1. ВСТУП. ПРЕДМЕТ ТММ

Теорія механізмів і машин (ТММ) – наука про загальні методи дослідження властивостей механізмів і машин та проектування їх схем.

ТММ розглядає методи структурного, кінематичного і динамічного аналізу механізмів, це дозволяє визначити структуру механізмів, закон руху веденої ланки за заданим законом ведучої ланки або за заданими зовнішніми силами, методи синтезу окремих механізмів, а також інші питання, що виникають у конструктора під час створення і дослідження нових машин.

Технічний прогрес у машинобудуванні, створення нових більш удосконалених типів машин стали можливими завдяки використанню досягнень науки. ТММ вирішує головні задачі проектування – вибір раціональних схем і доцільних законів руху ланок машин, визначення кінематичних характеристик і динамічних параметрів, які забезпечують роботу механізмів і машин в умовах заданого технологічного процесу.

Таким чином, ТММ є теоретичною базою для розвитку машинобудування, надає можливість виконати початковий найважливіший етап проектування механізмів і машин, на підставі якого в подальшому розв'язуються задачі розрахунку на міцність і конкретного конструювання усіх ланок і деталей механізмів.

Отже, предметом ТММ є структурне, кінематичне, динамічне дослідження механізмів і проектування нових механізмів і машин.

1.1. Зміст курсу і методи теорії механізмів і машин

Теорія механізмів і машин вирішує дві основні задачі: дослідження (аналіз) існуючих механізмів і проектування (синтез) нових механізмів за конкретних умов роботи.

Аналіз механізмів включає послідовне вивчення структури, кінематики, кінетостатики і динаміки.

У структурному аналізі досліджуються питання, пов'язані з будовою механізмів: класифікація структурних груп і кінематичних ланцюгів, визначення ступеня вільності (рухомості) механізму, знаходження надлишкових в'язей, принципи утворення механізмів та інші питання.

Кінематика механізмів досліджує основні закони руху механізмів, які не пов'язані з дією сил: графоаналітичними або аналітичними методами з побудовою планів (схем) механізмів і траєкторій окремих точок їх ланок, визначення швидкостей і прискорень точок, кутових швидкостей і прискорень ланок; методом кінематичних діаграм; методом синтезу механізмів при заданих геометричних і кінематичних умовах.

Кінетостатика розглядає методи дослідження динаміки механізмів за допомогою аналітичних або графічних методів статики на основі принципу Даламбера (Павловський, 2004): визначення зусиль (реакцій) у кінематичних парах (шарнірах, рухомих з'єднаннях), знаходження сил та моментів сил інерції ланок, урахування тертя в кінематичних парах механізму, визначення коефіцієнта корисної дії та інше.

Динаміка механізмів і машин вивчає закони руху під дією прикладених сил, вирішує питання регулювання руху, зрівноважування обертових мас, віброзахисту і стійкості машин на фундаменті.

Динаміка машин розглядає методи визначення закону руху під дією рушійних сил і сил опору. Сили задаються залежно від тих фізичних та технологічних процесів, що відбуваються в машинах. Наприклад, у двигуні внутрішнього згоряння, що надає обертального руху приводу генератора електричного струму, рушійною є сила, яка обумовлена тиском газів, що розширюються, на поршень, а силою опору – опір обертанню ротора генератора.

На відміну від спеціалізованих інженерних дисциплін, які вивчають конкретні види машин різних галузей, ТММ розглядає в першу чергу загальні

питання дослідження і проектування механізмів незалежно від галузі застосування, розкриває основні закономірності їх будови, кінематики та динаміки.

1.2. Загальні поняття теорії механізмів і машин

Машиною називається механічний пристрій, який, здійснюючи механічний рух, перетворює енергію, матеріали чи інформацію з метою заміни або полегшення фізичної чи розумової праці людини.

Якщо машина працює без втручання людини, то це *машина-автомат*.

Машини поділяють на енергетичні, технологічні, транспортні, інформаційні, кібернетичні.

Енергетичні машини призначені для перетворення будь-якого виду енергії в механічну чи навпаки. У першому випадку – це двигуни, у другому – генератори.

Технологічні машини забезпечують здійснення певних технологічних операцій (процесів) та призначені для зміни властивості, стану, розмірів, форми оброблюваного матеріалу або об'єкта.

Транспортні машини призначені для зміни положення оброблюваного матеріалу, об'єктів (предметів) або людей. Часто транспортні і технологічні машини називають *робочими машинами.*

Двигун і робоча машина, з'єднані для виконання корисної роботи, називаються *машинним агрегатом*. Прикладами агрегатів є електрогенератор, насосна установка тощо.

Як правило, машину утворює сукупність взаємопов'язаних функціональних механізмів, яка використовує енергію для виконання покладених на неї функцій.

Механізмом називається система твердих тіл, яка призначена для перетворення руху одного чи кількох тіл у потрібні рухи інших тіл.

ГЛАВА 2. СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

Дослідження і проектування механізмів починається з визначення їх структури (будови), тому що від вибору раціональної схеми механізму у значній мірі залежить роботоздатність і надійність машин. До того ж структура механізмів визначає і належний метод їх подальшого проектування і дослідження.

2.1. Кінематичні пари та їх класифікація

Як відомо, кожний механізм або машина складається з окремих деталей. Деталь – це частина механізму, яка виготовлена окремо, без складальних операцій.

Сукупність нерухомих деталей із жорстких твердих тіл утворює одну нерухому систему, ланку або стояк (станина, корпус, плита або рама машини).

Одна деталь або жорстке з'єднання групи деталей із твердих тіл, що утворює самостійну систему, яка рухається у складі механізму як єдине ціле, називається *рухомою ланкою*.

З'єднання двох стичних ланок, що забезпечує їх відносну рухомість, називається *кінематичною парою* (КП).

Поверхні, лінії або точки, якими одна ланка торкається іншої, утворюючи кінематичну пару, називають елементами кінематичних пар.

Найпростіший кривошипно-повзунний механізм (рис. 2.1) утворений трьома обертальними кінематичними парами (шарнірами в точках O, A, B) і однією поступальною парою (повзун–напрямна). По числу ланок – це чотириланковий механізм. Він належить до плоских механізмів, тому що поперечні осі його шарнірів паралельні, а подовжні осі ланок рухаються в одній площині.

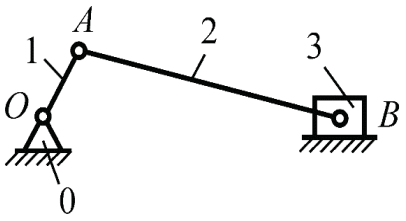


Рис. 2.1

Розглянемо принцип утворення і класифікацію кінематичних пар.

Як було зазначено, кінематичною парою називається рухоме з'єднання двох стичних ланок у механізмі, які перебувають у контакті.

Стикання ланок може бути геометричним – за рахунок їх геометричної форми або конструкції, чи силовим – за рахунок сили притискання, яка забезпечується пружиною, силою ваги тощо.

По характеру руху кінематичні пари ділять на поступальні і обертальні.

По характеру стикання ланок або залежно від форми елементів кінематичних пар вони діляться на *вищі і нижчі*. У нижчих кінематичних парах ланки стикаються поверхнями, а у вищих – по лінії або в точці.

Механізми з нижчими кінематичними парами називаються важільними.

Вільне абсолютно тверде тіло має у просторі шість можливих переміщень, або ступенів вільності: три поступальних рухомості вздовж координатних осей x, y, z і три елементарних повороти навколо цих самих осей (рис. 2.2).

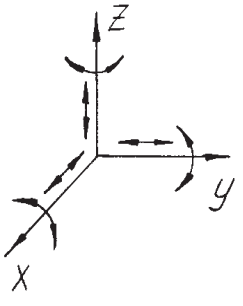


Рис. 2.2

У кінематичній парі кожна з ланок не може мати шість можливих переміщень, оскільки одна ланка накладає на іншу ланку обмеження руху (в'язі),

які залежать від способу їх з'єднання. Тому кількість ступенів вільності H однієї ланки відносно іншої становить

$$H = 6 - S,$$

де S – кількість обмежень руху або умов в'язі. Звідси

$$S = 6 - H.$$

Академік І.І. Артоболевський запропонував класифікувати кінематичні пари залежно від кількості накладених умов в'язей S. При цьому номер класу пари дорівнює кількості умов в'язей S, які накладаються парою на рух однієї ланки відносно іншої (на відносний рух). Номери класів пар позначають римськими цифрами.

Умовні позначення основних кінематичних пар показані на рис. 2.3.

У п'ятирухомій вищій КП І класу *куля–площина* (рис. 2.3,*а*) куля може мати елементарні повороти навколо кожної із трьох координатних осей, і може переміщуватися вздовж двох горизонтальних осей, тобто має 5 ступенів вільності ($H = 5$). Куля не може відірватися від площини, бо тоді ланки не будуть дотикатись (пара не існує), тобто кількість умов в'язі у цій парі $S = 1$. Тому, за визначенням, маємо п'ятирухому пару І класу. Стикання ланок відбувається в точці. Така пара називається вищою.

Для чотирирухомої вищої КП ІІ класу *куля–циліндр* (рис. 2.3,*б*) кількість ступенів вільності $H = 4$, а кількість умов в'язі $S = 2$. Оскільки стикання відбувається в точці або по лінії, то пара теж є вищою.

Чотирирухома вища КП ІІ класу *циліндр–площина* (рис. 2.3,*в*) має $H = 4,\ S = 2.$

У *площинній* трирухомій нижчій КП ІІІ класу (рис. 2.3,*г*) $H = 3,\ S = 3$. Стикання ланок відбувається по поверхні.

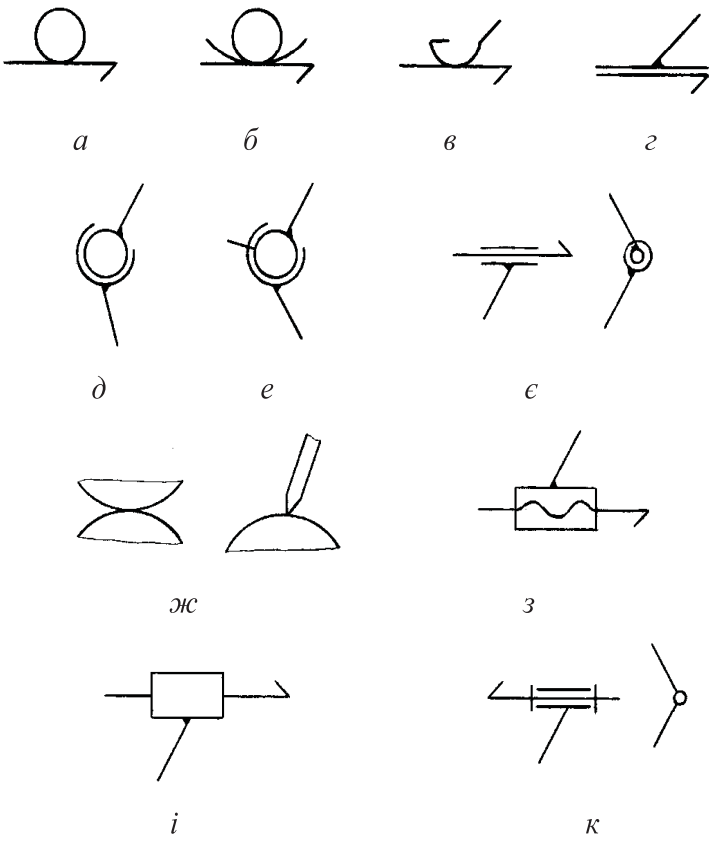


Рис. 2.3

Для *сферичної* трирухомої нижчої КП ІІІ класу (рис. 2.3, *д*) $H=3$, $S=3$.

Дворухома нижча КП ІV класу *сферична з пальцем* (рис. 2.3,*е*) являє собою кулю всередині ланки зі сферичною поверхнею. Куля може повертатися навколо осі пальця та разом з ним повертатися вздовж паза, прорізаного у сферичній поверхні охоплюючої ланки. Тоді $H=2$, $S=4$.

У *циліндричної* дворухомої нижчої КП ІV класу (рис. 2.3,*є*) внутрішня ланка є циліндром, а зовнішня – втулкою з циліндричним отвором. Циліндр може обертатися в отворі втулки та пересуватися вздовж неї, тобто $H=2$, $S=4$.

У двох *плоских* дворухомих вищих КП ІV класу (рис. 2.3,*ж*) одна ланка відносно іншої може ковзати та перекочуватися без ковзання або хитатися в одній площині. Просторові рухи ланок неможливі, бо тоді пари не були б плоскими. Для них $H=2$, $S=4$.

Для *гвинтової* однорухомої нижчої пари V класу (рис. 2.3,*з*) одна ланка може рухатися тільки вздовж гвинтової поверхні іншої. У цьому випадку $H=1,\ S=5.$

Внутрішня ланка *поступальної* однорухомої нижчої КП V класу (рис. 2.3,*і*) може пересуватись тільки вздовж напрямного отвору зовнішньої ланки. Обертання виключається конструктивно, наприклад шпонковим чи шліцьовим з'єднанням. Для цієї пари $H=1,\ S=5.$

Одна ланка *обертальної* однорухомої нижчої пари V класу (рис. 2.3,*к*) може тільки повертатись відносно осі іншої, тому для неї $H=1,\ S=5.$

2.2. Кінематичні ланцюги і з'єднання

Кінематична пара є найпростішою рухомою системою, що належить механізму. Для одержання потрібних, доцільних, рухів у машинах застосовують системи із більшої кількості ланок, так званих ланцюгів.

Зв'язана система ланок, з'єднаних між собою кінематичними парами, утворюють *кінематичний ланцюг*.

Будь-який механізм за своєю основою побудований із кінематичних ланцюгів шляхом послідовного з'єднання певної кількості кінематичних пар.

За способом з'єднання кінематичні ланцюги поділяють на прості і складні, на замкнені і незамкнені.

У *простих ланцюгах* кожна ланка з'єднується тільки двома кінематичними парами. *Складний ланцюг* – це той, в якому є хоча б одна ланка, що входить більше ніж у дві кінематичні пари.

У *замкнених ланцюгах* ланки утворюють один або кілька замкнених контурів (рис. 2.4,*а*). *Незамкнені ланцюги* (рис. 2.4,*б*) мають крайні ланки, що не містять елементів кінематичних пар, якими можна було б приєднатися до інших ланок.



а *б*

Рис. 2.4

За відносним рухом ланок кінематичні ланцюги також поділяються на просторові і плоскі. Точки ланок плоских кінематичних ланцюгів теоретично рухаються в паралельних площинах, що забезпечується паралельним розміщенням осей обертальних кінематичних пар. Просторовий рух відбувається в результаті непаралельності осей обертальних кінематичних пар.

Структурні особливості ланок і їх кількість у кінематичному ланцюгу визначають ступінь вільності останнього. Було зазначено, що вільне тіло, як і вільна ланка, має шість ступенів вільності. Тоді загальне число ступенів вільності ланцюга із k ланок до з'єднання має бути $H = 6k.$

Оскільки у складі кінематичного ланцюга можуть бути кінематичні пари усіх класів, які накладають при з'єднанні певну кількість в'язей відповідно до номера класу, то в загальному випадку число ступенів вільності кінематичного ланцюга визначається різницею між кількістю ступенів вільності ланок і кількістю в'язей, накладених всіма кінематичними парами.

$$H = 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 6k - \sum_{i=5}^{1}(6-i)p_i, \qquad (2.1)$$

де k – кількість вільних ланок кінематичного ланцюга;

$p_5, p_4, ... p_1$ – кількість КП п'ятого, четвертого,…, першого класів;

5, 4,…, 1 – кількість умов в'язі, накладених КП п'ятого, четвертого,…, першого класів.

Структурна формула кінематичного ланцюга (2.1) була одержана в 1887 р. професором П.І. Сомовим, а в 1923 р. уточнена професором А.П. Малишевим,

тому в науковій літературі називається формулою Сомова–Малишева (Кіницький, 2002).

Для плоских кінематичних ланцюгів ступінь вільності визначається за умови трьох можливих переміщень, які має кожна ланка у плоскому русі. Плоский кінематичний ланцюг можна уявити як просторовий, на який накладено три загальні в'язі, в результаті чого КП усіх класів втрачають по три ступені вільності. У плоских механізмів не буває пар I, II, III класів, бо ланки цих пар здійснюють просторові рухи:

$$H = (6-3)k - (5-3)p_5 - (4-3)p_4,$$

або

$$H = 3k - 2p_5 - p_4. \tag{2.2}$$

Структурна формула (2.2) для плоских кінематичних ланцюгів була одержана в 1869 р. академіком П.Л. Чебишовим і носить його ім'я.

Прості кінематичні ланцюги складають із КП V класу, і структурна формула для них має вигляд:

$$H = 3k - 2p_5. \tag{2.3}$$

2.3. Механізм як замкнений кінематичний ланцюг

У кінематичному ланцюгу всі ланки рухаються одна відносно одної. Якщо одну із ланок закріпити нерухомо, то рух кожної рухомої ланки відносно нерухомої буде абсолютним.

Отже, *замкнений кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою*, в якому за заданим рухом одної або декількох ланок всі інші здійснюють потрібні рухи, називається *механізмом*. Тобто, механізм – це кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою – стояком, або це кінематичний ланцюг, «поставлений на одну відносно нерухому ланку».

Ланки, закони руху яких задані, називаються ведучими, всі інші – *веденими*.

Ступінь вільності кінематичного ланцюга відносно його нерухомої ланки

(стояка), називають *ступенем рухомості механізму.* У цьому разі кількість рухомих ланок ланцюга зменшиться на одиницю, тобто кількість рухомих ланок ланцюга буде: $n = k - 1$, і згідно з виразами (2.1–2.3) ступінь рухомості механізму визначається за відповідними структурними формулами кінематичних ланцюгів:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 6n - \sum_{i=5}^{1}(6-i)p_i\,; \tag{2.4}$$

$$W = 3n - 2p_5 - p_4\,; \tag{2.5}$$

$$W = 3n - 2p_5\,. \tag{2.6}$$

Отже, число ступенів рухомості (ступінь рухомості) W просторового механізму відносно стояка визначається за формулою (2.4).

Визначимо за формулою (2.4) ступінь рухомості механізму маніпулятора (рис. 2.5), не враховуючи рух губок захвату ($n = 4$; $p_5 = 3$; $p_4 = 1$; $p_3 = p_2 = p_1 = 0$):

$$W = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 0 = 5.$$

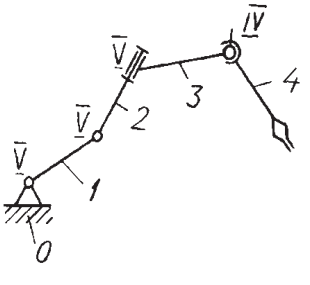


Рис. 2.5

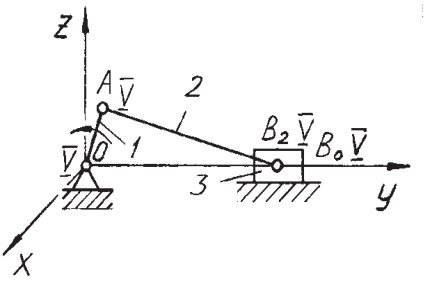


Рис. 2.6

Для плоских механізмів число ступенів рухомості ланок визначаємо за формулами (2.5; 2.6). Застосуємо ці формули для кривошипно-повзунного механізму, схема якого зображена на рис. 2.6.

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Згідно зі структурою механізму, ступінь рухомості означає кількість ланок, закони руху яких мають бути задані, тобто кількість ведучих ланок.

Згідно з кінематикою і динамікою механізму, ступінь рухомості означає кількість незалежних параметрів або узагальнених координат, які однозначно визначають положення всіх точок механізму.

Так, для кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.6) кількість ведучих ланок або узагальнених координат дорівнює одиниці. Достатньо задати, наприклад, кут повороту φ_1 кривошипа OA для визначення координат всіх інших точок ланок механізму.

Розрахунок свідчить про те, що для механізму маніпулятора (рис. 2.5) кількість ведучих або початкових ланок дорівнює 5.

2.4. Структурний аналіз і класифікація плоских механізмів

Дослідження і проектування нових механізмів потребує певної класифікації механізмів, яка, з одного боку, дозволяла б досліджувати окремі класи механізмів за належних їм ознаках, а з іншого боку, вказувала б шляхи утворення нових механізмів.

Структурний аналіз і класифікація механізмів необхідні для вибору методів їх розрахунку. Під час проведення структурного аналізу визначають:

1) кількість рухомих ланок механізму;
2) кількість і клас кінематичних пар;
3) ступінь рухомості механізму;
4) кількість і клас структурних груп, що утворюють механізм;
5) клас механізму в цілому, записують формулу будови механізму.

У кривошипно-повзунному механізмі (рис. 2.6) маємо три рухомі ланки $n = 3$: кривошип 1, шатун 2, повзун 3. Стояк позначений штриховкою і

цифрою 0. Ці ланки утворюють чотири пари V класу, при цьому пари *A* (0,1), *B* (1,2), *C* (2,3) обертальні, а пара *C* (3,0) – поступальна.

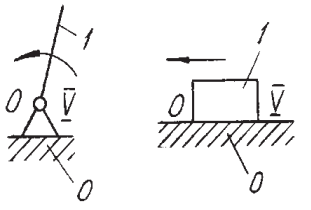
Початкову ланку 1 і стояк 0 (рис. 2.7), що утворюють пару V класу, називають *механізмом І класу*.

Загалом механізм І класу, або початковий механізм складається із кривошипа 1 (рис. 2.7,*а*) або повзуна 1 (рис. 2.7,*б*), стояка 0 та із однорухомої V класу обертальної або поступальної пари *O* між ними.

Кількість ступенів рухомості механізму І класу

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 0 = 1.$$

Далі будемо розглядати механізм І класу тільки з кривошипом.



а *б*

Рис. 2.7

Принцип утворення плоских механізмів було вперше сформульовано в 1914 році Л.В. Ассуром: *до механізму І класу приєднуються вільними елементами кінематичних пар структурні групи ланок з нульовим ступенем рухомості (групи Ассура).*

Структурною групою Ассура називається плоский кінематичний ланцюг:

1) який має нульовий ступінь рухомості, якщо його приєднати до стояка вільними елементами кінематичних пар;

2) він не ділиться на більш прості групи з нульовим ступенем рухомості.

Отже, ступінь рухомості групи Ассура:

$$W = 3n - 2p_1 = 0 \;\Rightarrow\; p_1 = 3n/2. \qquad (2.7)$$

Оскільки число рухомих ланок n і число однорухомих пар p_1 є цілими числами, то кількість рухомих ланок n має бути парним, тобто, до складу структурної групи входить тільки парне число ланок.

За останньою формулою n і p_1 приймають ряд послідовних значень:

n	2	4	6	8	...
p_1	3	6	9	12	...

Групи Ассура поділяються на класи. *Номер класу структурної групи* дорівнює найбільшому номеру класу контура, який входить до її складу. *Номер класу контура* дорівнює кількості кінематичних пар, які утворюють ланки контура. Контури різних класів показані на рис. 2.8, де поступальні пари V класу, якщо вони є, умовно замінені на обертальні.

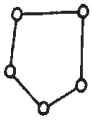
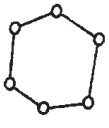
Клас	II	III	IV	V	VI	...
Умовне зображення						...

Рис. 2.8

Номери класів структурних груп і контурів позначаються римськими цифрами. *Порядок групи Ассура* дорівнює числу вільних елементів кінематичних пар, якими група приєднується до інших ланок.

Найпростішими є групи II класу, чи двоповодкові групи, *діади*. Вони складаються з двох ланок. *Поводок*, на відміну від ланки, має вільний елемент кінематичної пари. При з'єднанні його з вільним елементом іншої ланки утворюється кінематична пара.

Групи II класу поділяються на 5 видів (рис. 2.9). Для груп 2–5 видів показані частинні випадки. У групі 1 виду спільна кінематична пара і вільні елементи – обертальні. Інші види груп II класу можна одержати заміною окремих обертальних пар чи заміною їх вільних елементів – поступальними.

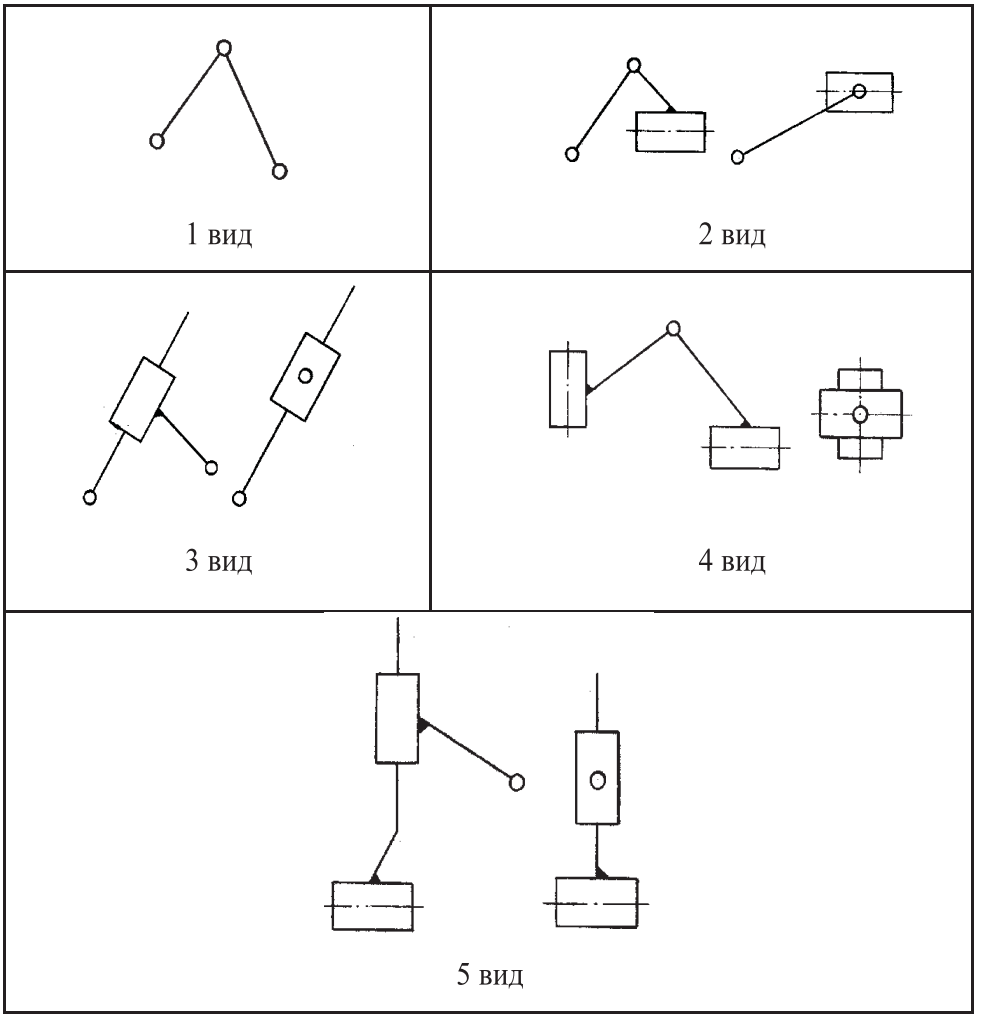


Рис. 2.9

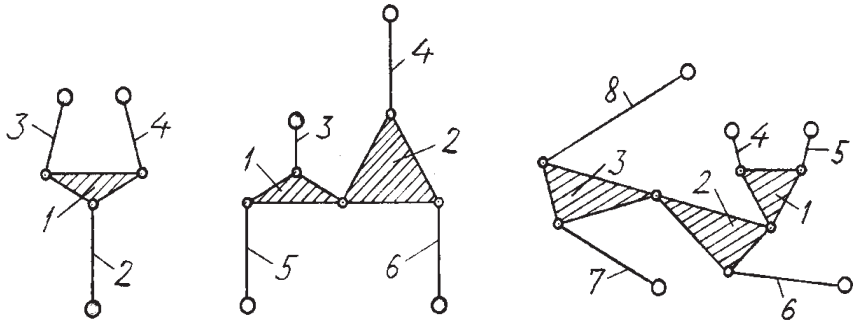
Ступінь рухомості кожної з цих груп дорівнює нулю:

$$W = 3n - 2p_1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Усі ці групи мають другий порядок, оскільки тут два вільних елементи кінематичних пар.

Наведемо приклади структурних груп більш високих класів. На схемах вільні елементи кінематичних пар умовно показані збільшеними. Групи ІІІ класу можуть бути 3-го (рис. 2.10,*а*), 4-го (рис. 2.10,*б*), 5-го (рис. 2.10,*в*) і більших порядків.

Легко перевірити, що число ступенів рухомості кожної з наведених груп Ассура $W = 0$. Структурні групи входять до складу механізмів.



а *б* *в*

Рис. 2.10

Розглянемо принцип утворення плоских механізмів. Для цього до механізму І класу приєднуємо групи Ассура вільними елементами кінематичних пар. Спочатку перша група приєднується одним вільним елементом до початкової ланки (найчастіше кривошипа), а іншими – до стояка.

Початковою називається ланка, положення якої є визначальним для знаходження положення інших ланок механізму. Наступні групи (2, 3 і т.д.) приєднуються послідовно до вже створеного механізму.

Наприклад, механізм на рис. 2.11 утворений послідовним приєднанням до механізму І класу, який складається з ланок 0, 1, спочатку групи ІІІ класу 3-го порядку, яка складається з ланок 2, 3, 4, 5, а тоді – групи ІІ класу 1 виду, яка складається з ланок 6, 7.

Слід зазначити, що приєднання групи Ассура з метою утворення нового механізму не змінює ступінь рухомості механічної системи.

Склад і послідовність приєднання груп Ассура виражаються формулою будови механізму. Для згаданого механізму (рис.2.11) її запишемо так:

І кл. (0,1) ← **ІІІ кл**. 3 пор. (2,3,4,5) ← ІІ кл. 1 в. (6,7).

Номер класу механізму дорівнює найбільшому номеру класу групи, яка входить до його складу. Згідно з визначенням, у прикладі (рис. 2.11) розглянуто механізм ІІІ класу.

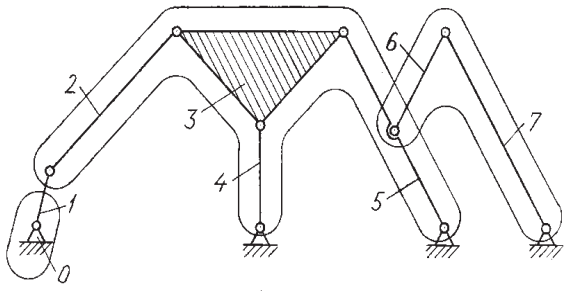


Рис. 2.11

У техніці найбільшого розповсюдження набули механізми ІІ класу.

ГЛАВА 3. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

При кінематичному аналізі механізмів рух ланок розглядають з чисто геометричної точки зору без урахування сил, які є причиною цього руху.

Для цього використовують *кінематичну схему механізму*, тобто умовне зображення механізму в масштабі.

Основними задачами кінематичного аналізу є визначення положень, переміщень, траєкторій, швидкостей та прискорень точок і кутових швидкостей та кутових прискорень ланок механізму.

Кінематичний аналіз механізмів проводять, починаючи з механізму І класу, в порядку приєднання груп Ассура, тобто, спочатку розглядають першу приєднану структурну групу, тоді другу і т.д.

3.1. Побудова планів положень механізмів

Розглянемо побудову планів положень на прикладі кривошипно-повзунного механізму (рис. 3.1).

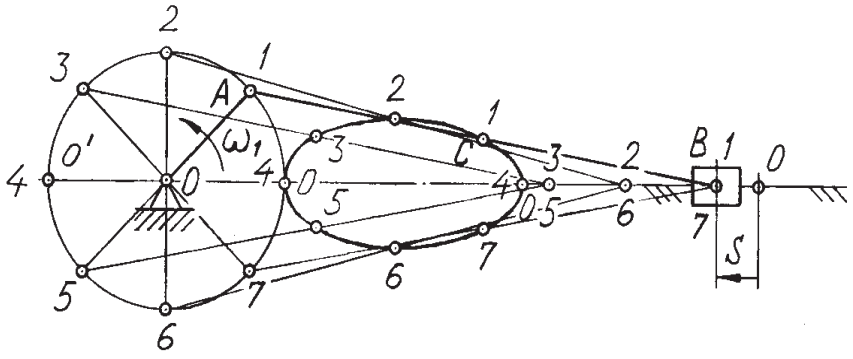


Рис. 3.1

Плани положень механізму будують у масштабі довжин з масштабним коефіцієнтом μ_l:

$$\mu_l = l_{OA}/OA, \text{ м/мм},$$

де l_{OA}, м, – довжина кривошипа; OA, мм, – довжина відрізка на кресленні.

Зображуємо траєкторію точки A кривошипа (рис. 3.1). Знаходимо крайні положення механізму. Для них кривошип і шатун знаходяться на одній лінії. Позначаємо їх O і O'. Із них початкове чи нульове положення O відповідає початку робочого ходу механізму. Траєкторію точки *A* ділимо на довільне число рівних частин, починаючи з нульового. Нумеруємо точки поділу 0, 1,…, 7 у напрямку обертання кривошипа.

Положення точки *B* знаходимо *методом засічок*. Від точки *A* радіусом *AB* робимо дугові засічки на траєкторії точки *B*. Нумеруємо відповідні точки перетину 0, 1, … , 7. Сполучаємо відповідні точки *A* з точками *B* і одержуємо плани положень ланок механізму.

Розглянемо кривошипно-коромисловий механізм (рис. 3.2).

Знайдемо крайні положення цього механізму. Для цього накреслимо траєкторії точок *A* кривошипа і *B* коромисла. Із точки *O* радіусами (*OA*+*AB*) і (*AB*-*OA*) робимо дугові засічки на траєкторії точки *B*. Через одержані точки перетину B_0 і B'_0 та точку O кривошипа проводимо прямі. Ці прямі

перетинають траєкторію точки A в точках A_0 і A_0'. Для даного напрямку обертання кривошипа точка A_0 відповідає початку робочого ходу механізму. Робочий хід відбувається на більшому куті повороту кривошипа. Побудова проміжних положень механізму проводиться аналогічно попередньому випадку.

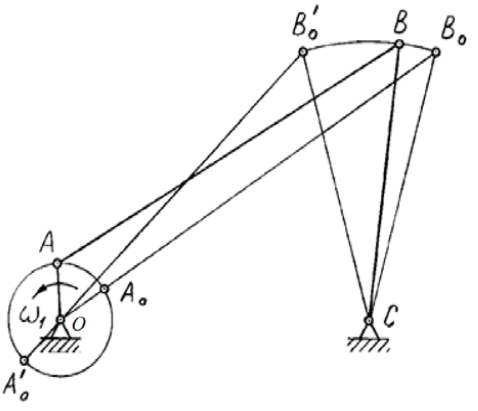


Рис. 3.2

3.2. Побудова траєкторій точок механізмів

Побудову траєкторій точок розглянемо на прикладі кривошипно-повзунного механізму. Нехай треба знайти траєкторію якої-небудь точки *C*, яка лежить на шатуні (рис. 3.1).

На відповідних положеннях шатуна робимо дугові засічки радіусом *AC*. Послідовно з'єднавши точки *C* в різних положеннях механізму плавною кривою, одержимо траєкторію точки *C*.

Траєкторії точок, які лежать на шатуні, називаються *шатунними кривими*. Шатунні криві широко використовують при проектуванні механізмів з відповідними рухами робочих органів (Кожевников, 1973).

3.3. Кінематичні діаграми. Побудова діаграми переміщень

Графіки переміщень, швидкостей і прискорень від часу називаються кінематичними діаграмами.

Розглянемо побудову діаграми лінійних переміщень повзуна кривошипно-повзунного механізму.

По осі абсцис (рис. 3.3) відкладаємо відрізок довжиною (l, мм), який відповідає куту (2π, рад) та часу (T, с) повного оберту кривошипа. Цей відрізок ділимо на таке саме число рівних частин, як при побудові планів положень механізму. Нумеруємо точки поділу 0, 1, … , 7, 0. Номер точки відповідає номеру положення механізму.

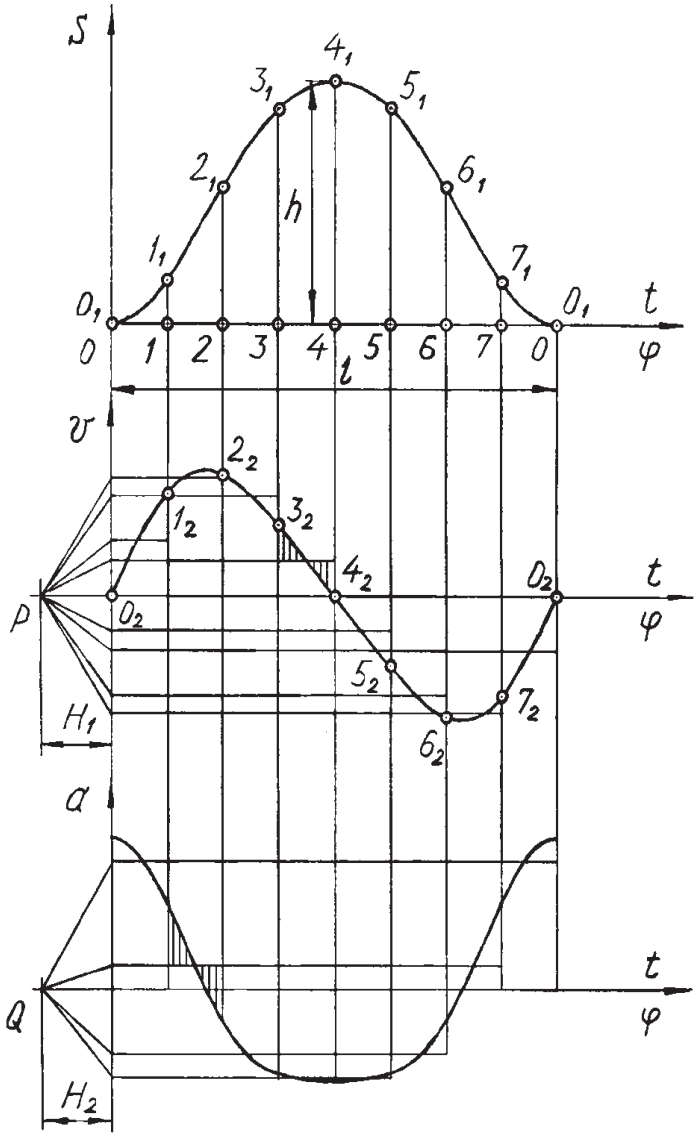


Рис. 3.3

Час повного оберту кривошипа (період кінематичної діаграми) становить

$$T = 2\pi/\omega_1, \, c,$$

де $\omega_1, \, c^{-1}$ – кутова швидкість кривошипа.

Масштабний коефіцієнт часу $\mu_t = T/l$, *с/мм*.

Масштабний коефіцієнт кута повороту кривошипа $\mu_\varphi = 2\pi/l$, *рад/мм*.

По осі ординат (рис. 3.3) відкладаємо переміщення повзуна *S* (рис. 3.1) від його початкового положення в масштабі:

$$\mu_s = 2l_{OA}/h, \, м/мм,$$

де $l_{OA}, \, м,$ – довжина кривошипа; $h, \, мм,$ – хід повзуна на діаграмі.

Одержані точки 0_1, 1_1, 2_1,…сполучаємо плавною кривою, яка називається *діаграмою переміщень* повзуна $s(\varphi)$ або $s(t)$.

Аналогічно будуємо діаграми лінійних переміщень точок і кутових переміщень ланок інших механізмів.

3.4. Діаграми швидкостей і прискорень

Діаграми швидкостей і прискорень можуть бути одержані аналітично чи за допомогою планів.

Розглянемо побудову *діаграми швидкостей* методом графічного диференціювання. Спочатку вибираємо полюсну відстань H_1, мм (рис. 3.3). Із полюса *P* проводимо лінію, паралельну хорді $0_1 1_1$ до перетину з віссю ординат. Із одержаної точки перетину проводимо горизонталь до ділянки 01. Із полюса *P* проводимо лінію, паралельну хорді $1_1 2_1$ до перетину з віссю ординат. Із точки перетину проводимо горизонталь до ділянки 12 і т.д. Ці горизонталі на ділянках 01, 12, 23, … ділимо пополам. Точки поділу сполучаємо плавною тонкою лінією, а тоді цю лінію проводимо трохи вище чи нижче, щоб площі криволінійних трикутників (на рис. 3.3 заштриховані) над і під горизонталями на ділянках 01, 12, 23,… були рівні.

Діаграма прискорень (рис. 3.3) будується аналогічно. Відмінність у тому, що з полюса Q проводяться лінії, паралельні хордам $0_2 1_2$, $1_2 2_2$, … .

Масштабні коефіцієнти діаграм швидкостей і прискорень:

$$\mu_\upsilon = \frac{\mu_s}{\mu_t H_1}, \quad м \cdot с^{-1}/мм;$$

$$\mu_a = \frac{\mu_\upsilon}{\mu_t H_2}, \quad м \cdot с^{-2}/мм,$$

де H_2, *мм*, – полюсна відстань діаграми прискорень.

3.5. Визначення швидкостей і прискорень механізму І класу

Кінематичну схему механізму, включаючи механізм І класу (рис. 3.4,*а*), будуємо в масштабі довжин:

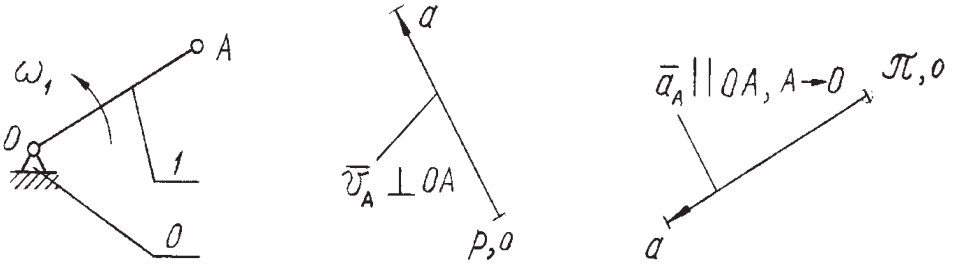
$$\mu_l = l_{OA}/OA, м/мм, \tag{3.1}$$

де l_{OA}, *м*, – довжина кривошипа; OA, *мм*, – довжина відповідного відрізка на кресленні.

Кутова швидкість ω_1 кривошипа може бути визначена за формулою:

$$\omega_1 = \pi n_1 / 30, \text{ с}^{-1},$$

де n_1, *хв*$^{-1}$ – частота обертання кривошипа.



а *б* *в*

Рис. 3.4

Розглянемо побудову *плану швидкостей*.

Швидкість точки *A* кривошипа визначаємо:

$$\upsilon_A = \omega_1 l_{OA}, м \cdot с^{-1}.$$

Масштабний коефіцієнт швидкостей механізму:

$$\mu_\upsilon = \upsilon_A / pa, м \cdot с^{-1}/мм. \quad (3.2)$$

Довжину відрізка (*pa*, мм), вибираємо так, щоб розміри плану всього механізму були в прийнятних межах і масштабний коефіцієнт μ_υ мав по можливості одну значущу цифру. На площині вибираємо точку – полюс *p* (рис. 3.4,*б*). Від полюса *p* відкладаємо перпендикулярно *OA* в бік обертання відрізок *pa,* який зображує в масштабі μ_υ швидкість точки *A* кривошипа. Швидкість точки *O* дорівнює нулю, тому відповідна точка *o* на плані співпадає з полюсом *p*.

Розглянемо побудову *плану прискорень*.

При рівномірному обертанні ($\omega_1 = const$) прискорення точки *A* кривошипа дорівнює її нормальному прискоренню:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{OA}, \ м \cdot с^{-2}.$$

Масштабний коефіцієнт прискорень механізму

$$\mu_a = a_A / \pi a, \ м \cdot с^{-2}/мм, \quad (3.3)$$

де πa, мм, – відрізок на плані, який зображує прискорення точки *A* кривошипа. Його довжину πa вибираємо за таким самим принципом, як довжину відрізка *pa* на плані швидкостей.

На площині вибираємо полюс π. Від полюса π відкладаємо паралельно *OA*, у напрямку від *A* до *O* відрізок $\overline{\pi a}$ (рис. 3.4,*в*). Оскільки прискорення точки *O* дорівнює нулю, то відповідна точка *o* співпадає з полюсом π.

Переходимо до побудови планів швидкостей і прискорень для груп Ассура ІІ класу.

3.6. План швидкостей групи ІІ класу 1 виду

Розглянемо двоповодкову групу 1 виду (рис. 3.5,*а*). Нехай з попередніх планів механізму І класу чи структурних груп відомі швидкість $\bar{\upsilon}_A$, прискорення $\bar{a}_A$ точки *A* та відрізки на планах, які їх зображують.

Швидкість точки *B* визначаємо відповідно до векторного рівняння:

$$\underset{\perp BC}{\bar{\upsilon}_B} = \bar{\upsilon}_A + \underset{\perp AB}{\bar{\upsilon}_{BA}}, \tag{3.4}$$

де $\bar{\upsilon}_{BA}$ – швидкість точки *B* в обертальному русі ланки відносно точки *A*, $\bar{\upsilon}_{BA}$ перпендикулярна до *AB*.

Оскільки точка *B* лежить на коромислі 3, то швидкість $\bar{\upsilon}_B$ перпендикулярна *BC*.

Швидкість $\bar{\upsilon}_A$ зображується на плані відрізком $\overline{pa}$, а $\bar{\upsilon}_{BA}$ відрізком $\overline{ab}$, так що останнє рівняння у відрізках плану запишемо

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab}.$$

Проводимо перпендикуляри: з точки *A* – до *AB*, а з полюса *p* – до *BC* (рис. 3.5,*б*). На їх перетині знаходиться точка *b*.

Швидкості: $\upsilon_B = pb \cdot \mu_\upsilon$; $\upsilon_{BA} = ab \cdot \mu_\upsilon$.

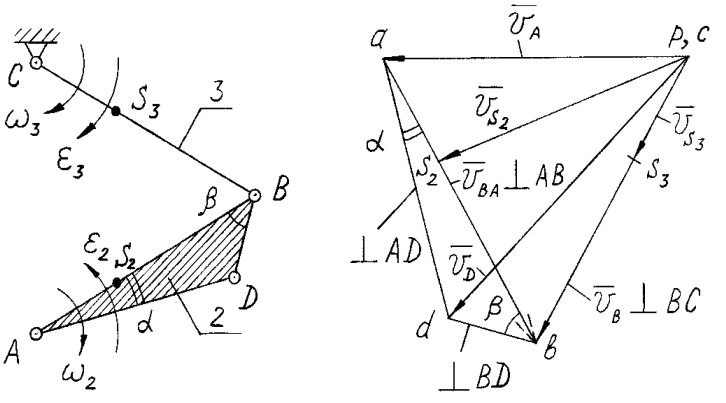
Швидкість точки *C* дорівнює нулю, тому відповідна точка *c* співпадає з полюсом *p*.

Кутові швидкості шатуна 2 і коромисла 3:

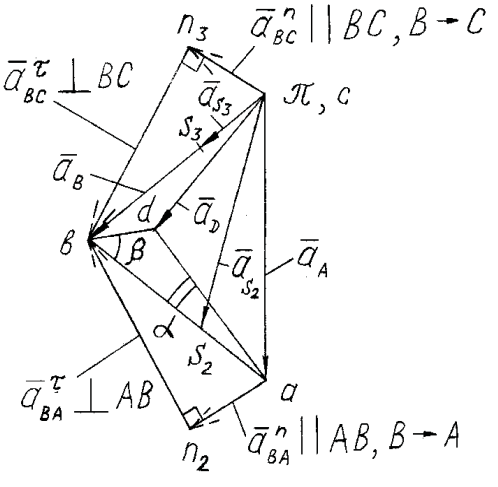
$$\omega_2 = \upsilon_{BA} / l_{AB}; \quad \omega_3 = \upsilon_B / l_{BC}, \ c^{-1},$$

де l_{AB}, l_{BC}, *м* – відстані між відповідними точками.

Визначимо напрямки знайдених кутових швидкостей. Точка *B* разом з ланкою 2 рухається навколо нерухомої у відносному русі точки *A* в напрямку швидкості $\bar{\upsilon}_{BA}$. Тоді для даного положення групи шатун 2 обертається за стрілкою годинника з кутовою швидкістю ω_2 (рис. 3.5,*а*).



а *б*



в

Рис. 3.5

Точка B разом з ланкою 3 рухається навколо нерухомої точки C в напрямку швидкості $\bar{\upsilon}_B$. У цьому випадку коромисло 3 повертається за стрілкою годинника з кутовою швидкістю ω_3.

3.7. Теорема подібності для планів швидкостей

Теорема подібності для планів швидкостей: *план швидкостей ланки подібний їй і повернутий відносно неї на 90° у бік миттєвого обертання.*

Використаємо цю теорему для визначення швидкостей точки D і центра мас шатуна S_2 (рис. 3.5,*а*). Для цього проводимо перпендикуляри (рис. 3.5,*б*): з точки a – до AD, а з точки b – до BD. На їх перетині знаходиться точка d. Трикутник abd подібний трикутнику ABD, бо в них кути із взаємно-перпендикулярними сторонами, і відповідно розташований. Останнє означає, що при обході по контуру ланки і плану швидкостей у певному напрямку проти чи за стрілкою годинника зустрічаємо однойменні точки. На прямій ab відкладаємо відрізок

$$as_2 = ab \cdot AS_2 / AB, \text{ мм}.$$

Точки d і s_2 сполучаємо з полюсом p, і тоді швидкості точок D і S_2:

$$\upsilon_D = pd \cdot \mu_\upsilon; \quad \upsilon_{S_2} = ps_2 \cdot \mu_\upsilon.$$

Аналогічно визначаються швидкості інших точок ланок механізму.

3.8. Побудова плану прискорень двоповодкової групи 1 виду

Прискорення точки B визначається у відповідності з системою векторних рівнянь:

$$\begin{cases} \bar{a}_B = \bar{a}_A + \underbrace{\bar{a}^n_{BA}}_{\parallel AB,\ B\to A} + \underbrace{\bar{a}^\tau_{BA}}_{\perp AB}; \\ \bar{a}_B = \underbrace{\bar{a}^n_{BC}}_{\parallel BC,\ B\to C} + \underbrace{\bar{a}^\tau_{BC}}_{\perp BC}, \end{cases} \tag{3.5}$$

або

$$\begin{cases} \overline{\pi b} = \overline{\pi a} + \overline{an_2} + \overline{n_2 b}; \\ \overline{\pi b} = \overline{\pi n_3} + \overline{n_3 b}, \end{cases}$$

де $\bar{a}^n_{BA}, \bar{a}^\tau_{BA}$ та $\bar{a}^n_{BC}, \bar{a}^\tau_{BC}$ – нормальні і тангенціальні прискорення точки B відносно точок A та C відповідно; $\pi b, \pi a, an_2, n_2 b, \pi n_3, n_3 b$ – відрізки на плані, які зображають відповідні прискорення.

Нормальні прискорення

$$a^n_{BA} = \omega_2^2 l_{AB}; \quad a^n_{BC} = \omega_3^2 l_{BC}$$

зображуються на плані відрізками

$$an_2 = a^n_{BA} / \mu_a; \quad \pi n_3 = a^n_{BC} / \mu_a, \text{ мм}.$$

Від точки *a* відкладаємо в напрямку від *B* до *A* відрізок $\overline{an_2}$, а від полюса π в напрямку від *B* до *C* відрізок $\overline{\pi n_3}$ (рис. 3.5,*в*). Із точки n_2 проводимо лінію, перпендикулярну *AB*, а з точки n_3 – перпендикулярну *BC*. На їх перетині знаходимо точку *b*.

Дійсні значення прискорень розраховують:

$$a^\tau_{BA} = n_2 b \cdot \mu_a; \quad a^\tau_{BC} = n_3 b \cdot \mu_a; \quad a_B = \pi b \cdot \mu_a.$$

Оскільки прискорення точки *C* дорівнює нулю, то відповідна точка *c* знаходиться в полюсі π.

Кутові прискорення ланок 2 і 3 дорівнюють:

$$\varepsilon_2 = a^\tau_{BA} / l_{AB}, \quad \varepsilon_3 = a^\tau_{BC} / l_{BC}, \ c^{-2}.$$

Визначимо напрямки кутових прискорень. Точку *B* разом із шатуном 2 рухаємо уявно навколо нерухомої у відносному русі точки *A* в напрямку тангенціального прискорення $\bar{a}^\tau_{BA}$. Ланка 2 буде повертатися для цього положення проти стрілки годинника. Одержаний таким чином уявний напрямок обертання співпадає з напрямком ε_2.

Для визначення напрямку ε_3 точку *B* разом з коромислом 3 повертаємо уявно навколо нерухомої точки *C* у напрямку $\bar{a}^\tau_{BC}$. Тоді ланка 3 буде повертатись уявно за стрілкою годинника, що є напрямком ε_3 (рис. 3.5,*а*).

3.9. Теорема подібності для планів прискорень

Теорема подібності для планів прискорень: *план прискорень ланки подібний їй і повернутий відносно неї.*

Відрізки прямих ліній, що з'єднують точки однієї і тієї ж ланки на плані механізму і відрізки прямих ліній, що з'єднують кінці векторів цих точок на плані прискорень, утворюють подібні і подібно розташовані фігури.

Визначимо за цією теоремою прискорення точки *D* та центрів мас ланок S_2

і S_3 (рис. 3.5,*а*). На плані прискорень будуємо трикутник *abd*, подібний трикутнику *ABD* та, як і для плану швидкостей, відповідно розташований. Для цього кути α і β з кінематичної схеми відкладаємо на плані (рис. 3.5,*в*), так щоб при обході по контуру в одному напрямку ланки 2 та її плану прискорень зустріти однойменні точки.

На прямій *ab* відкладаємо відрізок

$$as_2 = ab \cdot AS_2 / AB, \ \ мм,$$

а на прямій πb – відрізок

$$\pi s_3 = bc \cdot CS_3 / BC, \ \ мм.$$

Прискорення точки *D* та центрів мас шатуна 2 і коромисла 3:

$$a_D = \pi d \cdot \mu_a; \quad a_{S_2} = \pi S_2 \cdot \mu_a; \quad a_{S_3} = \pi S_3 \cdot \mu_a.$$

Аналогічно визначаємо прискорення будь-яких інших точок ланок механізмів.

3.10. Плани швидкостей і прискорень груп ІІ класу 2 виду

Побудуємо плани швидкостей та прискорень для двоповодкової групи 2 виду (рис. 3.6,*а*), для якої відомі швидкість $\bar{\upsilon}_A$ та прискорення $\bar{a}_A$ точки *A*.

Векторне рівняння для визначення швидкості точки *B* та відповідне рівняння у відрізках плану мають вигляд:

$$\underset{\|xx}{\bar{\upsilon}_B} = \bar{\upsilon}_A + \underset{\perp AB}{\bar{\upsilon}_{BA}},$$

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab},$$

де $\bar{\upsilon}_{BA}$ – швидкість точки *B* в обертальному русі ланки відносно точки *A*, $\bar{\upsilon}_{BA}$ перпендикулярна *AB*. Точка *B* рухається вздовж напрямної *xx*, тому її швидкість та прискорення паралельні напрямній.

Із точки *a* проводимо перпендикуляр до *AB*, а з полюса *p* – лінію, паралельну *xx*. На перетині їх знаходиться точка *b* (рис. 3.6,*б*).

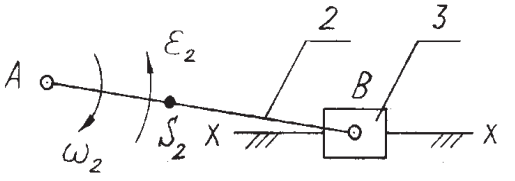
Швидкості: $\upsilon_B = pb \cdot \mu_\upsilon$; $\upsilon_{BA} = ab \cdot \mu_\upsilon$.

Кутова швидкість шатуна 2

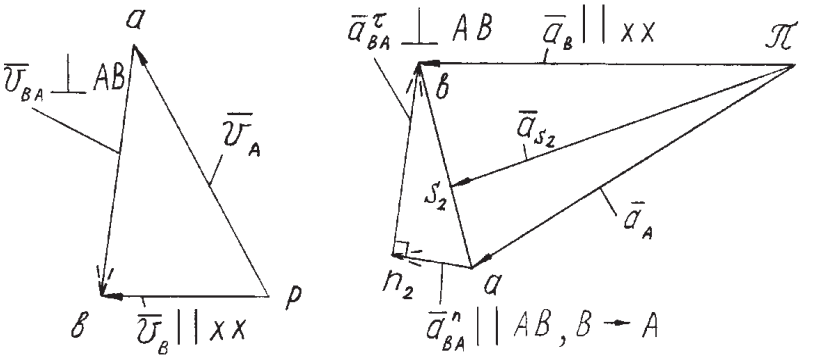
$$\omega_2 = \upsilon_{BA} / l_{AB}, c^{-1},$$

де l_{AB}, *м*, – довжина шатуна.

Точка *B* разом з ланкою 2 рухається навколо нерухомої у відносному русі точки *A* в напрямку швидкості $\bar{\upsilon}_{BA}$. Тоді для даного положення шатун 2 повертається за стрілкою годинника з кутовою швидкістю ω_2 (рис. 3.6,*а*).



а



б *в*

Рис. 3.6

Для визначення прискорення точки *B* складаємо векторне рівняння та відповідне рівняння у відрізках плану:

$$\underset{\|xx}{\bar{a}_B} = \bar{a}_A + \underset{\substack{\|AB,\\ B\to A}}{\bar{a}^n_{BA}} + \underset{\perp AB}{\bar{a}^\tau_{BA}},$$

$$\overline{\pi b} = \overline{\pi a} + \overline{a n_2} + \overline{n_2 b},$$

де $\bar{a}^n_{BA}, \bar{a}^\tau_{BA}$ – нормальне і тангенціальне прискорення точки *B* відносно *A*.

Нормальне прискорення $a^n_{BA} = \omega_2^2 l_{AB}$ зображується на плані відрізком

$$an_2 = a^n_{BA} / \mu_a, \ мм.$$

Від точки a відкладаємо паралельно AB в напрямку від B до A відрізок $\overline{an_2}$ (рис. 3.6,*в*). Із точки n_2 проводимо лінію, перпендикулярну AB, а з полюса π – паралельну xx. На перетині знаходиться точка b.

Прискорення:

$$a^\tau_{BA} = n_2 b \cdot \mu_a; \quad a_B = \pi b \cdot \mu_a.$$

Кутове прискорення шатуна 2

$$\varepsilon_2 = a^\tau_{BA} / l_{AB}.$$

Для визначення напрямку кутового прискорення точку B разом із шатуном 2 повертаємо уявно навколо нерухомої у відносному русі точки A в напрямку тангенціального прискорення $\bar{a}^\tau_{BA}$. Одержаний для даного положення групи уявний напрямок обертання проти стрілки годинника співпадає з напрямком ε_2 (рис. 3.6,*а*).

На прямій ab відкладаємо відрізок

$$as_2 = ab \cdot AS_2 / AB.$$

Прискорення центра мас S_2 шатуна 2

$$a_{S_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a.$$

ГЛАВА 4. ТЕРТЯ В МЕХАНІЗМАХ І МАШИНАХ

Реальні поверхні тіл є шорсткими з великою кількістю нерівностей і певною твердістю. У результаті при відносному переміщенні двох стичних тіл одного по одному на поверхні їх контакту виникає протидія цьому переміщенню. У такому випадку говорять про тертя.

Тертя належить до шкідливих явищ опору руху, на які частково витрачається енергія руху тіла, механізму або машини.

Тобто, ***тертя – це опір відносному переміщенню двох стичних тіл***.

Процес тертя на сьогодні теоретично вивчений недостатньо і тому, як правило, для визначення і врахування тертя користуються емпіричними залежностями, отриманими експериментально.

У цілому тертя являє собою складний комплекс фізичних явищ і процесів, із яких залежно від умов ті чи інші переважають. Розглянемо існуючи різновиди тертя.

Розрізняють сухе та рідинне тертя. Тертя називається *сухим,* якщо виступні поверхні тіл дотикаються між собою, і *рідинним*, якщо вони розділені проміжним шаром мастила, тобто. безпосередньо не дотикаються.

Існує також *напівсухе* та *напіврідинне* тертя. Для них виступні поверхні неповністю розділяються шаром мастила. Різниця між ними полягає головним чином у тому, який з основних видів тертя переважає.

Наприклад, у фрикційних, пасових та інших передачах спостерігається сухе тертя; у змащених підшипниках ковзання, підп’ятниках і т.д. – рідинне, яке іноді переходить у напівсухе чи навіть сухе (під час пуску машини).

По видам відносного руху стичних тіл розрізняють *тертя ковзання* і *тертя кочення* (опір перекочуванню).

4.1. Сухе тертя ковзання тіл

Тертя ковзання поділяють на тертя спокою і тертя руху.

Розглянемо тертя спокою. Нехай тіло знаходиться в спокої на горизонтальній площині (рис. 4.1). На ньому позначені: $\overline{Q}$ і $\overline{T}$ – активні сили, $\overline{N}$ – нормальна реакція площини; $\overline{F}$ – сила тертя, напрямлена паралельно площині в бік можливої відносної швидкості.

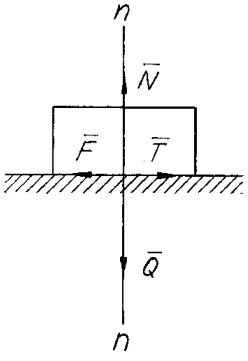


Рис. 4.1

Сила тертя, яка має місце при відносному спокої тіл, називається *силою тертя спокою* чи *силою статичного тертя*, а сам процес – тертям спокою або статичним.

Рівняння рівноваги тіла (впливом перекидного моменту нехтуємо):

$$Q = N; \qquad F = T.$$

Дослідами встановлено, що рівновага можлива, поки сила тертя спокою F не перевищує своє граничне значення F_c, тобто

$$F \le F_c = f_c N,$$

де $f_c = tg\varphi_c$ – *коефіцієнт тертя спокою*; φ_c – *кут тертя спокою*.

Якщо стичні тіла знаходяться у відносному русі, то має місце *тертя руху* або *кінетичне тертя*.

Сила тертя руху за формулою Амонтона–Кулона:

$$F = A + f_k N, \tag{4.1}$$

де f_k – коефіцієнт тертя ковзання; A – стала тертя, яка залежить не від тиску, а від здатності до попереднього зчеплення («чіпкості») стичних поверхонь. Графічне зображення співвідношення (4.1) показане лінією 1 на рис. 4.2,*а*.

У більшості технічних розрахунків «чіпкістю» нехтують, користуючись формулою

$$F = f N, \tag{4.2}$$

де коефіцієнт тертя руху f визначається з дослідів і приймається сталим та однаковим для руху і спокою. Останній формулі відповідає лінія 2 на рис. 4.2,*а*.

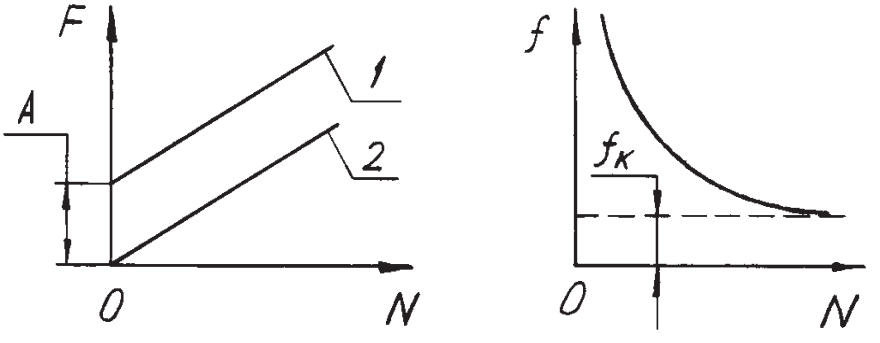
Якщо силу тертя F з (4.2) підставити в (4.1), то одержимо:

$$f N = A + f_k N,$$

звідки

$$f = f_k + A/N. \tag{4.3}$$

Одержуємо гіперболічну залежність коефіцієнта тертя від сили нормального тиску N (рис. 4.2,*б*).



а *б*

Рис. 4.2

Сучасні погляди на сухе тертя:

1. Коефіцієнт тертя f можна вважати сталим, а силу тертя F прямо пропорційну силі нормального тиску N, тільки в певному діапазоні швидкостей υ і навантажень N.

2. Сила тертя F завжди напрямлена в бік, протилежний відносній швидкості υ.
3. Граничне значення F_c сили тертя спокою в більшості випадків трохи більше сили тертя F руху.
4. Зі збільшенням швидкості руху υ сила тертя F у більшості випадків зменшується, наближаючись до деякого сталого значення.
5. Із зростанням питомого тиску p сила тертя F у більшості випадків збільшується.
6. Зі збільшенням часу t попереднього контакту стичних поверхонь сила тертя F зростає.

4.2. Тертя поступальної кінематичної пари

Нехай повзун навантажений рівнодійною $\overline{P}$ всіх активних сил (рис. 4.3). З боку напрямної на повзун діють нормальна реакція $\overline{N}$ і сила тертя $\overline{F}$. Перенесемо силу $\overline{P}$ вздовж її лінії дії в точку O і розкладемо на нормальну $\overline{P}^n$ і тангенціальну $\overline{P}^\tau$ складові.

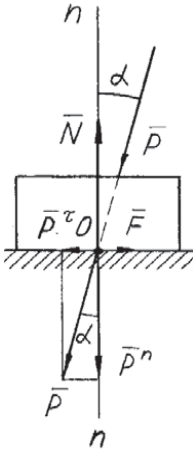


Рис. 4.3

Нехай повзун знаходиться в спокої. Повзун не зрушить з місця, якщо виконується така умова:

$$P^{\tau} \le F_c = Nf_c = P^n f_c = Pf_c \cos\alpha.$$

Оскільки $P^{\tau} = P\sin\alpha$, то маємо:

$$P\sin\alpha \le Pf_c \cos\alpha; \quad \operatorname{tg}\alpha \le f_c = \operatorname{tg}\varphi_c; \quad \alpha \le \varphi_c.$$

Якщо $P^{\tau} > F_c$, то повзун почне рухатись, і тоді аналогічно виводимо, що $\alpha > \varphi_c$.

Якщо надати силі $\overline{P}$ різні напрямки в просторі, то область рівноваги буде обмежена *конусом тертя спокою*, який утворюється обертанням кута тертя спокою φ_c навколо нормалі $n-n$ до стичних поверхонь (рис. 4.4). Будь-яка сила $\overline{P}$, що знаходиться всередині конуса, не зможе вивести його зі стану спокою.

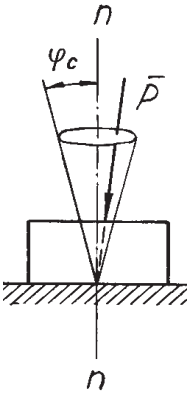


Рис. 4.4

Якщо повзун рухається, то сила тертя $F = f\,N$, де f – коефіцієнт тертя руху.

Знайдемо кут φ між повною реакцією $\overline{R}$ і її нормальною складовою $\overline{N}$ (рис. 4.5,*а*):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F}{N} = \frac{f\,N}{N} = f. \qquad (4.4)$$

Кут φ називається *кутом тертя руху.*

Надамо швидкості $\overline{v}$ різні напрямки вздовж напрямної площини. Тоді повні реакції $\overline{R}$ площини утворюють область, яка обмежується *твірними конуса тертя руху* (рис. 4.5,*б*). Цей конус утворюється обертанням кута тертя руху φ навколо нормалі $n-n$.

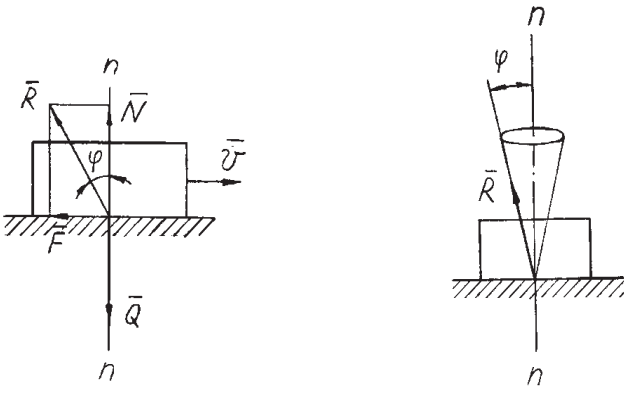


Рис. 4.5

Таким чином, для врахування сил тертя в поступальній парі треба відхилити реакцію $\bar{R}$ від напрямку нормалі $n-n$ на кут тертя руху φ у бік, протилежний напрямку швидкості $\bar{\upsilon}$ повзуна відносно напрямної. Якщо повзун знаходиться в спокої, то реакція $\bar{R}$ відхилена від нормалі $n-n$ на кут, менший кута тертя спокою φ_c.

4.3. Тертя клинчастого повзуна

Розглянемо тертя при русі клинчастого повзуна, що має вагу Q, центральний кут 2α при коефіцієнті тертя ковзання f (рис. 4.6).

Складаючи рівняння для суми проекцій сил на вертикальну вісь, одержимо:

$$(N_1 + N_2)\sin\alpha = Q;$$

$$2N_1 \sin\alpha = Q.$$

Сумарна сила тертя буде дорівнювати:

$$F = F_1 + F_2 = N_1 f + N_2 f = 2N_1 f = \frac{Q}{\sin\alpha} f;$$

$$F = Q f', \tag{4.5}$$

де $f' = f/\sin\alpha$ – приведений коефіцієнт тертя клинчастого повзуна.

Звідси випливає, що коефіцієнт тертя f' у клинчастому повзуні більше, ніж у плоскому.

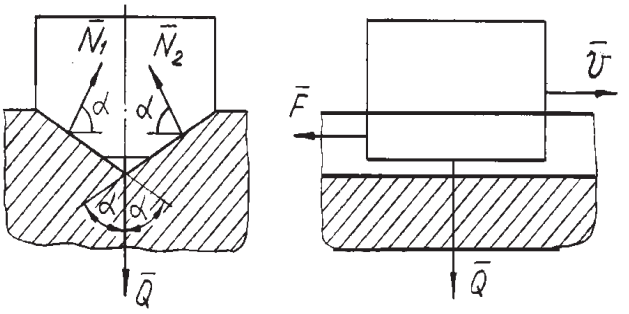


Рис. 4.6

4.4. Тертя обертальної кінематичної пари

Нехай цапфа вала 1 завантажена радіальною силою $\bar{Q}$ і обертається з кутовою швидкістю ω (рис. 4.7,*а*).

Між валом 1 і підшипником 2 є радіальний зазор. За наявності тертя цапфа буде «збігати» на підшипник. У точці дотику A виникає реакція $\bar{R}$, що паралельна $\bar{Q}$. За величиною ця реакція дорівнює

$$R = Q.$$

Визначаємо момент тертя відносно точки O:

$$M_T = R\rho,$$

де $\rho = r\sin\alpha$ – плече реакції $\bar{R}$.

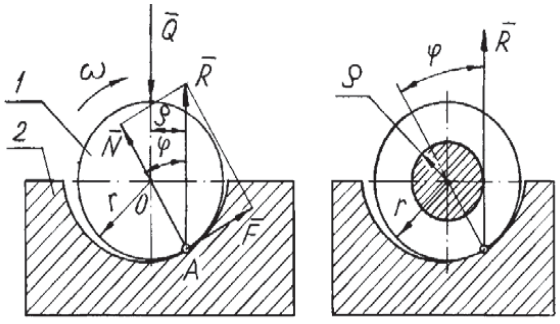
При зміні напрямків сили $\bar{Q}$ загальна реакція $\bar{R}$ буде проходити по дотичній до кола радіуса ρ, описаного з центра вала (рис. 4.7,*б*).

Коло радіуса ρ по аналогії з конусом тертя називається *колом тертя*.

Для малих кутів тертя $\sin\varphi \cong \operatorname{tg}\varphi = f'$. Тоді момент тертя становить

$$M_T = Qrf', \tag{4.6}$$

де f' – коефіцієнт тертя в обертальній парі.



а *б*

Рис. 4.7

Для неприпрацьованих цапф при сухому терті $f' = 3f/2$, для припрацьованих – $f' = 4f/3$, де f – коефіцієнт тертя для плоских поверхонь із тих самих матеріалів.

4.5. Тертя ковзання змащених тіл

При рідинному терті відбувається в'язкий зсув окремих шарів мастила.

Для зручності технічних розрахунків рідинне тертя формально зводять до сухого. Для цього вводять поняття коефіцієнта рідинного тертя f, який залежить від швидкості υ шарів мастила відносно один одного, навантаження P і динамічного коефіцієнта в'язкості η, *Н·с/мм* , тобто

$$f = f(\upsilon, P, \eta). \tag{4.7}$$

Ньютон знайшов дослідним шляхом, що при плоскопаралельному русі рідини величина сили в'язкого зсуву

$$T = S\eta \frac{d\upsilon}{dy}, \tag{4.8}$$

де S – площа поверхні ковзання; $d\upsilon / dy$ – зміна швидкості (градієнт) по висоті шару.

Засновник теорії тертя змащених тіл М.П. Петров у 1883 році сформулював основні вимоги, необхідні для існування рідинного тертя (Булгаков та ін., 2015):

1. Мастильна рідина має утримуватись у зазорі між поверхнями тертя, що знаходяться у відносному русі.
2. При відносному ковзанні змащених поверхонь у шарі мастила повинен виникати і підтримуватися внутрішній тиск, який зрівноважує зовнішнє навантаження, що притискує поверхні тіл одну до одної.
3. Мастильна рідина має повністю відокремлювати поверхні тертя, що ковзають.
4. Шар мастила між поверхнями тертя повинен мати товщину, не меншу мінімальної межі, яка визначається найбільш виступними висотами мікроповерхні.

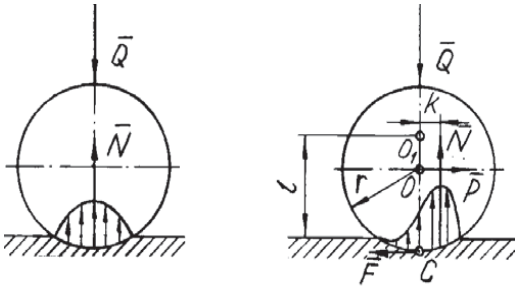
4.6. Тертя кочення

Розглянемо нерухомий циліндр, притиснутий до площини силою $\overline{Q}$ (рис. 4.8,*а*). Головний вектор реакцій $\overline{N}$ і сила $\overline{Q}$ врівноважуються.

При перекочуванні циліндра по опорній поверхні зміна характеру деформації в зоні контакту приводить до перерозподілу сил нормального тиску. У результаті рівнодійна $\overline{N}$ зміщується в бік руху на величину k (рис. 4.8,*б*).

Величину k називають *плечем пари тертя кочення* чи *коефіцієнтом тертя кочення*. Він має розмірність довжини.

При рівномірному перекочуванні циліндра рушійна сила P дорівнює за величиною силі тертя F.



а *б*

Рис. 4.8

Складемо рівняння моментів відносно точки *C* (рис. 4.8,*б*):

$$-P \cdot r + N \cdot k = 0,$$

де $N \cdot k = Q \cdot k$ – момент опору перекочуванню або момент тертя при перекочуванні; $P \cdot r$ – момент рушійної сили.

Із останнього рівняння

$$P = kQ/r. \tag{4.9}$$

Тобто, *рушійна сила* P *при перекочуванні циліндра по поверхні прямо пропорційна коефіцієнту тертя кочення* k *і обернено пропорційна радіусу циліндра* r.

Якщо сила P прикладена не в точці *O*, а в точці O_1, то необхідно в останніх формулах замінити r на l (рис. 4.8,*б*).

Вплив на опір переміщенню тертя кочення в більшості випадків менший ніж тертя ковзання, тому по можливості найбільш доцільно застосовувати в механізмах елементи з'єднань з тертям кочення.

ГЛАВА 5. ДИНАМІКА МАШИН

Предметом динаміки машин є вивчення їх руху із врахуванням діючих сил.

Розрізняють дві основні задачі динаміки машин.

Першою є задача силового аналізу, в якій по заданому закону руху початкової ланки визначають зовнішні сили, що забезпечують цей рух.

Другою є задача, в якій по заданим зовнішнім силам визначають закон руху початкової ланки.

5.1. Сили, які діють у машинах

Всі сили, що діють на машину, можна розділити на задані сили і сили реакцій в'язей.

Задані сили обумовлені характером роботи машини і її призначенням.

Сили реакцій в'язей (наприклад, реакцій у кінематичних парах) визначають із силових розрахунків методом кінетостатики.

Задані сили, які прикладені до ланок механізму і машини, поділяють на *рушійні та опору*. Перші намагаються прискорити рух, другі – сповільнити.

Рушійні сили приводять машину в рух. Вони виконують додатну роботу. Ними можуть бути: сили, які пов'язані з тиском газу, пари, повітря, рідини, електромагнітні сили, сили пружності, сили тяжіння.

Сили опору поділяються на сили *корисного опору*, для подолання яких призначений механізм, і *сили шкідливого опору*, до яких належать сили тертя в кінематичних парах. Прикладом сил корисного опору може бути опір деревини різанню на деревообробних верстатах, опір ґрунту під час його обробітку і т.ін.

Робота сил опору є від'ємною, оскільки ці сили напрямлені протилежно напрямку руху точки їх прикладення або складають з напрямком руху тупий кут.

Сили тяжіння залежно від напрямку їх дії відносяться до рушійних сил чи сил опору. Робота сили тяжіння дорівнює зміні потенціальної енергії тіла з протилежним знаком. Робота сили тяжіння може бути додатною, або від'ємною

залежно від напрямку зміни положення центра ваги ланок механізму і машини відносно горизонту.

Сили інерції виникають при криволінійному і прямолінійному нерівномірних рухах ланок механізму і машини.

5.2. Механічні характеристики машин

При динамічному дослідженні машин рушійні сили і сили опору задаються у вигляді механічних характеристик.

Механічними характеристиками машин називаються залежності рушійних сил та сил опору від часу, швидкості, переміщення та інших величин. Механічні характеристики машин визначають в основному експериментально.

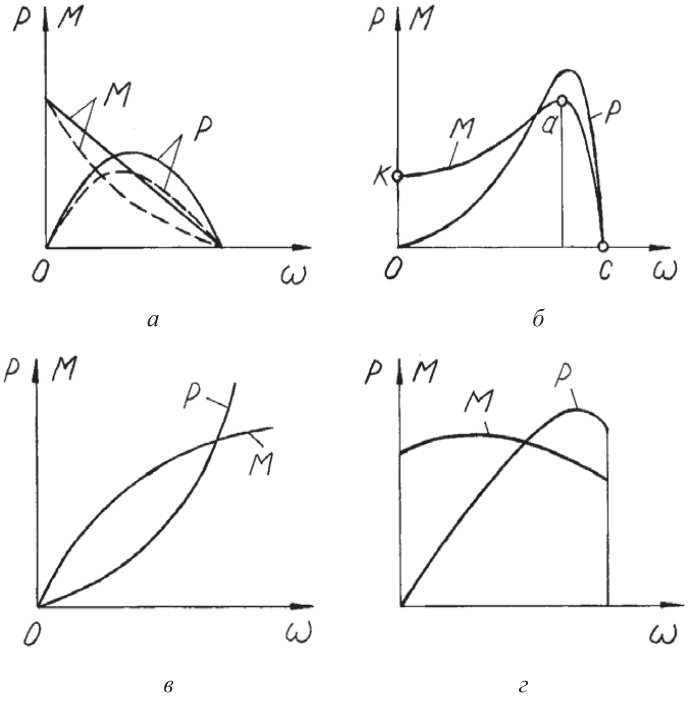


Рис. 5.1

Розглянемо залежності моментів і потужностей від кутової швидкості $M=M(\omega)$, $P=P(\omega)$. Вони прикладені до веденого валу двигуна або ведучого валу робочої машини. Потужність і момент зв'язані співвідношенням $P = M\omega$.

На рис. 5.1,*а* показано механічну характеристику електродвигуна постійного струму з паралельним (—) і послідовним (– – –) збудженням. Залежність $M(\omega)$ завжди спадна. Двигун працює стійко при довільних значеннях ω.

На рис. 5.1,*б* зображено механічну характеристику асинхронного електродвигуна змінного струму. На зростаючій частині характеристики ka двигун працює нестійко, на спадній ac – стійко.

Механічні характеристики робочих машин (рис. 5.1,*в*) є звичайно зростаючими кривими. Це пояснюється зростанням тертя, сил опорів при збільшенні швидкості.

Залежності середніх за цикл руху моменту і потужності на головному валу двигуна внутрішнього згоряння зображені на рис. 5.1,*г*.

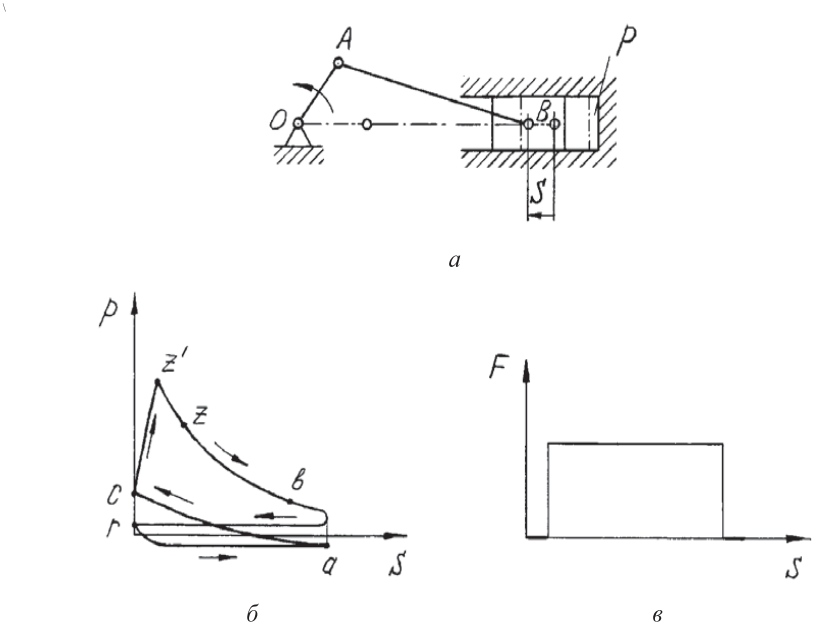


Рис. 5.2

Для чотиритактного двигуна внутрішнього згоряння повний цикл роботи відповідає двом обертам кривошипа (рис. 5.2,*а*). Закон зміни тиску газу p у циліндрі двигуна внутрішнього згоряння або компресора від переміщення поршня s задається *індикаторною діаграмою*.

Фази індикаторної діаграми (рис. 5.2,*б*): *ra* – всмоктування; *ac* – стиснення; *cz′z* – згоряння пального; *zb* – розширення; *br* – вихлоп. Стрілками показаний напрямок ходу процесу.

Механічна характеристика стругального верстата (рис. 5.2,*в*) подається у вигляді залежності сили різання F від переміщення різця s.

5.3. Кінетична енергія механізму і машини. Зведення мас у механізмах

Кінетична енергія є важливою динамічною характеристикою механізму і машини. У цілому кінетична енергія механізму T може бути визначена як сума кінетичних енергій його ланок

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k , \tag{5.1}$$

де k – номер ланки; n – кількість ланок; T_k – кінетична енергія ланки k.

Якщо прийняти ланки механізму як тверді тіла, що здійснюють плоскопаралельний рух, то кінетична енергія саме такої ланки дорівнює:

$$T_k = \frac{m_k \upsilon_{S_k}^2}{2} + \frac{J_{S_k} \omega_k^2}{2}, \quad \left(k = 1, 2, 3, ..., n\right), \tag{5.2}$$

де m_k, ω_k – маса і кутова швидкість k-ої ланки; υ_{S_k} – швидкість центра мас k-ої ланки; J_{S_k} – момент інерції k-ої ланки відносно її центра мас.

Для інших ланок механізму, що перебувають у поступальному або обертальному рухах, кінетичну енергію визначають за формулами:

$T_n = \dfrac{m_n \upsilon_n^2}{2}$ – для поступального руху повзуна;

$T_p = \dfrac{J_p \omega_p^2}{2}$ – для обертального руху ротора;

$T_1 = \dfrac{J_1 \omega_1^2}{2}$ – для обертального руху кривошипа.

Кінетична енергія всього механізму в загальному вигляді дорівнює:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \upsilon_{S_k}^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{J_{S_k} \omega_k^2}{2}. \tag{5.3}$$

У задачах динаміки механізмів і машин всі ланки механізму з одним ступенем вільності зручно замінити однією *еквівалентною ланкою зведення* із *еквівалентною зведеною масою* і *зведеним моментом інерції*.

Ланкою зведення для важільних механізмів, як правило, є *кривошип*. Тоді динамічна модель механізму буде включати тільки одну ланку (рис. 5.3), що дозволяє отримати динамічні рівняння руху машини і механізму в простому і компактному вигляді.

Зведеною масою $m_{зв}$ механізму називається умовна маса, яка зосереджена в точці на ланці зведення, кінетична енергія якої дорівнює кінетичній енергії всього механізму:

$$T_{зв} = \sum_{k=1}^{n} T_k, \tag{5.4}$$

де T_k – кінетична енергія k-ої ланки.

Виходячи з цього, визначаємо кінетичну енергію механізму, яка буде дорівнювати:

$$T = \frac{m_{зв} \upsilon_{зв}^2}{2}, \tag{5.5}$$

де $m_{зв}$ – зведена маса механізму; $\upsilon_{зв}$ – швидкість точки зведення.

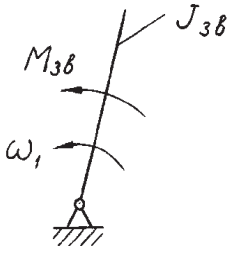


Рис. 5.3

За точку зведення маси механізму, як правило, вибирають точку з'єднання кривошипа (ведучої ланки) з групою Ассура.

Порівнявши загальний вираз кінетичної енергії механізму (5.2) з виразом (5.4), одержимо:

$$\frac{m_{зв}\upsilon_{зв}^2}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k\upsilon_{S_k}^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{J_{S_k}\omega_k^2}{2},$$

звідки зведена маса механізму визначається:

$$m_{зв} = \sum_{k=1}^{n} m_i\left(\frac{\upsilon_{S_k}}{\upsilon_{зв}}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} J_{S_k}\left(\frac{\omega_k}{\upsilon_{зв}}\right)^2. \qquad (5.5)$$

Аналогічно можна визначити зведений момент інерції ланки зведення.

Зведеним до ланки моментом інерції $J_{зв}$ механізму називається такий момент інерції, з яким ланка зведення має кінетичну енергію, що дорівнює кінетичній енергії всього механізму в цілому.

Тоді кінетична енергія механізму буде дорівнювати:

$$T = \frac{J_{зв}\omega_1^2}{2}, \qquad (5.6)$$

де $J_{зв}$ – зведений до кривошипа момент інерції; ω_1 – кутова швидкість ланки зведення (кривошипа).

Порівнявши вирази (5.5) і (5.6) , одержимо:

$$\frac{J_{зв}\omega_1^2}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k\upsilon_{S_k}^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{J_{S_k}\omega_k^2}{2},$$

звідки зведений момент інерції механізму дорівнює:

$$J_{зв} = \sum_{k=1}^{n} m_k\left(\frac{\upsilon_{S_k}}{\omega_1}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} J_{S_k}\left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2. \qquad (5.7)$$

Відношення швидкостей у виразі (5.7) визначаються як відношення відповідних відрізків плану швидкостей механізму, і тому зведений момент $J_{зв}$ не залежить від кутової швидкості ведучої ланки, а залежить тільки від положення механізму тобто, від кутової координати ведучої ланки.

5.4. Зведення сил у механізмах

При дослідженні руху машини і механізму поряд із поняттям зведеної маси і зведеного моменту інерції користуються поняттями *зведеної сили* і *зведеного моменту сил*, які прикладені до ланки зведення і замінюють діючі на всі ланки механізму рушійні сили і сили опору.

Така заміна буде еквівалентною, якщо потужність зведеної сили або зведеного моменту дорівнюватиме потужності всіх діючих на механізм сил і моментів сил:

$$P_{зв} = \sum_{k=1}^{n} P_k , \tag{5.8}$$

де k – номер ланки; n – кількість рухомих ланок; P_k – потужність усіх сил і моментів, прикладених до k-ої ланки.

Виходячи з цього, у випадку визначення зведеної сили, загальна потужність механізму буде дорівнювати:

$$P = F_{зв}\upsilon_{зв},$$

де $F_{зв}$ – зведена сила; $\upsilon_{зв}$ – швидкість точки зведення.

Враховуючи, що всі сили, діючі на ланку механізму, можна звести до однієї сили і одного моменту, одержимо:

$$P = \sum_{k=1}^{n} F_k \upsilon_k \cos\alpha_i + \sum_{k=1}^{n} M_k \omega_k ,$$

де F_k, M_k – сила і момент, які діють на k-ту ланку механізму; υ_k – швидкість точки прикладання сили F_k; α_k – кут між векторами сили $\overline{F}_k$ і швидкості $\overline{\upsilon}_k$; ω_k – кутова швидкість k-ої ланки.

Порівнявши два останніх вирази для P, одержимо:

$$F_{зв}\upsilon_{зв} = \sum_{k=1}^{n} Fk\upsilon_k \cos\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} M_k \omega_k ,$$

звідки *зведена сила* дорівнює:

$$F_{зв} = \sum_{k=1}^{n} F_k \frac{\upsilon_k}{\upsilon_{зв}} \cos\alpha_i + \sum_{k=1}^{n} M_k \frac{\omega_k}{\upsilon_{зв}}. \tag{5.9}$$

Аналогічно можна визначити *зведений момент сил*, прикладений до ланки зведення. У цьому випадку загальна потужність механізму визначається так:

$$P = M_{зв}\omega_1,$$

де $M_{зв}$ – заведений момент сил; ω_1 – кутова швидкість кривошипа.

Порівнявши загальний вираз для P з останнім рівнянням, одержимо:

$$M_{зв}\omega_1 = \sum_{k=1}^{n} F_k \upsilon_k \cos\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} M_k \omega_k,$$

звідки зведений момент сил дорівнює:

$$M_{зв} = \sum_{k=1}^{n} F_k \frac{\upsilon_k}{\omega_1} \cos\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} M_k \frac{\omega_k}{\omega_1}. \tag{5.10}$$

Визначимо відношення швидкостей, що входять в останню формулу:

$$\frac{\upsilon_k}{\omega_1} = l_{OA} \frac{\upsilon_k}{\upsilon_A};$$

якщо друга ланка шатун, то

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\upsilon_{BA}/l_{AB}}{\upsilon_A/l_{OA}} = \frac{l_{OA}}{l_{AB}} \frac{\upsilon_{BA}}{\upsilon_A}.$$

Аналогічно визначаємо відношення ω_k/ω_1. Ці відношення швидкостей визначаємо як відношення відповідних відрізків плану швидкостей, і тому зведені сили або моменти залежать тільки від положення механізму, тобто від кута повороту кривошипа φ_1.

5.5. Рівняння руху машини

У загальному випадку *рівняння руху* машинного агрегату, як сукупності двигуна, передаточних механізмів і робочої машини, можна представити через *закон зміни кінетичної енергії*:

$$A = A_{р.с.} - A_{оп.} = T - T_0, \tag{5.11}$$

де A, $A_{р.с.}$, $A_{оп.}$ – відповідно сумарна робота всіх сил, рушійних сил і сил опору;

T і T_0 – кінетична енергія машини в кінці і на початку руху.

Ураховуючи, що сумарна робота сил опору $A_{оп.}$ складається із роботи сил корисного опору $A_{к.о.}$ і шкідливого опору $A_{ш.о.}$, можемо записати:

$$A_{р.с.} - A_{к.о.} - A_{ш.о.} = T - T_0. \tag{5.12}$$

Останнє рівняння називається загальним рівнянням руху машини в кінцевій або інтегральній формі.

Якщо всі сили і моменти сил, а також маси і моменти інерції ланок звести до ланки зведення, то дане рівняння можна представити двома способами: у формі рівняння сил або у формі рівняння моментів сил.

У першому випадку визначаємо сумарну потужність P всіх сил, діючих на машину, через зведену силу $F_{зв}$ і швидкість $\upsilon_{зв}$ точки зведення:

$$P = F_{зв}\upsilon_{зв},$$

звідки сумарна елементарна робота всіх сил за елементарний проміжок часу dt буде дорівнювати:

$$dA = Pdt = F_{зв}\upsilon_{зв}dt = F_{зв}dS,$$

де dS – елементарний приріст дугової координати точки зведення.

Тоді повна робота за кінцевий проміжок часу $\Delta t = t - t_0$ визначається рівнянням:

$$A = \int_{S_0}^{S} F_{зв}dS,$$

де S і S_0 – кінцеве і початкове значення дугової координати точки зведення.

Таким чином, остаточно рівняння руху машини у формі рівняння сил буде мати вигляд:

$$\int_{S_o}^{S} F_{зв}dS = \frac{1}{2}(m_{зв}\upsilon_{зв}^2 - m_{зв0}\upsilon_{зв0}^2), \tag{5.13}$$

де $m_{зв}$, $m_{зв_0}$ – зведена маса машини в кінці і на початку руху, відповідно $\upsilon_{зв}$, $\upsilon_{зв_0}$ – лінійна швидкість точки зведення в кінці і на початку руху.

Аналогічно через роботу зведеного моменту всіх сил, що діють на машину, можна отримати загальне рівняння руху машини у формі рівняння моментів сил:

$$\int_{\varphi_o}^{\varphi} M_{зв} d\varphi = \frac{1}{2}(J_{зв}\omega^2 - J_{зв0}\omega_0^2), \tag{5.14}$$

де $M_{зв}$ – зведений момент усіх сил у машині; φ, φ_0 – кут повороту кривошипа в кінці та на початку руху; $J_{зв}$, $J_{зв\,0}$ – зведений момент інерції машини в кінці і на початку руху; ω, ω_0 – кутова швидкість ланки зведення в кінці і на початку руху.

При більш точному дослідженні руху і врахуванні змінних значень параметрів $m_{зв.}$ і $J_{зв}$ (наприклад, при $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$) рівняння руху зручно подати *у диференціальній формі.*

Для цього продиференціюємо рівняння руху моментів сил по φ.

У результаті одержимо:

$$M_{зв} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}(J_{зв}\omega^2) = \frac{1}{2}\omega^2\frac{dJ_{зв}}{d\varphi} + \frac{1}{2}J_{зв}\cdot 2\omega\frac{d\omega}{d\varphi}. \tag{5.15}$$

Добуток у рівнянні (5.15):

$$\omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

Вважаємо ω складною функцією часу, тобто $\omega(\varphi(t))$. Тоді

$$\frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

де ε – кутове прискорення кривошипа.

Підставляючи цей добуток у рівняння (5.15), знаходимо

$$M_{зв} = J_{зв}\varepsilon + \frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{dJ_{зв}}{d\varphi}. \tag{5.16}$$

Слід зауважити, що використання рівнянь руху можливо, коли $F_{зв} = const$ або $F_{зв} = F_{зв}(S)$ і $M_{зв} = const$ або $M_{зв} = M_{зв}(\varphi)$, тобто, якщо сили і моменти сил, що діють на машину, є або сталими, або залежать тільки від положення її рухомих частин (наприклад, робота двигуна внутрішнього згоряння за умови, що

технологічний опір робочої машини залишається майже незмінним).

5.6. Дослідження руху машини. Стадії руху

Для аналізу характерних стадій руху машини розглянемо її енергетичний баланс. Для цього використаємо загальне рівняння руху машини, виражене через закон зміни кінетичної енергії її рухомих частин.

Розрізняють три характерні стадії руху машини: пуск, або розбіг, усталений рух і вибіг, що закінчується зупинкою.

На стадії *розбігу* швидкість ведучої ланки машини зростає від нуля до швидкості усталеного руху. Так як на початку руху кінетична енергія машини $T_0 = 0$, то із загального рівняння руху машини маємо:

$$A_{р.с.} - A_{к.с.} - A_{ш.с.} = T,$$

або

$$A_{р.с.} = A_{к.с.} + A_{ш.с.} + T. \qquad (5.17)$$

Тобто, на стадії розбігу енергія рушійних сил витрачається не тільки на подолання корисних і шкідливих сил опору, але і на збільшення кінетичної енергії машини. Тому робота рушійних сил має бути більше сумарної роботи сил опору. Скорочення часу розбігу можна досягти шляхом збільшення потужності двигуна і зменшення сил шкідливого опору. Часто для цієї мети на стадії розбігу робоче навантаження (корисний опір технологічного процесу) в машинах також знімають (холостий хід). У такому разі:

$$A_{р.с.} = A_{ш.с.} + T. \qquad (5.18)$$

На стадії *усталеного руху* швидкість ведучої ланки лишається постійною, або коливається біля свого середнього значення. Такі коливання в більшості випадків мають періодичний (циклічний) характер із постійним значенням параметрів циклу. При цьому зміна кінетичної енергії машини за весь період усталеного руху або за період, кратний циклу зміни швидкості, дорівнює нулю. Тоді загальне рівняння руху машини буде мати вигляд:

$$A_{р.с.} = A_{к.с.} + A_{ш.с.}. \tag{5.19}$$

Тобто, на стадії усталеного руху енергія рушійних сил витрачається тільки на подолання корисних і шкідливих сил опору. Чим меншою буде робота шкідливих сил опору (сил тертя і т.п.), тим корисніше буде витрачатись енергія в машині. При цьому робота рушійних сил має дорівнювати сумарній роботі сил опору. Порушення цього балансу призведе до зміни кінетичної енергії машини, тобто до порушення усталеного руху машини.

На стадії *вибігу* двигун машини відключається і швидкість ведучої ланки машини зменшується до нуля. При зупинці кінетична енергія машини $T = 0$. Робота рушійних сил на цій стадії $A_{р.с.} = 0$ (двигун відключений). Тоді загальне рівняння руху машини буде мати вигляд:

$$A_{к.с.} - A_{ш.с.} = T_0. \tag{5.20}$$

Таким чином, машина може зупинитися, коли вся кінетична енергія її рухомих частин буде витрачена на подолання сил корисного і шкідливого опору. Час вибігу можна скоротити шляхом додаткового збільшення сил шкідливого опору (гальмування). У такому разі:

$$A_{к.с.} - A_{ш.с.} - A_{г.с.} = T_0, \tag{5.21}$$

де $A_{г.с.}$ – робота гальмівних сил.

Усі наведені загальні рівняння руху машини ще називають *рівняннями енергетичного балансу машини*, оскільки вони встановлюють необхідний розподіл енергії, потрібний для кожної стадії її руху.

Розглянемо рух машини, коли в початкових умовах задані зведені моменти рушійних сил $M_{зр}(\varphi)$ і сил опору $M_{зо}(\varphi)$ у вигляді графічних залежностей від кута повороту φ ланки зведення. У такому випадку рівняння руху розв'язують графоаналітичним методом.

Нехай графіки виконані в масштабі зведених моментів μ_M та кута повороту μ_φ ланки зведення. Для трьох характерних режимів руху машини: розбігу,

усталеного руху і вибігу, відповідають кути $\varphi_р$, $\varphi_у$, $\varphi_в$, а одному оберту ланки зведення відповідає кут φ_0 (рис. 5.4).

Тоді робота зведеного моменту сил буде дорівнювати:

$$A_{зв} = \int_0^{\varphi} (M_{зр} - M_{зо})d\varphi. \qquad (5.22)$$

Ця робота відповідає алгебраїчній сумі S заштрихованих площ S_i на діаграмі. Площі S_i беруться зі знаком «+», якщо $M_{зр} > M_{зо}$ і «–» – у протилежному випадку.

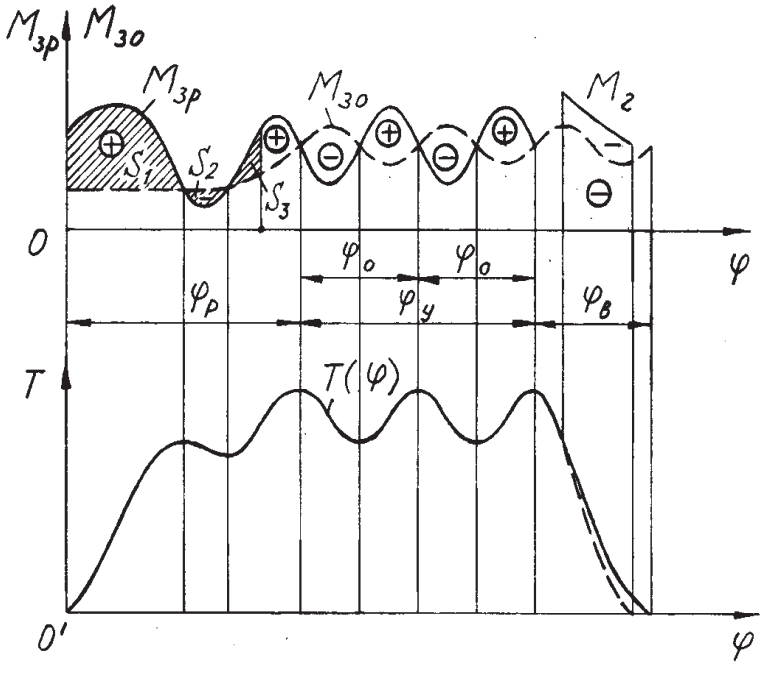


Рис. 5.4

Робота підраховується за формулою

$$A_{зв} = S \cdot \mu_M \mu_\varphi. \qquad (5.23)$$

Для показаного на рис. 5.4 кута повороту φ робота дорівнює:

$$A_{зв} = (S_1 - S_2 + S_3)\mu_M \mu_\varphi.$$

Аналогічно визначається робота для інших кутів повороту.

Оскільки в моменти пуску і зупинки кутова швидкість ланки зведення

дорівнює нулю, то приріст кінетичної енергії ΔT за весь час роботи машини дорівнює нулю. Звідси, сума робіт чи площ зі знаком «+» дорівнює їх сумі зі знаком «–».

Час зупинки машини скорочується, якщо в режимі вибігу прикласти гальмівний момент $M_г$ (рис. 5.4).

5.7. Коефіцієнт корисної дії машини

Як відомо із динаміки машин (Булгаков та ін., 2015), *коефіцієнт корисної дії* (ККД) характеризує відносну кількість енергії, що використовується в машині за прямим призначенням. Він дорівнює відношенню корисної роботи або середньої потужності до витраченої:

$$\eta = \frac{A_{кор}}{A_{витр}} = \frac{N_{кор}}{N_{витр}}.$$

Враховуючи те, що корисна робота в машині – це робота подолання всіх сил корисного опору (опору технологічного процесу), а витрачена робота – робота рушійних сил, то ККД машини можна визначити співвідношенням:

$$\eta = \frac{A_{к.о.}}{A_{р.с.}} = \frac{N_{к.о.}}{N_{р.с.}} < 1. \qquad (5.24)$$

ККД машини є однією із важливіших характеристик її якості і раціональності. Чим більша величина η, тим більша частина енергії витрачається в машині корисно і тим менше доля втрат на шкідливий опір.

На збільшення величини ККД впливають фактори, пов'язані з конструкцією машини і її експлуатацією: наприклад, застосування підшипників кочення замість ковзання, а також застосування мастил.

Якщо машина складається із n послідовно з'єднаних механізмів, то кожен із наступних механізмів машини отримує рух від відомої ланки попереднього механізму (рис. 5.5,*а*). Загальний ККД такої машини η дорівнює добутку ККД всіх механізмів, що входять до її складу:

$$\eta = \frac{A_{p.c.} \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_n}{A_{p.c.}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_n . \qquad (5.25)$$

Отже, загальний ККД машини із n послідовно з'єднаних механізмів буде меншим за найменший частковий ККД механізму, $\eta < \eta_{min}$.

Якщо машина складається із n паралельно з'єднаних механізмів, то кожен з цих механізмів має одне загальне джерело енергії (рис. 5.5,*б*).

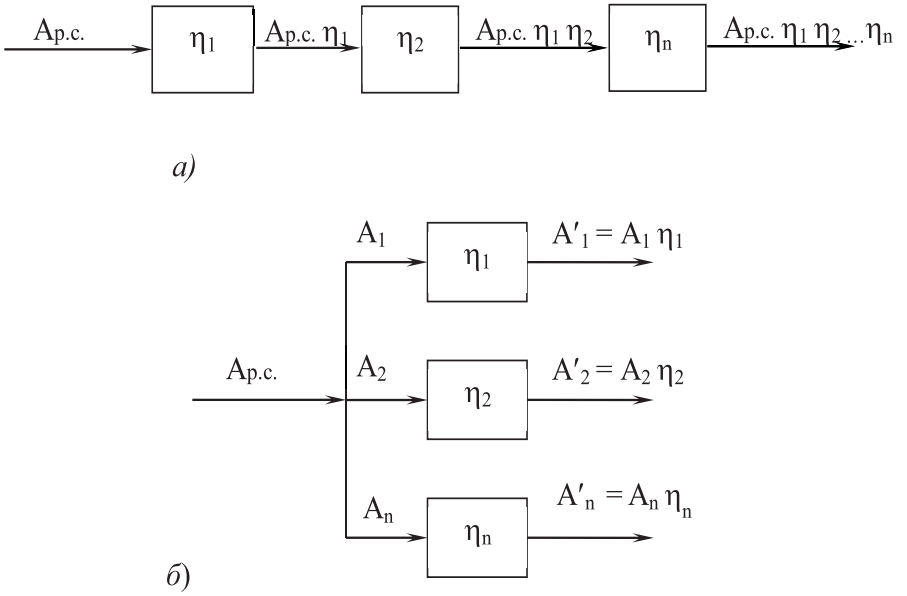


Рис. 5.5

Робота рушійних сил $A_{p.c.}$ машинного агрегата, розподіляється між окремими механізмами. Кожна з робіт $A_1, A_2, \ldots, A_n$ є роботою рушійних сил для відповідного механізму. Звичайно $A_{p.c.} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Представимо ККД кожного з механізмів таким чином:

$$\eta_1 = \frac{A_1'}{A_1}, \quad \eta_2 = \frac{A_2'}{A_2}, \ldots, \quad \eta_n = \frac{A_n'}{A_n} .$$

Тоді загальний ККД машинного агрегата, який складається із n паралельно з'єднаних механізмів, можна подати в такому вигляді:

$$\eta_{заг} = \frac{A_1' + A_2' + ... + A_n'}{A_1 + A_2 + ... + A_n} = \frac{A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + ... + A_n\eta_n}{A_{р.с.}}. \qquad (5.26)$$

Отже, загальний ККД машини із n паралельно з'єднаних механізмів буде більшим за найменший частковий ККД, але меншим за найбільший частковий ККД, $\eta_{min} < \eta < \eta_{max}$.

При паралельному з'єднанні механізмів загальний ККД машинного агрегата залежить не лише від ККД часткових механізмів, але й від характеру розподілу роботи рушійних сил між окремими механізмами.

5.8. Регулювання ходу машин

Основною задачею регулювання ходу машин є забезпечення необхідної рівномірності її руху. Це досягається шляхом зменшення коливань кутової швидкості головного вала ведучої ланки до меж, допустимих вимогами технологічного процесу.

Розглянемо причини виникнення нерівномірності ходу машини в період її усталеного руху.

За повний період циклу усталеного руху робота рушійних сил у машині дорівнює роботі сил опору. При цьому середнє значення зведеного моменту рушійних сил дорівнює середньому значенню зведеного моменту сил опору:

$$A_{р.с.} - A_{оп.} = 0, \qquad M_{зв.р.с.} - M_{зв.оп.} = 0.$$

Але в дійсності протягом одного циклу оберту зведені моменти $M_{зв.р.с.}$, $M_{зв.оп.}$ періодично змінюються залежно від кута повороту φ ведучої ланки, що приводить до періодичної зміни балансу робіт рушійних сил і сил опору. Тому, незважаючи на те, що кутові швидкості на початку і в кінці періоду циклу однакові, головний вал ведучої ланки машини обертається нерівномірно (рис. 5.6).

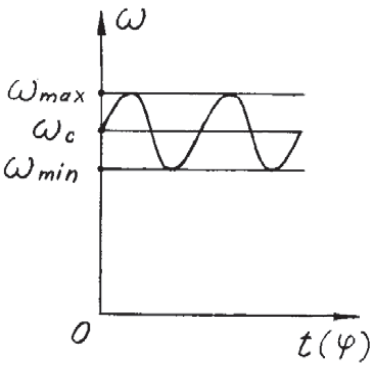


Рис. 5.6

Такі коливання кутової швидкості з періодичною зміною своєї величини за один цикл оберту головного валу називаються *періодичними*.

Періодичні коливання кутової швидкості виникають у машинах, в яких сили, діючі на ланки, змінюються періодично в певній залежності від кута повороту ведучої ланки (двигуни внутрішнього згоряння, поршневі насоси і т.ін.). Величина цих коливань залежить у першу чергу від конструктивних особливостей машини.

Для характеристики коливань швидкості машини в період усталеного руху вводиться *коефіцієнт нерівномірності руху*:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_c}, \qquad (5.27)$$

де ω_{max}, ω_{min}, ω_c – відповідно максимальна, мінімальна і середня кутова швидкість головного вала (рис. 5.6); $\omega_c = (\omega_{max} + \omega_{min})/2$.

Допустимі межі зміни коефіцієнта нерівномірності руху для кожного типу машин визначаються експериментально і наведені в довідковій літературі. Наприклад, для насосів – від 1/5 до 1/30, для двигунів внутрішнього згоряння – від 1/80 до 1/100, для генераторів змінного струму – від 1/200 до 1/300.

У машинах можуть виникнути також *неперіодичні* коливання кутової швидкості ведучої ланки. Такі коливання в машині не пов'язані з її конструкцією і викликані зміною балансу між роботою рушійних сил і сил опору внаслідок зміни на тривалий час режиму роботи машини (наприклад, збільшення чи

зменшення робочого навантаження або зміни підведеної енергії).

Для забезпечення рівномірності ходу при періодичних коливаннях на вал кривошипа машини встановлюють масивне махове колесо з важким ободом – *маховик*, який має великий момент інерції.

При неперіодичних коливаннях для регулювання рівномірності ходу машини застосовують спеціальні пристрої – регулятори швидкості.

Принцип дії маховика полягає в тому, що внаслідок свого великого моменту інерції маховик збільшує інерційність механічної системи, що і усуває значні періодичні зміни кутової швидкості. Чим більший момент інерції маховика, тим краще стабілізується кутова швидкість.

Маховик накопичує кінетичну енергію на ділянках циклу, де робота і зведений момент рушійних сил перевищують роботу і зведений момент сил опору, і віддає енергію на ділянках циклу, де це співвідношення є протилежним. Тобто, *маховик відіграє роль механічного акумулятора енергії машини*.

Розрахунок маховика зводиться до визначення його моменту інерції, який має забезпечити умови відхилення кутової швидкості ведучої ланки машини в заданих межах.

Зміна кінетичної енергії ведучої ланки зведення при зміні її кутової швидкості і порушенні рівності між зведеним моментом рушійних сил і зведеним моментом сил опору може бути виражено рівнянням:

$$\frac{J_{зв}\omega_{max}^2}{2} - \frac{J_{зв}\omega_{min}^2}{2} = \Delta A_{max}, \qquad (5.28)$$

де ΔA_{max} – максимальна надлишкова робота зведеного моменту сил за проміжок часу зміни кутової швидкості від мінімального ω_{min} до максимального ω_{max} значень.

ΔA_{max} може бути визначена із графічних залежностей зведених моментів рушійних сил $M_{зр}(\varphi)$ і сил опору $M_{зо}(\varphi)$ (рис. 5.4) та кутової швидкості $\omega(\varphi)$ від кута повороту φ ланки зведення (рис. 5.6).

Перетворюючи рівняння (5.28), одержимо:

$$\frac{J_{зв}(\omega_{max}^2-\omega_{min}^2)}{2}=J_{зв}\cdot\frac{(\omega_{max}-\omega_{min})}{\omega_c}\cdot\frac{(\omega_{max}+\omega_{min})}{2}\cdot\omega_c=\Delta A_{max},$$

$$J_{зв}\cdot\delta\cdot\omega_c^2=\Delta A_{max}.$$

Звідси зведений момент інерції ланок механізму машини буде дорівнювати:

$$J_{зв}=\frac{\Delta A_{max}}{\delta\cdot\omega_c^2}, \tag{5.29}$$

де δ – коефіцієнт нерівномірності руху; ω_c – середня кутова швидкість ведучої ланки зведення.

Маховик збільшує зведений момент інерції механічної системи на величину свого моменту інерції J_M:

$$J_M+J_{зв}=\frac{\Delta A_{max}}{\delta\cdot\omega_c^2}. \tag{5.30}$$

Нехтуючи в механічній системі зведеним моментом інерції $J_{зв}$, оскільки його величина відносно мала, то знаходимо момент інерції маховика:

$$J_M=\frac{\Delta A_{max}}{\delta\cdot\omega_c^2}\approx\frac{90\cdot\Delta A_{max}}{\delta\cdot n^2}, \tag{5.31}$$

де n – частота обертання ведучої ланки ($об/хв$).

Масу і розміри маховика знаходять залежно від його моменту інерції із відомої формули динаміки (Попов, 2019):

$$J_M=\frac{mD^2}{4}, \tag{5.32}$$

де m – рівномірно розподілена по ободу маса маховика; D – діаметр інерції (діаметр кола, описаного центром ваги перерізу обода маховика).

Регулятори швидкості автоматично стабілізують неперіодичні коливання кутової швидкості ведучих ланок у заданих межах.

Регулювання швидкості обертання ведучого вала машини здійснюється шляхом зміни подачі енергії до двигуна або шляхом зміни опору на веденому валу машини.

Так, існують відцентрові, гальмівні і електричні регулятори швидкості.

У машинобудуванні найбільш поширені відцентрові регулятори. Гальмівні і електричні регулятори в більшості випадків застосовуються для приладів точної механіки.

Принцип дії *відцентрових* регуляторів заснований на використанні сили інерції обертальних мас A для регулювання подачі палива або електроенергії до двигуна (рис. 5.7).

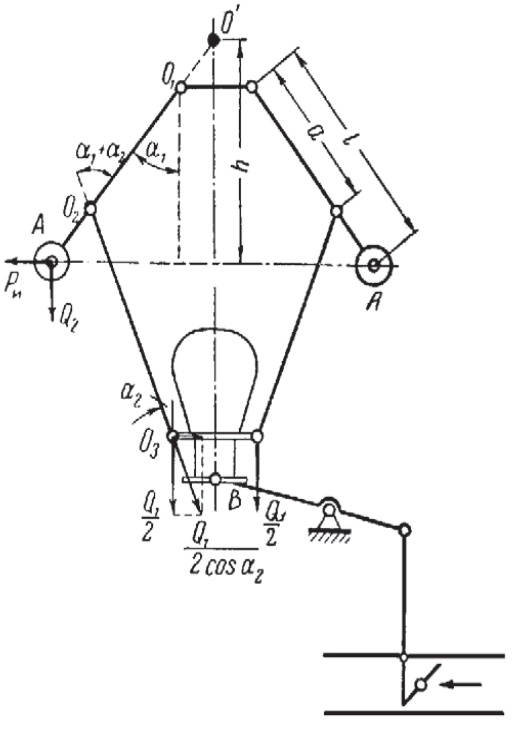


Рис. 5.7

Наприклад, зменшення зовнішнього навантаження утворює в машині надлишок рушійної сили. Це приводить до збільшення швидкості обертання вала двигуна машини, а відповідно і регулятора, який зв'язаний з цим валом. Кулі A регулятора при цьому розвивають відцентрову силу інерції, яка зростає зі збільшенням швидкості. Під впливом відцентрової сили кулі розходяться і системою важелів піднімають муфту B, що приводить до повороту дросельного клапана, до зменшення подачі палива і відповідно зменшення швидкості

обертання вала двигуна. При зменшенні швидкості відбувається зворотний процес, подача палива збільшується, а відповідно збільшується і швидкість обертання вала двигуна.

Таким чином, задана швидкість обертання вала двигуна машини підтримується автоматично.

Забезпечення підтримки заданої кутової швидкості в регуляторі досягають підбором його відповідних параметрів: маси куль, розмірів ланок важелів і т.ін.

Кінцевий вираз для визначення заданої частоти обертання n (об/ хв) вала двигуна машини залежно від параметрів відцентрового регулятора має такий вигляд:

$$n = 30 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{Q_1 \cdot a}{Q_2 \cdot l}}{h}}, \qquad (5.33)$$

де Q_1 – вага муфти з вантажем; Q_2 – вага кулі; a, l – довжини ланок регулятора; h – висота підйому муфти регулятора.

ЧАСТИНА IV. МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

ГЛАВА 1. ОСНОВНІ ГРУПИ МАТЕРІАЛІВ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

1.1. Предмет і задачі матеріалознавства

У сучасній техніці, у тому числі і сільськогосподарській, використовують різноманітні матеріали з різними комплексами властивостей. Знання основних законів і принципів формування внутрішньої будови матеріалів, яка нерозривно пов'язана з їх властивостями, розкривають значні перспективи їх раціонального використання та подальшого розвитку техніки і промисловості у цілому.

Матеріалознавство – це наука, яка вивчає металеві, неметалеві та нові матеріали, закономірності зміни їх властивостей залежно від хімічного складу, структури, способів обробки та умов експлуатації. Навіть у базовій групі сучасних конструкційних та інструментальних матеріалів – залізовуглецевих сплавах – від вмісту вуглецю залежать властивості матеріалів. За технологічними властивостями їх поділяють на деформівні (сталі), які містять менше 2,14% вуглецю, і ливарні (чавуни) з вмістом вуглецю більше 2,14%. Сталі можна піддавати пластичній деформації, а чавуни – ні. У сталях може формуватися різна структура, тому їх використовують як для виготовлення деталей машин та елементів конструкцій, так і для виготовлення інструментів. Слід відзначити, що застосування спеціальних термічних обробок дає можливість не просто впливати, а і надавати різним виробам необхідні властивості. Зауважимо, що під час експлуатації, властивості виробів змінюються, що додатково потребує їх вивчення, а також поведінки матеріалів за різних умов зовнішнього впливу.

Предметом вивчення дисципліни є основні групи конструкційних та інструментальних матеріалів.

Задача дисципліни – навчити майбутніх фахівців АПВ правильно вибирати матеріали для певних виробів залежно від умов їх роботи та призначати необхідні обробки цих виробів для надання комплексу необхідних фізико-хімічних властивостей.

1.2. Основні групи матеріалів та напрями їх використання в агропромисловому виробництві

У процесі експлуатації деталі машин і елементи конструкцій працюють у складних умовах різноманітних навантажень під дією тертя, корозійних середовищ, підвищеної температури та інших факторів. Крім того, багато які з них зазнають при роботі значних динамічних навантажень. Що стосується деталей тракторів, автомобілів та сільськогосподарських машин, то це навантаження, які виникають при згорянні газів у камері згоряння циліндрів двигунів, унаслідок дії інерційних сил, у процесі гальмування, при порушенні співосності сполучених агрегатів, механізмів і деталей і т.ін. Крім того, деталі можуть зазнавати систематичних змінних навантажень, через що можуть піддаватися руйнуванню через втомленість. У першу чергу, до таких деталей можна віднести пружини, ресорні листи, повздовжні балки і т.ін. У переробній та харчовій галузях механічні навантаження поєднуються в багатьох випадках з дією дуже агресивних середовищ.

При розробці різноманітних конструкцій деталей не можна підвищувати їх надійність й ресурс за рахунок збільшення перерізів, габаритних розмірів і маси, тому до матеріалів, які використують при їх виробництві, ставлять високі вимоги. Ці матеріали мають надійно забезпечити статичну і дінамічну міцність деталей, гарантувати високу стійкість проти спрацювання поверхней тертя за різних умов зносу, а в деяких випадках також температурну і корозійну стійкість.

Традиційним матеріалом для виготовлення різних деталей машин і елементів конструкцій є ***чорні*** сплави: сталі і чавуни. З них виготовляють переважну більшість деталей машин. У той же час ці матеріали постійно розвиваються. Основними напрямами у цьому плані є розробка нових марок економно легованих

і мікролегованих сталей та використання їх на заміну сталям звичайної якості, що дає змогу не тільки надати деталям високий рівень необхідних властивостей, а й розробляти економічний профіль деталей машин і таким чином знижувати матеріаломісткість механізмів. Стійкість проти спрацювання за різних умов роботи можна підвищити при застосуванні різних покриттів, які не тільки зміцнюють робочі поверхні, а й захищають їх від корозії, впливу високих температур та ін. (Большаков та ін., 1993).

Для подальшого підвищення динамічних якостей тракторів, автомобілів та сільськогосподарських машин велике значення має максимально можливе зниження маси. Цьому в значній мірі сприяє виготовлення деталей із ***кольорових*** сплавів на основі алюмінію, магнію та цинку, які поєднують низьку густину з достатньою міцністю й високою корозійною стійкістю. Перспективним матеріалом для двигунів є титанові сплави, використання яких дозволить значно зменшити теплові втрати й підвищити коефіцієнт корисної дії двигунів. Широке використання знаходять сплави на основі міді і олова для антифрикційних деталей.

Ефективним шляхом зниження металомісткості деталей машин і конструкцій є застосування ***неметалевих*** матеріалів, що поєднують надто малу густину з високою корозійною стійкістю. Наприклад, використання однієї тонни пластмас для виготовлення деталей сільськогосподарських машин економить 3,5 тонни металу. Незамінними такі матеріали є в машинах для хімічного захисту рослин, у робочих органах збиральних сільськогосподарських машин для запобігання пошкодженню (наприклад, при збиранні томатів) в обладнанні для переробки продукції рослинництва й тваринництва тощо.

Все ширше використовують різноманітні керамічні матеріали, а також металокераміку, в структурі якої сполучені металеві і керамічні фази. Наприклад, із металокераміки виготовляють деталі двигунів внутрішнього згоряння (турбодвигунів), через те що вона відрізняється високою жаростійкістю при малій теплопровідності.

Новим класом конструкційних матеріалів є ***композити***, до складу яких входять як металеві, так і неметалеві матеріали. Ці матеріали будуються за принципом залізобетонних конструкцій, де достатньо в'язка матриця зміцнена армуючою фазою, якою можуть бути високотверді металеві сплави, вуглецеві волокна та інші матеріали. Принципова особливість матеріалів цієї групи полягає в тому, що кожна складова композиції зберігає свої властивості, і вони доповнюють одна одну (Таран Ю.М. та ін., 2002).

Для виготовлення деталей із зазначених матеріалів застосовують як традиційні технології лиття, обробки тиском і різанням, так і нетрадиційні технології. Певні перспективи має ***порошкова*** металургія, за допомогою якої практично без відходів виготовляють вироби пресуванням й спіканням різних порошків. Особливістю цієї технології є можливість створювати не тільки будь-які матеріали, а і певний ступінь пористості у виробі, що дає змогу як економити матеріал, так і знижувати матеріаломісткість конструкції при використанні деталей, виготовлених за такою технологією. Застосування даної технології дає можливість отримувати матеріали, які не можна виплавити, що значно розширює можливості і перспективи створення нових матеріалів з потрібним комплексом властивостей.

1.3. Загальна класифікація матеріалів

Велика кількість матеріалів та їх різноманіття спричиняє їх систематизацію за багатьма ознаками. При вивченні різних груп матеріалів будуть розглянути певні класифікаційні ознаки кожної. Далі надана найбільш узагальнена класифікація за трьома основними ознаками: природа, внутрішня будова та технологія одержання.

За ***природою*** матеріали поділяють на дві великі групи: *металеві* і *неметалеві*.

До металевих відносять чисті метали і сплави на їх основі. Серед чистих металів найбільше використовують алюміній і мідь за їх добрий комплекс фі-

зико-хімічних та механічних властивостей. Серед сплавів можна виділити в першу чергу чорні сплави на основі заліза й вуглецю: сталь і чавун. Назва даної групи пояснюється утворенням на поверхні металу при нагріванні оксидної плівки чорного кольору – окалини. Груп кольорових сплавів багато, але найчастіше використовують алюмінієві, мідні, магнієві та деякі інші групи, назва кожної з яких пов'язана з назвою основного металу.

Серед неметалевих матеріалів слід виділити полімерні матеріали, гуму, дерево, пісок, бетон та ін. У сучасному обладнанні агропромислового комплексу металеві матеріали в багатьох випадках з успіхом замінюють на полімерні, що дає переваги.

За ***внутрішньою будовою***, яка визначає багато які властивості матеріалу, у природі існує два різновиди твердих тіл: *кристалічні і аморфні*.

Кристалічні тіла мають *закономірне* розташування атомів у просторі з утворенням кристалічних граток. Вони залишаються твердими, тобто зберігають надану їм форму, до певної температури, при якій вони переходять у рідкий стан. Під час охолодження процес проходить у зворотному напрямку. Наприклад, у чистих металах перехід з одного стану в інший відбувається при певній температурі плавлення, що підтверджує крива охолодження, яка показує зміну температури з часом охолодження: під час кристалізації температура залишається незмінною, поки процес не закінчиться, і таким чином визначає конкретну температуру для кожного металу. Наприклад, залізо має температуру плавлення 1539°С, олово – 232°С. Яскравим прикладом кристалічних тіл є метали та їх сплави (матеріали, отримані шляхом сплавлення між собою або декількох металів – латуні, бронзи, або металів з неметалами – сталь, чавун, силумін).

Аморфні тіла не мають закономірного розташування атомів в об'ємі – атоми розташовані *хаотично*. При нагріванні аморфні тіла пом'якшуються у великому температурному інтервалі, стають в'язкими, а потім переходять до рідкого стану. Таким чином, вони не мають певної температури твердіння, що показує крива охолодження. У той же час треба відзначити, що, з одного боку, за сучасними

новітніми технологіями вже можна одержати навіть металеві матеріали в аморфному стані, наприклад високошвидкісним охолодженням розплаву – це так зване «металеве скло» – дуже перспективний сучасний матеріал, який використовують у різних напрямах.

З іншого боку, в деяких аморфних тілах при повторному нагріванні, тривалому витримуванні при температурі 20–25°С, а в деяких випадках при деформації можна частково або повністю перейти до кристалічного стану. Наприклад, при розтягуванні гуми через її часткову кристалізацію відбувається її зміцнення, і її еластичність змінюється.

За ***технологією одержання*** розділяють такі групи матеріалів: *литі, композити і порошкові*.

Литі матеріали, прикладом яких є сталь, чавун, бронзи та багато які інші сплави одержують у спеціальних печних агрегатах шляхом сплавлення різних елементів, наприклад виробництво чавуну і сталі. При цьому підготовлені суміші потрібних вихідних матеріалів нагрівають до повного рідкого стану, після чого твердіє однорідний матеріал, у якому елементи перемішані на атомному рівні.

Композити отримують шляхом спеціальних технологій, наприклад спрямованої кристалізації, де один компонент утворює основу композиції, а другий певним чином розташовується у цій основі. Одна складова композита може бути рідкою, а інша твердою. Після остаточного затвердіння складові композитів завжди розділені межею і зберігають свої властивості у складі композиційного матеріалу.

Порошкові матеріали одержують шляхом пресування й спікання порошкової суміші, тобто всі складові такої суміші є твердими, що принципово відрізняє ці матеріали від попередніх груп матеріалів.

1.4. Основні фізико-хімічні, механічні і технологічні властивості матеріалів та їх значення

На деталі машин і конструкції в процесі роботи діють зовнішні сили – сили ваги, тиск пари і газів, вібрація, сили інерції тощо. Внаслідок дії цих сил в матеріалах виникають *напруження*. Для забезпечення нормальної тривалої роботи будь-якої деталі або конструкції ці напруження не повинні перевищувати певних границь, бо можуть з'явитися *залишкові деформації*, і виріб змінить свою форму й розміри або зовсім вийде з ладу. Крім того, деталі машин можуть працювати в умовах підвищеної температури, агресивного середовища і т.ін., коли механічні і хімічні властивості металів погіршуються. Тому залежно від умов роботи матеріали деталей і конструкцій повинні мати певні *фізичні*, *хімічні*, *механічні* і *технологічні* властивості.

Властивість – це кількісна чи якісна характеристика матеріалу, яка зумовлює його спільність або відмінність з іншими матеріалами.

Основні фізичні властивості та їх значення. Основними фізичними властивостями матеріалів є температура плавлення, густина, теплопровідність, електропровідність, коефіцієнт розширення, магнітні властивості тощо.

Наприклад, *густина* (ρ – визначається для однорідної речовини її масою в одиниці об'єму) має дуже важливе значення для сплавів, з яких виготовляють деталі авіаційних, автомобільних і тракторних двигунів, а також деталі літаків. Найменшу густину мають сплави, виготовлені на основі алюмінію, титану і магнію, тому отримують широке використання. У той же час велика густина мідних сплавів є їх суттєвим недоліком.

За густиною всі метали, які є основою сплавів, та інші матеріали поділяють на важкі та легкі. Межею поділу прийнята густина заліза – 7,8 г/см^3. До найбільш поширених легких належать алюміній (2,7), титан (4,5), магній (1,74), пластмаси та ін. До найбільш поширених важких металів належать мідь (8,92), свинець (11,34), молібден (10,2) та ін.

Теплопровідність (один із видів переносу тепла від більш нагрітих частин тіла до менш нагрітих, який вирівнює температуру) має значення для деталей теплотехнічної апаратури, радіаторів, поршнів і головок циліндрів двигунів внутрішнього згоряння.

Температура плавлення має значення для деталей, що працюють за умов підвищених і високих температур. Легкоплавкі сплави використують як припої.

За температурою плавлення всі метали, які є основою сплавів, поділяють на тугоплавкі та легкоплавкі. Межею поділу прийнята температура плавлення заліза – 1539°С. До найбільш поширених легкоплавких належать: алюміній (660°С), мідь (1089°С), свинець (327°С), олово (232°С), золото (1063°С), срібло (960°С) та ін. До найбільш поширених тугоплавких належать: вольфрам (3000°С), молібден (2625°С), хром (1615°С) та ін.

Електропровідність (здатність тіла пропускати електричний струм під дією електричного поля, а також фізична величина, яка кількісно характеризує цю здатність) має більше значення для чистих металів, які використовують в електротехніці та інших галузях. Найбільшу електропровідність мають срібло, мідь, алюміній. Неметалеві матеріали струм не проводять, оскільки не мають вільних носіїв електричного заряду і тому можуть слугувати ізоляторами.

Основні хімічні властивості. Матеріали при експлуатації в корозійному середовищі повинні мати високу стійкість проти корозії. Найбільше процесу корозії піддаються метали і сплави, що пояснюється їх великою хімічною активністю.

Важливими для металевих виробів є і такі хімічні властивості, як стійкість проти корозії, стійкість металів і сплавів проти окиснення і розчинення в різних агресивних середовищах (хімікати, мастило, вологе повітря, вода та ін.).

Корозія металів – це процес мимовільного руйнування металевих матеріалів унаслідок хімічної або електрохімічної взаємодії їх з навколишнім середо-

вищем. Корозієстійкими називають метали і сплави, в яких процес корозії розвивається з малою швидкістю. Розрізняють два види корозії: *електрохімічну* і *хімічну*.

Електрохімічна корозія розвивається в рідких електролітах: вологій атмосфері й грунті, морській і річній воді, водних розчинах солей, луг й кислот, різних продуктах переробки. При електрохімічній корозії встановлюється корозійний струм й відбувається розчинення метала внаслідок електрохімічної взаємодії з електролітом.

Хімічна корозія розвивається в сухих газах або рідких неелектролитах. В більшості випадків це гази, що містять кисень: сухе повітря, вуглекислий газ, суха водяна пара і чистий кисень. Крім того, хімічна корозія має місце в рідких середовищах-неелектролітах: у нафті, бензині.

Чорні сплави мають дуже низьку корозійну стійкість. Сталі, стійкі проти електрохімічної корозії мають назву нержавіючих**.** Сталі, стійкі проти високотемпературної хімічної (газової) корозії, називають жаростійкими.

Сплави кольорових металів як основну перевагу мають високу стійкість проти корозії. Ця властивість характерна і для неметалевих матеріалів.

Основні технологічні властивості матеріалів. Технологічні властивості металів і сплавів характеризують їх ливарні властивості і здатність піддаватися різним способам обробки: обробці тиском (холодному і гарячому штампуванню, куванню, згинанню і т.ін.), зварюванню, обробці різанням тощо.

Добрі ливарні властивості мають чавуни, силуміни, бабіти та ін. Сталі добре деформуються в гарячомустані, а деякі навіть у холодному.

До основних ***ливарних*** властивостей матеріалів належать: рідкотекучість, усадка, ліквація та здатність поглинати гази.

Рідкотекучість – здатність сплава вільно текти в ливарній формі, заповнюючи її й точно відтворюючи її контури. Рідкотекучість залежить від хімічного складу сплаву (наприклад, у залізовуглецевих сплавах рідкотекучість підвищується зі зростанням вмісту вуглецю й зменшується зі зростанням вмісту сірки),

температури при заливанні (при зростанні температури рідкотекучість зростає), наявності домішок і т.ін. Більш високу рідкотекучість мають так звані евтектичні сплави (характеризуються одночасною кристалізацією двох фаз і своєрідною структурою в литому стані, наприклад чавуни, силуміни та багато інших сплавів).

Усадка – властивість матеріалів зменшувати свій об'єм при затвердінні та наступному охолодженні. При цьому лінійні розміри виливка зменшуються. Існують поняття лінійної і об'ємної усадок, тому що, крім зміни об'єму, важливіше знати зміну розмірів виробу. Найменшу лінійну усадку мають металеві сплави, наприклад, чавун (0,8–1,3 %), силуміни (0,9–1,2 %) та інші. Неметалеві матеріали мають велику усадку, тому не встигають при затвердінні заповнювати складну ливарну форму. У зв'язку з лінійною усадкою необхідно точно враховувати зменшення розмірів виливка.

У результаті об'ємної усадки в тілі виливка можуть утворюванись усадочні раковини й пористість. Для попередження цього необхідно передбачити раціональну ливникову систему і наявність *прибутків.*

Ліквація – хімічна неоднорідність сплава, який затвердів. Унаслідок хімічної неоднорідності виникає і неоднорідність механічних властивостей за перерізом виробу.

Дуже негативною властивістю є *схильність до поглинання газів*, бо насиченість тіла виливка газами призводить до зниження суцільності матеріала і, як наслідок, до зниження механічних властивостей. Для її зменшення проводять плавку у вакуумі або в середовищі інертних газів, а також дегазацію вакуумуванням у спеціальних камерах. Найбільшу схильність до поглинання газів серед ливарних сплавів мають сплави на основі алюмінію.

Механічні властивості матеріалів. До основних механічних властивостей належать міцність, пружність, пластичність, в'язкість і твердість.

М*іцність*, тобто здатність чинити опір руйнуванню під дією зовнішніх навантажень, є найважливішою властивістю матеріалу.

Пружність – це властивість матеріалу відновлювати попередню форму й розміри після припинення дії сили, яка викликала деформацію.

Пластичність – це властивість матеріалів під дією зовнішніх сил змінювати свою форму і розміри і зберігати їх після припинення дії зовнішніх сил.

В'язкість – це властивість матеріалів витримувати ударне навантаження.

Твердість – це здатність матеріалу чинити опір проникненню в нього іншого тіла, виготовленого з твердішого матеріалу.

Для визначення механічних і технологічних властивостей матеріалів проводять механічні і технологічні випробування.

Механічні випробування залежно від характеру зміни і часу дії навантаження поділяють на статичні випробування (на розтяг, стиск, згин, кручення, твердість), дінамічні випробування (на ударний згин) та випробування на втомленість (при повторно-змінному прикладенні навантаження). Окрему групу складають тривалі високотемпературні механічні випробування (на повзучість, тривалу міцність і т.ін.).

Основними показниками механічних властивостей при *статичному* навантаженні є границя міцності, границя текучості, границя пружності, відносне видовження, відносне звуження і твердість.

Границею міцності (тимчасовим опором) σ_u називають відношення найбільшого навантаження F_{max} до початкової площі перерізу зразка A_0:

$$\sigma_u = \frac{F_{max}}{A_0}.$$

Границею текучості σ_y називають найменше напруження, за якого зразок деформується без чутливого зростання навантаження:

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}.$$

Під *границею пружності* σ_e (іноді позначають $\sigma_{0,05}$) розуміють напруження, при якому залишкове видовження досягає 0,05 % від початкової довжини зразка:

$$\sigma_{0,05} = \frac{F_{0,05}}{A_0}.$$

Істинним опором розриву $\sigma_к$ називають відношення навантаження в момент розриву $F_к$ до площі поперечного перерізу в шийці зразка після розриву $A_к$:

$$\sigma_к = \frac{F_к}{A_к}.$$

Розмірність зазначених показників – МПа.

Відносним видовженням зразка δ називають відношення приросту довжини зразка після розриву до початкової довжини, виражене у відсотках :

$$\delta = \frac{l_к - l_0}{l_0} \cdot 100\ \%.$$

Відносним звуженням зразка ψ називають відношення зменшення площі поперечного перерізу зразка до початкової площі, виражене у відсотках :

$$\psi = \frac{A_0 - A_к}{A_0} \cdot 100\ \%.$$

Твердість визначають за Брінеллем (НВ) – втисканням стальної загартованої кульки, за Роквелом (HRC) – втисканням алмазного конуса, за Вікерсом (HV) – втисканням алмазної піраміди.

Основними показниками механічних властивостей при *динамічних* випробуваннях є ударна в'язкість та в'язкість руйнування.

Ударна в'язкість – це робота, витрачена на ударний злом зразка, віднесена до площі поперечного перерізу зразка в місці надрізу:

$$KC = \frac{K}{A}.$$

При позначенні ударної в'язкості додають і третю букву, що вказує на вид надрізу на зразку: U, V, T. Наприклад, запис KCU позначає ударну в'язкість зразка з U-образним надрізом. Стандартна розмірність ударної в'язкості Дж/м^2 або Дж/см^2.

Велике значення має коефіцієнт в'язкості руйнування K_{1c}, який характеризує опір розвитку в'язкої тріщини:

$$K_{1c} = \sigma\sqrt{\alpha\pi l_{кр}},$$

де σ – прикладене напруження; α – безрозмірний коефіцієнт, що характеризує геометрію тріщини; $l_{кр}$ – критична довжина тріщини (довжина тріщини, що може мимовільно зростати). Як можна бачити з приведеного відношення, K_{1c} має розмірність МПа·м$^{1/2}$.

Практичне значення коефіцієнта K_{1c} полягає в тому, що за його допомогою можна визначити напруження руйнування σ, або, навпаки, за відомим значенням напружень у деталі встановити розмір тріщини, за якого відбудеться руйнування.

Багато які деталі машин працюють з вібрацією або під дією якихось інших циклічних навантаженнь (колінчасті вали, шатуни та ін.). При цьому вони зазнають багаторазову дію змінних за величиною або величиною і напрямком напружень. У результаті дії циклічних напружень метал ніби «втомлюється», його міцність знижується і деталь руйнується. Це явище називають *втомленістю*, а опір втомленості – *витривалістю*. Основною характеристикою, яку визначають при випробуваннях на втомленість, є границя витривалості.

Границя витривалості – це найбільше напруження, що може витримати матеріал без руйнування при довільно великій кількості циклів навантажень. Число циклів навантажень називають *базою* випробувань. Для сталей таке число умовно прийнято як 10^6 циклів, а для кольорових металів і сплавів $(2–10)\cdot10^6$ циклів.

Всі випробування виконують на спеціальних машинах на стандартних зразках.

Крім механічних випробувань, металеві матеріали піддають технологічним випробуванням (на згин, перегин, на іскру, видавлювання тощо) з метою визначення їх придатності до різних технологічних операцій в процесі виготовлення деталей.

На відміну від механічних випробувань результати технологічних випробувань не виражають числовими характеристиками властивостей. Якщо матеріал витримує технологічне випробування за стандартним методом, то такий матеріал

вважають придатним для певної технологічної операції. Технологічні випробування дозволяють також виявити деякі дефекти матеріалу (надриви, тріщини, розшарування та ін.), тому їх використують для контролю якості металу.

1.5. Основи раціонального вибору матеріалів

Певні умови роботи виробів часто є дуже специфічними: низькі чи навпаки високі температури, агресивні хімічні середовища, знакозмінні циклічні навантаження, особливі умови тертя і т.і. А іноді матеріали працюють в умовах одночасної дії зазначених факторів, тому при виборі матеріалу треба в першу чергу всебічно розглянути умови його роботи й провести ранжирування факторів, що діють на матеріал, за ступенем їх впливу на надійність машини чи механізму. Визначальні фактори треба враховувати обов'язково, а менш визначальні – по можливості.

Через те що конструкційні матеріали характеризуються певними механічними, фізико-хімічними і технологічними властивостями, розглядати треба всю гамму властивостей, особливо якщо в конструкції повинні працювати різні матеріали.

Призначення того чи іншого матеріалу для певного виробу потребує врахування:

1) вимог до конструкційних матеріалів з точки зору їх відповідності експлуатаційним і технологічним характеристикам;

2) економічної доцільності використання певних груп матеріалів, яка на практиці в значній мірі визначається вартістю матеріалу.

Наприклад, для передачі крутного моменту використовують деталь, яка має назву шестерня. Якщо ми говоримо про сільськогосподарські машини, то в них в основному використовують шестерні, виготовлені з металевих матеріалів – сталі (це залізовуглецевий сплав). У деяких випадках, коли потрібна висока корозійна стійкість використовують кольорові металеві сплави, наприклад бронзи

(це сплав на основі міді з оловом, алюмінієм та ін.). Такі шестерні будуть набагато дорожчими, бо кольорові сплави самі набагато дорожчі, ніж залізовуглецеві. Але й в золотому годиннику теж застосовують шестерні – у цьому випадку вони виготовлені з золота, і це виправдано.

Через неправильний вибір матеріалу знижується якість конструкцій, машин і обладнання.

ГЛАВА 2. АТОМНО-КРИСТАЛІЧНА БУДОВА МЕТАЛІВ

2.1. Металевий тип міжатомного зв'язку і його вплив на властивості

Всі основні специфічні властивості металів у твердому стані пояснюються особливостями внутрішньої будови металів та наявністю міжатомного *металевого* зв'язку.

Атоми металів мають, як правило, 1–2 електрони на зовнішній електронній оболонці, які слабко зв'язані з ядром і можуть легко відриватися від нього, угруповуючись та утворюючи так званий *електронний газ*. Атоми, що втрачають електрони, стають позитивно зарядженими іонами, розташованими в певному порядку. Металевий зв'язок здійснюється шляхом взаємодії між позитивно зарядженими іонами і електронним газом, що рухається між ними. Треба підкреслити, що відсутність спрямованості зв'язку у цьому випадку є причиною високої пластичності і проводимості металів.

Деякі типи міжатомного зв'язку є жорсткими і спрямованими, що пояснює крихкість інших речовин.

2.2. Типи кристалічних граток у металах

У твердому стані атоми (іони) металів розташовуються в строго визначеному порядку, утворюючи в просторі правильні кристалічні гратки. Таке розташування атомів відрізняє кристалічні тіла від аморфних (скло, смола тощо), де атоми розміщені хаотично.

Просторова кристалічна гратка будь-якого металу складається з безлічі сполучених елементарних комірок, які розміщуються в певному порядку, і як будинок з цеглин будують просторову гратку. Через це просторові схеми кристалічних граток зображують у вигляді елементарних комірок.

Елементарна кристалічна комірка – це найменший об'єм кристала, що дає уяву про атомну структуру металу.

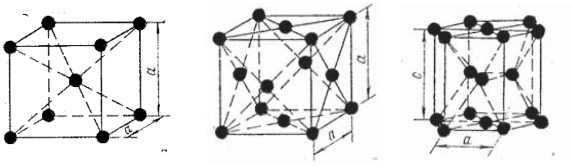
Розмір кожної елементарної комірки характеризує її період.

Період кристалічної гратки – це відстань між центрами найближчих атомів на координатній осі в елементарній комірці.

Крім періоду, кожну елементарну комірку характеризують коефіцієнт компактності і координаційне число.

Коефіцієнт компактності – це відношення об'єму всіх атомів, що припадають на елементарну комірку, до її об'єму.

Координаційне число – це число сусідніх атомів, які знаходяться на рівній і найменшій відстані від даного атома.



ОЦК (Cr, Fe, Mo, W, V, Na, Li, K) **ГЦК** (Ni, Cu, Pb, Al, Au, Ag, Fe) **ГЩУ** (Ti, Zn, Mg, Be, Cd)

Рис. 2.1. Типи кристалічних граток в металах.

Найхарактернішими для металів є такі типи кристалічних граток (рис. 2.1):

- об'ємноцентрована кубічна гратка, скорочено ОЦК;
- гранецентрована кубічна гратка – ГЦК;
- гексагональна щільноупакована гратка – ГЩУ.

Для об'ємноцентрованої гратки коефіцієнт компактності становить 0,68, а координаційне число – К8. Такі гратки мають, наприклад, хром, залізо (при певних температурах), молібден, вольфрам, ванадій, натрій, літій, калій та ін.

Гранецентрована кубічна і гексагональна щільноупакована гратки мають коефіцієнт компактності 0,74 й координаційне число К12. ГЦК гратку мають

нікель, мідь, свинець, золото, алюміній, срібло та залізо (при певній температурі) та ін. ГЩУ просторову гратку мають титан, цинк, магній, берилій, кадмій.

Переважаючою серед металевих елементів є ГЦК гратка, бо її мають майже 80% металів. На другому місці знаходиться ОЦК гратка, яку мають біля 20% металевих елементів. І лише у декількох випадках зустрічається ГЩУ гратка.

2.3. Анізотропія кристалів

Різноманітні властивості кристалів можна поділити на дві групи. До першої групи належать так звані *структурно-нечутливі* властивості: густина, питома вага, теплоємкість, теплопровідність та деякі інші, значення яких не залежать від густини атомів у різних кристалографічних напрямках. У той же час більшість механічних, хімічних і фізичних властивостей залежить від густини атомів. Через це до другої групи *структурно-чутливих* властивостей відносять такі характеристики, як міцність, пружність, швидкість розчинення, магнітні характеристики та багато інших. Залежність властивостей від напрямку в кристалічних гратах називають ***анізотропією*** (гр. *anisos* – нерівний і *tropos* – напрямок). У монокристалах анізотропія виявляється найбільшою мірою, наприклад: міцність зразків, вирізаних у різних напрямках з монокристалу міді, відрізняється приблизно в три рази, а пластичність – більш як у п’ять разів; монокристали кобальту здатні намагнічуватися в одних напрямках у три рази більше, ніж в інших.

Реальні метали – тіла полікристалічні і складаються з багатьох по-різному орієнтованих у просторі кристалів (зерен), через що властивості металів у будь-якому напрямку усереднені, однакові, тому кажуть, що полікристали *ізотропні*. Проте, коли обробка металів сприяє переважному орієнтуванню окремих кристалів (наприклад, при прокатуванні, куванні), тоді полікристалічні метали також стають анізотропними. Так, міцність холоднокатаних зразків, вирізаних у напрямку впоперек прокатування, вища, ніж міцність зразків, вирізаних вздовж прокатування; коефіцієнт теплового розширення листа з цинку може відрізнятися в 1,5–2,0 раза залежно від напрямку прокатування.

Штучно створену однакову орієнтацію кристалів називають *текстурою.* А тіла, в яких окремі кристали переважно орієнтовані в деяких напрямках, називають текстурованими. Штучне текстурування є одним із засобів виготовлення матеріалів з високим рівнем властивостей. Наприклад, текстурування електротехнічної сталі дає змогу підвищити її магнітну проникність у деяких напрямках до 30 разів.

На відміну від кристалічних, *аморфні* тіла мають однакову насиченість атомами в усіх напрямках (через хаотичне розміщення атомів у просторі), і тому є тілами *ізотропними.*

2.4. Поліморфізм

Серед металів та деяких неметалів поширене явище ***поліморфізму*** (гр. *polymorphos* – різноманітність), яке полягає в зміні типу кристалічної гратки при зміні температури або тиску.

Приблизно половина всіх металів є поліморфними. Різні кристалічні форми тієї ж самої речовини називають *поліморфними модифікаціями*, а перехід з однієї модифікації в іншу – *поліморфним перетворенням*.

Поліморфні перетворення, як і перехід із твердого стану в рідкий і навпаки, втрата магнітних властивостей та деякі інші явища супроводжуються тепловим ефектом – виділенням або поглинанням тепла. Рушійною силою поліморфного перетворення є прагнення до утворення структури з мінімумом вільної енергії, яку за даних умов має певна модифікація кристалічної гратки. Поліморфні перетворення відбуваються при певній температурі, тому їх можна виявити, наприклад, за температурними зупинками, так званими критичними точками, які при будуванні кривих охолодження речовини відображаються у вигляді горизонтальних прямих.

Окремі поліморфні модифікації позначають буквами грецького алфавіту: α, β, γ, δ, які додають до назв металів (наприклад, α-залізо, β-олово) або до їх символів (Fe_{β} , Sn_{α}.). При цьому найбільш низькотемпературну модифікацію позначають α, наступну β і так далі.

При поліморфних перетвореннях змінюється не тільки будова кристалічної гратки металу, а і його властивості – об'єм, пластичність, здатність розчиняти в собі різні домішки та ін. Так, пластичне «біле» олово є його високотемпературною модифікацією Sn_{β}, тоді як α-модифікація, що існує при температурі нижчій за 18°С, являє собою крихкий порошок і належить навіть не до металів, а до напівпровідників.

Під час охолодження α-олово з'являється на звичайному β-олові у вигляді окремих бугорків (так звана «олов'яна чума»). Гратка білого олова з координаційним числом К6 у півтора раза компактніша за гратку сірого олова, що має гратку алмазу з координаційним числом К4. Тому перетворення білого олова на сіре супроводжується зростанням об'єму приблизно на 25%. Сіре олово – це сірий порошок, який не має металевих властивостей. Відбувається це перетворення дуже і дуже повільно, через що біле олово може існувати тривалий час при температурах нижче 18°С.

Плутоній утворює шість різноманітних кристалічних форм, дві з яких відзначаються аномальними властивостями: вони мають від'ємний коефіцієнт теплового розширення, тобто зі зростанням температури метал не розширюється, а стискається.

Поліморфізм металів має велике практичне значення, оскільки він багато в чому визначає поводження і властивості металів при механічній і термічній обробках, легуванні та при роботі в умовах низьких і високих температур.

2.5. Види дефектів кристалічної структури та їх вплив на механічні властивості

Кристалічні граткі описують будову ідеального кристала. Сучасні методи електронно-мікроскопічного та рентгеноструктурного аналізу дозволили встановити, що реальні кристали металів, на відміну від ідеальних, мають деякі структурні недосконалості або дефекти, тобто відхилення від правильної кристалічної будови. Справа в тому, що багато які властивості реальних кристалів у металах щільно зв'язані з характером і мірою дефектності структури. Використовуючи уявлення про кристалічну будову металів, легко зрозуміти, наприклад, анізотропію властивостей, тому що ми можемо все з'ясувати за допомогою найпростіших математичних розрахунків. Без цих уявлень не можна вирішувати питання міцності і пластичності. Однак зростаючий, починаючи з середини 30-х років минулого століття, інтерес до дефектів кристалічної будови з боку наукових досліджень показує, що саме вони мають вирішальний вплив на міцність і пластичність металів і сплавів. І якщо в початковий період розвитку металознавства увагу дослідників було зосереджено на експериментах, що доводили правильне атомне будування твердих металів, то за теперішнього часу найважливіша задача металознавства – дослідження дефектів атомно-кристалічної структури металів та встановлення зв'язку між наявністю цих дефектів і процесами, що відбуваються в металах і сплавах, та їх властивостями.

Дефекти кристалічної будови за геометричними ознаками розподіляють на точкові, лінійні, поверхневі та об'ємні. Перші три групи (точкові, лінійні, поверхневі) належать до мікродефектів, тому що їх не можна побачити через маленькі розміри. Четверта група (об'ємні) – це макродефекти, які можна побачити неозброєним оком.

Точкові дефекти мають в усіх трьох вимірах малі розміри, близькі до міжатомних. До точкових дефектів відносять *вакансії, міжвузлові атоми* і *атоми домішок*.

Точкові дефекти кристалічних граток відіграють визначну роль у процесах дифузії в металах. При цьому переважне значення мають вакансії. Якщо при кімнатній температурі густина вакансій дуже мала (наприклад, для міді 10^{-19} ат.%), то збільшення температури призводить до значного зростання густини вакансій: для міді при температурі 1000°С вона становить 10^{-4} ат.%, що значно полегшує процес діфузії атомів.

Лінійні дефекти відзначаються малими розмірами у двох вимірах і значними – у третьому. До лінійних дефектів відносять *дислокації, ланцюжки вакансій* та *міжвузельних атомів*.

Основним типом лінійних дефектів є дислокація (англ. *dislocation* – зсув, зміщення). Дислокація з'являється при утворенні в кристалічних гратках за якихось причин «зайвої» напівплощини, яку називають *екстраплощиною* (рис. 2.2).

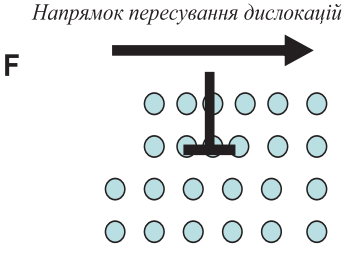


Рис. 2.2. Утворення дислокації

Найважливішою характеристикою дислокації, що визначає її природу, є вектор зсуву – *вектор Бюргерса*, який характеризує величину викривлення кристалічної гратки. Його можна одержати, якщо спочатку обійти замкнений контур в ідеальному кристалі, переходячи поступово від вузла до вузла, а потім цей же шлях повторити в реальному кристалі, вмістивши дислокацію всередину контуру. При цьому в реальному кристалі контур залишиться незамкненим. Вектор, потрібний для замикання контуру, називають *вектором Бюргерса.* У краєвої дислокації вісь дислокації AD є перпендикулярною до вектора Бюргерса. Це відрізняє її від гвинтової дислокації.

Гвинтова дислокація утворюється також шляхом зсуву, але її напрямок є паралельним до вектора Бюргерса. Якщо гвинтова дислокація утворюється рухом за стрілкою годинника, то її називають *правою*, а проти стрілки годинника – *лівою.*

Дислокації можуть дуже легко пересуватися, що здійснюється шляхом *ковзання* або *сходження*.

Кількість дислокацій й здатність їх до пересування впливає на механічні властивості металів.

Насиченість структури дислокаціями характеризує величина *густини дислокацій*, яка вказує загальну довжину дислокацій в одиниці об'єму і вимірюється в $см^{-2}$. У рівноважному стані густина дислокацій дорівнює 10^6–10^8 $см^{-2}$.

Розвиток уявлень про дислокаційну структуру дав змогу з'ясувати найважливішу властивість металів – їх високу пластичність. Можна передбачити два варіанти зсуву верхньої половини кристала відносно нижньої. Згідно з першим цей зсув реалізується шляхом одночасного розриву зв'язків між всіма атомами, що лежать у площині зсуву. Це потребує значних витрат енергії. Другий варіант – зсув, здійснюється поступово, шляхом пересування екстраплощини через всю товщу верхньої частини кристала, при цьому кожного моменту розриваються зв'язки лише між тими атомами, що належать до дислокаційної лінії. Очевидно, що це потребує значно менших енергетичних затрат. Пластичне деформування металевого кристала, і здійснюється шляхом пересування міліонів дислокаційних ліній.

Поверхневі дефекти характеризуються малим розміром тільки в одному напрямку. Наявність цих дефектів обумовлена тим, що структура реальних металічних виробів складається не з одного кристала, а з безлічі маленьких кристалів, орієнтованих по-різному. Поверхневі дефекти утворюються по межах зерен, де накопичуються вакансії, дислокації, атоми домішок.

Самі зерна теж не мають правильного розташування атомів, а складаються з великої кількості разорієнтованих на різні кути зон, які називають *субзернами.*

Таку структуру називають блочною або мозаїчною, а межі між блоками – міжкутовими межами. На межах блоків через їх таке саме разорієнтування, як і на межах зерен, можуть виникати дислокації. Таким чином, реальний метал має складну дислокаційну структуру, яка впливає на його властивості.

Точкові, лінійні та поверхневі дефекти є мікроскопічними, через те що хоча б в одному виміру їх протяжність спільномірна з кількома атомними діаметрами.

На відміну від них *об'ємні* дефекти в атомному масштабі макроскопічні, вони мають в усіх трьох вимірах відносно великі розміри. До об'ємних дефектів можна віднести *пори, тріщини, дряпини.*

Проте, коли йдеться про недосконалості металевих кристалів, тоді частіше мають на увазі мікроскопічні дефекти.

Наявність дефектів будови гратки призводить до значної зміни властивостей металу. Найважливішу роль у цьому відіграють дислокації. Треба зазначити, що це тільки зараз ми достовірно знаємо про існування дислокацій, але вперше цей термін був введений для пояснення істотної різниці між теоретичною та фактичною міцністю металів.

Розрахунки теоретичної границі міцності припускають (рис. 2.3), що під час руйнування металевого кристалу відбувається одночасний розрив міжатомних зв'язків. Так, для заліза теоретична границя міцності повинна дорівнювати 13000 МПа, у той час як у дійсності вона становить приблизно 150 МПа, тобто майже в 100 разів менше. Дислокаційна теорія довела, що мала міцність реальних металів зумовлюється головним чином легкою рухливістю дислокацій, які переміщуються поступово і потребують для цього невеликих зусиль.

Таким чином, відсутність дислокацій в кристалах могла б значно підвищити границю міцності. Виготовлені практично бездислокаційні зразки металів у вигляді ниткоподібних кристалів – «вусів» – довжиною до 10 мм і діаметром 2–10 мкм мали рівень міцності, що дуже наближався до теоретичного значення. Перешкодою для використання таких кристалів були їх малі розміри, однак одержання таких кристалів більших розмірів виявилося неспроможним, через те що

незначне зростання розмірів «вусів» призводило до катастрофічного збільшення кількості дислокацій та значного зменшення границі міцності. Але незабаром з'ясувалося, що міцність металів знижується при зростанні кількості дислокацій тільки спочатку.

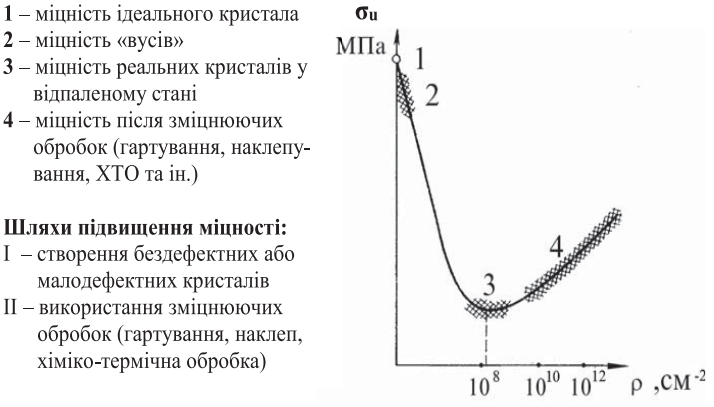


Рис. 2.3. Вплив дефектів кристалічної будови на міцність

Досягнувши мінімального значення, яке припадало на певну густину дефектів, реальна міцність знов починала зростати. Це пояснюється тим, що коли є надлишок дислокацій, тоді вони заважають переміщенню одна одній і через це утруднюють пластичну деформацію. Таким чином, існує ще один шлях підвищення міцності – вживання технологічних способів, які збільшують корисну густину дислокацій. Але в таких випадках темп зростання міцності більш повільний, що свідчить про те, що наявність дислокацій в реальних кристалах є причиною його меншої міцності порівняно з теоретичною. Розмір зерна – одна з важливіших характеристик, що впливає на міцність. Межі зерен – це дуже сильні перешкоди на шляху пересування дислокацій. Зменшення розмірів зерна супроводжується зростанням міжзеренних меж, таким чином дрібнозерниста структура значно ефективніше гальмує ковзання дислокацій. Пластичність при цьому зменшується, а міцність зростає. З цієї причини застосування обробок, що подрібнюють зерно, є перспективним шляхом підвищення міцності.

2.6. Кристалізація металів і способи подрібнення зерна

Будь-яка речовина може знаходитися в різних агрегатних станах: твердому, рідкому, газоподібному та у стані плазми. Перехід з одного агрегатного стану в інший називають ***фазовим переходом***. Одним із прикладів фазових переходів є процес кристалізації.

Кристалізацією називають процес переходу з рідкого чи газоподібного стану у твердий кристалічний.

Метали і сплави в більшості випадків одержують шляхом кристалізації з рідкого стану.

При вивченні процесів кристалізації використовують термічний аналіз з будуванням кривих охолодження в координатах температура металу–час (рис. 2.4). Охолодження металу в рідкому стані супроводжується повільним зниженням температури, бо жодних якісних змін стану не відбувається. При досягненні температури кристалізації на графіку з'являється горизонтальна площадка (крива 1). Сталість температури триватиме до повного затвердіння металу, що є наслідком виділення *прихованої теплоти* кристалізації. По закінченні кристалізації температура знову починає знижуватися, і тверда кристалічна речовина охолоджується. Так виглядає крива теоретичного процесу кристалізації. Реальний процес кристалізації показує крива 2, на якій відбито роль переохолодження в реальних умовах твердіння металів: рідина охолоджується до фактичної температури кристалізації $T_к$, значно нижчої за теоретичну, і тільки тоді виникають енергетичні умови, необхідні для процесу кристалізації.

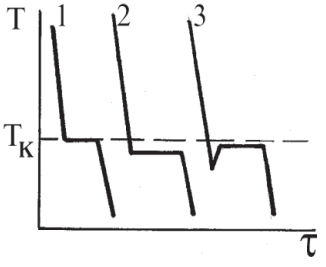


Рис. 2.4. Криві охолодження металу

У деяких металів через велике переохолодження прихована теплота кристалізації бурхливо виділяється в перші моменти початку процесу твердіння, температура підвищується стрибком, наближаючись до теоретичної (крива 3).

Кристалізація складається з двох елементарних процесів, що відбуваються послідовно. Перший процес – це утворення центрів кристалізації (зародків), а другий полягає в зростанні кристалів із цих центрів.

При температурах, близьких до рівноважної температури, створюються умови для виникнення в рідкому металі групувань атомів або *флюктуацій* – мікрооб'ємів з дальнім порядком. Наявність цих флюктуацій (вони можуть виникати, існувати деякий час і руйнуватися) є однією з необхідних умов процесу кристалізації.

Існують поняття *гомогенного* і *гетерогенного* зародження кристалів.

Гомогенне зародження центрів кристалізації відбувається завдяки флюктуаціям великого розміру, коли немає впливу сторонніх центрів кристалізації (інорідних тіл, стінок форми та ін.).

Ще в 1878 році Гиббс довів, що утворений центр кристалізації стає стійким лише при досягненні достатнього критичного розміру. *Критичним* називають мінімальний розмір зародка, здатного до росту при даних температурних умовах. Справа в тому, що під час створення зародка виникає межа або поверхня розділу, на що витрачається багато енергії. Атоми, які знаходяться на поверхні, мають нескомпенсовані зв'язки. Тільки в атомів, що знаходяться всередині зародка кристала, всі атомні зв'язки скомпенсовані. Описане гомогенне виникнення зародків у рідкому металі може відбуватися тільки в дуже чистому металі.

У технічних металах завжди присутня велика кількість домішок (оксидів, неметалевих включень і т.ін.), які за певних умов полегшують виникнення зародків, оскільки фактично є готовими центрами кристалізації. Чим більше домішок, тим більше центрів кристалізації. Таке виникнення зародків на основі сторонніх центрів кристалізації і називають гетерогенним. Полегшувати формування центрів кристалізації можуть і стінки форми.

Існує певний зв'язок між швидкістю виникнення зародків, лінійною швидкістю росту кристалів й ступенем переохолодження. Від цього залежить розмір та кількість зерен на кінець кристалізації. Під *швидкістю виникнення зародків* розуміють кількість кристалів, які сформувалися в одиниці об'єму за одиницю часу, а під *швидкістю росту кристалів* – швидкість збільшення лінійних розмірів кристала, що зростає. На рис. 2.5 можна простежити, що зі збільшенням ступеня переохолодження ΔT швидкість виникнення зародків v_1 і швидкість росту центрів кристалізації v_2 спочатку зростають, досягають максимуму, а потім зменшуються до нуля.

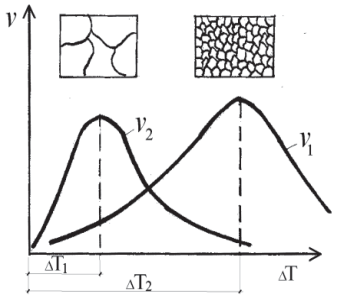


Рис. 2.5. Залежність швидкості виникнення зародків і швидкості росту від ступеня переохолодження.

Зростаючи, кристали ніби просуваються назустріч один одному, у певну мить стикаються між собою, перешкоджаючи росту кожного, внаслідок чого набирають випадкової зовнішньої форми. Такі кристали називають зернами. Якщо ступінь переохолодження малий ΔT_1, то метал буде мати крупне зерно. Умовою одержання дрібнозернистого металу є великий ступінь переохолодження ΔT_2. Таким чином, цінна й бажана для виробництва *дрібнокристалічна* структура металів може бути одержана при їх *швидкому охолодженні.* Але це тільки один з найбільш поширених технологічних способів подрібнення зерна.

Знання основних законів кристалізації та штучне регулювання кількості центрів кристалізації дозволяє одержувати дрібнозернисту структуру сплавів з

високим рівнем механічних властивостей, інакше кажучи проводити модифікування. *Модифікування* полягає в тому, що в рідкий метал вводять домішки, які, не змінюючи хімічного складу сплава, викликають під час кристалізації подрібнення зерна.

Часто у вигляді модифікаторів вводять хімічні елементи, які утворюють тугоплавкі сполуки, що кристалізуються в першу чергу. Ці сполуки (карбіди, нітриди, оксиди) виділяються у вигляді дрібніших частинок і є зародками кристалів, що виникають під час твердіння. Наприклад, під час модифікування алюмінієвих сплавів як модифікатори використовують титан, ванадій, цирконій, для сталі – алюміній, ванадій, титан, для чавуну – магній, феросиліцій, силікокальцій, алюміній.

Розглянемо, наприклад модифікуючий вплив алюмінію з метою подрібнення зерна в сталі. Під час введення алюмінію в сталь він відбирає кисень у закису заліза: $2Al + 3FeO = 3Fe + Al_2O_3$. Унаслідок цього виникають частинки оксиду алюмінію. Вони дуже дрібненькі (менше за 1 мкм) і мають температуру плавлення приблизно 2500°С. У розплавленій сталі вони знаходяться у твердому стані. На поверхні цих частинок легко виникають зародки кристалів заліза. Таким чином, штучно підвищується швидкість зародження центрів кристалізації та подрібнюється зерно сталі.

Таким чином, важливою особливістю металів як кристалічних тіл є те, що вони мають сталу явно визначену температуру кристалізації (і плавлення), чого не мають *аморфні* тіла, у яких відсутнє закономірне розташування атомів у просторі. При нагріванні аморфного тіла (наприклад, скла або смоли), його температура буде підвищуватися поступово й безперервно, і перехід із твердого стану в рідкий, і навпаки, буде поступовим.

Треба відмітити, що застосування сучасних технологій дозволяє одержати дуже великі ступені переохолодження металів і навіть перевести метали в *аморфний* стан (металеве скло).

ГЛАВА 3. ОСНОВИ ТЕОРІЇ СПЛАВІВ

Чисті метали використовують в машинобудуванні дуже рідко. Більшість металевих матеріалів є *сплавами*, що складаються з двох, трьох або більшої кількості речовин. Достатньо сказати, що металеві сплави є основним конструкційним матеріалом, із якого виготовляють приблизно 95–97% деталей машин.

Металеві сплави добувають сплавленням (іноді спіканням) металів з металами або з неметалами. У сплавів зберігаються високі тепло- і електропровідність, ковкість та інші металеві властивості. Будова сплавів складніша за будову чистих металів, тому властивості сплавів значно відрізняються від властивостей чистих металів. Наприклад, технічне залізо має границю міцності близько 150 МПа, а сплави на його основі – понад 2000 МПа. Залізо та нікель – метали феромагнітні, а сплав заліза з 25% нікелю не має цієї властивості. Сплав, що складається з 50% вісмуту, 25% свинцю, 12,5 % олова і 12,5% кадмію, плавиться при температурі 68°С, тоді як найбільш легкоплавкий з його компонентів – олово – має температуру плавлення 232°С.

Усі ці приклади не тільки виявляють можливість зміни властивостей металів при сплавленні їх з іншими елементами, а й свідчать про потребу всебічного вивчення сплавів для раціонального використання їх у різних галузях сучасної техніки.

3.1. Основні типи фаз у сплавах та їх властивості

Широке використання металевих сплавів обумовлюється можливістю регулювати хімічний склад сплаву з метою зміни властивостей у визначеному напрямку.

Основу властивостей металевих сплавів визначає *фазовий склад* і *структура* сплавів. Розглянемо, що ж таке *фаза*, і які типи фаз можуть утворюватися при сплавленні компонентів.

Компонентами називають хімічні елементи та їх сполуки, на основі яких формується даний сплав.

Як правило, більшість технічних сплавів є багатокомпонентними, але практично завжди можна виділити два–три основних компоненти, а решта коректує властивості сплаву.

У рідкому стані більшість сплавів однорідна і у фізико-хімічному розумінні є однією фазою. Після затвердіння в сплаві може сформуватися кілька фаз.

Фазою називають однорідну за складом і будовою частину сплаву, що відокремлюється від інших частин поверхнею розділу, при переході через яку стрибкоподібно змінюється хімічний склад і властивості.

Залежно від фізико-хімічної взаємодії компонентів у твердому стані можна спостерігати такі типи фаз: *первинні тверді розчини* і *проміжні фази на базі хімічних сполук* (рис. 3.1).

Якщо компоненти при затвердінні сплаву розчиняються один в одному, то утворюються, так звані, *первинні тверді розчини.*

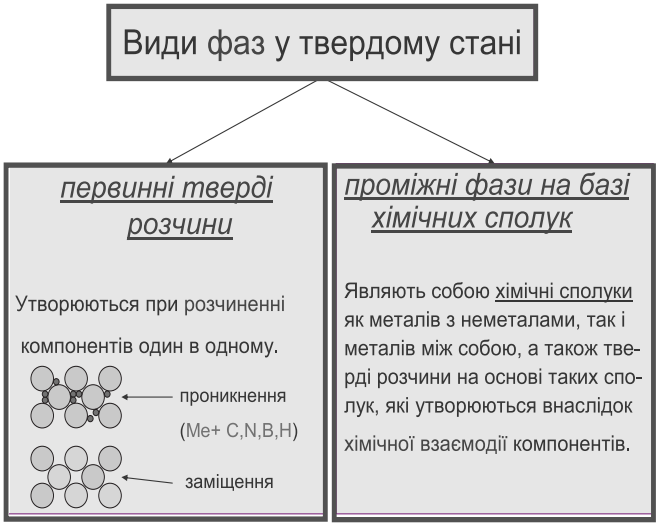


Рис. 3.1. Види твердих фаз у сплавах

Ряд компонентів при затвердінні можуть вступати в хімічну взаємодію і утворювати *проміжні фази,* що являють собою хімічні сполуки як металів з неметалами, так і металів між собою, а також тверді розчини на основі таких сполук.

Твердими розчинами називають фази, що утворюються при проникненні атомів розчиненого елемента в кристалічну гратку розчинника.

Розчинник – це чистий метал або хімічна сполука, кристалічна гратка якого зберігається як основа.

Твердий розчин, що складається з двох або більше компонентів, має один тип гратки і становить одну фазу. Твердий розчин утворюється не при одній сталій концентрації, а в *інтервалі* концентрацій компонентів системи. Зараз вже доведено, що майже всі метали можуть утворювати тверді розчини.

Залежно від характеру розміщення атомів розчиненого елемента у кристалічній гратці розчинника до основних типів відносять тверді розчини *заміщення* та *проникнення* (рис. 3.1).

У твердих розчинах *заміщення* атоми розчиненого елемента заміщують частину атомів розчинника в його кристалічнній гратці. Через те що електронна будова і розміри атомів розчинника і розчиненого елемента відрізняються, при утворенні твердого розчину кристалічні гратки завжди спотворюються, і період їх змінюється. При цьому період кристалічних граток може і зростати, і зменшуватися залежно від співвідношення атомних радіусів розчинника і розчиненого компонента. Спотворення кристалічних граток веде до зміни властивостей.

Заміщення одних атомів іншими в кристалічній гратці може бути обмеженим та необмеженим *(*обмежена і необмежена розчинність).

Тверді розчини *проникнення* утворюються тоді, коли атоми розчиненого елемента розміщуються між вузлами кристалічної гратки розчинника. Період кристалічної гратки розчинника в таких твердих розчинах *завжди зростає*. Тверді розчини проникнення можуть бути *тільки обмеженої розчинності*. Вони

утворюються при взаємодії металів з неметалевими елементами, що мають невеликі атомні розміри: з вуглецем, воднем, азотом, бором. Атоми цих елементів розміщуються в тих зайвих місцях (порах), де для них є більше вільного простору. Роль цього виду твердих розчинів дуже значна в сталях та чавунах.

Незалежно від типу всі тверді розчини позначають грецькими літерами α, β, γ, δ і т.д. в порядку зростання в них концентрації розчиненого елемента.

Якщо звернутися до властивостей твердих розчинів, то треба відзначити, що вони мають металевий тип зв'язку і тому добре обробляються тиском: прокатуванням, штампуванням, куванням. Наприклад, сталі добре деформуються в гарячому стані, бо мають структуру твердого розчину – аустеніту.

Ряд компонентів при затвердінні сплава можуть вступати в хімічну взаємодію і утворювати проміжні фази як металів між собою, так і металів з неметалами.

Проміжними називають будь-які фази, крім первинних твердих розчинів на базі елементів.

Будова кристалічної гратки проміжної фази відрізняється від кристалічних граток вихідних елементів, здебільшого вони мають дуже складну кристалічну структуру. Властивості цих фаз теж відрізняються від властивостей компонентів, які їх утворюють. Як правило, проміжні фази мають значну твердість, крихкість та підвищений електричний опір.

У металознавстві поняття «проміжна фаза» і «хімічна сполука» часто використовують як синоніми. Але треба усвідомити, що поняття проміжна фаза – більш широке. У металевих сплавах класичні сполуки, що підкорюються закону сталості складу, зустрічаються рідше, ніж проміжні фази змінного складу.

У багатьох випадках проміжну фазу можна розглядати як твердий розчин на базі хімічної сполуки сталого складу A_mB_n (m і n – прості цілі числа).

Треба зазначити, що далеко не всі сполуки добре вивчені, але для багатьох типів сполук теорію їх утворення було достатньо розроблено, що дозволяє класифікувати їх в певні групи, основними з яких є електронні сполуки, фази проникнення, фази Лавеса та інші.

3.2. Основні типи діаграм стану подвійних сплавів

У металознавстві діаграмам стану належить особливе місце, через те що вони є базою для аналізу процесів формування фазового складу і властивостей сплавів.

Сплавами називають тверді речовини, які одержують шляхом дифузії елементів у твердому, рідкому й газоподібному станах.

Діаграми стану відіграють важливу роль у визначенні технологічних та експлуатаційних властивостей сплавів, які щільно пов'язані із фазовим складом і структурою сплаву. Знання діаграм стану дозволяє уявити повну картину формування фазового складу будь-якого сплаву, визначити оптимальну температуру заливання сплаву для отримання литих деталей, оцінити рідкотекучість вибраного сплаву та можливість виникнення хімічної неоднорідності, визначити можливість та умови обробки тиском, а також режими термічної обробки.

Діаграми стану характеризують графічну залежність між складом фаз, температурою і концентрацією компонентів, що складають систему (компонентами можуть бути хімічно чисті елементи або хімічні сполуки).

Діаграми стану будують у координатах температура–хімічний склад сплава для умов рівноваги або достатньо близьких до них, тобто в умовах дуже повільного охолодження або нагрівання. Рівноважний стан ще називають стабільним, тому і діаграми стану ще називають діаграмами фазової рівноваги.

Діаграми стану будують на основі даних експериментальних досліджень, отриманих різними видами аналізу, це можливо завдяки тому, що будь-яке фазове перетворення сплаву супроводжується зміною фізико-механічних властивостей або тепловим ефектом.

Зв'язок між властивостями і діаграмою стану. Між типом діаграми стану і багатьма властивостями сплавів існує певна залежність. При утворенні твердого розчину границя міцності під час розтягування, границя текучості і твердість підвищуються, зберігаючи достатню пластичність. Поєднання підвищеної міцності та пластичності дозволяє використовувати сплави із структурою твердих розчинів як основу конструкційних матеріалів. Ливарні властивості таких сплавів низькі, але вони порівняно легко деформуються. Утрудненою є і обробка різанням унаслідок високої пластичності.

Зазначені закономірності є основою при створенні складу сплавів з необхідними властивостями.

Якщо діграма стану відбиває утворення тільки однофазного чи двофазного стану в системах сплавів, то слід зауважити, що особливістю твердіння всіх сплавів таких систем є те, що всі вони твердіють при постійному зниженні температури. У той же час у багатьох інших системах сплавів відбуваються *трифазні* перетворення, у зв'язку з чим на діаграмах стану існують *горизонтальні лінії трифазної рівноваги*. Трифазні перетворення відбуваються при сталій температурі, і на кривій охолодження можна побачити горизонтальну площадку.

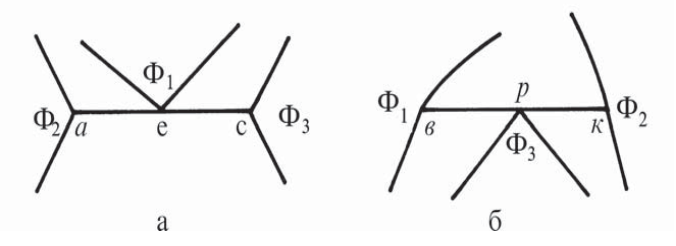


Рис. 3.2. Види трифазної рівноваги

Умовно основні типи трифазних перетворень у сплавах, що відбуваються при сталій температурі, можна поділити на два класи за типом фазової реакції (Бльшаков та ін., 1998): *розпаду* (рис. 3.2,*а*) і *синтезу* (рис. 3.2,*б*).

У першому випадку фазова реакція має вигляд: $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 + \Phi_3$. На діаграмі стану таку фазову реакцію відбиває певне розташування ліній фазової рівноваги:

область існування вихідної фази $Ф_1$ однією точкою торкається *зверху* лінії трифазної рівноваги (рис. 3.2,*а,* точка *е*), тимчасом як кінцеві точки горизонталі вказують на продукти розпаду: фази $Ф_2$ і $Ф_3$ (відповідно точки *а* і *с* на рис. 3.2,*а*). Типовими фазовими реакціями цього різновиду є *евтектичне* та *евтектоїдне* перетворення, з якими ми познайомимося нижче. Діаграми стану з трифазною рівновагою найчастіше мають сплави, що використовують як конструкційний або інструментальний матеріал. Властивості двофазних структур залежать від видів фаз, які їх утворюють, та від кількісного співвідношення між цими фазами.

У другому випадку реакція фазового перетворення має інший вигляд: $Ф_1 + Ф_2 = Ф_3$. При цьому змінюється рисунок вузла фазової рівноваги: кінцеві точки горизонталі вказують на вихідні фази $Ф_1$ і $Ф_2$ (відповідно точки *в* і *к* на рис. 3.2,*б*), а *знизу* точкою *р* лінії трифазної рівноваги торкається область існування фази $Ф_3$, яка є продуктом фазового перетворення. У такому разі властивості сплава будуть зумовлені властивостями фази, що утворилася внаслідок трифазного перетворення (Большаков та ін., 2002).

3.3. Діаграма стану залізо–вуглець

Основними компонентами залізовуглецевих сплавів є залізо й вуглець.

Залізо – це сріблясто-сірий металевий елемент, що має атомний номер 26 і електронну структуру $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$, його атомний радіус становить 0,127 нм, атомна маса дорівнює 55,85, густина становить 7,86 г/см^3. Технічне залізо містить 99,8–99,9% Fe, плавиться при температурі 1539 °С, міцність його дорівнює 200–250 Мн/м^2, твердість НВ 60–80, відносне видовження 40–50%, відносне звуження 80%. При температурі нижчій за 768°С залізо феромагнітне. Залежно від температури залізо може мати різні типи кристалічної будови, тобто це метал поліморфний. На рис. 3.3 наведено криву охолодження заліза, на якій можна простежити всі перетворення, що відбуваються при твердінні та подальшому охолодженні заліза. Перша зупинка на наведеній кривій позначає процес кристалізації і відповідає температурі 1539°С. У твердому стані залізо може

змінювати кристалічну будову. Як відомо, поліморфні перетворення відбуваються при сталій температурі. На рис. 3.3 про це свідчать дві температурні «зупинки» при 1392°С і 911°С. Таким чином, існує три поліморфні модифікації заліза, які, починаючи з високотемпературної, позначають, відповідно, δ, γ і α. В інтервалі температур 1539–1392°С існує δ-залізо з ОЦК граткою і періодом 0,293 нм; в інтервалі температур 1392–911°С стійким є γ-залізо, яке має ГЦК гратку і параметр 0,356 нм, а густина його становить 8,0 г/см^3; α-залізо, яке існує при температурах нижчих за 911°С має ОЦК гратку з періодом 0,286 нм і густину 7,68 г/см^3.

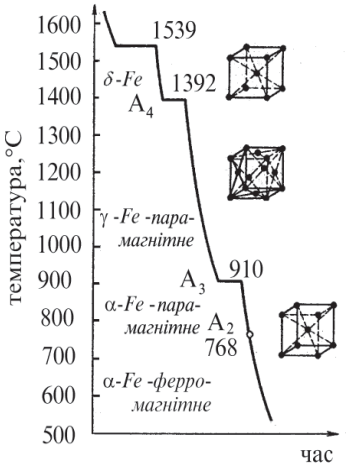
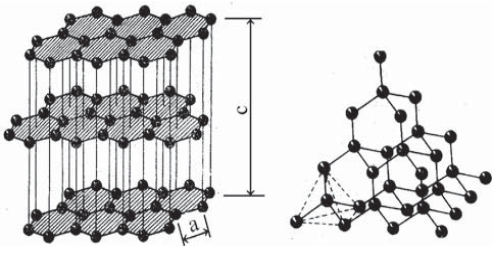


Рис. 3.3. Крива охолодження заліза

Вуглець – це неметалевий елемент з температурою плавлення 3500°С, атомним номером 6, атомною масою 12, з атомним радіусом 0,077 нм і електронною структурою $1s^2 2s^2 2p^2$. Цей елемент також відноситься до поліморфних і може існувати у вигляді графіту і алмазу. Стійким у звичайних умовах є графіт, що має гексагональна шарувата гратка (рис. 3.4,*а*). У шарі міжатомні відстані невеликі й становлять 0,14 нм. Тут існує ковалентний зв'язок, який здійснюється сполукою трьох валентних електронів кожного атома з електронами трьох навколишніх атомів. Між гексагональними шарами відстані великі й становлять 0,34 нм, четверті електрони кожного атома угруповуються, що й надає графіту металічність: електропровідність, теплопровідність та непрозорість. Таким чином, графіт має

складний ковалентно-металевий міжатомний зв'язок. Через шаруватість міцність графіту є невеликою.



а *б*

Рис. 3.4. Кристалічні гратки графіту (*а*) і алмазу (*б*)

Алмазна модифікація вуглецю має тетраедричну гратку, де відстані між кожними двома атомами дорівнюють 0,1545 нм. Існування надзвичайно сильного ковалентного міжатомного зв'язку обумовлює високу твердість алмазу.

Основними *фазами* в залізо-вуглецевих сплавах у твердому стані є тверді розчини вуглецю в залізі, графіт і карбіди.

Залізо з вуглецем утворює тверді розчини проникнення.

δ-Ф (ферит δ) – високотемпературний твердий розчин вуглецю в δ-Fe. Максимальна розчинність вуглецю в $Ф_δ$ становить 0,1% при 1499°С. Цей твердий розчин утворюється під час кристалізації сталей, що містять вуглецю менше ніж 0,5% С.

α-Ф (ферит α) – низькотемпературний твердий розчин вуглецю в α-Fe. Максимальна розчинність вуглецю у $Ф_α$ дорівнює 0,02% при 727°С, при кімнатній температурі вона зменшується до 0,006%, тобто можна сказати, що вуглець майже не розчиняється в залізі при кімнатній температурі.

Низька розчинність вуглецю обумовлює основні властивості феритів:

- низьку твердість 60–80 НВ і міцність 250–270 МПа;
- високу пластичність: границя текучості становить біля 120 МПа, відносне видовження 30–40 %, звуження до 70%.

α-Ф є магнітним на відміну від δ-Ф.

А (аустеніт) – твердий розчин вуглецю в γ-Fe. Ця фаза одержала назву за іменем англійського вченого-металурга Робертса Аустена. Максимальна розчинність вуглецю становить 2,14% при 1147°С, тобто аустеніт здатний розчиняти в собі на два порядки більше вуглецю ніж ферит, що пояснюється розмірами пор, де розміщуються атоми вуглецю при утворенні твердого розчину. При зниженні температури розчинність вуглецю в аустеніті зменшується і при температурі 727°С (це найнижча температура, при якій існує аустеніт в нелегованих сталях) становить 0,8%. Легування сталей може приводити до стабілізації аустеніту при кімнатній температурі, що можна спостерігати на прикладі хромонікелевих та марганцовистих сталей. Незважаючи на більшу твердість (170–200 НВ) і міцність (500–800 МПа), аустеніт, як і ферит, є дуже пластичною фазою.

Ц (цементит) – хімічна сполука, карбід заліза Fe_3C, що містить вуглецю 6,67% вагових. Температура плавлення за результатами останніх досліджень становить 1250°С (за Еліотом 1235°С). Цементит має складну орторомбічну кристалічну гратку з явно вираженою анізотропією зв'язку. Міжатомний зв'язок складний – ковалентно-металічний, що пояснює високу твердість (НВ 800), тугоплавкість та крихкість цієї фази, яка має дуже слабкі феромагнітні властивості при температурі нижче 210°С. Характерна для цементиту анізотропія властивостей є наслідком комплексного характеру зв'язку між атомами і шаруватістю структури. Особливою властивістю цементиту є його метастабільність: при нагріванні карбід заліза розкладається на залізо й графіт. Це явище використовують при виробництві ковкого чавуну. Якщо у сплаві присутні домішки, то утворюється легований цементит, що містить крім заліза й вуглецю, марганець, хром, вольфрам та інші елементи. Твердість такого цементиту значно зростає.

Г (графіт) – одна з модифікацій чистого вуглецю. Графіт, який утворюється у Fe-C сплавах, являє собою майже чистий вуглець. Він м'який та маломіцний, але через лускоподібну будову графіт може гасити вібрацію, що використовується при виготовленні станин металообробних верстатів.

Порівнюючи між собою обидві високовуглецеві фази, треба відзначити і їх схожість. Обидві мають ковалентний зв'язок між атомами всередині шару і металічну проводимість, зумовлену колективізацією електронів у міжшарових проміжках. В обох фазах виявляється значна анізотропія властивостей вздовж й впоперек шарів, що може мати місце при термічному розширенні і деформуванні.

Крім розглянутих фаз, промислові залізовуглецеві сплави вміщують інші фази, наявність яких зумовлена присутністю домішок. Частіше це хімічні сполуки у вигляді сульфідів (FeS, MnS), фосфідів (Fe_3P), оксидів заліза й домішок (Fe_2O_3, Al_2O_3), нітридів (FeN, AlN) та ін. Всі вони мають певний вплив на основні властивості залізовуглецевих сплавів.

Особливість діаграми стану Fe-C пов'язана з існуванням двох високовуглецевих фаз: графіту (стабільна фаза) й цементиту (метастабільна фаза). Відповідно до цього побудовано дві діаграми фазової рівноваги – стабільної і метастабильної, які звичайно викреслюють разом (рис. 3.5), при цьому лінії стабільної діаграми виконують штриховими і позначають літерами зі штрихом. Лінія ABCD є ліквідусом і визначає температури кінця плавлення сплавів, а лінія AHIECF є солідусом, тобто визначає температури кінця кристалізації сплавів.

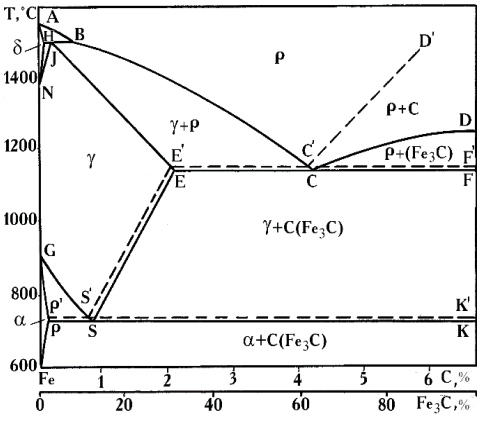


Рис. 3.5. Діаграма стану Fe-C

На діаграмі позначено три однофазні області існування твердих розчинів: феритів (α і δ) і аустеніту. Утворення цементиту, як хімічної сполуки сталого

складу, відображено вертикальною лінією DFK. Решта областей на діаграмі стану є двофазними.

Горизонталі HJB, ECF й PSK відповідають трифазним рівновагам.

При температурі 1499°С (лінія HJB) в сплавах, які містять від 0,1 до 0,5% вуглецю, відбувається перитектичне перетворення за реакцією: $Р_{0,5} + Ф_{0,1} \Rightarrow А_{0,16}$, тобто внаслідок взаємодії рідини з феритом утворюється аустеніт.

При температурі 1147°С для метастабільної рівноваги (лінія ECF) або 1153°С для стабільної рівноваги (лінія E'C'F') відбувається твердіння рідини за евтектичною реакцією.

Решта трифазних перетворень враховує виникнення стабільної або метастабільної вуглецевої фази – графіту або цементиту, тому спочатку ми зупинимося на метастабільному варіанті діаграми, а потім порівняємо його із стабільним.

Координати основних точок обох діаграм наведені у табл. 3.1.

Відповідно до *метастабільної* діаграми:

$$Р_С \Rightarrow А_Е + Ц_F.$$

Ця двофазна структура позначається літерою «Л» і має назву *ледебурит* за іменем німецького вченого Альфреда Ледебура: Л(А+Ц).

Евтектична кристалізація відбувається в усіх сплавах, в яких кількість вуглецю перевищує 2,14%.

При температурах лінії PSK (727 °С) відбувається розпад аустеніту:

$$А_S \Rightarrow Ф_{\alpha Р} + Ц_К.$$

Евтектоїд одержав назву *перліт*, тому що підготовлений мікрошліф із структурою перліту відзначається перламутровим переливом. Це перетворення відбувається в усіх сплавах, що містять більш ніж 0,02% вуглецю, тобто в усіх промислових залізовуглецевих сплавах.

Стабільний варіант діаграми Fe-C, де вуглецевою фазою є графіт, має свої особливості.

Первинний графіт утворюється при кристалізації рідини в заевтектичних сплавах нижче лінії C'D'. Температура 1153°C (лінія E'C'F') відповідає евтектичному перетворенню:

$$P_{C'} \Rightarrow A_{E'} + Г .$$

При цьому не виникає тонкодиференційованої структури, подібної до ледебуриту, тому графітно-аустенітна евтектика не має спеціальної назви.

Таблиця 3.1

Координати основних точок діаграми Fe-C

Стабільна рівновага			Метастабільна рівновага		
точка	t, °C	C, %	точка	t, °C	C, %
A	1539	0,00	A	1539	0,00
B	1499	0,50	B	1499	0,50
C′	1153	4,26	C	1147	4,30
N	1392	0,00	N	1392	0,00
H	1499	0,10	H	1499	0,10
J	1499	0,16	J	1499	0,16
E'	1153	2,01	E	1147	2,14
G	911	0,00	G	911	0,00
S'	738	0,68	S	727	0,80
P'	738	0,02	P	727	0,02
Q	20	0,006	Q	20	0,006

Треба зазначити, що графіт при кристалізації утворюється у вигляді включень певної форми: розгалуженої пластинчастої, вермикулярної чи кулястої.

Підводячи підсумок розгляду фазових перетворень у сталях при охолодженні, відзначимо, що найбільш важливі точки перетворень мають свої позначення. Їх називають *критичними точками сталі у твердому стані* (табл. 3.2). Ці точки позначають літерою «А» (франц. *arret* – зупинка; йдеться про зупинку на кривій охолодження), біля якої внизу ставлять індекс «с» (якщо йдеться про процес нагрівання) або «г» (якщо це процес охолодження), за якими позначають цифру критичної точки, наприклад: A_{c1}. У цьому випадку мається на увазі значення критичної точки A_1 при нагріванні. Значення критичних точок для технічних сплавів використовують при призначенні режимів нагріву і охолодження в

різних технологічних обробках (термічна, тиском і т.ін.). Крім того, критичні точки A_0 та A_2 показують певні температури зміни фізичних властивостей, відповідно, у цементиті та залізі.

Таблиця 3.2

Критичні точки сталі у твердому стані

Критична точка	Лінія діаграми стану	Фазове перетворення
A_0	210^0C	Втрата магнітних властивостей Ц при нагріванні й набування при охолодженні
A_1	PSK	Евтектоідне перетворення А ↔ П
A_2	768^0C	Втрата магнітних властивостей Fe при нагріванні й набування при охолодженні.
A_3	GS	Поліморфне перетворення $Ф_\alpha \leftrightarrow$ А
A_4	NH	Поліморфне перетворення А ↔ $Ф_\delta$
A_{cm}	ES	Розчинення вторинного $Ц_{II}$ при нагріві і виділення при охолодженні $A_{2,14} \leftrightarrow A_{0,8} + Ц_{II}$

ГЛАВА 4. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТЕРМІЧНОЇ ОБРОБКИ

Термічна обробка є одним з важливіших технологічних засобів, які дозволяють керувати властивостями сплавів.

Термічною обробкою називають процес обробки виробів дією тепла з метою зміни структури і властивостей у заданому напрямку.

На металургійних і машинобудівних підприємствах термічна обробка є однією з найважливіших ланок у технологічному ланцюгу виробництва заготовок, деталей машин та інструменту. Її використують і як проміжну операцію для покращання технологічних властивостей (оброблюваності різанням, тиском, тощо) та як кінцеву операцію для надання виробам властивостей, що забезпечують необхідні експлуатаційні характеристики. Чим більш відповідальною є конструкція чи вузол, тим більше в них, як правило, термічно оброблених деталей.

Теорію термічної обробки становить вчення про зміни під дією тепла будови і властивостей металів і сплавів, які не зникають після її припинення.

За глибиною і різноманітністю структурних перетворень, що виникають у результаті використання термічної обробки, з нею не можуть порівнятися ні механічні, ні будь-які інші дії на метали.

Термічну обробку використовували з давенних часів як технологічну операцію, але її розвиток як науки став можливим лише з середини минулого сторіччя. До цього знання людини про термічну обробку були сукупністю рецептів, вироблених на основі багатовікового досвіду. Ці рецепти, часто дуже цінні, передавали з покоління в покоління, секрети виконання окремих операцій інколи втрачали, але дійсна природа процесів, які відбуваються в металах, залишалася таємницею.

Починаючи з 20-х років XX ст., почалося глибоке, детальне вивчення природи, механізму і кінетики структурних перетворень у твердому стані за допомогою сучасних методів досліджень. Підсумком численних досліджень стала

стрункa теорія термічної обробки, яка дозволяє науково обгрунтовано розробляти технологічні процеси і надавати сплавам необхідних властивостей.

4.1. Перетворення в сталі при нагріванні

Нагрівання сталі до температур, нижчих від лінії PSK (критична точка A_1), не супроводиться будь-якими фазовими перетвореннями, які починаються лише при переході через точку A_{c1}, тобто тоді, коли перліт перетворюється на аустеніт. Це перетворення є процесом *дифузійного типу* і повністю підпорядковується законам кристалізації. Особливості цього процесу описує *діаграма ізотермічного утворення аустеніту* (рис. 4.1).

При зазначених температурах термодінамічно стійким стає γ-залізо й, відповідно, аустеніт. Перші зародки зерен аустеніту виникають по краях феритних і цементитних часток перліту. У наступні моменти зростають раніше сформовані і зароджуються нові зерна аустеніту. При цьому утворений аустеніт є неоднорідним за складом. На ділянках, прилеглих до цементиту, концентрація вуглецю вища, ніж на ділянках, прилеглих до фериту. Під впливом цього градієнта концентрацій відбувається дифузія атомів вуглецю всередині зерна аустеніту. Це порушує рівновагу на міжфазній межі аустеніту і цементиту, з одного боку, і аустеніту й фериту –з іншого.

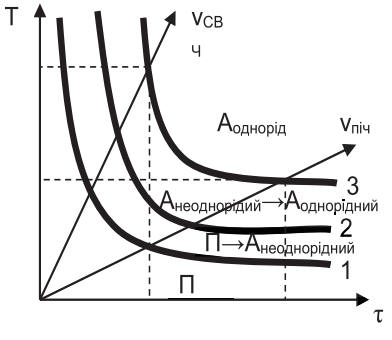


Рис. 4.1. Діаграма ізотермічного утворення аустеніту

Відновлення хімічної рівноваги досягається при подальшому розчиненні цементиту в аустеніті та переході атомів вуглецю у ферит. Таким чином, зростання ділянок аустеніту відбувається внаслідок дифузії вуглецю і поліморфного перетворення Fe_α на Fe_γ.

Швидкість утворення аустеніту залежить від різниці вільних енергій первинної структури сталі та аустеніту, що зароджується, а також від швидкості дифузії атомів вуглецю, необхідних для утворення аустеніту. Підвищення температури нагрівання приводить до значного зростання цих факторів, і швидкість утворення аустеніту зростає.

Вивчаючи процес *утворення аустеніту за безперервного нагрівання,* треба мати на увазі такі його особливості:

1) процес перетворення перліту на аустеніт відбувається в певному інтервалі температур;
2) чим більше швидкість нагрівання, тим вище температури, при яких відбувається перетворення перліту на аустеніт, розчинення фериту й карбідів та вирівнювання аустеніту за складом;
3) чим більше швидкість нагрівання, тим скоріше відбувається перетворення перліту на аустеніт.

Розуміння того, як швидкість нагрівання впливає на процес перетворення перліту на аустеніт, має велике практичне значення, оскільки в реальних умовах виробництва можливі надто високі швидкості нагрівання, наприклад при індукційному нагріванні, а за таких умов тільки дуже високе нагрівання може забезпечити повне перетворення перліту на аустеніт і необхідну структуру та властивості.

4.2. Характеристика діаграми ізотермічного перетворення аустеніту

Якщо сталь із структурою аустеніту, яку вона набуває при нагріванні до температур, вищих за A_{c3} для доевтектоїдних сталей або вищих за A_{cm} для заевтектоїдних, переохолодити до температури, нижчої за A_{r1}, аустеніт стає метастабільним і зазнає перетворення.

Уявлення про кінетику перетворення переохолодженого аустеніту дає експериментально побудована діаграма час–температура–ступінь перетворення або *діаграма ізотермічного перетворення аустеніту*, тобто перетворення, що відбувається за *сталої* температури.

Для вивчення ізотермічного перетворення аустеніту невеликі зразки із сталі нагрівають до температур, які відповідають існуванню стабільного аустеніту (вище лінії GSE), і швидко охолоджують з метою переохолодження аустеніту до температур, нижчих за A_{r1}, наприклад до 700, 600, 500, 400, 300 °С і т.д. (для цього зразки швидко поміщають у піч або ванну з відповідною температурою), а потім витримують стільки, скільки потрібно для повного розпаду аустеніту. Процес перетворення аустеніту спостерігають за допомогою спеціальних методів (наприклад, зміна магнітних властивостей), а за результатами спостережень будують кінетичні криві, кожна з яких показує кількість аустеніту, що розпався залежно від часу, який минув від початку розпаду. Потім точки початку і кінця перетворення з'єднують плавними кривими, які нагадують літеру "с". На діаграмі ізотермічного перетворення аустеніту крива 1 показує початок розпаду аустеніту, а крива 2 – час, необхідний для повного розпаду аустеніту (рис.4.2).

Область, зліва від кривої початку розпаду аустеніту, вказує на тривалість інкубаційного періоду; в інтервалі температур і часу, які відповідають цій області, існує переохолоджений аустеніт, який практично не розпався. Тривалість інкубаційного періоду характеризує стійкість переохолодженого аустеніту, яка спочатку швидко зменшується із зростанням переохолодження, потім досягає мінімуму і знову зростає.

При переохолодженні аустеніту до температури $M_п$ дифузійні процеси повністю пригнічуються, а між температурами $M_п$ і $M_к$ відбувається *бездифузійне перетворення* аустеніту на структуру загартованої сталі – мартенсит.

Залежно від ступеня переохолодження аустеніту розрізняють три температурні області перетворення: перлітну (I), бейнітну (II) і мартенситну (III).

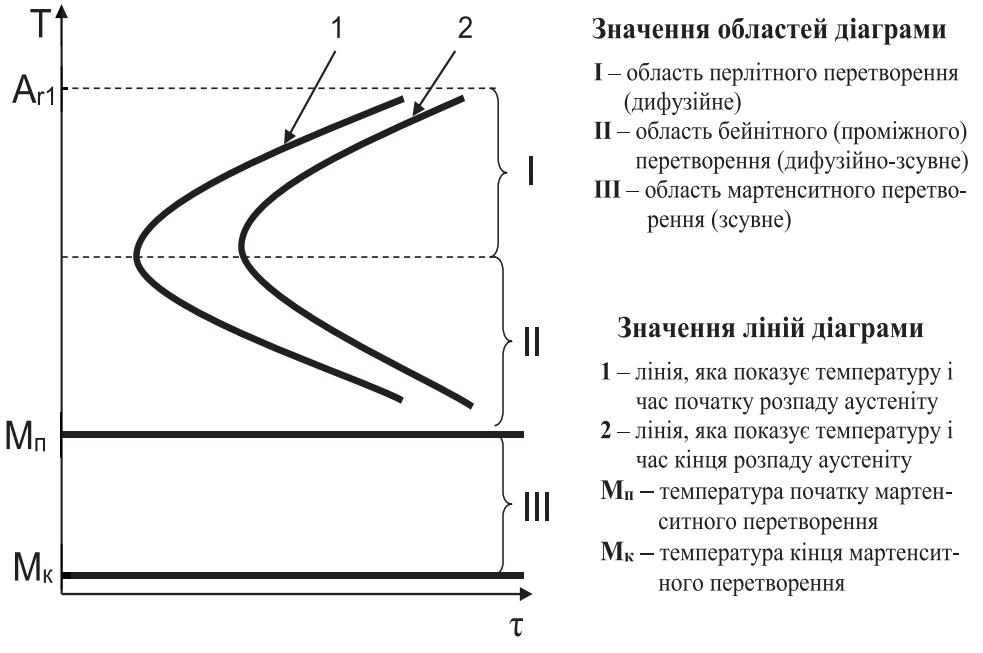


Рис. 4.2. Діаграма ізотермічного перетворення аустеніту

Знання про ці перетворення є важливими для вирішення багатьох практичних задач. Перлітне перетворення відбувається в процесі відпалу і нормалізації сталі, а мартенситне – під час гартування вуглецевих і багатьох легованих сталей. Бейнітне перетворення важливе для розуміння так званого ізотермічного гартування сталі.

Перлітне перетворення переохолодженого аустеніту відбувається при температурах $A_{г1}$..500°С (рис. 4.2) і належить до дифузійних процесів. Під час перетворення відбувається поліморфна перебудова заліза $Fe_\gamma \Rightarrow Fe_\alpha$, а також дифузійний перерозподіл вуглецю в аустеніті, що приводить до утворення ферито-цементитної структури: $A_{0,8} \Rightarrow П\ (Ф_{0,02} + Ц_{6,67})$.

Фазою, яка веде перетворення і виникає першою, є цементит, зародки якого утворюються як правило на межах зерен аустеніту. При зростанні часток цього карбіду прилеглий до нього об'єм аустеніту збіднюється на вуглець, знижує свою стійкість і зазнає поліморфного перетворення $\gamma \Rightarrow \alpha$. При цьому кристали фериту зароджуються на межі з цементитом, що полегшує цей процес.

Величиною, яка характеризує ступінь подрібненості перлітних структур, є *міжпластинчаста відстань* Δ, яка дорівнює середній сумі товщини двох пластинок фериту й цементиту. Залежно від величини Δ перлітні структури умовно поділяють на три різновиди. Грубопластинчасту структуру називають перлітом, тонкопластинчасту – сорбітом (за прізвищем відомого англійського вченого Г.К. Сорбі), а надто тонкопластинчасту – трооститом (за прізвищем французь— приводить до утворення перліту, при температурі приблизно 600°С – сорбіту, а при 500°С – трооститу. Зниження температури ізотермічного перетворення супроводжується зменшенням Δ і зростанням твердості сталі:

Таблиця 4.1

Властивості перлітних структур

Структура	Перліт	Сорбіт	Троостит
Δ, мкм	0,6–1,0	0,25–0,3	0,1–0,15
НВ	180–250	250–350	350÷450

Мартерситне перетворення було відкрито при вивченні гартування сталей.

Мартенсит – це пересичений твердий розчин проникнення вуглецю в α-Fe. Якщо в рівноважному стані розчинність вуглецю в α-Fe при 20°С не перевищує 0,006%, то його кількість в мартенситі може досягати граничної розчинности вуглецю в аустеніті. Надлишкові атоми вуглецю займають октаедричні пори в гратці α-Fe (мартенситу) і значно їх викривлюють.

Мартенситне перетворення відбувається тільки в тому випадку, якщо швидким охолодженням гальмують дифузійний розпад аустеніту і переохолоджують

його до низьких температур, коли дифузійні процеси стають неможливими. Перетворення має *бездифузійний* характер, тобто не супроводжується перерозподілом атомів вуглецю й заліза в гратці аустеніту.

Мартенситне перетворення здійснюється шляхом *зсуву*. На відміну від поліморфної перебудови аустеніту у ферит, що відбувється при більш високих температурах шляхом дифузійного переходу атомів чеерез нормальну межу між зернами аустеніту і фериту, при мартенситному перетворенні спстерігається перехід атомного угруповання, зсув атомів у даній кристалографічній площині до нового їх розташування, яке відповідає новій гратці. Відстані цього зсуву дуже малі, швидкість утворення й зростання кристалів мартенситу надзвичайно велика й досягає 10^3 м/с, тому перетворення триває шляхом виникнення все нових і нових кристалів і розгортається в інтервалі температур.

На відміну від дифузійних перетворень мартенситне перетворення не можна подавити швидким охолодженням. Як тільки переохолодження досягає температури $M_п$, аустеніт починає перетворюватися на мартенсит. Щоб перетворення відбувалося далі, треба безперервно охолоджувати сталь. Якщо охолодження зупинити і витримувати сталь за даної температури, то мартенситне перетворення одразу ж припиниться. Ця особливість мартенситного перетворення дуже яскраво відрізняє його від перлітного перетворення, яке відбувається при сталій температурі до кінця. При досягненні визначеної для кожної сталі температури мартенситне перетворення закінчується. Таку температуру кінця мартенситного перетворення позначають $M_к$.

Температури $M_п$ і $M_к$ не залежать від швидкості охолодження, а тільки від хімічного складу сталі. Наприклад, зростання кількості вуглецю в сталі значно знижує температури перетворення, а у високовуглецевих сталях температура $M_к$ знаходиться нижче 0 °С. Крім цього, всі легуючі елементи, які розчиняються в аутеніті, за винятком кобальту й алюмінію, теж знижують точки $M_п$ і $M_к$.

Мартенситне перетворення дуже чутливе до напружень, а деформація аустеніту може визвати перетворення навіть при температурах, вищих за $M_п$.

Такий мартенсит називають мартенситом деформації, він утворюється в деяких зносостійких сталях.

Характерною особливістю мартенситу є висока його твердість. Мартенситне перетворення в сталях супроводжується помітним зростанням об'єму. Якщо питомий об'єм аустеніту при кількості вуглецю 0,2–1,4% становить 0,12227–0,12528 $см^3/г$, то мартенситу – 0,12708–0,13061 $см^3/г$. Зростання питомого об'єму при утворенні аустеніту є однією з основних причин виникнення при гартуванні великих внутрішніх напружень, що викликають деформацію виробів і навіть появлення тріщин.

На діаграмі ізотермічного перетворення аустеніту залишилось розглянути ще одну температурну область перетворень в інтервалі 500°С–$М_н$. Це область має назву *бейнітне* перетворення (на ім'я американського металознавця Бейна, який вперше побудував діаграму ізотермічного перетворення аустеніту). Структура бейніту, що виникає в результаті цього перетворення, складається з двох фаз: фериту і цементиту. Кількість вуглецю у фериті є головною особливістю бейнітних структур: при температурах перетворення майже 400°С вона може досягати 0,1%, а при 300°С – навіть приблизно 0,2%.

Розрізняють структуру нижнього і верхнього бейніту. Верхній бейніт утворюється при температурах 500–350°С. Виділення грубих карбідів по межах феритних зерен призводить до значного зниження пластичності сталі порівняно з продуктами розпаду аустеніту в перлітній області. Нижній бейніт, який утворюється при температурах 350°С–$М_п$, має підвищену твердість і міцність при достатній в'язкості.

4.3. Перетворення при відпусканні загартованої сталі

Структура загартованої на мартенсит сталі при кімнатній температурів стійка, але в процесі нагрівання внаслідок зростаючої рухомості атомів складаються умови для дифузійних процесів, які змінюють структуру сталі в напрямку

до більш рівноважного стану. Сутність цих процесів полягає в розпаді мартенситу і перетворенні його у ферито-карбідну суміш. Ці процеси одержали загальну назву перетворень при *відпусканні загартованої сталі*.

Перше перетворення відбувається при нагріванні до температур, нижчих за 200 °С. З мартенситу виділяється частина вуглецю у вигляді метастабільного ε-карбіду, який має гексагональну гратку та хімічний склад, близький до Fe_2C. При цьому ділянки твердого розчину збіднюються на вуглець, тетрагональність гратки мартенситу зменшується, а напруження знижуються. Таку структуру називають *мартенситом відпуску* і її основною властивістю є *висока твердість*.

Головним у *другому* перетворенні є перетворення *залишкового аустеніту* на *мартенсит відпуску*, що відбувається при температурах 200–300°С. Паралельно цьому продовжується розпад мартенситу і починається карбідне перетворення.

Під час *третього* перетворення при температурах 350–400°С повністю завершується процес виділення вуглецю з α-розчину (мартенситу), відбувається відкремлення граток фериту й цементиту. Ферито-карбідна структура, яка утворюється наприкінці третього перетворення, має назву *трооститу відпуску*, який характеризується *високою границею пружності*.

Підвищення температури відпускання до 500°С й вище не призводить до зміни фазового складу. Однак з підвищенням температури змінюється мікроструктура: відбувається процес коалесценції та сфероідізації карбідів, що є сутністю *четвертого* перетворення. Структура сталі після відпускання має назву *сорбіту відпуску* і характеризується поєднанням високої міцності і *ударної в'язкості*.

ГЛАВА 5. ОСНОВИ ТЕХНОЛОГІЇ ТЕРМІЧНОЇ ОБРОБКИ

Термічна обробка – це дуже важлива технологічна операція в ланцюгу технологічних прийомів виготовлення виробів, і залежно від вимог до властивостей виробів, вона може бути *проміжною* та *остаточною*. Мета проміжної термічної обробки – поліпшення технологічних властивостей заготовок: зниження твердості, поліпшення оброблюваності різанням, тиском і т.ін.

Остаточна термічна обробка надає готовому виробу такий комплекс властивостей, який забезпечує його необхідними експлуатаційними характеристиками.

Основними видами термічної обробки є відпал, нормалізація, гартування й відпуск.

5.1. Відпал I та II роду

Відпал – це технологічна операція, при якій сталь нагрівають вище критичних точок, витримують при цих температурах і потім повільно охолоджують (зазвичай разом з піччю).

Розрізняють відпал I та II роду.

Під час лиття, обробки тиском, зварювання та при інших технологічних процесах у структурі металів виникають напруження та інші відхилення від рівноважного стану.

Відпал I роду частково або повністю усуває ці відхилення та приводить метали чи сплави в більш рівноважний стан. Залежно від того, які відхилення від рівноваги усуваються, розрізняють: дифузійний (гомогенізаційний) відпал, рекристалізаційний та відпал для зняття напружень.

Процеси, що усувають відхилення від рівноваги, йдуть *мимовільно*, і нагрів під час відпалу I роду необхідний лише для прискорення цих процесів.

Особливістю відпалу I роду є те, що процеси під час відпалу відбуваються незалежно від того, йдуть при цьому фазові перетворення чи ні.

Дифузійний (гомогенізаційний) відпал проводять звичайно для легованих сталей при високих температурах 1050–1200°С у разі тривалого витримування протягом 8–10 годин. Мета такого відпалу – усунення або зменшення ліквації, тобто неоднорідності хімічного складу.

Рекристалізаційний відпал застосовують для зняття наклепу і внутрішніх напружень у виробах, виготовлених методами холодного прокатування, штампування, волочіння й калібрування (листів, прутків, дроту, трубок). Температура відпалу залежить від температури плавлення $T_{пл}$ і її визначають як $(0,3–0,7)T_{пл}$. Для чистих металів температуру визначають в межах сталого коефіцієнта 0,3–0,4, а для сплавів – в межах 0,5–0,6.

Відпал для зняття напружень використовують для литих деталей, зварних виробів, де внаслідок неоднакової швидкості охолодження в різних ділянках виникають напруження (наприклад, залізничні колеса: диск тонкий, а обід і ступиця масивні). Температура нагрівання становить від 160°С після шліфування і до 700°С для зварних виробів.

Фазові перетворення, що відбуваються під час *відпалу II роду* мають велике значення, всі вони йдуть відповідно до діаграми Fe-C. Практична доцільність відпалу II роду визначається тим, як сильно впливають структурні зміни на властивості металів і сплавів.

Розрізняють такі різновиди відпалу II роду: повний, неповний та ізотермічний.

Повний відпал, передбачений для доевтектоїдних сталей, полягає в нагріванні до температури на 30–50° вище за A_{c3}, у витримуванні та повільному охолодженні разом з піччю. Мета відпалу – усунення дефектів структури, що виникають внаслідок попередньої обробки (лиття, гарячої деформації, зварювання, термічної обробки), пом'якшення сталі перед обробкою різанням, зниження напружень та подрібнення зерна.

Неповний відпал для доевтектоїдних сталей передбачає нагрівання вище A_{c1}, але нижче A_{c3}. Проте для таких сталей цей різновид відпалу застосовують обмежено, бо при такому температурному режимі нагрівання надлишковий ферит не зникає. Таким чином, неповний відпал не може усунути дефектів сталі, пов'язаних з присутністю великих зерен фериту, орієнтованих у певному напрямку (*відманштеттова структура*). При такій структурі ударна в'язкість значно знижується.

Неповний відпал використовують для заевтектоїдних сталей з метою сфероїдизації карбідів, бо перліт після безперервного охолодження має пластинчасту будову і важко обробляється різанням, а сітка вторинного цементиту додатково утруднює процес обробки. Температури нагрівання становлять для сталей з 0,9–1,0% вуглецю 740–750°С, а для сталей з 1,1–1,3% вуглецю – 750–780°С. Вище цих температур гріти не можна, бо зерно аустеніту зростає дуже швидко, внаслідок чого пластичність і міцність значно зменшуються. Відпал проводять за циклічним режимом, повторюючи декілька разів після нагрівання і витримування охолодження до 710–720°С (тобто нижче критичних точок). Після такого відпалу структура сталі змінюється на *зернистий перліт* (пластична феритна основа з дрібними вкрапленнями карбідів). Через бажану структуру цей різновид відпалу називають *відпалом на зернистий перліт*.

Ізотермічний відпал застосовують як правило для легованих сталей зі стійким переохолодженим аустенітом з метою одержання структури тонкопластинчастого перліту при одночасному скороченні тривалості відпалу, особливо для виробів малого перерізу. Відпал проводять у двох печах: у першій температура становить A_{c3}+(30–50°С), а в другій – A_{c1}–(30–100°С). У першій печі відбувається нагрівання, а в другій – ізотермічне витримування. Після витримування в першій печі сталь прискорено охолоджують до температур ізотермічного витримування (тобто переносять вироби в другу піч), після чого здійснюють прискорене охолодження на повітрі, а дрібні вироби можна охолоджувати навіть у підігрітій воді

для прискорення процесу. Час ізотермічного витримування визначають за діаграмою ізотермічного перетворення переохолодженого аустеніту. Він повинен бути трохи більше часу повного розпаду аустеніту, що відповідає діаграмі за даної температури.

5.2. Нормалізація сталі

Нормалізація передбачає нагрівання сталі до температури, вищої за лінію GSE діаграми стану Fe-C на 30–50°C, витримування і подальше охолодження на повітрі. Таким чином, доевтектоїдні сталі нагрівають вище за критичну точку A_{c3}, евтектоїдні – вище за критичну точку A_{c1}, а заевтектоїдні – вище за критичну точку A_{cm}. Всі сталі при цьому набувають структуру однофазного аустеніту.

Структура нормалізованого стану – тонкопластинчастий перліт або сорбіт, тому сталь більш тверда, ніж після відпалу.

Нормалізацію застосовують для пом'якшення сталі перед обробкою різанням, для загального подрібнення зерна сталі перед гартуванням, особливо струмами високої частоти.

В заевтектоїдних сталях нормалізація знищує грубу сітку вторинного цементиту.

Частіше нормалізація є проміжною операцією термічної обробки, але вона може бути й заключною, наприклад при виготовленні сортового прокату (рельси, швелери й т.ін.).

5.3. Гартування сталі

Гартування сталі – це термічна обробка, яка передбачає нагрівання сталі до аустенітного стану: вище критичних температур A_{c3} (*повне* гартування для доевтектоїдних сталей) або A_{c1} (*неповне* для евтектоїдних і заевтектоїдних ста-

лей) на 30÷50°С, витримку і подальше охолодження зі швидкістю, вищою за критичну. Мета гартування – зміцнення, підвищення твердості та стійкості проти спрацювання виробів.

Вибір температур гартування. Доевтектоїдні сталі нагрівають вище за критичну точку A_{c3} на 30–50°С (рис. 5.1). У цьому випадку сталь, яка за кімнатної температури має феритоперлітну структуру, при нагріванні набуває структуру аустеніту, який при подальшому охолодженні зі швидкістю $v_г$, вищою за критичну $v_к$, перетворюється на мартенсит.

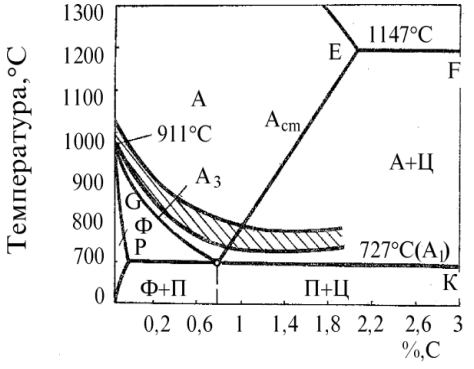


Рис. 5.1. Вибір температур нагрівання для гартування

Евтектоїдні сталі для одержання структури однорідного аустеніту нагрівають вище за критичну точку A_{c1}.

Заевтектоїдні сталі для гартування також нагрівають вище за критичну точку A_{c1}, зберігаючи в структурі сталі при нагріванні певну кількість цементиту. Структура загартованої сталі в такому випадку складається з мартенситу й часток карбіду з великою твердістю, які додатково підвищують твердість, оскільки твердість цементиту вища за твердість мартенситу.

Якщо нагрівання сталі для гартування відбувається в полуменевих та електричних печах у звичайному повітряному окисному середовищі, то мають місце два дуже небажаних процеси – *окиснення* й *зневуглецювання* поверхні (особливо вище 550–600°С). Для запобігання цих процесів в робочий простір печі вводять

захисне газове середовище (атмосфери, що контролюють). Основними складовими частинами таких атмосфер є CO, H_2, N_2, дисоційований аміак, технічний азот та вакуум.

Загартовуваність і прогартовуваність сталі. Вибираючи гартівні середовища треба мати на увазі дві важливі властивості: загартовуваність і прогартовуваність сталі, які є одними з важливіших технологічних характеристик сталі.

Загартовуваність – це здатність сталі підвищувати твердість після швидкого охолодження при гартуванні, у першу чергу вона визначається вмістом у сталі вуглецю: чим більше вуглецю в мартенситі, тим більше його твердість. Добре загартовуються сталі, в яких кількість вуглецю дорівнює або перевищує 0,3%. Легуючі елементи впливають на цю властивість слабко.

Прогартовуваність – це здатність сталі загартовуватися на певну глибину. При гартуванні на мартенсит сталь повинна охолоджуватися так, щоб аустеніт не встиг розпастися на феритно-карбідну структуру, а переохолодився до температури точки $M_п$. Для цього швидкість охолодження виробу повинна бути вищою за критичну.

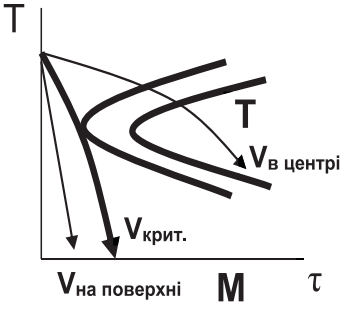


Рис. 5.2. Зміна швидкості охолодження за глибиною

Оскільки критична швидкість охолодження $v_{крит.}$ під час гартування – це мінімальна швидкість, при якій весь переохолоджений аустеніт перетворюється на мартенсит, а крива охолодження є дотичною до С-кривої початку розпаду переохолодженого аустеніту, то можна уявити собі випадок, коли на поверхні, що охолоджується скоріше, швидкість охолодження $v_{на\ поверхні}$ вища за критичну, а

в серцевині, що охолоджується повільніше, нижча за критичну $v_{в\ центрі} < v_{крит.}$. У цьому випадку аустеніт поверхневих шарів перетвориться на мартенсит, а в серцевині виробу він перетвориться на перлітну структуру, тобто сталь не прогартується наскрізь.

За глибину загартованого шару умовно приймають відстань від поверхні до напівмартенситної зони (50% мартенситу+50% трооститу). Діаметр заготовки, в центрі якої після гартування в даному гартівному середовищі утворюється напівмартенситна структура, називають *критичним діаметром* $d_к$. Критичний діаметр визначає розмір перерізу виробу, який прогартовується наскрізь, тобто одержує високу твердість, а після відпускання – й високі механічні властивості по всьому перерізу. Напівмартенситна структура в багатьох випадках не забезпечує максимум механічних властивостей: значно знижуються границя витривалості та ударна в'язкість. У зв'язку з цим прогартовуваність іноді визначають глибиною загартованого шару із структурою мартенситу на 95%. Критичний діаметр для структури з 95% мартенситу приблизно на 25% менше критичного діаметра $d_к$. Повна прогартовуваність на структуру 99,9% мартенситу становить приблизно 50% від напівмартенситної прогартовуваності. Напівмартенситну зону приймають як критерій прогартовуваності, бо її легко визначити за мікроструктурою, а ще легше за твердістю. Наприклад, при 0,13–0,22% вуглецю твердість напівмартенситної структури вуглецевої сталі становить 25 HRC, легованої – 30 HRC; при 0,28–0,32 % вуглецю, відповідно, 35 HRC та 40 HRC; при 0,43–0,52% вуглецю – 45 HRC і 50 HRC та при 0,53–0,62% вуглецю – 50 HRC і 55 HRC.

Для збільшення прогартовуваності деталі даного перерізу треба або підвищувати швидкість охолодження, або знижувати критичну швидкість гартування: в обох випадках переріз загартованої зони буде зростати.

Прогартовуваність тоді вище, коли менше критична швидкість при гартуванні, тобто коли вище стійкість переохолодженого аустеніту.

Леговані сталі внаслідок більшої стійкості переохолодженого аустеніту прогартовуються на більшу глибину, ніж вуглецеві.

Значно підвищують прогартовуваність марганець, хром, молібден та малі кількості бору (0,003–0,005%), менший вплив мають нікель та кремній. Прогартовуваність значно зростає при одночасному введенні в сталь кількох легуючих елементів. Водночас треба пам'ятати, що легуючі елементи підвищують стійкість переохолодженого аустеніту і зменшують критичну швидкість при гартуванні за умов розчинення в аустеніті. Якщо легуючі елементи знаходяться в структурі у вигляді надлишкових часток карбідів, то ці частки сприяють розпаду аустеніту, тому що є готовими зародками і полегшують процес.

Дефекти гартування. Основними дефектами гартування є тріщини (внутрішні чи зовнішні), деформація та жолоблення.

Тріщини виникають у зв'язку з великими розтягуючими напруженнями через зростання об'єму. Крім того, тріщини з'являються внаслідок наявності концентраторів напружень: різких змін перерізу виробу, виступів, заглиблень і т.ін. Це непоправний дефект. Для попередження його виникнення треба при конструюванні деталі запобігати різких кутів, переходів, виступів, а під час самого гартування ретельно контролювати температуру нагріву та використовувати різні способи гартування.

Для запобігання деформації і жолоблення треба при гартуванні правильно занурювати деталі в рідину або проводити гартування в заневоленому стані, в спеціальних штампах і пристроях, або використовувати різні способи гартування.

Якщо при гартуванні деталь занурюють у спокійне гартівне середовище, то інтенсивне утворення пари на поверхні може призвести до *м'яких плям* твердості внаслідок зменшення теплопровідності. Тому при гартуванні треба інтенсивно перемішувати рідину, розбиваючи пузирі на поверхні виробу.

Окисненню й *зневуглецюванню* запобігають, використовуючи захисні середовищ, а неповне гартування усувають правильним повторним гартуванням.

Способи гартування. Залежно від хімічного складу сталі, необхідної структури і механічних властивостей, а також форми і розмірів виробів, що гартуються, застосовують різні технологічні способи об'ємного гартування (рис. 5.3): 1 – гартування в одному охолоднику; 2 – гартування в двох середовищах (переривчасте); 3 – ступінчасте гартування; 4 – ізотермічне гартування.

Гартування в одному середовищі виконують зануренням виробу в охолодне середовище (воду, масло та т.ін.), що забезпечує вищу за критичну швидкість охолодження. У гартівному середовищі виріб залишається до повного остигання. Завдяки простоті цей вид гартування дуже широко використовується. Проте він має істотний недолік через виникнення великих внутрішніх напружень в інтервалі температур мартенситного перетворення.

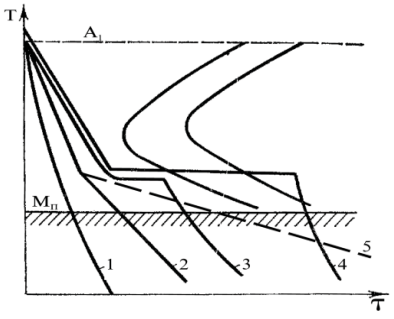


Рис. 5.3. Способи гартування сталі: 1 – в одному охолоднику; 2 – в двох середовищах; 3 – ступінчасте; 4 – ізотермічне.

Для зниження швидкості охолодження в мартенситному інтервалі застосовують спосіб гартування *через воду в масло* (*переривчасте* або у *двох охолодниках*). Спочатку виріб занурюють у воду і після короткого витримування переносять у масло. Швидке охолодження у воді запобігає перлітному перетворенню, а наступне повільне охолодження в маслі зменшує гартівні напруження в мартенситному інтервалі. Як недодержання, так і передержання у воді може призвести до браку. При недодержанні у воді відбудеться частковий або повний розпад аустеніту, і твердість буде зниженою. При передержанні виникнуть дуже великі гартівні напруження, які можуть призвести до жолоблення і, навіть, виникнення тріщин. Таким чином, основним недоліком цього прийому є те, що визначити

потрібний момент перенесення виробу з одного середовища до іншого технічно важко. Унаслідок цього вказаний спосіб не дає стабільних результатів термічної обробки партії виробів.

Уникнути цих труднощів можна при *ступінчастому гартуванні,* яке запропоноване ще Д.К. Черновим, теж є способом зниження швидкості охолодження в мартенситному інтервалі. Нагрітий до температури гартування, виріб швидко занурюють у ванну з гарячим середовищем, а потім після деякої витримки остаточно охолоджують на повітрі або в холодному маслі. Гарячими середовищами можуть бути розплави селітр та солей і мінеральні масла. Час витримки в гарячому середовищі (довжина «сходинки» на кривій охолодження) повинен бути меншим, ніж час інкубаційного періоду при відповідній температурі, яка становить трохи вище за температуру $M_п$. Ступінчасте гартування простіше у виконанні, ніж гартування через воду в масло, і дає більш стабільні результати. Крім того, сталь при температурі «сходинки» знаходиться в аустенітному стані. Після витягнення з гарячого середовища виріб деякий час пластичний, і його можна правити для усунення жолоблення (у тому числі і під пресом).

Ступінчастому гартуванню звичайно піддають невеликі за розмірами вироби змінного перерізу. Довжина «сходинки» значно перевищує час ізотермічного перетворення. Таке гартування називають *ізотермічним* або *бейнітним.* Оскільки температура гартівного середовища при цьому перевищує температуру мартенситного перетворення $M_п$, то аустеніт при ізотермічному витримуванні розпадається з утворенням проміжної структури – нижнього бейніту.

Для вуглецевих сталей цей вид гартування використують рідко, але в легованих сталях він разом з мінімальними деформаціями забезпечує високу міцність, твердість і в’язкість унаслідок зберігання звичайної кількості пластичного залишкового аустеніту.

До цього часу ми розглядали види об’ємного гартування, коли весь виріб занурювали в те або інше охолодне середовище. Але в деяких випадках застосовують спосіб *місцевого* гартування, який має назву *гартування з самовідпуском*.

Його використовують переважно при термічній обробці ударних інструментів, які потребують високої твердості різальних кромок (робочих поверхонь), але разом із тим повинні мати в'язку серцевину.

При місцевому гартуванні нагрітий інструмент охолоджують у воді лише з робочого боку протягом часу, потрібного для гартування. Потім охолодження переривають, зачищають кромку, щоб було ясно видно *мінливий колір*, і витримують на повітрі до того часу, поки охолоджена загартована частина прогріється від внутрішнього тепла до необхідної температури відпуску. Далі виріб швидко охолоджують у рідині до кінця. Момент початку повторного охолодження визначають за появою *кольорів мінливості*, які виникають на шлифованій поверхні стального виробу. Ці кольори відповідають різній товщині окисної плівки, тому що процеси окиснення відбуваються дуже швидко через велику кількість залишкового тепла незагартованої частини виробу. Найтонша плівка має світло-жовтий (солом'яний) колір. По мірі збільшення товщини вона стає бурою, а потім – фіолетовою. При цьому кожний колір відповідає певній температурі нагрівання. Даний спосіб виконують на два кольори мінливості. Фіксація солом'яного кольору мінливості призводить до ефекту низького відпуску: загартована частина стає некрихкою, але зберігає твердість. Фіксація фіолетового кольору надає загартованій частині міцність і в'язкість, тобто фактично відповідає високому відпуску.

Щоб забезпечити якісне гартування з самовідпуском при обробці окремих деталей, треба мати великий досвід, бо час витримки і температуру визначають «на око». Найпростішим способом нагрівання деталей для гартування, який застосовують у невеликих майстернях, є нагрівання в ковальських горнах. При цьому температуру нагрівання теж визначають «на око», але вже за *кольорами розжарення* сталі, які відрізняються від кольорів мінливості відповідними температурами.

У той же час на деяких підприємствах сільськогосподарського машинобудування в останні роки впроваджується цей різновид гартування для деталей

типа зірочок при обробці робочої поверхні струмами високої частоти. За допомогою теплотехнічних розрахунків визначають час охолодження після нагрівання СВЧ, що забезпечить наявність залишкового тепла, необхідного для відпускання.

5.4. Обробка сталі холодом

У багатьох сталях мартенситне перетворення закінчується лише при температурах нижче 0 °С, завдяки чому при звичайному гартуванні перетворення не відбувається до кінця, і в структурі загартованої сталі присутній залишковий аустеніт. Це значно впливає на властивості сталі: знижуються твердість і зносостійкість. Але залишковий аустеніт може мимовільно перетворюватися на мартенсит в процесі роботи, що призводить до зміни розмірів точних деталей або інструментів. З метою запобігання наявності залишкового аустеніту використовують *обробку холодом*, яку ще в 1937 р. запропонував О.П. Гуляєв. Охолодження проводять до температур від -30 до -80°С. Важливою особливістю є те, що обробку сталі холодом треба проводити одразу ж після гартування, тому що витримка більше, ніж 0,5–1,0 год може призвести до виникнення явища *стабілізації аустеніту*, що зменшує ефект обробки холодом.

Головне призначення обробки холодом – стабілізація розмірів таких виробів, як калібри, кульопідшипники, вимірювальний інструмент, інструмент для обробки отворів, де розміри повинні витримуватися з точністю до мікронів і часток мікронів. Друге призначення – підвищення твердості й зносостійкості різального інструменту, штампів та вимірювального інструменту.

5.5. Характеристика й призначення основних видів відпуску

Відпуск є заключною операцією термічної обробки загартованих виробів, яку *обов'язково* проводять після гартування на мартенсит. Відпуск застосовують

для зменшення внутрішніх напружень і надання виробам необхідних властивостей.

Залежно від необхідних властивостей і відповідних перетворень за температурною ознакою розрізняють низький, середній і високий відпуск.

При *низькому* відпуску (120–250°С) з тривалістю 1–3 год відбувається зняття внутрішніх напружень, мартенсит гартування перетворюється на *мартенсит відпуску*, твердість практично не змінюється, зникає гартівна крихкість. Низькому відпуску піддають різальний або вимірювальний інструмент, загартовані деталі після цементації, ціанування, нітроцементації або після поверхневого гартування (шийки валів, шліци, зубці шестерен та зірочок).

Середній відпуск (350–450°С) супроводжується більш істотними змінами в структурі і властивостях сталі: мартенсит перетворюється на *троостит відпуску*, твердість при цьому знижується, підвищується границя пружності і витривалості. Цьому відпуску піддають пружини, ресори, пружні кільця.

Високий відпуск здійснюють при температурі 500–680°С. При цьому мартенсит гартування перетворюється на *сорбіт відпуску.* Внутрішні напруження зникають майже зовсім. Після високого відпуску сталь має досить високу міцність і в’язкість. Високому відпуску піддають вали, шестерні, шатуни тощо.

ГЛАВА 6. ПОВЕРХНЕВЕ ЗМІЦНЕННЯ

Конструкційна міцність багатьох деталей машин залежить від стану матеріалу в поверхневих шарах деталей. Наприклад, у валів, шестерен, зірочок та деяких інших деталей в умовах значного зносу працює тільки тонкий поверхневий шар, і саме його властивості, насамперед твердість, зумовлюють тривалість роботи деталі. У той же час серцевина таких деталей повинна мати певну в'язкість, щоб сприймати ударні навантаження без виникнення тріщин та руйнування. Саме для надання в першу чергу високої зносостійкості такі вироби піддають поверхневому зміцненню.

Залежно від вимог до властивостей поверхні, умов роботи деталі, а також матеріалу, з якого її виготовлено, використовують такі методи поверхневого зміцнення: поверхневе гартування, поверхневе зміцнення наклепуванням та хіміко-термічну обробку.

6.1. Поверхневе гартування

Поверхневе гартування забезпечує високу твердість і стійкість проти спрацювання поверхневого шару й водночас гарантує загальну міцність деталей машин за рахунок збереження в'язкості серцевини.

Цей спосіб поверхневого зміцнення широко використовують у технології сучасного машинобудування для термічної обробки деталей, що працюють на удар і в той же час повинні мати високу твердість поверхневого шару, наприклад: шийки колінчастих валів двигунів внутрішнього згоряння, кулачкових валів, шліцевих валів, стінки гільз циліндрів, пальці ресор тощо.

Під час гартування деталь треба нагріти лише в поверхневому шарі, а потім швидко охолодити. Сутність поверхневого гартування полягає в тому, що поверхневі шари деталі швидко нагрівають вище за критичні точки і утворюється значний градієнт температури за перерізом деталі. Якщо нагріваня припинити, то після наступного охолодження шар металлу з аустенітною структурою,

нагрітий вище за A_{c3}, пройде повне гартування, проміжною буде зона, нагріта вище за A_{c3} з аустенітноо-феритною структурою, де відбудеться неповне гартування, а серцевина не загартується.

Нагрівання поверхневих шарів значно вище за A_{c3} явище звичайне при всіх способах поверхневого гартування, однак це необов'язково призводить до перегріву та погіршення структури і властивостей.

Справа в тому, що чим більше швидкість нагрівання, тим при більш високих температурах відбуваються всі фазові перетворення і завдяки малій тривалості нагрівання зростання зерна аустеніту не відбувається.

Практика показала, що для кожної швидкості нагрівання існує свій інтервал температур, які забезпечують отримання дрібнозернистої структури. Тому температури нагрівання під гартування вибирають не відповідно до діаграми стану, а використовують спеціальні діаграми залежності температури нагрівання від швидкості нагрівання.

Найбільше розпосюдження отримало гартування з нагріванням *струмом високої частоти* (гартування СВЧ) або *індукційним* нагріванням, яке вперше було застосовано в 1938 р. Цей метод заснований на тому, що вироби нагрівають в індукторі, у якому перебігає струм високої частоти. Нагрів СВЧ ґрунтується на тому, що у виробі, який вміщено в індуктор, виникають так звані *вихрові струми*, що супроводиться виділенням тепла. Оскільки вихрові струми концентруються в поверхневих шарах, то вони зумовлюють лише поверхневе нагрівання виробів. Потрібних глибини і температури нагрівання поверхневого шару досягають зміною частоти струму і швидкості переміщення індуктора або виробу. Потім нагрітий шар швидко охолоджують водою, яка подається крізь внутрішні отвори в індукторі, або виріб скидають у гартівну ванну.

Для нагрівання використовують *лампові* (з частотою 10^4–10^7 Гц) або *машинні* (з частотою 500–10^4 Гц) *генератори високої частоти*. Чим вище частота, тим менше глибина загартованого шару:

$$\delta = 5030\sqrt{\frac{\rho}{\mu \cdot f}},$$

де f – частота струму, Гц; ρ – питомий опір струму, Ом·см; μ – магнітна проникність, Гс/Е; δ – глибина гартування, см.

Лампові генератори використовують для отримання шару від часток міліметрів до 2–4 мм (деталі невеликого розміру), а машинні – від 2 до 10 мм (великі деталі). Індуктори виробляють з мідної трубки, а їх форма і розміри залежать від форми і розмірів поверхні, що обробляється.

Індукційне гартування характерізується великою швидкістю обробки (швидкість нагрівання сягає 500 К/с, що на 2–4 порядки більше швидкості печного нагрівання) і економічністю процесу, що дає змогу використовувати його при масовому виробництві однотипних деталей, наприклад, в автотракторному та сільськогосподарському машинобудуванні.

В останні роки почали використовувати поверхневе гартування на мартенсит з *лазерним нагріванням*. Швидкість лазерного нагрівання становить $10^4 \div 10^6$ К/с, що на 2–4 порядки вище швидкості індукційного нагрівання. Внаслідок цього приповерхневі внутрішні шари залишаються холодними, і після припинення нагрівання відбувається охолодження поверхневого шару за рахунок відведення тепла в сусідні холодні шари, тобто гартівне середовище зовсім не потрібне.

Під час лазерного нагрівання утворюється дуже дрібне аустенітне зерно і залишаються нерозчиненими частки карбідів, що зумовлює підвищену міцність і зносостійкість поверхневого шару (звичайно до 1 мм завтовшки). Завдяки надто малому часу перебування сталі при високій температурі, окисненість поверхні зводиться до мінімуму, тому його можна виконувати у повітряній атмосфері.

Для поверхневого гартування великогабаритних виробів та в умовах ремонтного господарства використовують поверхневе гартування з нагріванням *полум'ям пальника.* Газокисневе полум'я з температурою 2000–3000°С спрямовується на ділянку поверхні, яку треба загартувати, і розігріває шар глибиною

2–4 мм до температур, вищих за A_{c3}. Потім на розігріту ділянку крізь отвори в охолоджуваній частині наконечника пальника вибризкується вода. Недоліками цього методу є неточне регулювання глибини та температури загартованого шару, а також можливість значного перегріву.

6.2. Основи хіміко-термічної обробки

Хіміко-термічною обробкою (ХТО) називають обробку, що поєднує термічний та хімічний вплив з метою зміни складу, структури і властивостей поверхневого шару виробу.

Під час хіміко-термічної обробки відбувається поверхневе насичення сталі відповідними елементами (C, N, Al, Cr, B, Si та ін.) шляхом їх дифузії в атомарному стані із зовнішнього середовища (твердого, газового чи рідинного) при високих температурах. При цьому значно підвищується міцність, твердість та деякі інші важливі властивості поверхневого шару, що залежить від того, яким елементом насичують поверхню.

Необхідною *умовою* здійснення ХТО сталі є *розчинність* елемента, яким насичують поверхню в залізі у *твердому* стані, а також наявність цього елемента в *атомарному стані*.

При ХТО в герметично замкнених печах послідовно відбуваються такі *три основних процеси*:

- *дисоціація* хімічних сполук, до складу яких входить потрібний елемент, в результаті чого без доступу повітря цей елемент виділяється в активному атомарному стані, наприклад:

$$2NH_3 = 2N + 3H_2;$$

- *абсорбція* (поглинання) поверхнею металу вільних атомів та розчинення їх;
- *дифузія* атомів елемента, яким насичують поверхню, вглиб метала.

Існує багато різновидів ХТО, і кожен з них одержав назву за назвою того або тих елементів, якими насичують поверхню. Розглянемо деякі з них.

Цементація – це процес поверхневого насичення стальних виробів *вуглецем.*

Мета цементації – одержати тверду поверхню і в'язку серцевину, тому цементації піддають вироби з маловуглецевої сталі з 0,1–0,3% вуглецю. Остаточні властивості цементовані вироби набувають у результаті гартування й низького відпуску, які виконують після цементації.

На цементацію деталі поступають після механічної обробки з припуском на шліфування (50–100 мкм). У багатьох випадках ділянки, що не піддають цементації, захищають тонким шаром міді (20–30 мкм) або ізолюють спеціальними обмазками (до їх складу входять глина, пісок та азбест), які замішують на рідкому склі.

Залежно від стану багатого на вуглець середовища, яке називають *карбюризатором*, розрізняють такі види цементації:

- газову (карбюризатори: CH_4 та CO);
- тверду (карбюризатори: деревне вугілля зернами 2–5 мм та вуглекислі солі);
- рідинну (карбюризатори: розплави солей).

Частіше використовують газову й тверду цементації: газову – в масовому виробництві, а тверду – в дрібносерійному виробництві та при виконанні ремонтних робіт. Цементація має велике практичне значення як метод поверхневого зміцнення на середню глибину 0,5–2,0 мм. Цементують шестерні, поршневі пальці, шліцеві пази тощо.

При *твердій* цементації вироби після механічної обробки складають шарами в спеціальні металеві ящики і старанно пересипають карбюризатором, щоб деталі не дотикались одна одної, трамбують і знову кладуть шар виробів. Відстань між виробами має бути не менше 25 мм. Заповнені ящики щільно закривають кришками і обмащують вогнетривкою глиною, щоб не було доступу повітря. Ящики ставлять у піч, нагрівають до температури 900–1000°С й витримують залежно від потрібної глибини цементації протягом 5–15 годин.

Під час нагрівання й тривалого витримування при високих температурах вуглець з карбюризатора дифундує в поверхневий шар сталі, тому кількість вуглецю тут може становити 0,8–1,0%, а структура поверхневого цементованого шару від серцевини до поверхні буде змінюватися відповідно до вмісту вуглецю: від феритно-перлітної в серцевині до перлітоцементитної на поверхні. Але в той же час структура поверхневого шару не забезпечує достатньої твердості, тому деталі після цементації піддають гартуванню з низьким відпуском.

При *газовій* цементації в печі, де містяться нагріті до 920–950°С деталі, безперервно циркулює цементуючий газ, до складу якого входять окис вуглецю й, наприклад природний газ, основною часткою якого є метан. Газова цементація продуктивніша, її легко механізувати і автоматизувати. На деяких заводах упроваджено у виробництво швидкісний високотемпературний спосіб газової цементації деталей із низьколегованих сталей з нагріванням струмами високої частоти до температури 1050–1070°С.

Рідинну цементацію виконують зануренням деталей у розплавлені солі й витримуванням їх при температурі 840–860°С протягом 0,5–2,0 год. Глибина цементації становить 0,2–0,6 мм. Суміш для цементації може бути такою: SiC – 6–10%; $CaCO_3$ – 75–85%; NaCl – 10–15%. Основною перевагою рідинної цементації є рівномірність нагріву і можливість гартування деталей безпосереднього після нагрівання в соляних ваннах.

Термічна обробка після цементації здійснюється залежно від вимог до механічних властивостей сталі і формує кінцеві властивості поверхні.

Якщо йдеться про спадково дрібнозернисті сталі, то здійснюють одне гартування з нагріванням вище A_{c1} (рис. 6.1,*а*) або з цементаційного нагріву з охолодженням до 820–840°С (рис. 6.1,б). Потім виконують низький відпуск при температурі 150–200°С.

Якщо треба виправити деякі недоліки серцевини або зміцнити її для відповідальних деталей, то роблять подвійне гартування (перше з нагрівом вище A_{c3}, а друге – вище A_{c1}) та низький відпуск (рис.6.1,*в*).

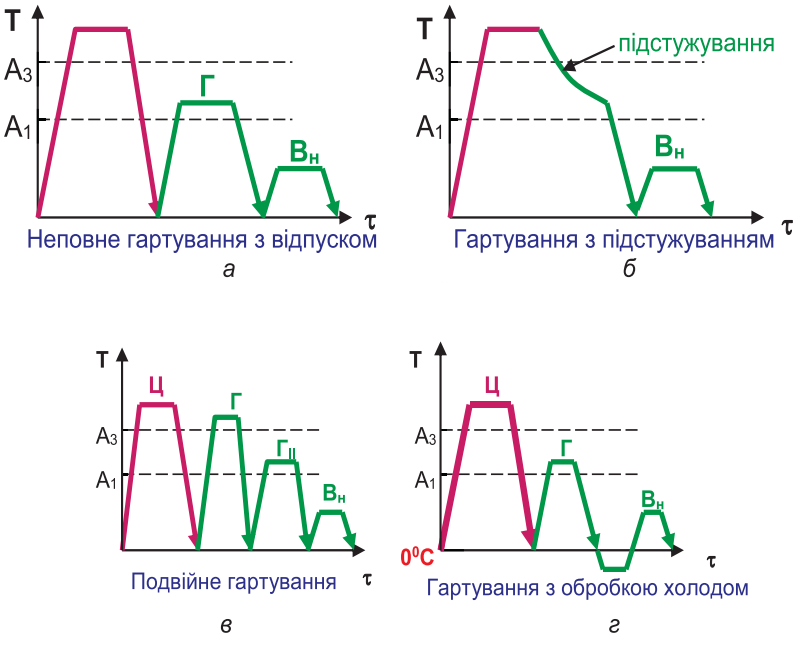


Рис. 6.1. Термічна обробка після цементації

У тих випадках, коли вимоги до структури й властивостей потребують усунення залишкового аустеніту в поверхневому шарі, то після гартування можуть призначати обробку холодом (рис.6.1,*г*).

Азотування – це процес насичення поверхневого шару сталі *азотом*.

Мета азотування – підвищення твердості, зносостійкості, границі витривалості, корозійної стійкості та червоностійкості до 500–550°С.

Основою для правильної уяви про процеси азотування є діаграма стану системи Fe-N. Послідовність утворення фаз при дифузійному насиченні відповідає послідовності їх розташування на діаграмі стану. Наприклад, при температурі азотування 550°С спочатку виникає α-фаза (азотистий ферит), потім γ'-фаза (Fe_4N) й нарешті зовнішній шар – ε-фаза (проміжна фаза з гексагональною щільно упакованою граткою).

Азотування проводять у герметичних камерах, куди під певним тиском подають аміак. При температурі азотування 500–600°С аміак розкладається з утворенням атомарного азоту, який абсорбується поверхнею і дифундує в метал.

Вуглецеві сталі практично не азотують, бо поверхневий шар у них має низьку твердість, крихкий і не має червоностійкості.

Азотуванню зазвичай піддають вироби з легованих сталей, які містять алюміній, молібден, титан, ванадій, тобто елементи, що легко утворюють нітриди і надають поверхневому шару необхідних властивостей, наприклад сталі 30ХТ2, 38Х2МЮА, 30Х3МФ, 30ХГТ, 40ХН2МА, 36ХНТМФА.

Азотуванню піддають готові вироби, що пройшли термічну обробку (гартування з високим відпуском, рис. 6.2) і були відшлифовані до точних розмірів. Тривалість процесу азотування становить від 12–15 до 50 і навіть до 100 год, що є одним з недоліків процесу. Звичайно глибина азотованого шару сягає 0,3–0,6 мм.

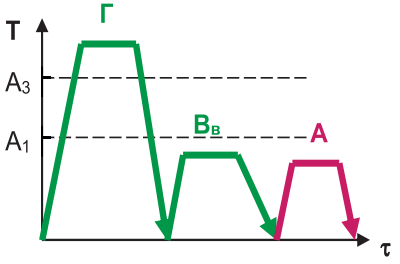


Рис. 6.2. Термічна обробка при азотуванні

Ціанування – це процес одночасного насичення поверхневого шару сталі *азотом* й *вуглецем*.

Якщо процес відбувається у розплавах солей, то він має назву ціанування, а якщо в газовому середовищі, то – нітроцементації.

Завичай глибина шару становить 0,1–0,2 мм, але може бути до 2 мм. Ціанування використовують для деталей невеликих розмірів, якщо глибина зміцненого поверхневого шару не перевищує 0,5 мм. Для невеликих деталей ціанування має деякі переваги: висока швидкість нагрівання у розплавах ціанистих солей забезпечує швидкіше насичення сталі вуглецем та азотом, рівномірне нагрівання деталей у розплаві сприяє отриманню мінімальної деформації.

На ХТО деталі повинні поступати знезжиреними та сухими, без слідів корозії.

Ціанований шар підвищує витривалісну міцність унаслідок утворення стискаючих напружень у поверхневих шарах, підвищує корозійну стійкість та зносостійкість.

Співвідношення між кількістю вуглецю й азоту в поверхневих шарах можна регулювати, змінюючи температуру процесу. При зниженій температурі 530–560°С (*низькотемпературне ціанування*) виріб насичується переважно азотом, а при підвищеній – до 800–950°С (*високотемпературне ціанування*) – вуглецем.

Тривалість процесу ціанування в рідких солях становить 0,5÷0,6 годин, а нітроцементації – 3–12 год.

Низькотемпературне ціанування застосовують після остаточної термічної обробки виробу – гартування й високого відпуску. При високотемпературному ціануванні термічну обробку виконують після ХТО, і вона складається з гартування і низького відпуску.

У ремонтних підприємствах і майстернях часто застосовують *тверде ціанування* (для поршневих пальців, пальців і втулок ресор тощо), при якому деталі змащують спеціальною пастою шаром завтовшки 3–4 мм, або готують суміш вугілля та жовтої кров'яної солі. У першому випадку температура процесу становить 900–930°С, а в другому – 500–550°С.

В останні роки нітроцементація в багатьох випадках витискає звичайну цементацію.

Дифузійна металізація – це процес насичення поверхневого шару сталі *металами* (алюмінієм, хромом, цинком та ін.). Виріб, поверхня якого збагачена на ці елементи, набуває дуже цінних властивостей, до яких можна віднести високу жаростійкість, корозійну стійкість, зносостійкість, твердість тощо.

Залежно від метода перенесення дифузійного елемента на робочу поверхню виробу розрізняють такі основні способи дифузійної металізації:

- занурення в розплавлений метал, якщо дифундуючий елемент має низьку температуру плавлення;
- насичення в розплавах солей, які містять необхідний елемент;
- насичення з сублімованої фази шляхом випаровування дифундуючого елемента;
- насичення в газовій фазі;
- насичення у твердій суміші.

Алітування (насичення поверхні алюмінієм) надає сталі високої окалиностійкості (до 850–900°С) внаслідок утворення на поверхні алітованих виробів тонкої щільної плівки оксидів Al_2O_3. Алітований шар теж має високий опір корозії в атмосфері та морській воді.

Хромування (насичення хромом) застосовують для підвищення твердості, стійкості проти спрацювання й корозії.

Цинкування (насичення цинком) використовують для підвищення корозійної стійкості сталі в атмосфері, бензині, мастилах, гарячих газах (300÷500°С). Таке покриття стійке навіть у кислотах та лугах.

Борування (насичення бором) застосовують для значного підвищення зносостійкості й твердості робочих поверхонь.

За останні роки розроблено чимало способів багатокомпонентного насичення поверхні кількома металами та металоїдами, наприклад, боралітування (комплексне насичення бором і алюмінієм), борохромування і т.ін.

6.3. Використання наклепування для зміцнення робочих поверхонь

Поверхневе зміцнення наклепуванням використовують як заключну операцію після механічної обробки (або після механічної і термічної обробки). Наклепування виконують стальним або чавунним дробом в середньому на грибину до 0,5 мм, накаткою роликом до 5 мм та чеканкою до 15 мм. Всі ці методи

підвищують твердість і стійкість стальних поверхонь проти спрацювання, а головним є те, що значно підвищують границю витривалості і термін служби деталей, що працюють під дією змінних та ударних навантажень (пружини, ресори, шийки колінчастих валів та ін.). Це пояснюється створенням у поверхневому шарі додаткових напружень стискання.

Наклепування дробом застосовують для обробки плоских пружин, листів ресор, циліндричних пружин з круглого дроту, шийок валів, галтелей і різальних інструментів. Стальний дріб діаметром 0,5–1,0 мм або дріб із білого чавуну діаметром 0,4–2,0 мм спеціальними дробометами спрямовується на поверхню деталі і створює наклеп. За одну хвилину можна створити такий наклеп, який дорівнює границі текучості, що збільшує термін служби автомобільних ресор в середньому у 8 разів, а клапанних пружин удвічи. Перенаклеп знижує ефективність обробки.

Наклепування накаткою роликом застосовують для підвищення твердості і стійкості проти спрацювання шийок валів, осей, штоків парових машин і пароповітряних молотів, тощо. Накатка стальним гладеньким роликом підвищує чистоту обробленої поверхні і може замінити шліфування. Для цієї операції використовують токарні або стругальні верстати зі спеціальними пристроями.

Чеканку застосовують для підвищення міцності плоских поверхонь, зокрема зварних швів, а також галтелей. Чеканку виконують за допомогою ударного пневматичного інструмента з відповідною заправленою прямолінійною або криволінійною кромкою.

В усіх розглянутих випадках підвищення механічних властивостей пов’язане з утворенням напружень стиску в поверхневих шарах, а загальне зміцнення полягає у зростанні густини дислокацій в поверхні при пластичній деформації.

Глава 7. КОНСТРУКЦІЙНІ ТА ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ СТАЛІ

7.1. Вплив вуглецю й домішок на властивості сталі

Сталі – це деформівні залізовуглецеві сплави з вмістом вуглецю менше 2,14%. Це найпоширеніша група металевих матеріалів, яка знаходить використання через можливість змінювати у широких межах не тільки механічні (міцність, пластичність, твердість, пружність, в'язкість) та технологічні властивості (оброблюваність різанням, деформівність, зварюваність), а й набувати багато спеціальних властивостей (корозійну стійкість, жароміцність, теплостійкість та ін.).

Всі властивості сталі, у першу чергу залежать від її хімічного складу, тому сталі як один з головних конструкційних та інструментальних матеріалів сучасності не є двокомпонентним залізовуглецевим сплавом, до складу якого входять тільки *залізо* і *вуглець*. Крім цих двох основних елементів, сталі містять багато різних *домішок*, які можна поділити на *постійні* (або *конституційні*), *приховані*, *випадкові* та *спеціальні.* Всі ці елементи впливають на властивості сталі, тому їх вміст контролюється в певних межах.

Вплив вуглецю. Вуглець – це найважливіший елемент, який обумовлює структуру й властивості сталі, її поведінку при виробництві і експлуатації. Структура сталі після охолодження складається з двох фаз: фериту й цементиту. З одного боку, вміст вуглецю у фериті (твердий розчин вуглецю в залізі α) становить 0,006%, що свідчить про те, що вуглець практично не розчиняється в залізі за кімнатної температури. Саме через це ферит, який є майже чистим залізом з металевим міжатомним зв'язком, дуже пластичний і має відносне видовження на рівні 50%. З іншого боку, цементит (хімічна сполука – карбід заліза Fe_3C) містить 6,67% вагових вуглецю і є високовуглецевою фазою. Як всі карбіди, цементит має високу твердість і крихкість. Таким чином, чим більше буде в сталі вуглецю, тим більше буде цементиту – цієї дуже твердої фази. Завдяки цьому твердість

(НВ) і міцність ($\sigma_в$, $\sigma_{0,2}$) сталі підвищуються (рис. 7.1). Поряд з цим пластичність (δ, ψ) та ударна в'язкість (KCU) сталі зменшуються. Але в той же

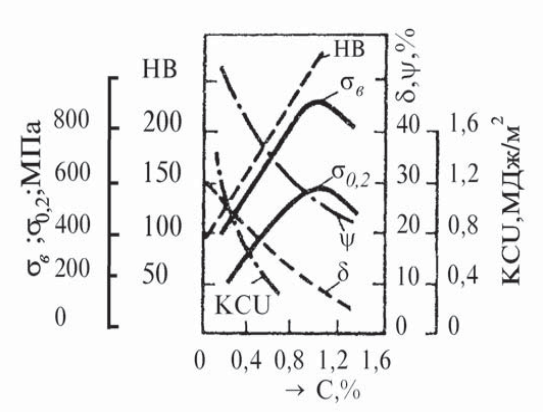


Рис. 7.1. Вплив вуглецю на механічні властивості сталі

час, якщо простежити характер зміни границі міцності $\sigma_в$, то можна побачити, що при концентрації вуглецю, більшій ніж 0,9%, границя міцності починає знижуватися – сталь стає крихкою. Це пояснюється особливостями структури заевтектоїдних сталей, де по межах зерен утворюється вторинний цементит у вигляді сітки, яка з підвищенням концентрації вуглецю стає безперервною (рис. 7.2). При випробуванні на розтяг у цьому випадку цементит, як дуже крихка фаза, сприяє руйнуванню.

Вуглець має значний вплив і на технологічні властивості сталі. Зростання вмісту вуглецю призводить до значного зниження деформівності сталі внаслідок зниження її пластичності через зростання кількості цементиту в структурі, а також до зниження зварюваності та до покращення оброблюваності різанням.



Рис. 7.2. Карбідна сітка у структурі сталі

Вплив домішок на властивості сталі

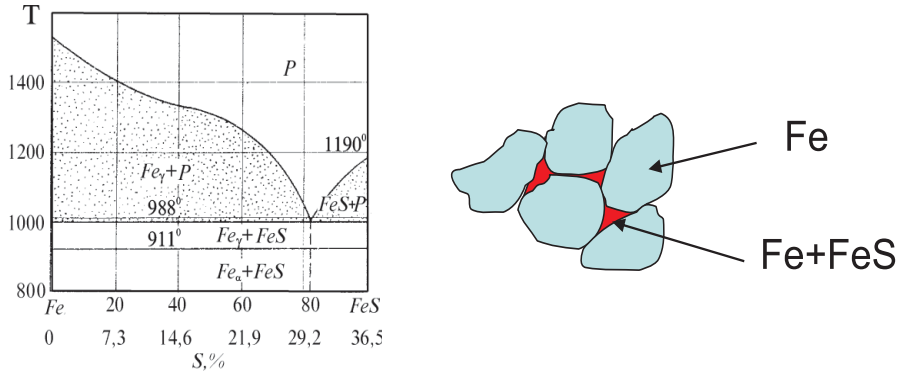
Вплив постійних домішок. До цієї групи домішок, що завжди присутні в сталі, відносять марганець, кремній, сірку й фосфор. Концентрація цих елементів як конституційних домішок, наявність яких пов'язана з існуючою технологією виробництва сталі, не повинна перевищувати відповідно: Mn – 0,8%, Si – 0,34%, S – 0,05 % й P – 0,04%.

Марганець є корисною домішкою в сталі, яку вводять у процесі розкиснення з метою додаткового відновлення заліза. Він має більшу спорідненість до кремнію ніж залізо й сприяє усуненню шкідливих домішок закису заліза за реакцією: FeO+Mn = MnO+Fe. Значна кількість оксидів марганцю спливає разом зі шлаком. Крім того, марганець знижує шкідливий вплив сірки через більшу спорідненість до неї, ніж залізо: FeS+Mn = MnS+Fe. На відміну від FeS сульфід MnS не утворює легкоплавких евтектик і червоноламкість сталі значно знижується. Тільки ця домішка припускається в максимальній кількості до 0,8%.

Кремній також позитивно впливає на властивості сталі в переважній більшості випадків, оскільки єефективним розкислювачем: $2FeO+Si = SiO_2 +2Fe$ і активно відновлює залізо. У той же час він значно підвищує жорсткість, пружність і міцність сталі. Тому в сталях, призначених для глибокого штампування, концентрацію кремнію контролюють на рівні 0,17%, а інколи навіть 0,07% через його негативний вплив на пластичність сталі (тобто використовують напівспокійні або киплячі сталі).

Сірка є шкідливою домішкою в сталі, куди вона потрапляє з руди або палива. Із залізом сірка утворює хімічну сполуку – сульфід заліза FeS, який практично не розчиняється в залізі у твердому стані. Діаграма фазової рівноваги Fe – FeS (рис. 7.3,*а*) свідчить про утворення евтектики Fe+FeS з температурою плавлення 988 °С (рис. 7.3,*б*), тобто дуже низькою для залізовуглецевих сплавів. Ця евтектика присутня в структурі сталі, навіть за надзвичайно малої наявності сірки, і розміщується по межах зерен. Під час гарячого пластичного деформування з температурою процесу 1200 –1000°С евтектика розплавляється, через

що в місцях її розташування під час гарячого деформування виникають непоправні дефекти – надриви або гарячі тріщини. Це явище має назву *червоноламкості*. Негативний вплив сірки посилюється внаслідок її схильності до ліквації.



а *б*

Рис. 7.3. Діаграма стану Fe-FeS (*а*) та схема розташування легкоплавких зерен Fe+FeS в структурі сталі (*б*)

Крім того, сірчані сполуки значно знижують механічні властивості сталі, особливо ударну в'язкість та пластичність, а також погіршують зварюваність й корозійну стійкість, тому кількість сірки в сталі обмежують. Найбільшу кількість сірки (до 0,05%) мають сталі звичайної якості, в якісних сталях вона становить до 0,04%, у високоякісних – до 0,025%, а в особливо високоякісних – до 0,015%.

Але в деяких випадках сірка може бути й корисним елементом, тому що вона полегшує оброблюваність сталі різанням. Такі сталі називають *автоматними*, їх обробляють на верстатах-автоматах, а кількість сірки підвищують до 0,15 – 0,25%. Разом із сіркою збільшують й кількість марганцю, через що сірчасті сполуки, головним чином MnS, розміщуються не по межах зерен, а всередині, тому менш негативно впливають на пластичність сталі.

Фосфор є шкідливою домішкою, яка надає сталі *холодноламкість* (крихкість при негативних температурах). Фосфор розчиняється у фериті й аустеніті і сильно викривлює кристалічну решітку заліза, через це в'язкість значно падає – сталь стає крихкою при негативних температурах, тобто стає *холодноламкою*.

Негативний вплив фосфору посилюється внаслідок схильності до ліквації. Найбільшу кількість фосфору припускають у сталях звичайної якості – до 0,04%, в якісних сталях її кількість не повинна перевищувати 0,035%, у високоякісних 0,025%, а в особливо високоякісних – 0,015%.

Вплив прихованих домішок. Газові домішки азоту, кисню й водню іноді називають прихованими через вкрай невелику їх кількість у сталі: кисень – 0,002 – 0,008%, азот – 0,002 – 0,007%, водень – 0,0001 – 0,0007%. Вони можуть знаходитися в сталі у вигляді: крихких неметалевих включень (оксиди FeO, Al_2O_3, нітриди Fe_4N), твердого розчину або у вільному стані в дефектних ділянках металу – тріщинах, раковинах і т.ін. Ці домішки розміщуються головним чином по межах зерен, що знижує опір крихкому руйнуванню. Крім того, неметалеві включення – це концентратори напружень. До того ж наявність водню, призводить до виникнення *флокенів* – невеликих тріщин овальної форми, які значно погіршують всі властивості сталі.

Сучасним ефективним засобом зменшення кількості цих домішок у сталі є *вакуумування*.

Випадковою домішкою в сталі може бути будь-який елемент, що потрапляє у шихту разом з металевим брухтом або чавуном під час виплавки сталі. Такі домішки звичайно присутні в сталі в невеликих кількостях, через що не мають значного впливу на властивості сталі, але припустиму кількість випадкових домішок теж контролюють. Наприклад, випадковими домішками у вуглецевій якісній сталі є хром, нікель і мідь.

Вплив спеціальних домішок. *Спеціальні домішки* – це елементи, які додають у сталь з метою зміни її властивостей в заданому напрямі, тому їх ще називають *легуючими елементами* (нім. *legieren* – зв'язувати, поєднювати), а сталі, що їх містять, – *легованими сталями,* тому вплив цієї групи домішок буде розглянуто далі.

У виробах великих перерізів (діаметром більше 15 – 20 мм) механічні властивості легованих сталей (σ_B, $\sigma_{0,2}$, δ, ψ, KCU) значно вищі за механічні властивості вуглецевих сталей, що пояснюється більшою прогартовуваністю та меншою критичною швидкістю гартування. Тому леговані сталі використовують не тільки для виробів значних розмірів, а й для невеликих виробів, які мають складну форму, тому що низька критична швидкість гартування дозволяє загартовувати їх у менш різких охолодниках (наприклад, у маслі), зменшувати деформацію виробів та запобігати виникненню тріщин.

Розглянемо вплив деяких основних легуючих елементів на властивості сталі.

Марганець – один із самих дешевих та ефективних легуючих елементів. Він значно підвищує прогартовуваність й механічні властивості, але при кількості більше ніж 1,5% надає схильності до крихкості відпускання, а при нагріванні підвищує здатність до зростання зерна аустеніту.

Кремній – підвищує міцність, жорсткість, зносостійкість й надає пружні та антифрикційні властивості, підвищує прогартовуваність. Він є корисним елементом у сталях, які піддають ізотермічному гартуванню.

Нікель – дуже корисний, але дорогий легуючий елемент, який підвищує прогартовуваність, міцність та стійкість проти корозії, забезпечує отримання дрібнозернистої структури з підвищеною міцністю, пластичністю і в'язкістю.

Хром – карбідоутворюючий елемент, який значно підвищує прогартовуваність, твердість й міцність сталей, але при концентрації більше 1% підвищує поріг холодноламкості.

Молібден – ефективний карбідоутворюючий елемент, який значно підвищує прогартовуваність (до 100 мм при 0,4% молібдену), знижує здатність до крихкості відпускання, надає сталі високої міцності, пластичності і в'язкості.

Титан – ефективний карбідоутворюючий елемент, який значно здрібнює структуру, особливо в поєднанні з хромом і марганцем, підвищує твердість та стійкість проти корозії.

Алюміній – подрібнює зерно, підвищує пластичність, ударну в'язкість, стійкість проти корозії.

Ванадій – ефективний карбідоутворюючий елемент, який у невеликих кількостях дозволяє одержувати дрібнозернисту структуру та підвищує в'язкість сталі. Це один із небагатьох елементів, який поліпшує зварюваність, тому що належить до активних розкиснювачів й дегазаторів.

Вольфрам – ефективний карбідоутворюючий елемент, який значно підвищує твердість й червоностійкість сталі, зменшує здатність до зростання зерна при нагріванні.

Бор – у малих кількостях значно підвищує прогартовуваність сталі, особливо хромомолібденових, але, якщо кількість бору перевищує 0,07%, то можуть виникати гарячі тріщини (виникає червоноламкість).

7.2. Класифікація сталей

Велика кількість існуючих марок сталі, які мають різні властивості й використовуються у різних галузях, потребує їх класифікації. Сталі з метою систематизування класифікують за різними ознаками.

За *призначенням* існують сталі:

1) конструкційні (для деталей машин і елементів будівельних конструкцій);
2) інструментальні (для виготовлення інструментів);
3) спеціальні (з певними спеціальними властивостями, наприклад: корозійна стійкість, теплостійкість, жароміцність).

За *хімічним складом* сталі поділяють на такі:

1) за наявністю спеціальних домішок – вуглецеві (спеціальні домішки відсутні) та леговані (додані спеціальні домішки);
2) за кількістю вуглецю – сталі низьковуглецеві (менше 0,3% вуглецю), середньовуглецеві (0,3 – 0,6% вуглецю) й високовуглецеві (більше 0,6% вуглецю);

3) за кількістю легуючих елементів – низьколеговані (загалом до 5% легуючих елементів); середньолеговані (5–10% легуючих елементів) та високолеговані (більше 10% легуючих елементів).

За *мікроструктурою* сталі поділяють на такі:

1) доевтектоїдні (феритоперлітні), – містять менше 0,8% вуглецю і на діаграмі стану залізо-вуглець їх склад відповідає відрізку PS;
2) евтектоїдні (перлітні) – містять 0,8% вуглецю і на діаграмі стану залізо-вуглець їх склад відповідає точці S;
3) заевтектоїдні (перлітоцементитні) – містять більше 0,8% вушлецю і на діаграмі стану залізо-вуглець їх склад відповідає відрізку SE.

За *способом розкиснення* сталь буває киплячою, спокійною й напівспокійною.

Розкиснення – це процес виведення з рідини оксидів металів з метою запобігання крихкого руйнування сталі під час гарячої пластичної деформації. Киплячі сталі розкиснюють тільки марганцем. Перед розливкою ці сталі мають підвищену кількість кисню, який при твердінні частково реагує з вуглецем, у результаті утворюється оксид вуглецю CO. Виділеня пузирів CO імітує кипіння сталі. Ці сталі майже не мають кремнію (не більше 0,05%), завдяки цьому дуже пластичні в холодному стані. Киплячу сталь позначають літерами «кп» наприкінці марки сталі, наприклад: Ст3кп, 08кп. Напівспокійні сталі розкиснюють марганцем і кремнієм (кількість кремнію становить 0,07–0,17%), що враховують під час запису марки сталі, ставлячи наприкінці літери «пс», наприклад: 10пс, Ст3пс. Спокійні сталі розкиснюють марганцем, кремнієм та алюмінієм, тому вони твердіють спокійно. Унаслідок того, що переважну більшість сталей виплавляють спокійними, їх не позначають спеціальними буквами, крім сталей звичайної якості (Ст3сп).

Ступінь розкиснення має суттєвий вплив на властивості сталі: киплячі мають максимальну пластичність, але через схильність до старіння (окрихчення з

часом) властивості нестабільні, а пластичність з часом знижується. Найбільш стабільні властивості мають спокійні сталі.

За *якістю* сталі (в основу цієї класифікації покладено кількість шкідливих домішок – *сірки й фосфору*) поділяють на такі:

1) звичайної якості (вміст $S \leq 0{,}05\%$; $P \leq 0{,}04\%$);
2) якісні (вміст $S \leq 0{,}04\%$; $P \leq 0{,}035\%$);
3) високоякісні (вміст $S \leq 0{,}025\%$; $P \leq 0{,}025\%$);
4) особливо високоякісні (вміст $S \leq 0{,}015\%$; $P \leq 0{,}015\%$).

Якість сталі (тобто вміст сірки і фосфору) має значний вплив на механічні властивості сталі. Ці обидві домішки утворюють багато хімічних сполук й різних включень, у результаті чого міцність сталі може значно змінюватись. Найменшу міцність мають сталі звичайної якості, а найбільшу – особливо високоякісні при тому самому вмісті вуглецю. Саме тому деталі, виготовлені із сталі звичайної якості, для забезпечення певного запасу міцності будуть завжди мати більший переріз і будуть більш масивними, що негативно впливає на показники роботи машин і механізмів.

Якість сталей враховують при їх маркуванні. Сталі звичайної якості маркують літерами «Ст» та цифрами (номер сталі), наприклад: Ст4. Якісні маркують за хімічним складом: 40. 45Х, У8. У високоякісних сталей наприкінці марки ставлять літеру «А»: У10А, 40ХНМА. Особливо високоякісні сталі маркують літерами «Ш», «ВД» та ін., які ставлять через дефіс наприкінці марки: 30ХТ2-Ш, ШХ15-ВД.

Сталі звичайної якості можуть бути тільки вуглецевими, а особливо високоякісні – тільки легованими.

Конструкційні сталі призначені для виготовлення деталей машин і елементів конструкцій в машинобудуванні та будівництві. У таких сталях має поєднуватися достатня міцність і в'язкість. Цим вимогам відповідають доевтектоїдні сталі з вмістом вуглецю до 0,8%.

Вуглецеві сталі виплавляють у конвертерах, мартенівських печах та електричних дугових печах. Найліпші властивості мають сталі, виплавлені в електропечах, що пояснюється можливістю одержати більш чисті сталі за вмістом сірки і фосфору. Саме тому ці сталі використовують для більш відповідальних деталей.

Властивості вуглецевих сталей залежать від вмісту вуглецю, а також від вмісту постійних (конституційних) та прихованих домішок.

7.3. Конструкційні вуглецеві сталі

Сталі звичайної якості (табл. 7.1) – сталі загального призначення – маркирують літерами «Ст» та цифрами від 0 до 6 (цифра означає номер марки), а наприкінці марки ставлять ступінь розкіснення сталі, позначаючи його двома маленькими літерами: «кп» – кипляча, «пс» – напівспокійна, «сп» – спокійна сталь. Ступінь розкиснення визначається кількістю кремнію, вміст якого є найменшим у киплячих сталях, а найбільшим – у спокійних. При цьому сталь марки Ст0 за ступенем розкиснення не розділяють. Концентрація марганцю в сталях різних марок становить 0,25–0,8%. Літера «Г» в деяких марках вказує на підвищену кількість марганцю до 1,1–1,2%. Припустима кількість шкідливих домішок сірки і фосфору становить 0,05 й 0,04%, відповідно.

Аналіз табл. 7.1 показує, що киплячими не виплавляють сталі 5 і 6 марок, це пояснюється тим, що через зростання вмісту вуглецю пластичність таких сталей значно знижується.

Чим більше номер марки, тим вища концентрація вуглецю в сталі і більша міцність, а пластичність нижча. При переході від марки Ст1 до марки Ст6 границя міцності зростає приблизно від 300 до 600 МПа, а відносне звуження зменшується з 30 до 15%. Ці сталі широко використовують для менш відповідального призначення. Із них виготовляють гарячекатаний прокат (балки, прутки, швелери, листи, труби, поковки), застосовують для будівельних зварювальних, клепаних і болтових конструкцій (балки, ферми, конструкції підйомних кранів і

т.ін.) та маловідповідальних деталей машин (осі, болти, втулки, гайки, шайби, пальці, зірочки).

Таблиця 7.1

Склад вуглецевих сталей звичайної якості

Марка сталі	C	Mn	Si
Ст0	≤ 0,23		
Ст1кп	0,06–0,12	0,25–0,5	≤ 0,05
Ст1сп	0,06–0,12	0,25–0,5	0,12–0,3
Ст2кп	0,09–0,15	0,25–0,5	≤ 0,07
Ст2сп	0,09–0,15	0,25–0,5	0,12–0,3
Ст3кп	0,14–0,22	0,3–0,6	≤ 0,07
Ст3пс	0,14–0,22	0,4–0,65	0,05–0,17
Ст3сп	0,14–0,22	0,4–0,65	0,12–0,3
Ст4кп	0,18–0,27	0,4–0,7	≤ 0,07
Ст4сп	0,18–0,27	0,4–0,7	0,12–0,3
Ст5пс	0,28–0,37	0,5–0,8	0,05–0,17
Ст5сп	0,28–0,37	0,5–0,8	0,15–0,35
Ст6пс	0,38–0,49	0,5–0,8	0,05–0,17
Ст6сп	0,38–0,49	0,5–0,8	0,15–0,35

Якісні сталі маркують двома цифрами, що вказують середню кількість вуглецю в сотих частках відсотка: 05, 08, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ..., 85. Кількість шкідливих домішок у них менша, ніж у сталях загального призначення звичайної якості: не більше 0,04% сірки й не більше 0,035% фосфору. Концентрація марганцю становить 0,35–0,8%, а кремнію – 0,05– 0,37%. В киплячих сталях концентрація кремнію не перевищує 0,03% (сталі 05кп і 08кп) й 0,07% (сталі 10кп, 15кп, 20кп). Сталі цієї групи також можуть мати підвищений вміст марганцю (сталь 40Г, 20Г, 65Г). Вони повинні відповідати більш високим вимогам шодо

макроструктури і мікроструктури. У табл. 7.2 наведено хімічний склад деяких марок якісних сталей.

Таблиця 7.2

Склад і властивості деяких марок якісних вуглецевих спокійних сталей

Марка сталі	C	Mn	Si	Cr, не більше	$\sigma_в$, МПа	δ, %
08	0,05–0,12	0,35–0,65	0,17–0,37	0,10	320	33
10	0,07–0,14	0,35–0,65	0,17–0,37	0,15	330	31
15	0,12–0,19	0,35–0,65	0,17–0,37	0,25	370	27
20	0,17–0,24	0,35–0,65	0,17–0,37	0,25	410	25
25	0,22–0,30	0,50–0,80	0,17–0,37	0,25	450	23
30	0,27–0,35	0,50–0,80	0,17–0,37	0,25	490	21
35	0,32–0,40	0,50–0,80	0,17–0,37	0,25	530	20
40	0,37–0,45	0,50–0,80	0,17–0,37	0,25	570	19
45	0,42–0,50	0,50–0,80	0,17–0,37	0,25	600	16
50	0,47–0,55	0,50–0,80	0,17–0,37	0,25	630	14
55	0,52–0,60	0,50–0,80	0,17–0,37	0,25	650	13
60	0,57–0,60	0,50–0,80	0,17–0,37	0,25	680	12

Сталі марок 05, 08 та 10, які містять мало вуглецю, після відпалу добре штампуються в холодному стані (для штампування). Пластичність киплячих марок цих сталей ще вища, але вони схильні до деформаційного старіння.

Вироби з низьковуглецевих сталей 15, 20 та 25 цементують, загартовують й піддають низькому відпуску, після чого вони мають тверду поверхню, а всередині залишаються в'язкими (їх називають сталями для цементації).

Середньовуглецеві сталі 30, 35, 40, 45 і 50 використовують для різних деталей машин. Їх називають сталями для покращання, тому що найкращий комплекс механічних властивостей вони набувають після покращання - гартвання з високим відпуском. Із таких сталей виробляють різні вали, шатуни, шестерні, зірочки,

крипільні вироби та інші деталі. Основним недоліком вуглецевих сталей для покращання є невелика прогартовуваність. Критичний діаметр цих сталей, при якому забезпечується крізна прогартовуваність, не перевищує 12 мм. Деталі зі середньовуглецевих сталей більшого перерізу можна зміцнювати поверхневим гартуванням.

Високовуглецеві сталі марок 60, 65, 70, 75, 80 і 85 після гартування і середнього відпуску мають значну міцність і пружність, і тому їх застосовують для пружин, ресор, тросів.

Зі сталі 60 виготовляють суцільнокатані колеса, валки прокатних станів.

7.4. Інструментальні вуглецеві сталі

Інструментальні вуглецеві сталі маркують літерою «У» й числом, яке вказує на середню кількість вуглецю в десятих частках відсотка: У7, У8, У9, У10, У11, У12, У13. Ці сталі містять не більше 0,3% марганцю; 0,3% кремнію; 0,028% сірки і 0,030% фосфору. Літера «А» наприкінці марки (наприклад, У12А) означає, що це високоякісна інструментальна сталь, яка містить менше сірки й фосфору.

Ці сталі використовують для виготовлення ударного, штампового та різального інструменту: зубил, різців, плашок, фрез і т.ін. Велику твердість і зносостійкість ці сталі набувають після гартування й низького відпуску.

Сталі з меншою кількістю вуглецю У7 і У8, які мають найбільшу в’язкість, використовують для виготовлення зубил, молотків, штампів, кернерів, викруток тощо.

Заевтектоїдні сталі У9-У12 застосовують для інструментів, які потребують високої твердості та не дуже високої в’язкості, – мітчиків, свердел, напилків, ножовок, креселок, вимірювальних інструментів (наприклад, штангенциркулів). Зі сталі У13 виготовляють інструменти з дуже високою твердістю: напилки, бритви, шабери, калібри, коси.

Вуглецеві сталі є дешевим матеріалом для інструментів, але вони мають два істотних *недоліки:* перший – невелика глибина прогартовуваності , яка не дозволяє виготовляти інструмент з перерізом більше ніж 20–25 мм, другий – низька теплостійкість, тобто значне пом'якшення сталі при розігріванні різальної кромки інструменту вище 200°С, що обмежує швидкість різання твердих матеріалів.

7.5. Переваги і недоліки вуглецевих сталей

Частка вуглецевих сталей сягає 80% від загального обсягу. Це пояснюється тим, що вуглецеві сталі дешеві і поєднують добрі механічні і технологічні властивості. Вони мають достатній рівень властивостей для виробів невеликого перерізу до 20–25 мм, які працюють за умов невисоких та середніх навантажень, і який зберігається при робочих температурах до 200°С.

Серед недоліків вуглецевих сталей треба відзначити такі:

1) низька прогартовуваність – до 10–12 мм, що унеможливлює високий рівень властивостей у виробах великого перерізу;
2) висока критична швидкість охолодження під час гартування, це примушує загартовувати вуглецеві сталі у воді, через що виникають великі напруження й жолоблення деталей;
3) низька теплостійкість – до 200°С, що значно обмежує використання цих сталей, в першу чергу для різальних інструментів;
4) недостатня міцність для виробів, які працюють за умов значних навантажень та мають великий переріз.

7.6. Класифікація легованих сталей

Легованими називають сталі, до яких введено спеціальні домішки (легуючі елементи) з метою одержання необхідних властивостей. Насамперед, це стосується механічних властивостей (міцність, пружність, пластичність, твердість, в'язкість), а також, за необхідністю, прогартовуваності і теплостійкості.

Основними легуючими елементами в сталях є хром, молібден, нікель, вольфрам, титан, ванадій тощо, а також кремній, якого більше ніж 0,5% й марганець, якого більше ніж 1%. Залежно від введених елементів сталі називають хромистими, хромонікелевими, марганцевими тощо.

Леговані сталі відзначаються високою міцністю і твердістю, тому використання таких сталей дозволяє знижувати матеріаломісткість деталей й значно підвищувати продуктивність різальних інструментів за механічної обробки.

Призначення легування конструкційних сталей. Залежно від групи, на які розділяють якісні конструкційні сталі, додавання легуючих елементів у розплав дає можливість підвищити потрібні властивості, наприклад:

- сталі для штампування легують для підвищення пластичності та гальмування зростання зерен при термічній обробці (крупне зерно знижує всі добрі властивості: пластичність, міцність);
- сталі для цементації та сталі для покращання легують, щоб підвищити міцність та прогартовуваність;
- сталі для пружин та ресор легують, щоб підвищити пружність, міцність, прогартовуваність та теплостійкість (пружини не втрачають пружності при робочих температурах вище 100°С).

Призначення легування інструментальних сталей. Сталі цієї групи легують для підвищення міцності, прогартовуваності та теплостійкості.

Перевагами легованих сталей є те, що їх використовують для виробів більшого перерізу, які працюють за умов підвищених та високих навантажень і підвищених робочих температур.

Як *недолік* можна відзначити більш високі вимоги щодо вмісту шкідливих домішок, макроструктури та мікроструктури сталей, та високу вартість легованих сталей порівняно з вуглецевими.

Класифікація легованих сталей. Залежно від *кількості легуючих домішок* леговані сталі поділяють на три групи: низьколеговані (менше 2,5% домішок), середньолеговані (2,5–10% домішок), високолеговані (більше 10% домішок).

За *призначенням* леговані сталі поділяють на конструкційні, інструментальні та сталі з особливими властивостями.

За *структурою* леговані сталі класифікують у нормалізованому стані, тобто після охолодження на повітрі.

Сучасна класифікація легованих сталей за структурою у нормалізованому стані складається із шести класів: феритний, перлітний, мартенситний, аустенітний, ледебуритний і бейнітний – залежно від основної структурної складової частини, яка спостерігається в сталі при її охолодженні на повітрі, тобто після нормалізації.

Феритні сталі мають після нормалізації структуру фериту, що утворюється при низькому вмісті вуглецю і високій концентрації таких легуючих елементів (Cr, Si та ін.), які знижують точку A_4 й підвищують точку A_3 на діаграмах стану залізо-легуючий елемент.

Існування перлітного, мартенситного і аустенітного класів пояснюється тим, що з підвищенням концентрації легуючих елементів зростає стійкість аустеніту і знижується температура мартенситного перетворення.

У сталях перлітного класу концентрація легуючих елементів невелика і при нормалізації аустеніт перетворюється на перліт.

У мартенситних сталях аустеніт більш стійкий проти перлітного розпаду, і сталі при охолодженні на повітрі набувають мартенситної структури.

Аустенітні сталі мають підвищену кількість марганцю або нікелю.

Ледебуритні сталі мають у структурі первинні карбіди і евтектику. Утворення цього структурного класу пояснюється значним впливом основних легуючих елементів на критичні точки S і E діаграми стану залізо-вуглець. Більшість елементів зсуває ці точки в бік меншої кількості вуглецю.

Бейнітні сталі складають відносно невелику групу, але набувають великого значення через можливість отримання структури бейніту за безперервного охолодження на повітрі замість ізотермічного гартування як в інших сталях, що і спричинило появу цієї групи.

Для *маркування* легованих сталей стандартом затверджено літерно-цифрову систему. Легуючі елементи позначають певними літерами (табл. 7.3). Марка сталі складається з цифр і літер. Цифри, що стоять на початку марки, вказують на кількість вуглецю в сотих (для конструкційних сталей) або в десятих (для інструментальних сталей) частках відсотка. Відсутність числа свідчить про те, що кількість вуглецю становить біля 1%. Далі стоять літери, які позначають наявність легуючого елемента, й цифри, котрі відповідають його кількості у відсотках (при відсутності такої цифри кількість елемента не перевищує 1%).

Таблиця 7.3

Позначення легуючих елементів у сталях

Позначення легуючого елемента в марці сталі	*Назва елемента*	*Хімічний символ елемента*
А	Азот (якщо літера «А» стоїть всередині марки сталі)	N
Б	Ніобій	Nb
В	Вольфрам	W
Г	Марганець	Mn
Д	Мідь	Cu
Е	Селен	Se
К	Кобальт	Co
М	Молібден	Mo
Н	Нікель	Ni
П	Фосфор	P
Р	Бор	B
С	Кремній	Si
Т	Титан	Ti
Ф	Ванадій	V
Х	Хром	Cr
Ц	Цирконій	Zr
Ю	Алюміній	Al

7.7. Конструкційні леговані сталі

Конструкційні леговані сталі поділяють на дві групи: будівельні і машинобудівельні.

Будівельні сталі. Розрахунковою характеристикою конструкцій є *границя текучості* матеріала, підвищення якої дає змогу зменшити переріз і, відповідно, масу конструкції. Підвищення границі текучості конструкційних сталей легуванням – один з основних шляхів економії метала в будівництві. Важливою властивістю будівельних сталей є висока холодостійкість, характеристикою якої є температура переходу від в'язкого стану до крихкого $T_{крих}$. Ще одна обов'язкова вимога до будівельної сталі – ефективність зварюваності, тому що металоконструкції, як правило, зварні. Для забезпечення високої зварюваності кількість вуглецю в будівельній сталі не повинна перевищувати 0,25%.

Низьколеговані будівельні сталі містять порівняно недефіцитні й недорогі марганець і кремній, а також невеликі кількості ванадію та ін. У деякі сталі додають невелику кількість міді для підвищення стійкості проти атмосферної корозії. Порівняно з вуглецевими низьколеговані будівельні сталі мають більшу міцність та більш низький поріг холодноламкості.

Будівельні сталі за структурою відносять до феритоперлітних, при цьому кількість перліту в них незначна, і саме це зумовлює основні властивості сталі. З одного боку, підвищена міцність низьколегованих будівельних сталей порівняно з вуглецевими пояснюється зміцненням фериту у зв'язку з розчиненням в ньому таких елементів, як марганець і кремній (сталі 09Г2, 09Г2С). З іншого боку, зміцнення пов'язане із подрібненням зерен фериту внаслідок присутності дрібних часток спеціальних карбідів, наприклад карбіду VC (сталі 15ГФ та 15Г2СФ). Зміцнюючий ефект має і введення невеликої (0,015–0,025%) кількості азоту (сталь 16Г2АФ), унаслідок чого в цій сталі утворюється велика кількість дрібних часток карбонітриду V (C, N), які, по-перше, перешкоджають руху дислокацій,

а, по-друге, значно здрібнюють зерно фериту. Таке подрібення не тільки підвищує границю текучості, а й знижує температуру переходу від в'язкого стану до крихкого, тобто підвищує холодостійкість сталі.

Ці сталі широко використовують для нафтотрубопроводів і газотрубопроводів, в судонобудуванні та вагонобудуванні, для різних резервуарів, зварних мостобудівельних конструкцій. У продовольчому машинобудуванні сталі 16ГС та 15ГФ використовують для корпусів та днищ апаратів, фланців та інших деталей, які працюють при температурах від –40°С до +475°С під тиском.

Численну групу складають *машинобудівельні* леговані сталі, які поділяють на декілька груп.

Сталі для штампування. Обсяги виробництва сталей для штампування постійно зростають, з'являються нові марки легованих сталей, наприклад: 08Ю, 08ЮТ. Основними легуючими елементами в них є алюміній і титан, які додають з метою подрібнення зерна, підвищення корозійної стійкості та ударної в'язкості.

Сталі для цементації. Для виготовлення деталей двигунів і машин, які в процесі роботи зазнають великих ударних навантажень, а робочі поверхні таких виробів мають бути стійкими проти стирання (поршневий палець, вал-шестірня), а також мати досить міцну серцевину, застосовують низьковуглецеві леговані сталі з вуглецем до 0,3%. Після цементації робочої поверхні виробу і зміцнюючої термічної обробки (гартування з низьким відпуском) поверхневий шар таких деталей має високу твердість і міцність, а серцевина залишається в'язкою з підвищеною міцністю. Найбільшу прогартовуваність й водночас найбільшу в'язкість і низький поріг холодноламкості мають сталі, леговані хромом і нікелем. Сталь 12ХН3А після гартування в маслі має в серцевині виробу з перерізом до 60 мм бейнітну структуру. З неї виготовляють шестерні й вали, які працюють при ударних навантаженнях або при температурах нижче 0°С. Молібден додатково збільшує прогартовуваність. Найбільш високолегована для цементування сталь марки 18Х2Н4МА прогартовується в маслі наскрізь і, навіть, на повітрі практично при

будь-яких перерізах. При цьому в серцевині виробу утворюється маловуглецевий мартенсит, який після низького відпуску має високу в'язкість. Деталі з такої сталі можна використовувати в умовах значних ударних навантажень і вібрації при температурах до –70°С.

Сталі 18ХГТ і 25ХГТ, леговані хромом і марганцем, використовують як замінники сталей, які містять гостродефіцитний нікель. У ці сталі додають титан, що утворює карбід титана й гальмує зростання аустенітного зерна, яке посилюється при температурах цементації під впливом марганцю. Саме такі сталі для цементації знайшли широке застосування в сільськогосподарському машинобудуванні для великої кількості деталей.

Сталі для покращання. Найефективніше поєднання міцності і в'язкості сталей для деталей машин забезпечує *покращання,* тобто гартування на мартенсит з високим відпуском. Головне призначення легування сталей для покращання – підвищення їх міцності і прогартовуваності. Для цього застосовують такі легуючі елементи, як хром, нікель і марганець. Ванадій і титан, у невеликій кількості (до 0,1–0,18%), утворюють карбіди, які важко розчиняються і стримують зростання зерна аустеніту, через що зростає в'язкість сталі. Дуже цінний вплив має нікель: цей легуючий елемент не тільки сприяє зростанню прогартовуваності, а й водночас підвищує в'язкість та знижує поріг холодноламкості. Вибір марки сталі для покращання поперед усе визначається перерізом деталі, яку треба прогартувати наскрізь.

Істотним недоліком легованих сталей для покращання є їх схильність до крихкості відпускання, особливо до оборотної крихкості відпускання. Саме цьому негативному явищу сприяють такі легуючі елементи, як хром, нікель і марганець. Встановлено, що значну роль грає і чистота сталі: невеликі домішки фосфору, сурми, олова та миш'яку сприяють розвитку крихкості відпускання. Для запобігання крихкості відпускання таких сталей треба: зменшувати кількість шкідливих домішок у процесі виплавлення сталі; прискорено охолоджувати деталі від температур відпускання вище 600°С (маленькі деталі – в маслі, а великі –

у воді); додавати в сталь 0,2–0,3% молібдену, який стримує сегрегацію шкідливих домішок.

Для виготовлення середньонавантажених деталей застосовують хромисті сталі марок 30Х, 38Х, 40Х, 45Х, 50Х, при цьому деталі мають працювати на стирання без значних ударних навантажень. Додання ванадію (сталь 40ХФА) підвищує механічні властивості, головним чином ударну в'язкість, що дозволяє застосовувати такі сталі для деталей, які працюють при підвищенних ударних навантаженнях (шатуни, шестерні).

Хромонікелеві сталі використовують для великих виробів складної конфігурації, які працюють при великих вібраційних та дінамічних навантаженнях. Але в таких випадках слід стежити за оборотною крихкістю відпускання, яку підвищує нікель.

Складнолеговані сталі для покращання марок 38ХН3МФА і 36Х2Н2МФА мають дуже велику прогартовуваність, через що з них виготовляють дуже відповідальні важконавантажені деталі великого перерізу, які можуть працювати при температурах до 400°С (диски, вали і ротори парових турбін).

Пружинно-ресорні сталі. З вуглецевих сталей виготовляють пружини перерізом до 6–8 мм, бо основним їх недоліком є невелика прогартовуваність та схильність до швидкого знеміцнення при нагріванні вище 100°С. Пружинно-ресорні сталі легують такими елементами, які підвищують границю пружності, наближаючи її значення до границі міцності. Це кремній і марганець.

Додаткове легування вольфрамом, ванадієм та молібденом підвищує стійкість проти відпускання, що дуже важливо саме для пружних елементів. Крім того, сталі, які леговані зазначеними елементами, можуть працювати при нагріванні до 200–250°С.

Для виготовлення пружин і ресор середньої міцності застосовують леговані сталі марок 55С2, 50СГ, 60СГ, а для пружин високої міцності – сталі 60С2А, 70С3А, 60С2ХФА, 50ХФМА, 60С2Н2А.

Для знищення концентраторів напружень (волосових тріщин, рисок та ін.) та підвищення границі витривалості ресори і пружини в готовому вигляді піддають дробоструминному наклепуванню.

7.8. Інструментальні леговані сталі

До інструментальних легованих сталей відносяться леговані сталі, які мають високу твердість та стійкість проти спрацювання, що необхідно для обробки матеріалів різанням та тиском.

Інструментальні сталі легують з метою підвищення міцності, твердості, прогартовуваності, теплостійкості залежно від призначення та умов роботи інструменту.

За *призначенням* леговані інструментальні сталі поділяють на такі групи:

1) сталі для *різального* інструменту, для яких важливі теплостійкість, міцність, твердість та прогартовуваність;
2) сталі для *вимірювального* інструменту, для яких важливі твердість, міцність, прогартовуваність та стабільність розмірів;
3) сталі для *штампового* інструменту, які поділяють на сталі для *холодних* штампів (для них важливі міцність, твердість, прогартовуваність) та сталі для *гарячих* штампів (для них важливі міцність, в'язкість, прогартовуваність).

За *теплостійкістю* леговані інструментальні сталі поділяють на такі групи:

1) низької теплостійкості – до 200°С;
2) підвищеної теплостійкості – до 300°С;
3) високої теплостійкості – до 600°С.

Теплостійкість інструментальних сталей – це здатність зберігати при підвищених температурах високі твердість та стійкість проти спрацювання. Так, твердість вуглецевої інструментальної сталі різко падає навіть за незначного перегріву, що суттєво обмежує її використання для різальних інструментів. Швидкорізальна сталь зазнає стрімкого падіння твердості на значно вищих

швидкостях різання, коли різальна кромка нагрівається до червоного кольору розжарювання – приблизно до температури 600°С. Найвищу теплостійкість (до 900°С) мають тверді металокерамічні порошкові сплави, які не виплавляють у печі, а отримують шляхом пресування і спікання відповідних сумішей порошків.

Особливості термічної обробки легованих інструментальних сталей. Термічна обробка є обов'язковою технологічною операцією при виготовленні інструментів з легованих інструментальних сталей. При термічній обробці легованої сталі слід мати на увазі, що її теплопровідність значно нижча теплопровідності вуглецевої сталі, тому нагрівати її необхідно значно повільніше, щоб запобігти утворенню внутрішніх тріщин. Додаткові напруження створюють і гострі кути на інструментах (різальні кромки, поверхня штампа та інші робочі поверхні).

Температури нагрівання для термічної обробки легованої сталі вищі, ніж для обробки вуглецевої сталі через вплив легуючих елементів на температури фазових перетворень.

Для отримання необхідних властивостей заготовки з легованих інструментальних сталей піддають відпалу, а готові інструменти – гартуванню з відпуском.

Особливості відпалу. Для заготовок інструментів з легованих інструментальних сталей використовують два відпали II роду: неповний та ізотермічний (для швидкорізальної сталі).

Особливості гартування. Для переважної більшості інструментів використовують *неповне гартування* (з нагріванням вище критичної точки A_1) з охолодженням у маслі або ступінчасте, тому що вміст вуглецю становить більше 0,8%. Виняток стосується штампових сталей для *гарячого* деформування, де вміст вуглецю змінюється від 0,3 до 0,5%. У такому разі використовують *повне гартування* (з нагріванням вище критичної точки A_3).

Особливості відпуску. Залежно від потрібних властивостей проводять такі види відпуску:

- для різального інструменту – низький відпуск;

- для вимірювального інструменту низький з витримкою до 48 год при температурі не вище 140°С;
- для холодних штампів – низький відпуск;
- для гарячих штампів – високий відпуск;
- для точного інструменту перед низьким відпуском призначають обробку холодом для усунення залишкового аустеніту в структурі.

Групи інструментальних легованих сталей. Інструментальні леговані сталі застосовують для виготовлення різального, вимірювального і штампового інструменту. Кожен із цих видів інструментів має певні умови роботи і вимоги до матеріалів, з яких їх виготовляють.

Сталі для різальних інструментів. Основне призначення легування сталей для різального інструменту – підвищення прогартовуваності (що дає змогу виготовляти інструменти великого перерізу) та теплостійкості (можливість роботи при високих швидкостях різання).

Леговані сталі для різальних інструментів поділяють на дві групи:

- сталі низьколеговані для інструментів, які працюють при малій і середній швидкості різання;
- сталі високолеговані для інструментів, які працюють при високій швидкості різання.

Низьколеговані інструментальні сталі, як і вуглецеві, не мають теплостійкості, їх використовують для різання відносно м'яких матеріалів з невеликими швидкостями обробки. Такий інструмент під час обробки не повинен нагріватися вище 200–250°С. Леговані сталі порівняно з вуглецевими мають більшу стійкість переохолодженого аустеніту і, внаслідок цього, більшу прогартовуваність. Інструменти з таких сталей при гартуванні можна охолоджувати в маслі або в гарячих середовищах (ступінчасте гартування), що зменшує деформацію й дозволяє запобігати жолобленню інструментів.

Інструментальні сталі виготовляють у металургійній промисловості у вигляді гаряче- й холоднокатаних прутків з різною формою перерізу, прутків з

підвищеною обробкою поверхні (шліфування) і точністю розмірів (серебрянка), а також стрічок.

Високолеговані інструментальні сталі внаслідок своїх основних властивостей одержали назву *швидкорізальних*. Ці сталі мають високу теплостійкість («червоностійкість») і здатні зберігати тривалий час високу твердість при розігріванні різальної кромки інструменту до 500–600°С.

Маркировка швидкорізальної сталі: на початку марки сталі стоїть літера «Р», яка означає, що це швидкорізальна (англ. *rapid* – швидкий), потім вказують вміст вольфраму в цілих відсотках, а далі за наявності додаткових легуючих елементів вказують відповідну літеру і вміст елемента у цілих відсотках.

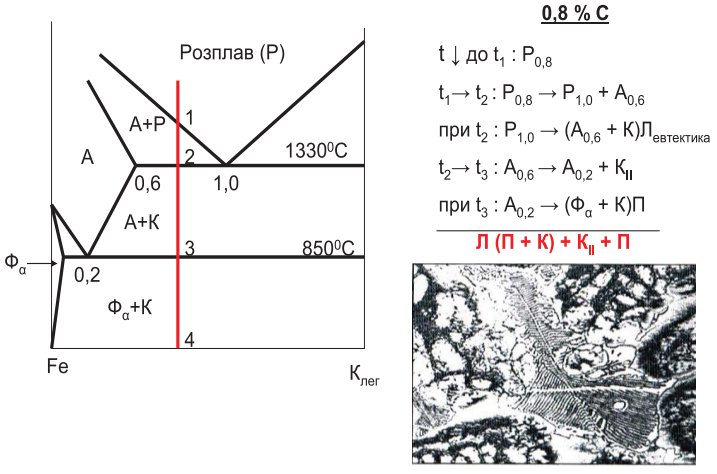


Рис. 7.4. Особливості формування структури швидкорізальної сталі в литому стані

Через вплив вольфраму на концентрації точок діаграми стану, у цих сталях при кристалізації формується евтектична структура (рис. 7.4), при цьому наявність евтектичних карбідів значно знижує пластичність сталі й утруднює її обробку тиском. Під час наступного гарячого кування або прокатування карбіди подрібнюються та більш рівномірно розподіляються за перерізом. Гарячедеформовану швидкорізальну сталь з метою зниження твердості й поліпшення оброб-

люваності різанням піддають *ізотермічному відпалу* через велику стійкість переохолодженого аустеніту.

Особливості *гартування* швидкорізальної сталі. *По-перше*, через низьку теплопровідність сталі нагрівання її до температур 800–850°С відбувається поступово протягом 10–15 хв для запобігання великих термічних напружень й тріщин, що можуть виникати при різкому нагріванні від 20°С до температур гартування, які для сталі Р18 становлять 1270–1290°С, а для сталі Р6М5 – 1210–1230°С.

Саме такі високі температури нагрівання є *другою* особливістю гартування швидкорізальних сталей. Таке нагрівання необхідне для максимально можливого розчинення в аустеніті карбідів вольфраму, молібдену й ванадію. Чим більше легованість аустеніту цими елементами, тим більше їх концентрація в мартенситі, що в подальшому забезпечує стійкість останнього при розігріві інструменту під час різання. При нагріванні під гартування карбід хрому розчиняється повністю, а карбіди тугоплавких металів – частково, що сприяє зростанню стійкості інструменту проти стирання.

Третьою особливістю гартування швидкорізальної сталі є дуже мале витримування сталі при температурі гартуваня з метою запобігання зростання аустенітного зерна, окиснення та зневуглецювання. Для інструменту перерізом 10–15 мм воно становить 10–15 с на кожний міліметр діаметра при нагріванні в розплаві солі (частіше $BaCl_2$) або 12–14 с при нагріванні в печі.

Високолегований аустеніт, який виникає при нагріванні під гартування, має велику стійкість, тому охолодником є масло.

Крім того, для зменшення деформації інструменту застосовують ступінчасте гартування в розплавах солей (частіше при температурах 500–630°С).

Особливості *відпуску* загартованої швидкорізальної сталі. Структура загартованої швидкорізальної сталі складається з високолегованого мартенситу, надлишкових карбідів й великої кількості (30–40%) залишкового аустеніту $А_{зал}$, який знижує механічні властивості сталі та стабільність розмірів інструменту. Тому присутність залишкового аустеніту небажана в готовому інструменті.

Для усунення залишкового аустеніту та надання потрібних властивостей загартовану сталь піддіють одному з наведених варіантів заключної термічної обробки: обробці холодом та низькому відпуску при температурі 560°С; триразовому низькому відпуску при температурі 560°С.

Інструмент простої форми з метою зменшення кількості залишкового аустеніту одразу ж після гартування піддають обробці холодом при температурах близько –80°С, коли більша частина залишкового аустеніту $А_{зал}$ перетворюється на мартенсит. Після обробки холодом проводять одне (рідше два) відпускання при температурі 560°С. Використання обробки холодом перед відпусканням скорочує тривалість технологічного процесу термічної обробки, але потребує спеціальних холодильних камер. Твердість сталі після гартування становить 62÷63 HRC, а після відпускання – 63–65 HRC.

В іншому разі використовують потрійний низький відпуск при температурі 560 ºС, необхідність якого пояснюється тим,що за один проведений відпуск весь залишковий аустеніт не перетворюється на мартенсит відпускання.

Інструментальні леговані сталі для вимірювальних інструментів. Для вимірювального інструменту частіше використують низьколеговані сталі 12Х1 або Х, але іноді й сталі інших марок, у тому числі і вуглецеві.

Вимірювальний інструмент із зазначених сталей піддають гартуванню від температур 850–870°С в маслі. Присутність залишкового аустеніту та його подальше перетворення спонукають до зміни лінійних розмірів виробів, чого не можна допускати якщо йдеться про інструмент високих класів точності. Тому вимірювальні інструменти одразу ж після гартування піддають обробці холодом при –70°С з наступним відпусканням при температурах 120–140°С протягом 20–50 год, після чого твердість становить 63–64 HRC.

Вимірювальні скоби, лінійки та інші плоскі та довгі інструменти виготовляють з листової сталі марок 15 або 15Х. З метою отримання робочої поверхні з високою твердістю та зносостійкістю інструменти піддають цементації й гартуванню з низьким відпусканням.

Штампові сталі. Штампові сталі поділяють на сталі для виготовлення інструменту, який деформує метал у холодному й гарячому станах.

До технологічних операцій холодного штампування відносять пробивання отворів, листове штампування та ін. Сталі *для холодного штампування* повинні мати високу твердість й зносостійкість, а також незначно деформуватися при гартуванні, через це такі сталі є високовуглецевими, заевтектоїдними, а кількість легуючих елементів визначається необхідною зносостійкістю та прогартовуваністю сталі.

Штампи з легованих сталей загартовують у маслі з метою запобігання виникнення тріщин та значних змін у розмірах. Температура нагрівання для гартування становить до 1000°С (для розчинення вторинних карбідів), а відпуску – 150–250°С. Сталі, які застосовують частіше за умов роботи матриць листової висадки металу, вирубних та просічних штампів складної конфігурації, містять багато марганцю – Х12, Х12М, Х12Ф1 та ін. Крім цього основного легуючого елемента, кількість якого становить приблизно 12%, такі сталі містять молібден і ванадій, які сприяють подрібненню зерна та зменшують втрату міцності при відпусканні. Крім того, ці сталі мають велику прогартовуваність, що надає змогу гартувати наскрізь вироби з перерізом 150–200 мм у маслі.

До технологічних операцій гарячого деформування відносять вільне кування, об'ємне штампування, пресування та ін. Штампові сталі для *гарячого деформування* повинні мати необхідні міцність при достатній в'язкості й твердість при температурах нагрівання інструменту, чинити опір термічній втомленості, коли утворюється сітка тріщин при багаторазових теплозмінах (ця властивість має назву *розпалостійкості*). Ці сталі мають меншу кількість вуглецю (0,3–0,6%), що й забезпечує підвищену в'язкість та розпалостійкість. Основні легуючі елементи – хром, молібден, вольфрам, нікель та кремній. Якщо робочі температури не перевищують 400°С, то використовують сталі марок 5ХНМ, 5ХНВС, 5ХНВ.

Температуру гартування таких сталей вибирають на 20–40°С вищою за точку A_{c3}. У середньому вона становить 840–880°С залежно від марки сталі. Гартування проводять у маслі, після чого відбувається відпускання на певну твердість: дрібні штампи, як правило, на 40–46 HRC, а великі – на 35–38 HRC.

Якщо робочі температури перевищують 500–600°С, то використовують складнолеговані сталі марок 3Х2В8Ф, 4Х5В2ФС, 4Х5МФС, 4Х4ВМФС. Гартування виконується в маслі при нагріванні до високих температур, наприклад сталь 4Х5В2ФС нагрівають до 1030–1050°С. Необхідна температура відпускання становить 580–620°С з метою отримання необхідної твердості 45–50 HRC.

ГЛАВА 8. СПЕЦІАЛЬНІ СТАЛІ І СПЛАВИ

Спеціальними вважають сталі та сплави, що мають особливі властивості, необхідні для їх надійної та тривалої роботи, наприклад високу корозійну стійкість, високу жароміцність, особливі магнітні властивості та ін.

8.1. Автоматні сталі

Обробка різанням – основний спосіб виготовлення більшості деталей машин і пристроїв. За умов покращання оброблюваності сталей різанням зростає продуктивність їх обробки. Особливе значення це має для масового виробництва, де широко використовують автоматичні лінії.

Підвищена оброблюваність різанням досягається за рахунок використання технологічних та металургійних заходів.

До технологічних відносять термічну обробку і наклепування.

Заготовки середньовуглецевих сталей піддають нормалізації для отримання найкращої для обробки структури. Оброблюваність низьковуглецевих сталей підвищують холодною пластичною деформацією, яка знижує пластичність сталей і сприяє отриманню стружки, що легко відділяється при обробці.

Більш ефективними є металургійні заходи, які передбачають введення в сталь сірки, селена, телура, кальцію (які змінюють склад і кількість неметалевих включень), свинцю (який утворює свої металеві включення) та фосфору (який змінює властивості металевої основи).

Ці добавки та включення на їх основі створюють своєрідну внутрішню змазку, яка в зоні різання зменшує тертя між інструментом і стружкою, а також полегшує подрібнення стружки.

Автоматні сталі або сталі підвищеної оброблюваності різанням використовують у масовому виробництві кріпильних виробів та інших деталей, які виготовляють на верстатах-автоматах з великою швидкістю різання.

Автоматні сталі маркують літерою «А» й цифрами, які вказують на середню кількість вуглецю в сотих долях відсотка. Присутність інших елементів показують додаткові літери : С – свинець, Е – селен, Ц – кальцій.

Автоматні *сірчаністі* сталі А11, А12, А20, А30, А35 і А40Г є вуглецевими. Оброблюваність сталі різанням поліпшується при зростанні в ній кількості домішок сірки (0,08–0,25%) і фосфору (0,05–0,15%), через що стружка робиться ламкою й легко відділяється від поверхні виробу, а сама поверхня стає більш гладкою. Для зниження червоноламкості збільшують кількість марганцю до 0,70–1,55%.

Автоматні *свинцевисті* сталі поділяють на вуглецеві з підвищеним вмістом сірки (АС14, АС40, АС35Г2, АС45Г2) та леговані (АС14ХГН, АС40ХГНМ, АС20ХГНМ).

Введення 0,15–0,35% свинцю у вуглецеву сталь поліпшує оброблюваність різанням завдяки тому, що свинець у процесі різання плавиться, це знижує міцність, коефіцієнт тертя й зусилля різання та дає можливість удвічи підвищити продуктивність механічної обробки, стійкість інструментів і на 30–40% збільшити швидкість різання. При маркуванні таких сталей ставлять літеру «С»: АС14, АС40.

Сталі з підвищеною кількістю сірки й свинцю мають велику *анізотропію* механічних властивостей, схильні до крихкого руйнування, у них знижена границя витривалості, тому їх використовують тільки для малонавантажених деталей двигунів.

Автоматні *селенвмісні* сталі також діляють на вуглецеві (А35Е, А45Е) та хромисту (А40ХЕ). Вони містять 0,04–0,10% селену та 0,06–0,12% сірки. Підвищення оброблюваності пояснюється утворенням включень селенидів та сульфоселенидів глобулярної форми, які зберігають свою форму і після обробки тиском та не викликають анізотропію властивостей.

Автоматні *кальцієвмісні* (0,002–0,008% кальцію) сталі (АЦ20, АЦ30, АЦ40Х, АЦ30ХН та ін.) з доданням свинцю і кальцію призначені для деталей,

які обробляють твердосплавними інструментами на високих швидкостях різання. При цьому саме при високих швидкостях тугоплавкі кальцієвмісні включення, які утворюються у цих сталях, здатні розм'якшуватися та проявляти змазуючу дію лише при високих температурах у зоні різання.

8.2. Ливарні сталі

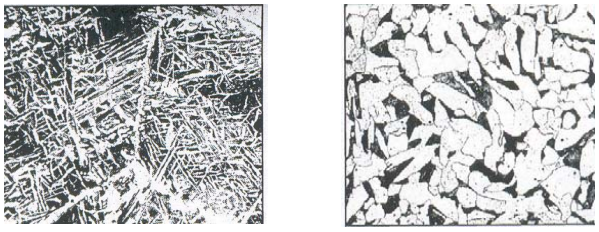
Ливарні сталі маркують числом, яке вказує кількість вуглецю в сотих частках відсотка та літерою «Л» наприкінці марки: 15Л, 20Л, 25Л, 30Л, 35Л, 40Л, 45Л, 50Л. Вони містять до 0,9% марганцю і до 0,52% кремнію, а також не більше ніж 0,06% сірки й 0,08% фосфору.

Леговані ливарні сталі мають підвищений комплекс механічних властивостей. Їх маркують так само, як і інші конструкційні леговані сталі, додаючи наприкінці марки літеру «Л»: 40ХНЛ.

З метою зниження ливарних напружень виливки піддають термічній обробці.

При твердінні відливків утворюються великі зерна аустеніту, всередині яких при наступному охолодженні в сталях, які містять вуглецю менше ніж 0,4%, формуються направлені пластини надлишкового ферриту (рис. 8.1), тобто виникає *Відманштеттова структура*, яка має суттєвий вплив на властивості сталі. При зростанні кількості вуглецю в сталі частка Відманштеттового фериту знижується, а частка фериту у вигляді зерен з довільною орієнтацією в просторі зростає.

Ливарна сталь з Відманштеттовою структурою має низьку пластичність та ударну в'язкість, і для підвищення цих властивостей виливки із сталей, які містять менше, ніж 0,4% вуглецю, піддають повному відпалу або нормалізації. При цьому відносне здовження зростає з 3–8% до 20–30%. Виливки зі середньовуглецевих сталей (0,25–0,5% вуглецю) піддають нормалізації або покращанню, а також поверхневому гартуванню.



а *б*

Рис. 8.1. Структура фериту в литому стані (*а*)
та після термічної обробки (*б*)

Ливарні сталі використовують для деталей зварнолитих конструкцій, арматури, крупних шестерен, зубчастих коліс, валків та інших деталей.

Ливарні властивості сталей значно гірші, ніж чавунів і більшості кольорових ливарних сплавів. Сталі не мають у структурі евтектики, внаслідок чого мають порівняно низьку рідкотекучість й високу схильність до утворення гарячих ливарних тріщин. Певних труднощів при литті завдає й висока температура плавлення, особливо в низьковуглецевих сталей. Лінійна усадка таких сталей дуже висока й досягає 2,3%.

8.3. Кулькопідшипникові сталі

Підшипники кочення є відповідальними деталями багатьох машин: верстатів, автомобілів, тракторів, комбайнів і т.ін. Вони працюють в умовах кочення шариків чи роликів по зовнішньому чи внутрішньому кільцям. Найчастіше причинами відмов підшипників є поломи від втомленості: руйнування тіл кочення та викришування робочих поверхонь кілець.

Підшипники працюють за умов тертя ковзання й зазнають інтенсивного зношування.

Зношування – це процес поступового руйнування поверхневих шарів матеріала шляхом відокремлення його частинок під впливом сил тертя.

Результат зношування – це знос, який оцінюють за такими даними:

1) зміна розмірів – лінійний знос;
2) зменшення об'єму – об'ємний знос;
3) зменшення маси – масовий знос.

При роботі деталей в умовах зношування можна виділити три основних періоди зносу: приробки (рис. 8.2, зона 1), нормального (рис. 8.2, зона 2) та катастрофічного (рис. 8.2, зона 3) зносу. Особливістю першого періоду є постійне зниження швидкості зносу. У другій зоні швидкість зносу не змінюється й залишається мінімальною, тому саме ця зона найбажаніша і має бути найбільшою. У третій зоні починається процес значного зносу з постійно й інтенсивно зростаючою швидкістю зносу, що пояснюється потраплянням у зону зношування дрібних частинок через їх поверхневе викришування. Допускати цю зону не можна.

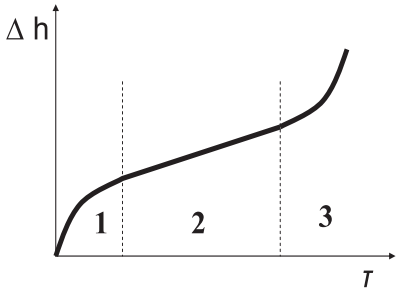


Рис. 8.2. Залежність величини зносу від часу роботи.

Підшипники кочення працюють при низьких динамічних навантаженнях, що дозволяє використовувати високовуглецеві сталі, леговані хромом та іншими елементами.

Для виготовлення тіл кочення та підшипникових кілець невеликих перерізів звичайно використовують високовуглецеву хромисту сталь ШХ15. На цьому прикладі пояснемо маркування кулькопідшипникових сталей: ШХ15 – сталь кулькопідшипникова (літера «Ш»), хромиста з кількістю хрому 1,5% (після літери «Х» цифри вказують кількість хрому в десятих частках відсотка). Для великих перерізів застосовують сталь ШХ15СГ.

Кількість вуглецю становить в усіх сталях біля одного відсотка, тому її не вказують при маркуванні.

Ці сталі мають відзначаються твердістю, зносостійкістю та опірністю контактній втомленості. Вони також повинні відповідати високим вимогам щодо кількості неметалевих включень, тому що останні викликають передчасне руйнування від утомленості. Електрошлакова та вакуумно-дугова переплавка зменшує кількість неметалевих включень (оксидів, сульфідів та ін.) і підвищує довговічність підшипників.

Кільця, кульки та ролики проходять гартування в маслі від температур 840–860°С та відпуск при 150–170°С. Для підшипників, які додатково повинні мати особливо високу стабільність розмірів, іноді використовують обробку холодом при температурі від –70 до –80°С.

Хімічний склад деяких марок кулькопідшипникових сталей наведено в табл. 8.1. Для зовсім маленьких кульок та роликів використовують сталь ШХ9; для кульок діаметрами, більших за 22,5 мм, та роликів діаметром 15–30 мм, а також для кілець всіх розмірів використовують сталь ШХ15, а для роликів діаметром більше 30 мм та кілець завтовшки більше 15 мм – сталь ШХ15СГ.

Таблиця 8.1

Хімічний склад деяких марок кулькопідшипникових сталей (%)

Марка сталі	C	Cr	Si	Mn
ШХ4	0,95–1,05	0,35–0,55	0,17–0,37	0,15–0,30
ШХ15	0,95–1,05	1,3–1,65	0,17–0,37	0,2–0,4
ШХ15СГ	0,95–1,05	1,3–1,65	0,40–0,65	0,9–1,2
ШХ20СГ	0,90–1,00	1,4–1,7	0,55–0,85	1,4–1,7

8.4. Нержавіючі сталі

Практика експлуатації великої кількості деталей машин та елементів будівельних конструкцій свідчить про те, що вихід з ладу механізмів і деталей часто пов'язаний зі швидким розвитком корозійних процесів унаслідок взаємодії матеріалів деталей і конструкцій з навколишнім середовищем. Частіше має місце електрохімічна корозія, яка дуже швидко «з'їдає» матеріали з низькою стійкістю проти корозії, а саме до них належать вуглецеві та леговані сталі і чавуни.

Корозія завдає великих збитків як прямих (це вартість заміни деталей та частин машин), так і побічних (простій обладнання, підвищення витрат палива, матеріалів і т.ін.). Статистика свідчить, що залежно від країни і кліматичних умов сумарні збитки від корозії досягають рівня 3–10% валового продукту.

У сучасних умовах є такі основні способи захисту від корозії:

- утворення на поверхні щільних суцільних плівок оксидів з високими властивостями та зчіплюваністю з основою;
- нанесення захисних покриттів і плівок, фарбування поверхні.

З урахуванням властивостей самих матеріалів реалізується перший спосіб захисту від корозії, тому що саме оксидні плівки захищають поверхню від проникнення агресивного середовища. І тут велике значення має щільність цієї плівки та її зчіплюваність з основою метала. У звичайних (мається на увазі не спеціальних) сплавів на основі заліза і вуглецю (сталей і чавунів) ця плівка пориста, що зумовлює їх низьку стійкість проти корозії. У кольорових металів ця плівка дуже щільна, що пояснює їх значну стійкість проти корозії в багатьох середовищах.

Спеціальні сталі, які мають високий опір електрохімічній корозії, називають *корозієстійкими*. Серед них велику групу складають так звані *нержавіючі* сталі.

Антикорозійні властивості мають тільки спеціально леговані сталі. Основними легуючими елементами, що забезпечують стійкість проти корозії нержавіючих сталей, є хром і нікель.

Хром має високий опір корозії в багатьох окисних середовищах: на повітрі, у воді, в азотній кислоті тощо. У цих середовищах у перші моменти окиснення на поверхні хрому виникає дуже тонка (завтовшки менше сотої частки міліметра) прозора й щільна плівка оксидів хрому, що захищає поверхню від зовнішнього середовища, до якого хром стає пасивним.

Свою здатність бути пасивним хром передає при легуванні залізу і сталі за умови, що він входить до складу твердого розчину на основі заліза, де його концентрація перевищує 12% (рис. 8.3). Така сталь поводить себе в окисному середовищі як благородний метал, тобто стає корозієстійкою.

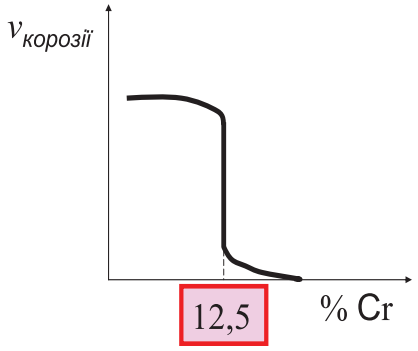


Рис. 8.3. Вплив хрому на швидкість корозії сталі

Нержавіючіі сталі бувають хромистими та хромонікелевими.

Хромисті нержавіючі сталі містять 13–30% хрому, що забезпечує їм високу стійкість у вологій атмосфері, водопровідній та річній воді, а також у деяких інших агресивних середовищах.

Кількість вуглецю, який негативно впливає на стійкість проти корозії, є малою й становить не більше 0,4%, а в найбільш корозієстійких сталях – 0,10–0,15%.

Хімічний склад деяких марок нержавіючої сталі наведено в табл. 8.2.

Сталі 12Х13 і 20Х13 піддають гартуванню в маслі від 1000 до1050°С. Загартовані сталі мають найвищу стійкість проти корозії. Для отримання необхідних механічних властивостей загартовані сталі піддають високотемпературному

відпуску при температурах 600–700°С. Ці марки сталей є надійним конструкційним корозієстійким матеріалом для роботи в умовах ударних навантажень, а також при нагріванні до 450–550°С. З них виготовляють клапани гідравлічних пресів, лопатки гідравлічних та парових турбін, предмети домашнього вжитку та ін.

Таблиця 8.2

Хімічний склад деяких марок нержавіючої хромистої сталі (%)

Марка сталі	C	Cr	Mn	Si
12Х13	0,09–0,15	12–14	≤ 0,8	≤ 0,8
40Х13	0,36–0,45	12–14	≤ 0,8	≤ 0,8
12Х17	≤ 0,12	16–18	≤ 0,8	≤ 0,8
15Х28	≤ 0,15	27–30	≤ 0,8	≤ 0,8

Сталі 30Х13 і 40Х13 мають властивості, близькі до інструментальних сталей. Після гартування від 1050°С в маслі й відпуску при температурі 200–300°С їх середня твердість становить 50–55 HRC. Сталі цих марок стійкі в середовищі різних харчових продуктів (наприклад, у фруктових соках, 4–5% оцтовій кислоті та ін.) й слабких розчинах азотної кислоти. Сталі 30Х13 і 40Х13 використовують для виготовлення виробів, які працюють на стирання (різальний, вимірювальний та хірургічний інструмент), а також пружин (сталь 30Х13) у харчовій, хімічній промисловості та в медицині.

Підвищення кількості хрому до 17–28% призводить до значного зростання стійкості проти корозії сталі. Сталі 12Х17 і 15Х28 також добре зварюються та задо-вільно оброблюються різанням, маючи феритну структуру. Істотним недоліком цих сталей є їх схильність до міжкристалітної корозії, яку усувають легуванням цих сталей титаном, танталом, ванадієм та ніобієм (марки 15Х25Т, 08Х18Т1, 08Х17Т). Ці сталі широко використовують для виготовлення технологічного обладнання в хімічній, харчовій, переробній та легкій промисловості. Вони можуть застосовуватися і як окалиностійкі сталі до 900°С.

У *хромонікелевих нержавіючих сталях* роль нікеля дуже значна. Цей елемент відносять до аустенітостабілізуючих, які значно знижують температуру $\gamma \Rightarrow \alpha$ перетворення. Тому сталі, що містять 18% хрому та 9% нікелю за кімнатної температури мають аустенітну структуру. Такі сталі мають більш високу стійкість проти корозії порівняно з хромистими сталями. Особливо ефективно вони чинять опір корозії в атмосферних умовах, у тому числі в забрудненій атмосфері промислових районів, яка містить сірчасті гази. Найбільш поширеними сталями цієї групи є марки 08Х18Н10 і 08Х18Н10Т (хімічний склад наведено в табл. 8.3).

Ці сталі використовують як конструкційний матеріал для виробів, які при виготовленні піддають холодному штампуванню та зварюванню: обшивки, оболонки, ємкості, трубопроводи. Сталі широко застосовують у машинобудуванні, хімічній промисловості, суднобудуванні, а також для архітектурних та декоративних цілей.

Хромонікелеві сталі містять дуже багато гостродефіцитного нікелю, тому коштують дуже дорого. По можливості їх замінюють малонікелевими або безнікелевими сталями. Нікель замінюють такими аустенітостабілізуючими елементами, як марганець і азот. Прикладом економнолегованих аустенітних сталей є марки 10Х14АГ15 (0,15–0,25% азоту) і 10Х14Г14Н4Т, вони використовуються в обладнанні харчової промисловості, яке працює в слабкоагресивних середовищах.

Таблиця 8.3

Хімічний склад деяких марок хромонікелевих нержавіючих сталій (%)

Марка сталі	C	Cr	Ni	Ti	Інші елементи
08Х18Н10	≤ 0,08	17–19	9–11	-	≤ 0,8 Si, ≤ 2 Mn
12Х18Н9	≤ 0,08	17–19	8–10	-	≤ 0,8 Si, ≤ 2 Mn
12Х18Н9Т	≤ 0,08	17–19	8–9,5	0,5–0,8	≤ 0,8 Si, ≤ 2 Mn
12Х21Н5Т	0,09–0,14	20–22	4,8–5,8	0,25–0,5	≤ 0,8 Si, ≤ 0,8 Mn

Основні перспективні напрями розвитку нержавіючої сталі.

1. Створення безвуглецевих сталей з підвищеним вмістом азоту 03Х21Н9, бо всі нітриди розчиняються у твердому розчині, а вуглець здатний утворювати карбіди, що значно знижує стійкість проти корозії.
2. Використання марганцю і азоту замість дорогого нікелю, які також стабілізують аустеніт.

8.5. Зносостійкі сталі

Дуже багато деталей машин працюють в умовах зносу, який є дуже складним процесом. Типовими випадками зносу є звичайне тертя ковзання та абразивне спрацювання. У першому випадку метал наклепується з поверхні, тому зносостійкість істотно залежить від здатності металу наклепуватися. У другому випадку частки металу вириваються з поверхні, тому зносостійкість визначається твердістю та опором відриванню. Зносостійкість деталей можна підвищити хіміко-термічною обробкою, але є спеціальні групи зносостійких сталей, які мають значну стійкість проти спрацювання за певних умов.

Графітизовані сталі містять підвищену кількість вуглецю (до 1,75%) та до 1,6% кремнію, який грає роль графітизуючого елемента. Частина вуглецю в таких сталях після графітизуючого відпалу виділяється у вигляді графіту. Після термічної обробки структура такої сталі складається із зерен перліту з невеликою кількістю дрібних округлих часток графіту. При неабразивному зносі графіт виконує роль мастила, а також чинить опір вібраційним навантаженням. Такі сталі використовують для виготовлення штампів, колінчастих валів, матриць тощо. Склад деяких марок графітизованих сталей наведено в табл. 8.4.

Таблиця 8.4

Хімічний склад деяких марок графітизованих сталей (%)

Марка сталі	C	Si	Mn	Інші елементи
ЕИ293	1,50–1,75	0,75–0,95	0,2–0,4	-
ЕИ336	1,50–1,70	0,70–1,00	0,15–0,40	0,4–0,7 Cu
ЕИ366	1,30–1,45	1,60–1,25	0,40–0,50	0,2–0,4 Ti

Високомарганцевисті сталі. Звичайно високий опір спрацюванню забезпечується одержанням поверхні з високою твердістю. Але існує аустенітна сталь, яка в умовах тертя, що супроводжується значним питомим тиском (при повній відсутності чисто абразивного спрацювання), при низькій твердості 200–250 НВ має високу зносостійкість (рис. 8.4). Це так звана сталь Гадфільда, який вперше запатентував її в 1883 році. Такі сталі позначають як 110Г13 (1,1% вуглецю, 13% марганцю, <0,5% кремнію) та 110Г13Л (1,1% вуглецю, 13% марганцю, приблизно 1% кремнію; літера «Л» означає, що сталь лита). Ці стали мають структуру аустеніту з надлишковими карбідами $(Fe, Mn)_3C$ і частіше використовуються в литому стані, а рідше в гарячедеформованому.

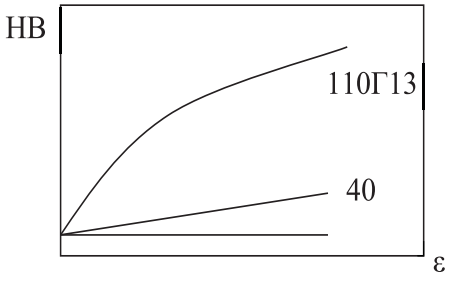


Рис. 8.4. Вплив деформації на твердість сталей 40 і 110Г13

Термічна обробка литих та кованих деталей (механічній обробці ці сталі піддаються з великим утрудненням) полягає в гартуванні у воді від 1050–1100°С. Під час швидкого охолодження виділення карбідів повністю затримується й утворюється структура однорідного марганцевистого аустеніту з високою в'язкістю і пластичністю при достатній міцності: σ_u = 800–1000 МПа, $\sigma_{0,2}$ = 250–400 МПа, δ = 40–50%, ψ = 40–50%, НВ 200–250. Характерною особливістю марганцевистого аустеніту є підвищена здатність наклепуватися при значних ударних навантаженнях. Деформація на 60–70% призводить до зростання твердості сталі 110Г13 до НВ 500, що пояснюється значним накопиченням дефектів кристалічної будови і навіть утворенням структури мартенситу в поверхневих шарах.

Сталь Гадфільда широко застосовують для виготовлення деталей, які в процесі експлуатації зазнають водночас ударних навантажень та зношування: хрестовин залізничних та трамвайних колій, зубів ковшів землечерпальних машин, траків гусеничних машин тощо.

8.6. Жароміцні та жаростійкі сталі і сплави

Жароміцність – це здатність матеріалу протистояти механічним навантаженням при високих температурах, а *жаростійкість* – це здатність чинити опір газовій корозії при високих температурах.

Теплостійкі сталі призначені для роботи при температурах приблизно до 600°С. Склад деяких марок наведено в табл. 8.5. Їх використовують у теплоенергетиці, нафтохімічній промисловості та хімічному машинобудуванні. Вони призначені для тривалої (до 20 років) експлуатації, і тому повинні мати дуже стабільну структуру. Основними легуючими елементами в таких сталях є Cr, Ni, W, Mo, Nb і Ti. Низьколеговані теплостійкі сталі, наприклад сталь 12Х1МФ використовують для виготовлення паропровідних та пароперегрівних труб, деталей котельних установок, які працюють при температурі до 580°С. Хром зміцнює α-розчин, утворює спеціальні карбіди та підвищує опір окисненню. Молібден, який знаходиться в α-розчині на основі заліза, підвищує сили міжатомного зв'язку, що підвищує опір повзучості (повзучість – явище необоротного зростання деформації твердого тіла з часом при сталому навантаженні). Ванадій утворює в процесі відпускання дуже дрібні та стійкі проти коалесценції (укрупнення) частинки карбідів VC. Кількість вуглецю в низьколегованих теплостійких сталях не перевищує 0,2%, тому що при більшій кількості жароміцність знижується внаслідок коалесценції карбідів під впливом утворення великої кількості карбідів молібдену, а також погіршується зварюваність сталі.

Низьколеговані теплостійкі сталі піддають гартуванню або охолодженню на повітрі від температур 950–1000°С та високому відпуску при температурі 650–750°С. Температура відпуску має бути на 100°С вищою за робочу температуру,

щоб при відпусканні сформувалася стабільна структура, яка б дуже мало змінювалася під час експлуатації.

Таблиця 8.5

Хімічний склад й властивості жароміцних сталей при 600°С (%)

Марка сталі	C	Cr	Mo	V	Інші елементи	Границя тривалої міцності, МПа	
						$\sigma^{600} \cdot 10^4$	$\sigma^{600} \cdot 10^5$
12Х1МФ	0,08–0,15	0,9–1,2	0,25–0,35	0,15–0,30	-	80	60
15Х1М1Ф	0,10–0,16	1,1–1,4	0,9–1,1	0,2–0,25	-	85	65
18Х12ВМБФР	0,15–0,22	11–13	0,4–0,6	0,15–0,30	0,2–0,4 Nb 0,4–0,7 W ≤ 0,003 B	180	150

Для випускних клапанів автомобільних та тракторних двигунів внутрішнього згоряння невеликої потужності використовують хромокремнисті сталі, які називають *сильхромами*. Серед них найбільш відомі 40Х9С2 та 40Х10С2М (0,7–0,9% молібдену). Але при нагріванні вище 500–600°С міцність сильхромів значно падає, тому у форсованих двигунах та дизелях замість сильхромів застосовують жароміцні аустенітні сталі, деяки марки яких наведено в табл. 8.6.

Таблиця 8.6

Хімічний склад клапанних сталей (%)

Марка сталі	C	SI	Cr	Mo	Інші елементи
40Х9С2	0,35–0,45	2,0–3,0	8,0–10,0	-	-
40Х10С2М	0,35–0,45	1,9–2,6	9,0–10,5	0,7–0,9	-
45Х14Н14В2М	0,40–0,50	0,8	13,0–15,0	0,25–0,4	13,0–15,0 Ni; 2,0–2,8 W

Аустенітні сталі з карбідним зміцненням мають 0,25–0,5% вуглецю, хром і нікель у кількостях, що забезпечують стабільність аустеніту в широкому інтервалі температур, та карбідоутворюючі елементи (Mo, W, V, Nb). Дефіцитний

нікель може бути частково замінений на марганець, який також поширює область існування аустеніту на діаграмі стану. Такі сталі можуть працювати при температурі до 650–750°С й високих навантаженнях. Прикладом може бути сталь 37Х12Н8Г8МФБ (табл. 8.7), призначена для виготовлення великих деталей – дисків турбін, бандажних кілець та ін. Сталь загартовують від 1150°С у воді та піддають старінню за 660–790°С протягом 10–16 годин. Висока температура нагрівання для гартування необхідна для більш повного розчинення карбідів у аустеніті.

Аустенітні сталі з інтерметалідним зміцненням містять не більше 0,1% вуглецю, дуже багато нікелю (до 38%), титан, алюміній, вольфрам, молібден, ніобій, хром та ін. Сумарна кількість елементів може досягати 60%.

Таблиця 8.7

Хімічний склад і властивості деяких марок жароміцних сталей (%)

Марка сталі	C	Cr	Ni	Mn	Інші елементи	Границя міцності (100 циклів), МПа, при температурі, °С		
						600	700	800
Сталі з карбідним зміцненням								
45Х14Н14В2М	0,4–0,5	13–15	13–15	-	2–2,75 W; 0,25–0,4 Mo	220	-	-
37Х12Н8Г8МФБ	0,34–0,4	11,5–13,5	7–9	7,5–9,5	1,1–1,4 Mo; 0,25–0,45 Nb; 1,25–1,55 V	450	300	150
Сталі з інтерметалідним зміцненням								
10Х11Н20Т3Р	до 0,1	10–12,5	18–21	-	2,3–2,8 Ti; до 0,5 Al; 0,008–0,02 B	-	300	100
10Х11Н23Т3МР	до 0,1	10–12,5	21–25	-	2,5–3,0 Ti; до 0,5 Al; 0,008–0,02 B; 1–1,6 Mo	580	400	200

Прикладом такої сталі може бути марка 10Х11Н20Т3Р (табл. 8.7), яку після гартування від 1100°С (на повітрі або в маслі) та старіння при температурі 740°С

протягом 16 год використують для роботи при температурах до 700°С (деталі газотурбінних двигунів).

Жаростійкі (окалиностійкі) сталі застосовують для виготовлення виробів, що працюють при температурах вище 550°С в ненавантаженому або малонавантаженому стані (вихлопні патрубки, деталі пічного обладнання, жарові труби тощо).

Жаростійкість сталей підвищують легуванням хромом, алюмінієм та кремнієм, які утворюють на поверхні виробів щільні та міцні захисні плівки оксидів, спінелів та силікатів з низькою дифузійною проникністю. Хром та алюміній підвищують жаростійкість легованих сталей через утворення оксидів Cr_2O_3, Al_2O_3 та подвійних оксидів типу спінелів $FeO \cdot Cr_2O_3$, $FeO \cdot Al_2O_3$, $NiO \cdot Cr_2O_3$. Додавання близько 2% кремнію підвищує жаростійкість легованих сталей внаслідок утворення захисного шару силікату $2FeO \cdot SiO_2$.

Хромисті сталі феритного класу – найбільш дешеві жаростійкі матеріали. Нержавіючу хромисту сталь 08Х13 використують як жаростійку до 800°С. Спеціальна жаростійка сталь 15Х28 через велику кількість хрому може працювати до 1100°С.

Жаростійкі хромонікелеві сталі аустенітного класу відрізняються від феритних кращою зварюваністю та меншою схильністю до набуття крихкості при тривалих високотемпературних витримуваннях. Наприклад, сталь 20Х25Н20С2 можна використовувати для деталей пічного обладнання, яке працює при температурах до 1100°С.

Жаростійкий сплав на залізонікелевій основі ХН45Ю застосовують для виготовлення деталей печей, пальників, чохлів термопар, які працюють при дуже високих температурах – до 1300°С.

8.7. Магнітні сталі і сплави

Розрізняють три групи магнітних сталей і сплавів: магнітотверді, магніто-м’які і парамагнітні.

Магнітотверді сталі і сплави, які мають високі значення коерцитивної сили і малу залишкову індукцію (рис. 8.5), використовують для виготовлення постійних магнітів. Це високовуглецеві сталі з 1 % вуглецю, леговані хромом (3%) – ЕХ3, а також хромом і кобальтом – ЕХ5К5, ЕХ9К15М2 (табл. 8.8). Легуючі елементи підвищують головним чином коерцитивну силу та магнітну енергію, а також поліпшують температурну і механічну стабільність постійних магнітів. Хромисті і кобальтові сталі порівняно легко оброблюються тиском і різанням, але мають відносно малу магнітну енергію. Коерцитивна сила легованих сталей становить 4,8–12 кА/м й залишкова індукція 0,8–1,0 Тл. Найвищі магнітні властивості мають сталі ЕХ5К5 і ЕХ9К15М2 після нормалізації, високого відпуску, гартування й низького відпуску при 100°С.

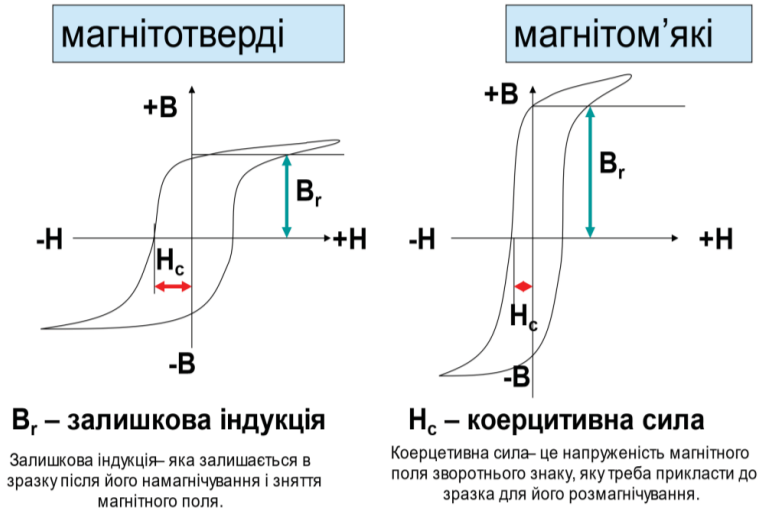


Рис. 8.5. Фізичні характеристики магнітних матеріалів

Таблиця 8.8

Хімічний склад деяких марок магнітотвердої сталі (%)

Марка сталі	C	Cr	Інші елементи
ЕХ	0,95–1,10	1,3–1,6	-
ЕВ6	0,68–0,78	0,3–0,5	5,2–6,2 W
ЕХ5К5	0,90–1,05	5,5–6,5	5,5–6,5 Co

У промисловості широко застосовують сплави типу *алніко* (табл. 8.9), які мають високу твердість, крихкі й не піддаються деформації, тому магніти з них виготовляють литтям, після якого проводять тільки шліфування. Високих магнітних властивостей сплави набувають після гартування від 1250–1280°С з визначеною для кожного сплава швидкістю та відпуску при температурі 580–600°С. Подальшого підвищення магнітної енергії набувають створенням в сплавах магнітної й кристалографічної *текстур.*

Для створення магнітної текстури сплави типу алніко піддають термомагнітній обробці: нагріванню до 1300°С та охолодженню з малою швидкістю (залежно від складу сплава) в магнітному полі, яке прикладене вздовж напрямку найбільш важливого для магніту певної конфігурації. Потім магніт відпускають при температурі 625°С. Під час обробки в магнітному полі α-фаза виділяється у вигляді частинок, орієнтованих вздовж поля паралельно напряму [100].

Таблиця 8.9

Хімічний склад деяких литих сплавів для постійних магнітів (%)

Марка сплаву*	Ni	Al	Co	Cu	Інші елементи
ЮНДК15	18–19	8,5–9,5	14–15	3–4	0,2–0,3 Ti
ЮН14ДК25А	13,5–14,5	8,0–8,5	24–26	3,5	≥ 0,03 Ti
ЮНДК31Т3БА	12–13,5	6,8–7,2	30,5–31,5	3,0–3,5	3–3,5 Ti; 0,9–1,1 Nb
ЮНДК40Т8АА	14–14,5	7,2–7,7	39,0–46,0	3–4	7–8 Ti; 0,1–0,2 Si
Примітка* Літера «А» або літери «БА» наприкінці марки означають, що сплави мають стовбчасту структуру, а літери «АА» – монокристалічну структуру.					

Після такої обробки магнітні властивості сплавів стають *анізотропними*, їх магнітні характеристики значно зростають у напрямку прикладеного магнітного поля (*магнітна текстура*). Термомагнітній обробці піддають сплави, які містять більше 18% хрому. *Кристалічна текстура* утворюється у випадку спрямованої кристалізації виливки магніту, коли виникають стовбчасті кристали, що ростуть у напряму [100]. Це сильно підвищує магнітні властивості, тому що вони значно залежать від кристалічної орієнтації феромагнітних фаз.

Магнітом'які (електротехнічні) сталі використовують для виготовлення магнітопроводів сталого та змінного струму.

Загальні вимоги до магнітом'яких матеріалів: висока магнітна проникність, низька коерцитивна сила (рис. 8.5), а для деталей магнітопроводів, що працюють у полях змінного струму, – малі втрати при перемагніченні та на вихрові струми.

До цієї групи матеріалів належать: технічно чисте залізо, електротехнічні феритні сталі, які містять 0,005–0,05% вуглецю та 0,8–4,8% кремнію, а також спеціальні сплави (пермалой, альсифер та ін.).

Електротехнічну сталь маркують цифрами, які визначають: перша – структуру і вид прокатки, друга – кількість у сталі кремнію, третя – втрати на гістерезіс та теплові втрати, четверта – спеціальний код певного параметра (наприклад, сталь 1212, 2012 та ін.).

Ці сталі мають високу магнітну проникність й не намагнічуються. Їх застосовують для виготовлення сердечників трансформаторів, реле й башмаків динамомашин постійного струму. Для сердечників з дуже високою магнітною проникністю застосовують спеціальні сплави – *пермалой* (залізо та 45–83% нікелю) або *альсифер* (9,6% кремнію; 5,4% алюмінію; 85% заліза).

Парамагнітні сталі використовують в електротехніці, приладобудуванні та спеціальних галузях техніки, коли необхідні немагнітні матеріали. У такому разі застосовують парамагнітні аустенітні сталі 17Х18Н9, 12Х18Н9Т, 55Г9Н9Х3, 50Г18Х4, 40Г14Н9Ф2, 40Г14Н9Х3ЮФ2 та ін.

Недоліком цих сталей є низька границя текучості, що утруднює їх використання для значно навантажених деталей машин. Міцність можна підвищити шляхом дисперсійного або деформаційного зміцнення. Підвищення зносостійкості деталей, які працюють у вузлах тертя, досягають азотуванням (сталі 40Г14Н9Ф2, 40Г14Н9Х3ЮФ2 та ін.).

ГЛАВА 9. ЧАВУНИ

Чавунами називають залізовуглецеві сплави, які містять більше ніж 2,14% вуглецю. Вони твердіють з утворенням евтектики, що визначає їх основні механічні і технологічні властивості.

Чавуни – це найбільш поширені сплави для фасонного литва. Приблизно три чверті всіх виливків одержують з чавунів. Це зумовлено, по-перше, тим, що чавун – один з самих дешевих ливарних матеріалів, а, по-друге, він має чудові ливарні властивості. Цей конструкційний матеріал є одним з основних ливарних матеріалів сучасності; прогнозування вказує на те, що він відіграватиме цю роль і в майбутньому.

Ливарні властивості сплавів оцінюють *рідкотекучістю* (здатністю розплаву вільно текти в ливарній формі, повністю заповнюючи її й точно відтворюючи всі її контури), *величиною усадки* (зменшення об'єму металу при кристалізації і подальшому охолодженні), а також схильністю до утворення пористості, ліквації, гарячих та холодних тріщин. Від ливарних властивостей залежить не тільки можливість отримання складного виливка, але й його конструкційна міцність, тому що багато дефектів структури (пористість, ліквацийна неоднорідність, мікротріщини) є ефективними концентраторами напружень.

У чавунів нижча ніж у сталей, температура плавлення, висока рідкотекучість, мала усадка, менша схильність до утворення усадочних тріщин, що дозволяє виливати фасонні деталі складної форми. Високоміцні чавуни за деякими властивостями не поступаються багатьом кованим сталям, тому заміна ними кованих сталей завжди економічно вигідна завдяки отриманню деталей з розплаву, без операцій обробки тиском. Крім традиційного використання в металургії та машинобудуванні (виливниці, станини верстатів та ін.), чавун все ширше використовують для деталей машин, які повинні мати високу конструкційну міцність, підвищену твердість, зносостійкість, високу циклічну в'язкість, тобто здатність

гасити вібрацію (колінчасті вали та шестерні з високоміцного та ковкого чавуну, а також гільзи, поршні й поршневі кільця з сірого чавуну з перлітною основою).

Універсальність властивостей чавунів зумовлена можливістю широко змінювати хімічний склад сплава, умови твердіння й охолодження, а також термічну обробку.

Промислові чавуни – це багатокомпонентні високовуглецеві сплави на основі заліза, які містять 2,0–4,5% вуглецю; 1,0–3,5% кремнію; 0,5–1,0% марганцю; до 0,3% фосфору та 0,2% сірки. Таким чином, кількість кремнію знаходиться в чавунах на рівні вуглецю, тому кремній треба розглядати не як домішку, а як один з основних компонентів чавуну. Основою промислових чавунів можна враховувати потрійну систему Fe-C-Si. За правилом фаз у наведеній системі трифазна рівновага не нонваріантна, а моноваріантна, тому евтектоїдна і евтектична рівноваги мають місце не при сталій температурі, а в інтервалі температур. Ще важливіше те, що під впливом кремнію подвійна евтектика зсувається в бік меншої кількості вуглецю. Наприклад, чавун з 3,8% вуглецю й 3% кремнію є заевтектичним, і в ньому первинно кристалізується графіт, у той час як в системі Fe-C сплав з 3,8% вуглецю є доевтектичним, де первинно кристалізується аустеніт.

При введенні 1% фосфору концентрація вуглецю в подвійній евтектиці зменшується приблизно на 3,0%. У той же час марганець практично не впливає на цю концентрацію.

Крім основних елементів, які визначають всі основні властивості звичайних чавунів, у модифікованих чавунах знаходиться невелика кількість магнію, хрому, кальцію та ін., а в легованих є хром, мідь, молібден, алюміній, кобальт, вольфрам тощо. Усі ці елементи мають певний вплив на структуру і властивості чавунів, тому в основу класифікації цих сплавів покладено класифікацію за *структурною ознакою*.

9.1. Класифікація чавунів за мікроструктурою

Процес кристалізації чавунів за різних умов може супроводжуватися виникненням різних високовуглецевих фаз, що зумовлює існування білих, сірих і половинчастих чавунів.

Незважаючи на те, що основними елементами в чавунах, так саме, як у сталях, є залізо і вуглець, чавуни мають значні відмінності від сталей за багатьма параметрами (табл. 9.1).

Таблиця 9.1

Відмінності сталі і чавуну

Характеристика	Сталь	Чавун
Технологічні властивості	Деформівний сплав	Ливарний сплав
Високовуглецеві фази	Одна – цементит	Дві – цементит і графіт
Вплив умов одержання (швидкість охолодження, витримування під час охолодження)	Не впливають – структура за перерізом однакова	Впливають – за перерізом можна отримати різні структури
Методи одержання	Кристалізація розплаву	Кристалізація розплаву і термічна обробка
Маркування	За хімічним складом	За міцністю

За *кольором злому* чавуни поділяють на дві великі групи: *білі* і *сірі*. Головною відмінністю при цьому, що і визначає колір злому, є вид високовуглецевої фази. У *білих* чавунах це винятково *цементит* (до речі, як і у сталях), тому вони мають сріблясто-білий колір злому. *Сірим* чавунам колір злому надає присутність включень *графіту* різної форми.

Через велику кількість цементиту білі чавуни мають дуже велику твердість і зносостійкість, тому їх використання обмежується виробництвом прокатних валків, мелючих тіл (кулі, цільпебси), рудо-, цементо- і мукорозмольних млинів, різних змінних зносостійких деталей машин – зубів екскаваторів, щок кам'яних

дробарок та інше. Треба зазначити, що в ливарних цехах підприємств сільськогосподарського машинобудування, на автопідприємствах виробляється велика номенклатура виливків з білого чавуну, які за допомогою термічної обробки переробляють на так званий «ковкий» чавун.

За мікроструктурою білі чавуни поділяють на доевтектичні, евтектичні та заевтектичні (рис. 9.1).

Структура *сірих за зломом* чавунів складається з *металевої основи* й *включень графіту*, які цю основу пронизують (рис. 9.1).

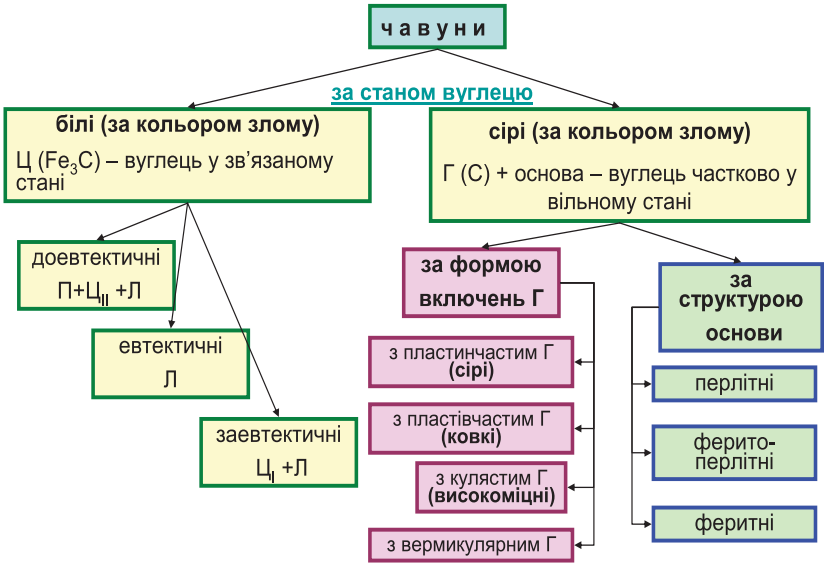
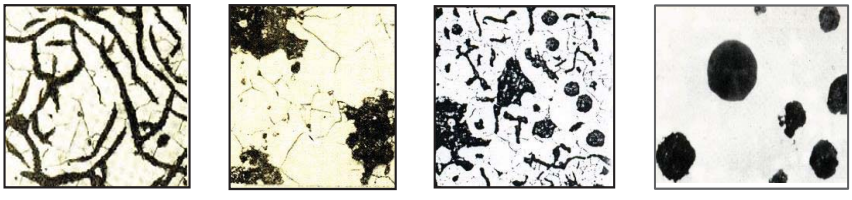


Рис. 9.1. Класифікація чавунів за мікроструктурою

Форма графітних включень (рис. 9.2) може бути пластинчастою, пластівчастою, вермикулярною й кулястою.



а *б* *в* *г*

Рис.9.2. Форма включень графіту: пластинчаста (*а*), пластівчаста (*б*), вермикулярна (*в*), куляста (*г*)

Чавуни з пластинчастою формою графіту називають звичайними *сірими*, з пластівчастою – *ковкими*, а з кулястою – *високоміцними*. Чавуни з вермикулярною формою включень не мають особливої назви – їх називають за формою включень.

Форма графітних включень значно впливає на міцність й пластичні властивості чавунів (табл. 9.2). Найліпшою є куляста форма графіту, в той час як пластинчастий графіт знижує міцність та пластичність чавунів.

Таблиця 9.2

Пластичність чавунів з різною формою включень графіту

Форма включень графіту	Пластинчаста	Вермикулярна	Пластівчаста	Куляста
Відносне видовження δ, %	0,2–0,5	0,9–3	5–10	10–15

Графіт має низькі механічні властивості. Його включення діють так, ніби в металевій основі є внутрішні надрізи, пустоти, які роз'єднують й ослабляють основу. Найсильніше у цьому плані діють пластинчасті включення. Зростання розмірів пластинок графіту та їх нерівномірний розподіл за об'ємом призводять до зниження міцності й пластичності чавуну при розтягуванні. При стисканні властивості чавуну з пластинчастими включеннями графіту залишаються достатньо високими (руйнуюче навантаження при стисканні в 3–5 разів більше, ніж при розтягуванні), близькими до властивості сталі з такими самими складом і структурою, що й металева основа чавуну.

Міцність і пластичність чавунів з однією і тією ж структурою металевої основи буде вищою тоді, коли ця основа буде менше ослаблена графітними включеннями, що можливе тільки при більш компактній формі графіту. Наприклад, чавун з кулястою формою включень графіту має значно вищу міцність при розтягуванні та згинанні, ніж чавун з пластинчастою формою графітних включень. Це підказало й назву чавуну – високоміцний.

Крім зниження міцності й пластичності, включення графіту помітно знижують також модуль пружності чавуну, значення якого стають нижчими, ніж у сталі.

За певних умов присутність графіту в структурі чавуну корисна і надає чавуну переваги в порівнянні зі сталлю: включення графіту полегшують оброблюваність чавуну різанням (стружка стає ламкою); через мастильну дію графіту чавун має високі антифрикційні властивості і добре працює в умовах тертя; чавун з включеннями графіту здатен швидко гасити вібрацію й коливання; графіт робить чавун нечутливим до поверхневих надрізів та інших додаткових дефектів на поверхні.

Структура металевої основи значно впливає на міцність і твердість чавунів. Залежно від структури металевої основи розрізняють: перлітний чавун із структурою П + Г, феритно-перлітний чавун із структурою Ф + П + Г й феритний чавун із структурою Ф + Г (рис. 9.3). Чавун з перлітною структурою основи має найбільші твердість, міцність і зносостійкість. Присутність графіту в структурі

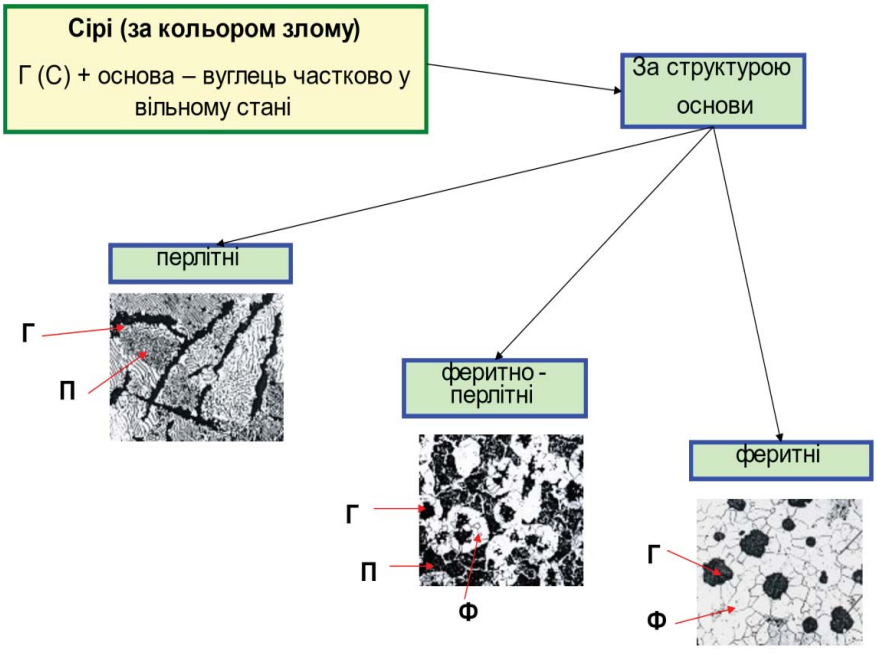


Рис. 9.3. Мікроструктура чавунів з різною основою

металевої основи веде до зниження характеристик міцності та зносостійкості. Найменшу міцність має феритний чавун. Наприклад, твердість сірого чавуну з різною структурою металевої основи має такі значення: перлітний 250 НВ, феритно-перлітний 200 НВ, а феритний 150 НВ.

Іноді знаходять використання деталі, виготовлені з *чавуну з вибіленою поверхнею*. Основна маса металу в таких деталях має структуру звичайного сірого або високоміцного чавуну, і тільки в поверхневому шарі майже весь вуглець знаходиться у вигляді цементиту (наприклад, прокатні валки для холодного прокатування листів).

Крім цього, треба зазначити, що основні технологічні властивості чавунів як добрих ливарних матеріалів теж зумовлені структурою чавунів, а саме структурою евтектики, яка утворюється в усіх чавунах незалежно від вуглецевої фази, відповідно до діаграми стану Fe-C.

9.2. Вплив хімічного складу і швидкості охолодження на структуру чавуну

Промислові чавуни, крім заліза, вуглецю і кремнію, містять багато елементів, й тому є складними сплавами. При цьому елементи, які *сприяють* утворенню (кристалізації) *графіту*, називають *графітизуючими*. Це Al, Si, Cu, Ni та ін. Елементи, що *гальмують* процес графітизації, тобто сприяють фіксації вуглецю у зв'язаному стані у вигляді сполук (*цементиту* або карбідів), називають *антиграфітизуючими*. До них відносять Mn, Cr, W, Ti, Mo, S, H_2 та ін.

На структуру чавуну значно впливає *швидкість охолодження*, тому при однаковому хімічному складі в деталях різного перерізу утворюється неоднакова структура.

Звичайні сірі чавуни по суті є Fe-C-Si сплавами, де постійними домішками є марганець, сірка й фосфор. У невеликих кількостях у цих чавунах можуть бути хром, нікель та мідь, які потрапляють у чавун з руди в процесі виплавлення.

Якщо легуючі елементи спеціально вводять до складу чавунів, то такі чавуни називають *легованими* або *спеціальними*.

Вуглець і кремній є сильними графітизуючими елементами. Змінюючи кількість їх у сплаві, можна отримати чавуни з різною структурою. Наочну уяву про вплив вуглецю і кремнію на ступінь графітизації та структуру чавуну дають так звані *структурні діаграми чавунів*, які будують для певної товщини стінки виливка. На практиці в тому самому виливку при сталій кількості C+Si теж можна отримати різну структуру. У тонких перерізах і в поверхневих шарах, тобто там, де швидкість охолодження вища, буде більше зв'язаного вуглецю (тобто карбіду) ніж у серцевині масивного виливка. Тому при визначенні структури мають на увазі товщину стінки виливка. Чим більше товщина стінки, тим менше швидкість охолодження і тим повніше відбувається процес графітизації. Для того щоб у виливках чавуну різного перерізу отримати однакову структуру, необхідно змінювати його хімічний склад – сумарну кількість C+Si.

Звичайно у виробництві для отримання необхідної структури регулюють кількість в чавуні вуглецю, кремнію і марганцю. У виливках значної товщини, які охолоджуються повільно, кількість кремнію може бути меншою, ніж у тонкостінних виливках, які охолоджуються прискорено. У сірих чавунах концентрація кремнію знаходиться в межах від 1,5 до 3,5%.

Марганець утруднює графітизацію і сприяє зростанню кількості зв'язаного вуглецю в чавуні у вигляді цементиту. Він дещо підвищує механічні властивості чавунів, особливо в тонкостінних виливках, крім того, він зв'язує сірку, яка має шкідливий вплив, у сполуку MnS. Однак при підвищенні кількості марганцю зростає здатність чавуну до вибілення – утворення, особливо в поверхневих шарах виливків або в тонких перерізах, структури білого або половинчастого чавуну. Тому вміст марганцю в сірих чавунах не повинен перевищувати 1,25% (0,2–1,1%).

Сірка є шкідливою домішкою в чавуні. Вона погіршує ливарні властивості й сприяє вибіленню чавуну, якщо кількість сірки перевищує 0,15%. Тому сірка має бути в чавунах у мінімальних кількостях: 0,080–0,012%.

Фосфор практично не впливає на графітизацію чавуну. Він поліпшує ливарні властивості чавунів, принаймні рідкотекучість. Це пояснюється тим, що при достатній кількості фосфору кристалізація чавуну відбувається з утворенням легкоплавкої фосфідної евтектики: в сірих чавунах – подвійної евтектики (аустеніт +Fe_3P), в білих – потрійної евтектики (аустеніт+Fe_3C +Fe_3P). Евтектика покращує ливарні властивості чавуну. Включення фосфідної евтектики, з одного боку, сприяють підвищенню зносостійкості сірого чавуну, а з іншого, збільшують його крихкість.

Звичайно в сірому чавуні кількість фосфору досягає 0,3–0,4%. При виготовленні художніх виливків, з метою підвищення рідкотекучості, вміст форфору в чавуні може бути підвищено до 1 %. Підвищена кількість фосфору рекомендована також для антифрикційних чавунів, які працюють при невеликих питомих тисках.

9.3. Модифікування чавунів

Під час прискореного охолодження виливків з сірого чавуну процес графітизації не встигає повністю завершитися, тому поверхневі шари виливків вибілюються. Унаслідок цього структура чавуну за перерізом виливка стає неоднорідною: на поверхні – структура білого, а в середині – сірого чавуну, а між ними перехідна зона половинчастного чавуну. Неоднорідна структура може утворитися в різних частинах того ж самого виливка змінного перерізу.

Для отримання рівномірної структури і високих властивостей чавунних виливків ливарники не тільки регулюють хімічний склад та швидкість охолодження, а й використовують *модифікування*. Для цього в рідкий сплав поперед розливанням у невеликій кількості додають спеціальні добавки – модифікатори.

Модифікування феросиліцієм, силікокальцієм дозволяє отримати чавун, металева основа якого головним чином складається з перліту, а графіт, хоча й залишається пластинчастим, має оптимальні розміри, що значно знижує негативний вплив цих включень на механічні властивості чавуну.

До переваг таких чавунів треба віднести меншу чутливість до швидкості охолодження, тому в них можна отримувати однакову перлітну структуру при перерізах від 5–10 до 100 мм. Разом з тим пластичність чавунів залишається низькою: відносне видовження 0,5–1,0%, ударна в'язкість 0,05–0,10 Мдж/м^2.

Після модифікування чавуну магнієм (0,03–0,07%) та деякими іншими елементами графіт набуває кулястої форми, завдяки цьому зростають міцність, пластичність і в'язкість чавуну.

9.4. Структура і властивості сірих чавунів

Сірими називають чавуни з пластинчастим графітом.

Завдяки високим ливарним властивостям, легку оброблюваність різанням та відносну дешевість й недефіцитність, сірий чавун широко застосовують у машинобудуванні, у тому числі сільськогосподарському.

Сірий чавун з пластинчастим графітом маркують літерами «СЧ» й числом, яке вказує границю міцності при розтягуванні в кГ/мм^2. Приклад розшифрування марки сірого чавуну СЧ35: СЧ – сірий чавун; 35 – границя міцності 350 МПа.

Стандартом затверджено шість основних марок сірого чавуну – від СЧ10 до СЧ35 (табл. 9.3).

Таблиця 9.3

Хімічний склад і властивості сірих чавунів

Марка чавуну	C	Si	Mn	S	P	σ_u, МПа	НВ
				не більше		не менше	не більше
СЧ 10	3,5–3,7	2,2–2,6	0,5–0,8	0,3	0,15	100	190
СЧ 15	3,5–3,7	2,2–2,4	0,5–0,8	0,2	0,15	150	210
СЧ 20	3,3–3,5	1,4–2,4	0,7–1,0	0,2	0,15	200	230
СЧ 25	3,2–3,4	1,4–2,4	0,7–1,0	0,2	0,15	250	245
СЧ 30	3,0–3,2	1,3–1,9	0,7–1,0	0,2	0,12	300	260
СЧ 35	2,9–3,0	1,2–1,5	0,7–1,1	0,2	0,12	350	275

Через те, що внутрішня будова чавуну залежить не тільки від його хімічного складу, а й від умов плавки і лиття, ці умови теж впливають на механічні властивості чавуну. При зростанні швидкості охолодження включення графіту стають менше, його кількість також знижується, зростає частка перліту та зменшується міжпластинчаста відстань у перліті. Всі ці фактори призводять до зростання міцності і твердості при заданому хімічному складі чавуну. Наприклад, у чавуні СЧ30 у стінці завтовшки 150 мм твердість може досягати 160 НВ, а в стінці завтовшки 8 мм – 270 НВ, що свідчить про значний вплив перерізу стінок виливка на механічні властивості чавуну.

Відбите в марці чавуну гарантоване значення границі міцності визначають при випробуваннях п'ятикратних зразків діаметром 10 мм, виточених з стандартизованих заготовок діаметром 30 мм, вилитих у піщану форму. При зростанні перерізу стінок реальних фасонних виливків через зниження швидкості охолодження границя міцності знижується. Наприклад, чавун із стінкою виливка завтовшки 8, 15, 30, 50, 80 і 150 мм має границю міцності 330, 300, 260, 220, 195 і 180 МПа, відповідно.

Основні галузі використання сірого чавуну – верстатобудування й важке машинобудування (станини верстатів, корпусні деталі), автомобільна промисловість та сільськогосподарське машинобудування (картери, блоки циліндрів, шківи, кришки, маховики та ін.).

Феритні сірі чавуни СЧ10 та СЧ15 призначені для слабко- й середньонавантажених деталей: кришок, фланців, маховиків, корпусів редукторів, а також гальмових барабанів, дисків зчеплення і т.ін.

Феритно-перлітні СЧ20 і СЧ25 використовують для деталей, які працюють при підвищених статичних і дінамічних навантаженнях: блоки циліндрів, картери двигунів, станини верстатів, барабани зчеплення та ін.

Перлітні СЧ30 і СЧ35 (модифіковані) використовують для деталей, що працюють при високих навантаженнях або тяжких умовах зносу: гильзи блоків циліндрів, розподільні вали, зубчасті колеса та ін.

9.5. Виробництво ковкого чавуну і його використання

Ковкими називають чавуни з пластівчастим графітом.

Один із можливих варіантів виникнення графіту – під час кристалізації з розплаву. Але цей процес може відбуватися і у твердому стані при тривалому нагріванні і високотемпературному витримуванні білого доевтектичного чавуну, що пояснюється нестабільністю цементиту, який при нагріванні може розкладатися з утворенням графіту.

Тривалу термічну обробку, в результаті якої утворюється чавун з *пластівчастим* графітом, називають *графітизуючим відпалом* або *томлінням*, а чавун з пластівчастим графітом називають *ковким.* Ця назва умовна, тому й не означає, що такий чавун можна кувати. Компактний пластівчастий графіт, який ще називають вуглецем відпалювання, менше знижує властивості металевої основи ніж пластинчастий, через що ковкий чавун у порівнянні з сірим має більшу міцність і пластичність (δ становить 2–12%), а в білого чавуну δ не перевищує 0,2%, у сірого чавуну з пластинчастим графітом – 0,5–1,0%.

Білий чавун, призначений для відпалу на ковкий, містить 2,4–2,9% вуглецю; 1,0–1,6% кремнію; 0,3–1,0% марганцю, не більше 0,18% фосфору; 0,20% сірки та 0,08% хрому. Крім зниженої кількості вуглецю і кремнію, виливки з білого чавуну виготовляють досить тонкостінними (перерізом не більше 50 мм), інакше в серцевині буде кристалізуватися пластинчастий графіт, і чавун стане непридатним для відпалу. Кількість у шихті кремнію, марганцю і хрому регулюють так, щоб подавити кристалізацію графіту з розплаву і забезпечити якомога швидшу графітизацію при відпалі білого чавуну. Чим більше переріз стінки виливка, тим менше має бути кремнію в сплаві.

Графік відпалу білого чавуну на ковкий наведено на рис. 9.4. При нагріванні спочатку відбувається перлітно-аустенітне перетворення, а потім – розчинення вторинного цементиту. Під час витримування близько 10 год при 900–1050°С відбувається *перша стадія* графітизації, під час якої весь цементит евтектичного

походження та залишки вторинного цементиту змінюються на графіт, і структура з аустенітно-цементитної перетворюється на аустенітно-графітну.

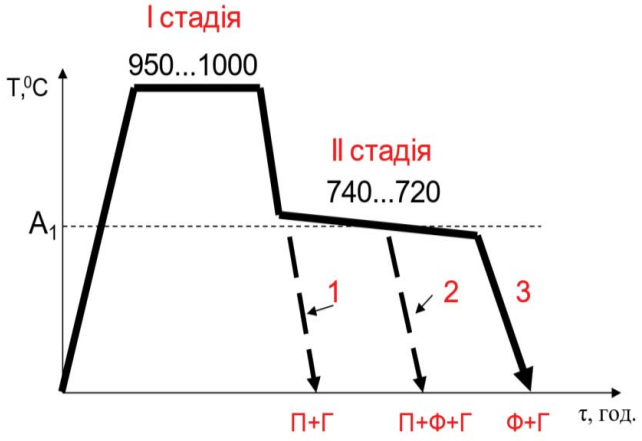


Рис. 9.4. Графік відпалу білого чавуну на ковкий

При подальшому повільному охолодженні (6–12 год) до температури 720°С, трохи меншої за температуру евтектоїдного перетворення, відбувається проміжна стадія графітизації – розпад вторинного цементиту з приєднанням графіту, що утворюється, до існуючих включень пластівчастого графіту.

При сповільненні охолодження в інтервалі температур приблизно 760–720°С евтектоїдний розпад аустеніту відбувається за схемою: А → Ф+Г. Це *друга стадія* графітизації. Графіт, що утворюється при евтектоїдному розпаді, як і вторинний графіт, нашаровується на включеннях графіту, що утворилися на першій стадії графітизації.

Прискорене охолодження на повітрі гальмує другу стадію графітизації, і розпад переохолодженого аустеніту відбувається за схемою А → Ф+Ц, й металева основа чавуну стає повністю перлітною. Можливий і проміжний випадки, коли тільки частина аустеніту розпадається за схемою А → Ф+Г, а частина переохолоджується сильніше та розпадається за схемою А → Ф+Ц, і металева основа ковкого чавуну стає перлітно-феритною.

Розвиток другої стадії графітизації можна забезпечити не тільки сповільненням охолодження, а й ізотермічним витримуванням після звичайного охолодження до евтектоїдних температур. У цьому випадку спочатку відбувається перлітне перетворення переохолодженого аустеніту, а наступне витримування призводить до графітизації перлітного цементиту. На відміну від першої стадії графітизації в розглянутому випадку цей процес перебігає шляхом переносу вуглецю через ферит. Водночас з графітизацією при ізотермічному витримуванні відбувається ділення цементитних пластин і сфероїдизація цементиту.

Основним недоліком графітизуючого відпалу є його значна тривалість, тому розроблено кілька методів *прискореного* відпалу. Так, перед відпалом виливка з білого чавуну здійснюють його попереднє гартування при температурі від 850–900°С, що забезпечує подрібнення структури та сприяє утворенню безлічі центрів графітизації: прискорюються перша і друга стадії графітизації, а сам процес скорочується до 10–15 год. В іншому випадку підвищують температуру нагрівання білого чавуну перед розливанням. Крім того, чавуни легують невеликою кількістю домішок алюмінію (0,015–0,20%), бору та інших елементів; проводять ступінчасте нагрівання при відпалі з витримуванням при температурі 350–400°С; скорочують тривалість нагрівання й охолодження виливків у захисному або нейтральному середовищі. У цьому випадку тривалість становить 24–60 год.

Ковкі чавуни маркують літерами «КЧ» й двома числами: перше позначає тимчасовий опір при розтягуванні (границю міцності) в кГ/мм^2, а друге, через дефіс, відносне видовження у відсотках. Приклад розшифровки марки ковкого чавуну КЧ50-5: КЧ – ковкий чавун; 50 – границя міцності 500 МПа; 5 – відносне видовження 5%. Стандарт передбачає марки, наведені в табл. 9.4.

Міцність та пластичність ковкого чавуну залежить від дисперсності і кількості графіту, а також від структури металевої основи. Найбільшу міцність має перлітний чавун, а найбільше відносне видовження – феритний. Твердість головним чином залежить від структури металевої основи і становить від НВ 100

(КЧ30-6) до НВ 320 (КЧ80-1,5). Чавун з основою із зернистого перліту відрізняється поєднанням високої міцності та підвищеної пластичності, а також доброю оброблюваністю різанням й високими антифрикційними властивостями.

Перевага ковкого чавуну – це однорідність властивостей за перерізом виливка, завдяки тому, що швидкість охолодження під час кристалізації не впливає на розмір, кількість і форму включень графіту. *Недоліком* ковкого чавуну є гірші ливарні властивості, а також обмеження товщини стінки виливка до 50 мм через небезпечність кристалізації пластинчастого графіту в центрі виливка більшого перерізу.

Таблиця.9.4

Механічні властивості ковких чавунів

Клас ковкого чавуну	Марка чавуну	$\sigma_в$, МПа не менше	δ, % не менше	Твердість, НВ
Феритний	КЧ 30-6	294	6	100–163
	КЧ 33-8	323	8	100–163
	КЧ 35-10	333	10	100–163
	КЧ 37-12	362	12	110–163
Перлітний	КЧ 45-7	441	7	150–207
	КЧ 50-5	490	5	170–203
	КЧ 56-4	539	4	192–241
	КЧ 60-3	588	3	200–269
	КЧ 65-3	637	3	212–269
	КЧ 70-2	686	2	241–285
	КЧ 80-1,5	784	1,5	270–320

Ковкий чавун порівняно з сірим має більш високі механічні властивості, і його досить широко використовують в автомобільній промисловості, сільськогос-подарському машинобудуванні (картери, муфти, підойми, деталі рульового керування, кільця ланцюгів та ін). Найбільш поширена марка – КЧ35-10.

9.6. Високоміцний модифікований чавун – перспективний конструкційний матеріал

Високоміцними називають чавуни з кулястим графітом.

Ці чавуни містять близько 3,0–3,6% вуглецю. Для отримання кулястої форми графітних включень у розплав чавуну вводять до 0,05% магнію або церію.

Чавуни з кулястим графітом використовують в промисловості з 50-х років минулого століття. Високоміцні чавуни маркують літерами «ВЧ» й числом, яке вказує гарантоване значення границі міцності.

Кількість вуглецю в усіх марках високоміцних чавунів практично однакова, що надає цим сплавам високі ливарні властивості. Домішка фосфору знижує пластичність через утворення крихкого фосфіду, тому його кількість не повинна перевищувати 0,1%. Особливо шкідливий вплив має сірка, тому що вона не тільки знижує механічні властивості внаслідок утворення з магнієм та рідкоземельними елементами крихких сульфідів, а й послаблює модифікуючу дію цих елементів через зв'язування їх у сульфіди. Кількість сірки не повинна перевищувати 0,02%, а в чавунах ВЧ80 і ВЧ100 – 0,01%, що нижче можливої кількості сірки в якісних сталях.

Чавуни марок ВЧ35 і ВЧ40 мають феритну основу, ВЧ45 і ВЧ50 – перлітно-феритну, ВЧ60, ВЧ70 і ВЧ80 – перлітну, що і пояснює різницю в міцності та пластичності чавунів. Унаслідок різних умов лиття та різної кількості неконтрольованих домішок чавун при однаковій кількості вуглецю, кремнію і марганцю, може мати різну структуру.

Чавун ВЧ100, який має найвищу міцність у розглянутій групі (табл. 9.5), для забезпечення гарантованої границі міцності на рівні 1000 МПа, піддають бейнітному гартуванню. Ізотермічне гартування виконують у ванні з розплавом лугу (60% NaOH і 40% KOH) або хлористих солей при температурі 350°С.

Високоміцні чавуни використовують замість литої сталі у виробах відповідального призначення: валки гарячого прокатування, станини і рами про-

катних станів, молотів і пресів. Порівняно зі сталлю вони мають значно вищі ливарні властивості і на 8–10% меншу густину, що дає змогу знизити масу машин. Навіть відповідальні поковки з легованих сталей можна замінювати на виливки з високоміцного чавуну, класичним прикладом чого можуть бути важко навантажені колінчасті вали дизельних, у тому числі автомобільних двигунів, які відповідають високим міцносним вимогам. У сільськогосподарському машинобудуванні ці чавуни використують для виготовлення шестерень і зірочок, зубців борон, стовб плугів, важелів та педалей, ступиць колес, причепних скоб, дисків муфт та ін.

Таблиця 9.5

Механічні властивості високоміцних чавунів

Марка	σ_u, МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа	δ, %	Твердість,
чавуну	не менше			НВ
ВЧ 35	350	220	22	140–170
ВЧ 40	400	250	15	140–202
ВЧ 45	450	310	10	140–225
ВЧ 50	500	320	7	153–245
ВЧ 60	600	370	3	192–277
ВЧ 70	700	420	2	228–302
ВЧ 80	800	480	2	248–351
ВЧ 100	1000	700	2	270–360

З високоміцних чавунів виготовляють виливки масою від кількох кілограмів до десятків тонн.

9.7. Чавун з вермикулярним графітом

Чавун з вермикулярним графітом за мікроструктурою може містити частину кулястого графіту, але основну частину включень складають включення *вермикулярного* (лат. *vermiculus* – черв'ячок) графіту, який від пластинчастого відрізняється округлими краями, меншими розмірами і меншим співвідношенням довжини до товщини (у вермикулярного графіту це співвідношення знаходиться в межах від 2 до 10, а у пластинчастого воно значно більше десяти). Тому

вермікулярний графіт не є таким значним концентратором напружень, як пластинчастий. Його можна розглядати як перехідну форму від пластинчастого до кулястого графіту.

При однаковій кількості вуглецю і кремнію співвідношення кількості кулястого і вермикулярного графіту в чавуні залежить від умов його одержання (головним чином від обробки розплаву лігатурами, що містять магній та рідкоземельні метали).

Чавун з вермикулярним графітом позначають літерами «ЧВГ», за якими ставлять число, що вказує гарантоване значення границі міцності (табл. 9.6).

Марку чавуну можна змінити, використовуючи термічну обробку, від якої залежить структура металевої основи. При однаковій структурі металевої основи механічні властивості чавуну з вермикулярним графітом знаходяться між значеннями властивостей сірого чавуну з пластинчастим графітом і високоміцного чавуну з кулястим графітом. Чавуни марок ЧВГ міцніші, а при однаковій міцності більш пластичні, ніж чавуни марок СЧ. Вони перевищують чавуни марок ВЧ з оброблюваності різанням та здатності до демпфірування.

Таблиця 9.6

Механічні властивості чавунів з вермикулярним графітом

Марка чавуну	ЧВГ30	ЧВГ35	ЧВГ40	ЧВГ45
σ_u, МПа	300	350	400	450
δ, %	3,0	2,0	1,5	0,9

Чавуни марок ЧВГ використовують головним чином на заміну марок СЧ для виливання базових деталей верстатів та ковальсько-пресового обладнання, корпусних деталей та ін.

9.8. Спеціальні чавуни

За деяких умов роботи чавуни не виправдовують себе як конструкційні матеріали з переважними властивостями поряд з іншими конструкційними матеріалами, тому існують кілька груп чавунів зі спеціальними властивостями.

Антифрикційні чавуни. Антифрикційні чавуни використовують для роботи у вузлах тертя з мастилом, підшипників ковзання, втулок, вкладишів. Для цього застосовують нелеговані або низьколеговані сірі чавуни з пластинчастим графітом АЧС-1...АЧС-6, високоміцні чавуни з кулястим графітом АЧВ-1, АЧВ-2 та ковкі чавуни АЧК-1, АЧК-2. При позначенні марок антифрикційних чавунів цифра означає порядковий номер чавуну.

Включення графіту знижують коефіцієнт тертя в парі із сполученою стальною деталлю. Додання міді покращує корозійні та антифрикційні властивості багатьох чавунів.

Всі антифрикційні чавуни, за винятком АЧС-5, мають перлітну або перлітно-феритну основу, до того ж кількість в'язкого фериту не повинна перевищувати 30–50%, щоб запобігти налипанню матеріалу підшипника на шийку вала. Основа чавуну АЧС-5 з високим вмістом марганцю складається після гартування на 80% з аустеніту. Такий чавун використовують для роботи в особливо навантажених вузлах тертя.

Головна перевага чавуну порівняно з бабітами та антифрикційними бронзами – низька вартість, а основний недолік – погана припрацьовуваність, тому необхідне точне сполучення поверхонь тертя. Гранична окружна швидкість при використанні чавунів типу АЧС – 5 м/с, а типу АЧВ – 10 м/с, це набагато нижче, ніж при використанні бабітів, коли цей параметр становить до 50 м/с.

Зносостійкі, жаростійкі та корозієстійкі чавуни. Ці чавуни легують хромом, кремнієм, алюмінієм та іншими елементами. Інколи той самий чавун використовують для різного призначення: в одних випадках як зносостійкий, а в інших – як жаростійкий і т.ін. Марка такого чавуну починається з літери «Ч», за якою йдуть літери, що позначають легуючі елементи, як в легованих сталях, а

потім – кількість цих елементів у відсотках. Літера «Ш» наприкінці означає, що це легований чавун з кулястим графітом.

До найбільш зносостійких відносять білі чавуни із значною кількістю хрому ЧХ22 і ЧХ32. Зростання кількості хрому приводить до того, що легований цементит $(Fe,Cr)_3C$ з твердістю 800–1000 HV замінюється на карбід хрому $(Cr,Fe)_7C_3$ з твердістю 1250–1550 HV.

Високохромисті білі чавуни широко використовують в гірничодобувній промисловості, металургії (кулі для кулястих млинів, деталі машин для очищення литва, приготування формувальних сумішей і т.ін.).

Жаростійкі чавуни легують хромом, кремнієм та алюмінієм, які утворюють захисні оксидні плівки. Високохромистий чавун ЧХ32 використовують не тільки як зносостійкий, а і як жаростійкий до температури близько 1150°С. З нього виготовляють пічну арматуру, сопла пальників і т.ін.

Кремністий чавун ЧС5Ш (сілан) жаростійкий до температури близько 800°С, його застосовують для топкової арматури котлів та ін. Для цього ж використовують і чавун з великою кількістю алюмінію ЧЮ22Ш (чугаль), що стійкий до 1100°С в середовищах, які містять сірчаний газ та пари води.

Чавуни ЧХ22С, ЧС15 (феросілід) й ЧН15Д7 (нірезист) мають високу стійкість проти корозії в розчинах кислот, луг і солей. Їх широко використовують для деталей хімічної апаратури.

9.9. Термічна обробка чавунів

Найбільш поширеним видом термічної обробки є *відпал* чавунних виливків при 430–600°С для зменшення ливарних напружень, тому що залишкові напруження завжди виникають у фасонному литві. Основна мета – стабілізація розмірів виливка.

Графітизуючий відпал використують не тільки для перетворення білого чавуну на ковкий, а й для усунення вибілювання у виливках із сірого чавуну (наприклад, при литті в кокіль вся поверхня виливка з сірого чавуну може бути

вибіленою). В таких випадках відпал проводять при температурах 850–950°С протягом 0,5–5,0 год.

Неповний відпал проводять для отримання структури зернистого перліту основи для поліпшення оброблюваності різанням.

Нормалізацію чавуну проводять з метою зміцнення виливків чавунів з феритною або феритно-перлітною основою, для чого їх нагрівають до 850–950°С, витримують протягом 0,5–3,0 год і охолоджують на спокійному повітрі.

Така термічна обробка при нагріванні призводить до аустенітізації структури, а наступне охолодження призводить до того, що аустеніт розпадається за схемою А → Ф+Ц, і вся металічна основа набуває перлітну або сорбітну структуру. Зміцнення досягають через усунення структурно-вільного фериту (підвищення концентрації зв'язаного в цементит вуглецю) та зміну перліту на сорбіт. Твердість при цьому зростає від 150 НВ до 250 НВ.

Гартування чавуну на мартенсит з нагріванням до 850–930°С і охолодження у воді або маслі використують для підвищення міцності та зносостійкості. Після гартування роблять *низький відпуск* при 200°С для зменшення напружень гартування або *високий відпуск* при 600–700°С для одержання структури сорбіту або зернистого перліту, що забезпечує підвищену в'язкість.

Ізотермічне гартування (рис. 9.5) проводять лише для ковких і високоміцних чавунів на бейнітну структуру металевої основи (нижній бейніт) з метою підвищення міцності та в'язкості.

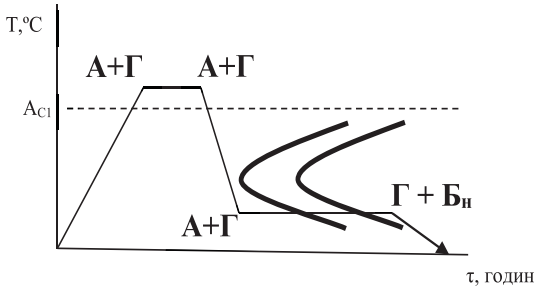


Рис. 9.5. Ізотермічне гартування чавуну

Треба зазначити, що зміцнююча термічна обробка більш ефективна для чавунів з кулястою і компактною формою графіту. Особливістю є те, що з печі виливки швидко переносять у соляну ванну з температурою 300°С, при цьому аустеніт переохолоджується і не перетворюється на перліт. Витримування за даної температури триває доти, поки весь аустеніт не перетвориться на нижній бейніт. Таким чином, кінцева структура нижнього бейніту основи $Б_н$ утворюється під час ізотермічної витримки, тому подальша швидкість охолодження не має значення.

Для підвищення зносостійкості використовують *поверхневе гартування* з індукційним або газополуменевим нагріванням.

Іноді застосовують *азотування* чавунних виливків для підвищення зносостійкості або корозійної стійкості та – *алітування* для підвищення жаростійкості.

ГЛАВА 10. КОЛЬОРОВІ МЕТАЛИ І СПЛАВИ

10.1. Особливості властивостей кольорових сплавів

Група кольорових металів отримала свою назву завдяки тому, що ці метали мають свої особливі природні кольори: алюміній – сріблясто-білий метал, титан – сірий, мідь – рудо-червона і т.ін. Але поверхня в них неблискуча, тому що ці метали з поверхні вкриті тонкою плівкою оксидів (завтовшки 5 нм), яка надійно захищає їх від корозії. Надійність цього захисту пояснюється тим, що ця плівка дуже щільна і має високу зчіплюваність з основою. До речі, залізні сплави теж вкриті окисною плівкою, але вона пориста, через що навколишнє середовище легко проникає через неї, і процес окиснення продовжується дуже швидко, у результаті чого залізні сплави швидко руйнуються і поверхня викришується.

Разом з тим кольорові сплави значно дорожчі за залізовуглецеві і їх використання порівняно обмежене. Проте в багатьох галузях промисловості для певних деталей машин кольорові метали і сплави застосовують дуже широко через їх специфічні властивості: високу тепло- і електропровідність або малу питому вагу, або високу стійкість проти корозії чи низький коефіцієнт тертя та ін. Для подальшого підвищення динамічних показників тракторів, автомобілів та сільськогосподарських машин велике значення має максимально можливе зниження маси. Цьому значною мірою сприяє виготовлення деталей із кольорових сплавів на основі алюмінію, магнію та цинку, які поєднують низьку густину з достатньою міцністю й високою корозійною стійкістю. Перспективним матеріалом для двигунів є титанові сплави, використання яких дозволить значно зменшити теплові втрати й підвищити ккд двигунів. Широко застосовують сплави на основі міді і олова для антифрикційних деталей.

Одним із дуже важливих показників, які визгачають вибір матеріалів, є їхня питома міцність (середня міцність на одиницю маси конструкції), яка фактично є відношенням границі міцності до густини матеріалу. Наведене нижче данні

показують (табл. 10.1), що кольорові сплави з малою міцністю порівняно з легованою сталлю саме через малу густину мають високі показники питомої міцності і перевищують цей показник у легованої сталі. Наприклад, алюмінієві сплави, маючи міцність у 2–4 рази нижчу, ніж легована сталь, за питомою міцністю перевершують її. Особливе місце стосовно цього посідає титан, сплави якого мають міцність на рівні легованої сталі, а за питомою міцністю перевершує її майже вдвічі. Таким чином, питома міцність є впливовим фактором при виборі матеріалів для сучасних конструкцій та машин. Слід зауважити, що це стосується не тільки металевих матеріалів.

Таблиця 10.1

Питома міцність матеріалів

матеріал	σ_B, МПа	γ, г/см^3	σ_B / γ
Легована сталь	1200	7,85	150
Алюмінієві сплави	500	2,72	180
Магнієві сплави	260	1,74	150
Титанові сплави	1250	4,5	280

Серед основних недоліків кольорових сплавів слід назвати: високу вартість, складність і коштовність багатоетапних технологічних процесів виробництва, низьку питому міцність деяких кольорових металів (мідні, олов'яні, свинцеві).

Серед промислових кольорових металів найбільше використання знаходять алюміній, титан, магній, мідь, олово. Деякі з них можуть використовуватись у чистому виді (алюміній, мідь), а інші – тільки у вигляді сплавів з іншими елементами як металевими, так і неметалевими.

10.2. Класифікація кольорових сплавів

Оскільки кольорові сплави належать до групи литих матеріалів, які виплавляють у печах, то формування їх структури відбувається за відповідними діаграмами стану, що і обумовлює їх механічні і технологічні властивості.

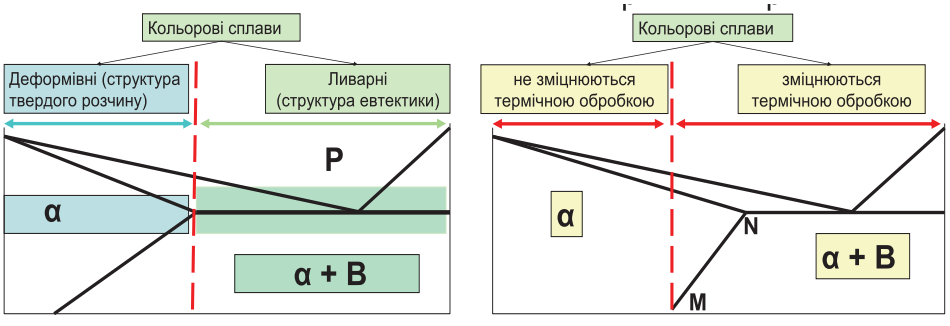
Аналіз діаграм стану кольорових сплавів показує, що навіть за фазовим прискладом вони можуть значно відрізнятися від сталей. Так, всі сталі мають двофазну будову, а кольорові можуть бути і з однофазною будовою. Це є важливим фактором при аналізі властивостей та здатностей цих сплавів щодо рівня механічних властивостей і здатності піддаватися різним обробкам (тиском, різанням, термічною обробкою і т.ін.). Саме тому найбільш загальною класифікацією є класифікація кольорових сплавів за діаграмою стану.

Насамперед, для будь-якого литого металевого сплаву важливі його технологічні властивості, які допомагають обрати технологічний процес виготовлення виробів із даного сплаву. Тому першою класифікаційною ознакою є розподіл за *технологічними властивостями* на деформівні та ливарні сплави. Згідно з цією класифікаційною ознакою до кожної групи є певні вимоги щодо фазового складу і структури.

Деформівні сплави повинні мати обов'язково структуру, яка забезпечує високу пластичність сплаву, а саме структуру однофазного твердого розчину, наприклад, α, як показано на наведеній нижче схемі (рис. 10.1,*а*). На діаграмі стану така фаза завжди позначена областю, яка примикає до вертикалі того елемента на діаграмі, який є основою твердого розчину. Ця область проектується в лінію на осі концентрацій (горизонталь) на діаграмі, що свідчить про змінність складу цієї фази і можливість однофазного стану в різних сплавах.

Ливарні властивості, насамперед рідкотекучість, сплавам надає евтектичне перетворення в них, яке на діаграмі стану завжди позначається горизонтальною лінією, до якої зверху однією точкою торкається область рідкої вихідної фази. Наприклад, на наведеній схемі евтектичне перетворення відбувається за такою фазовою реакцією: $Р \rightarrow (\alpha + В)$, де : Р – розплав, α – твердий розчин заміщення

елемента В у твердому розчині, В – чистий хімічний елемент. При цьому утворені фази стоять у дужках, що свідчить про те, що дана структура складається з обох фаз разом. Властивості евтектик залежать від властивостей утворених фаз та співвідношення між ними. Але в будь-якому випадку евтектичні структури не піддають деформації. Це матеріали, які призначені для отримання виливків.



а *б*

Рис. 10.1. Класифікація кольорових сплавів: *а* – за технологічними властивостями; *б* – за здатністю до термічної обробки

Другою класифікаційною ознакою для кольорових сплавів є можливість впливу термічної обробки на їх властивості. Таку можливість теж показує діаграма стану. *За здатністю зміцнюватися термічною обробкою* кольорові сплави теж поділяють на дві групи: які зміцнюються термічною обробкою і які не зміцнюються термічною обробкою. Як і попередні, ці дві групи принципово відрізняються за фазовим складом.

Зміцнення завжди буде тоді, коли викривлюється шлях ковзання атомів металів, тому в різних технологічних процесах цього досягають різними методами. Наприклад, при обробці тиском, в основі якої лежить явище пластичної деформації, викривлення досягається дією механічної сили, яка деформує виріб. При цьому фазовий склад не змінюється, а лише відбувається значне викривлення кристалічної будови фази – виникає наклеп.

Справа в тому, що механізм зміцнення термічною обробкою базується саме на зміні фазового складу і тут є певні особливості: оскільки сутність залишається

тією самою – треба викривити кристалічну будову. При термічній обробці це дає можливість зробити лише один шлях: одержання пересиченого твердого розчину, у якому концентрація атомів розчиненого елемента набагато перевищує рівноважну, яка відповідає діаграмі стану. Тільки в такому разі зайві атоми розчиненого елемента будуть заважати легко ковзати атомам розчинника, а кристалічна будова елемента-розчинника викривлюється. Таким чином, щоб була можливість одержати пересичений твердий розчин, розчинність повинна обов'язково змінюватись і бути більшою при високій температурі. Тоді швидке охолодження загальмує дифузійні процеси і дасть можливість одержати пересичений твердий розчин з викривленою кристалічною граткою розчинника. Такий механізм зміцнення і висуває основні вимоги до вихідного фазового складу сплаву: по-перше, сплав має бути двофазним при кімнатній температурі; по-друге, фази повинні мати змінну розчинність.

Таким чином, до групи *незміцнюваних* термічною обробкою сплавів належать сплави з однофазною структурою. На схемі це сплави зі структурою твердого розчину α. У такому разі відсутня можливість жодними умовами охолодження одержати пересичений твердий розчин. Склад таких сплавів на схематичній діаграмі стану знаходиться ліворуч від точки М (рис. 10.1,б).

Фазовий склад *зміцнюваних* термічною обробкою сплавів знаходиться на схематичній діаграмі стану праворуч від точки М. За цією точкою знаходиться двофазна область α + В. Структури сплавів цієї області різні, вони мають різні технологічні властивості, але всі складаються з двох фаз. Крім того, лінія MN даної діаграми є лінією змінної розчинності, яка показує, що максимальна розчинність елемента В у твердому розчині α відповідає високій температурі (точка N), а при зниженні температури розчинність знижується за лінією NM і при кімнатній температурі досягає мінімуму (точка М).

10.3. Характеристика й використання алюмінієвих сплавів

Алюміній належить до легких кольорових металів: його густина при кімнатній температурі становить 2,7 г/см^3. Алюміній має гранецентровану кубічну гратку, його температура плавлення дорівнює 660°С. За величиною електропровідності він займає четверте місце серед металів після срібла, міді та золота: при температурі 25°С його електропровідність становить 65% електропровідності міжнародного еталону відпаленої міді.

Алюміній має низьку міцність (близько 40 МПа) та високу пластичність (відносне видовження δ досягає 50%).

Через тонку (до 5 нм) оксидну плівку, що вкриває поверхню, алюміній має високу стійкість проти атмосферної корозії.

За об'ємом виробництва алюміній та його сплави займають перше місце серед незалізних металічних матеріалів, що зумовлено унікальним комплексом властивостей: низькою густиною ρ, високою питомою міцністю (σ_u/ρ), значною стійкістю проти корозії в багатьох середовищах та високою технологічністю (сплави виплавляють та обробляють тиском при невисоких температурах у повітряній атмосфері).

Алюміній використовують в електротехніці для виготовлення шин, проводів і кабелів. Широке застосування цей метал і його сплави знайшли в автопромисловості, бо він майже втричі легший за сталь.

Основні домішки первиного алюмінію – це залізо і кремній, які потрапляють до алюмінію при його виробництві й негативно впливають на його властивості.

Деформівні алюмінієві сплави. Ці сплави поділяють на дві групи: сплави, що зміцнюються термічною обробкою, і сплави, що не зміцнюються термічною обробкою.

Що стосується *сплавів, які не зміцнюються термічною обробкою,* то міцність таких сплавів можна підвищити за рахунок утворення твердих розчинів

заміщення при легуванні. При цьому ефект буде більш значним тоді, коли різниця атомних діаметрів алюмінію та розчинного елемента буде більш суттєвою, а також при значній концентрації цього елемента у твердому розчині.

Для підвищення міцності, крім легування, широко використовують нагартовування, термічну і термомеханічну обробки.

Сплави на базі системи Al-Mg називають *магналіями*: АМг1...АМг6. Цифри в наведених марках означають середню кількість магнію в сплаві, зростання якої веде до зміцнення магналій (табл. 10.1).

Таблиця 10.1

Механічні властивості і склад деформівних алюмінієвих сплавів, які не зміцнюються термічною обробкою

Марка сплаву	σ_u, МПа	δ, %	Mg, %	Mn, %	Fe, % ≤	Si, % ≤
АМц	130	25	<0,2	1,0–1,6	0,7	0,6
АМг2	190	23	1,8–2,6	0,2–0,6	0,10	0,10
АМг6	450	11	5,8–6,8	0,5–0,8	0,40	0,40

Важливі переваги магналій – висока корозійна стійкість та добра зварюваність, що зумовило широке використання цих сплавів для виготовлення зварних конструкцій різного призначення. Їх недоліки – низька границя текучості, яку можна підвищити нагартовкою в холодному стані та низька тепломіцність, що забороняє використовувати ці сплави при високих температурах. До цієї групи відносять і сплав АМц, завдяки його корозійній стійкості та зварюваності з нього виготовляють зварні бензобаки, мастилопроводи,.

Велику групу алюмінієвих сплавів складають *сплави, які зміцнюються термічною обробкою.* Кількість цих сплавів набагато більша, як за хімічним, так і за фазовим складом.

Найпоширеніша група цих сплавів – це *дюралюміни,* які отримали свою назву завдяки німецькому місту Duren, де було започатковано промислове вироб-

ництво дюралюміну. Базовою системою цих сплавів є Al-Cu-Mg, звичайно з доданням марганцю. Зумовлено це тим, що німецький інженер А. Вільм у 1906 р. при вивченні сплава алюмінію з 4% міді; 0,5% магнію та 0,5% марганцю відкрив явище *старіння,* яке стало одним із основних способів зміцнення сплавів на різній основі. Цей дюралюмін має сучасне використання під маркою Д1. Але все частіше цей сплав замінюється на Д16, який називають супердюралюміном, бо він має підвищену міцність. Цифра в марці після букви «Д» означає номер сплава.

Основними домішками є залізо, марганець і кремній, які утворюють багато хімічних сполук, при цьому властивості сплавів значно погіршуються (табл. 10.2).

Таблиця 10.2

Механічні властивості і склад дюралюмінів

Марка сплаву	σ_u, МПа	δ, %	Cu, %	Mg, %	Mn, %	Fe, % ≤	Si, % ≤
Д1	480	14	3,8–4,8	0,4–0,8	0,4–0,8	0,7	0,7
Д16	520	13	3,8–4,9	1,2–1,8	0,3–0,9	0,5	0,5

Дюралюмін, який виготовляють у листах, для захисту від корозії піддають *плакуванню* – покриванню тонким шаром алюмінію високої чистоти (не нижче 99,5%), при цьому товщина шару повинна становити 4% від товщини листа. Плакування помітно знижує міцність листів, наприклад для Д16 з 520 МПа до 440 МПа.

Термічна обробка дюралюміну полягає в гартуванні зі старінням. Температура гартування має бути вищою за лінію граничної розчинності відповідно до діаграми стану: для сплавів Д16 та Д18 495–505°С, для сплава Д1 – 500–510°С. Дотримування температур нагрівання повинно бути дуже точним, бо вищі температури близькі до температури плавлення потрійної евтектики, яка відповідно до діаграми Al-Cu-Mg становить 507°С. Тому підвищення температури гарту-

вання вище необхідного інтервалу може призвести до перепалу, коли відбувається оплавлення евтектики по межах зерен твердого розчину, через що значно знижуються міцність, пластичність та стійкість проти корозії дюралюмінів. Недогрівання при гартуванні призводить до неповного розчинення надлишкових фаз, до зменшення пересиченості твердого розчину та міцності сплава після термообробки. Для точного підтримування необхідної температури нагрівання під гартування використовують печі з примусовою циркуляцією повітря, а також ванни з розплавом селітри ($NaNO_3$+KNO_3).

Дюралюмін загартовують у воді, при чому час перенесення садки з печі до гартівного середовища не повинен перевищувати 15 с, тому що переохолоджений твердий розчин розпадається дуже швидко. При правильному проведенні гартування після завершення охолодження фіксується структура пересиченого твердого розчину, через що безпосередньо після гартування дюралюмін має малу міцність (240–260 МПа), низьку твердість (НВ 60–80), але високу пластичність (δ = 20–22%), яка припускає значне деформування при обробці тиском. У процесі подальшого природного (протягом 4–10 діб) або штучного (при температурі 100–150°С) старіння дюралюмін зміцнюється й набуває таких властивостей: σ_u = 420–470 МПа, НВ 90–100, δ = 18%. Цей сплав задовільно обробляється різанням після термічної обробки, добре зварюється точковим зварюванням.

Дюралюміни широко використовують для деталей літаків (лонжерони, шпангоути, обшивка та ін.), будівельних конструкцій, труб, кузовів вантажних автомобілів та ін. Сплав Д18 є одним з основних матеріалів для заклепок.

Ливарні алюмінієві сплави. Ливарні алюмінієві сплави маркують літерою «А», за якою ставлять літери, що позначають легуючий елемент: К – кремній, М – мідь, Мг – магній, Кд – кадмій, Н – нікель. Цифри після позначення елемента вказують його середню кількість. Якщо концентрація елемента не перевищує 1,5%, то після його позначення цифри не проставляють. У багатьох сплавах магній, що є одним з основних елементів, міститься в десятих частках відсотка; при

маркуванні цих сплавів його позначення відсутнє. Літери «ч» (чистий) і «пч» (підвищеної чистоти) вказують на знижену кількість домішок.

Найпоширенішою групою ливарних алюмінієвих сплавів є *силуміни* – сплави на основі системи Al-Si. Більшість силумінів є доевтектичними сплавами, в яких кількість кремнію становить 4–13% (табл. 10.3). Основною складовою частиною структури в багатьох сплавах є евтектика, що складається з твердого розчину на базі алюмінію та кремнію.

Пластинчаста форма кремнію в евтектиці зумовлює низькі механічні властивості силуміну. Для підвищення міцності та пластичності силуміни *модифікують* доданням приблизно 0,01% *натрію*, що вводять у вигляді солей, наприклад суміші 2/3 NaF і 1/3 NaCl (1–2% від маси розплаву). При кристалізації модифікованого розплаву замість пластинчастої форми кремнієвого скелета утворюється тонковолокниста, що сприяє зниженню крихкості сплава та підвищує його корисні механічні властивості (рис. 10.2). Недоліком у такому випадку є те, що модифікуюча дія натрію, через його вигоряння не зберігається при переплавленні. Тому натрій необхідно вводити в розплав безпосередньо перед литтям деталей на машинобудівному заводі. Оскільки підвищення механічних властивостей при модифікуванні пов'язане зі зміною форми кремнію в евтектиці, то чим більше евтектики, тим сильніше вплив модифікування на його властивості. Якщо кількість кремнію не перевищує 5%, то силумін не модифікують.

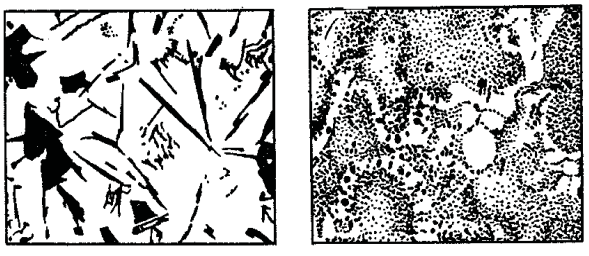
Перехід від пластинчастої форми кремнію в евтектиці силуміну до волокнистої відбувається також при прискоренні процесу кристалізації: у тонкостінних кокильних виливках та деталях, вилитих під тиском, евтектика без додання модифікатора має модифікований вигляд.

Багато деталей із силумінів через високу герметичність працюють у пневмота гідросистемах, бо не дають течії під тиском повітря, води або масла. Їх широко використовують для головок циліндрів двигунів, картерів зчеплення, впускних трубопроводів та ін.

Таблиця 10.3

Режими термічної обробки та гарантовані механічні властивості ливарних алюмінієвих сплавів

Марка сплаву	Гартування		Старіння		σ_u, МПа	δ, %
	Т, °С	τ, год	Т, °С	τ, год		
АК12	-	-	-	-	160	1,0
АК9	-	-	-	-	160	1,0
	-	-	175	5–17	200	0,5
	535	2–6	175	10–15	250	1,0
АК9ч	535	2–6	175	10–15	230	3,0
АК5М	515	3–5				
	525	1–6	175	5–10	200	1,0
АК8М3ч	510	4–6	160	6–12	400	4,0
	-	-	-	-	300	2,0
АМ4,5Кд	535	5–9				
	545	5–9	170	6–10	500	4,0
АМг10	430	20	-	-	320	12



а *б*

Рис. 10.2. Мікроструктура литого (*а*) і модифікованого (*б*) силуміну

Особливу групу складають *поршневі сплави*. Сплав для поршнів двигунів внутрішнього згоряння повинен бути жароміцним (днище поршня може розігріватися до 350°С), мати низький температурний коефіцієнт лінійного розширення, мати високу стабільність розмірів та високу зносостійкість. Ці властивості має силумін АК12М2МгН. За кількістю кремнію цей сплав близький до евтектичного, що надає йому добрі ливарні властивості й низький коефіцієнт

лінійного розширення. Жароміцність забезпечують добавки міді, нікелю і магнію, які утворюють велику кількість інтерметалідів. Для виготовлення поршнів автомобільних двигунів використовують також заевтектичний силумін АК21М2,5Н2,5, який має дуже низький коефіцієнт лінійного розширення, що дуже важливо для поршневого сплава.

Високу міцність мають і *ливарні магналії* АМг6Л та АМг10Л, де магній, що зміцнює сплав, входить до твердого розчину на основі алюмінію.

10.4. Мідь та її сплави

Мідь належить до важких кольорових металів: її густина при 20°С дорівнює 8,96 г/см^3; вона має гранецентровану кубічну гратку і плавиться при температурі 1083°С. У міді вісокої чистоти границя міцності становить 220 МПа, а відносне видовження – 50%.

За обсягом споживання мідь знаходиться на другому місці серед кольорових металів після алюмінію. Головні напрями використання мідних сплавів визначаються високими електротехнічними властивостями міді, її стійкістю проти корозії, значною пластичністю.

Мідь має найменший після срібла питомий опір, тому її широко використовують для виготовлення провідників струму (дроти, шини, шнури, кабелі).

Завдяки високій пластичності мідь добре обробляється штампуванням у гарячому й холодному станах. Найменша товщина листа або стрічки буває 0,05–0,06 мм, а діаметр дроту може становити 0,02–0,03 мм.

Мідь має задовільну стійкість проти корозії в повітряній атмосфері. При взаємодії з повітрям на міді утворюється захисна плівка (патина), яка залежно від вологості та складу атмосфери, а також тривалості перебування в ній має різний склад і різні відтінки – від чорного й коричневого до зеленого і синього.

Шкідливими домішками в міді є свинець, вісмут та кисень, які мало розчиняються в міді в твердому стані та погіршують її здатність до деформування.

Латуні. Латунями називають сплави міді з цинком. Ці сплави добре обробляються тиском. Здебільшого латунь застосовують у виробництві деформованих напівфабрикатів: листів, стрічок, дротів, труб і т.ін.

Розрізняють *звичайні* (подвійні) та *спеціальні* (багатокомпонентні) латуні. Крім того, спеціальні латуні розподіляють на деформівні і ливарні.

Подвійні латуні добре піддаються обробці тиском і можуть бути однофазними та двофазними, тому розрізняють α-латуні і (α+β)-латуні.

Технічні латуні містять до 40–45% цинку. (табл. 10.4).

Таблиця 10.4

Хімічний склад і типові механічні властивості латуней

Марка сплаву	Cu	Легуючі елементи	σ_u, МПа	δ, %
Деформівні латуні				
Л90	88,0–91,0	-	260	44
Л68	67,0–70,0	-	330	56
Л63	62,0–65,0	-	360	49
ЛС59-1	57,0–60,0	0,8–1,9 Pb	390	44
ЛО70-1	69,0–71,0	1,0–1,5 Sn	350	62
ЛАМш77-2-0,05	76,0–79,0	1,7–2,5 Al; 0,025–0,06 As	380	50
Ливарні латуні				
ЛЦ40С	57,0–61,0	0,8–2,0 Pb	300	30
ЛЦ16К4	78,0–81,0	3,0–4,5 Si	380	15
ЛЦ23А6Ж3Мц2	64,0–68,0	4–7 Al; 2–4 Fe; 1,5–3,0 Mn	650	7

Прості латуні маркирують літерою «Л», за якою ставлять число, що вказує кількість міді, наприклад: Л90, Л68. Найбільш поширені марки: Л90, Л68 і Л63.

Латунь Л90 стійка проти корозії і має красивий золотистий колір. ЇЇ використовують для виготовлення радіаторних трубок, фурнітури та ін. Латунь Л68 через більш високу концентрацію цинку в α-розчині міцніша за латунь Л90 і широко використується для виготовлення виробів холодним штампуванням та глибоким витягуванням.

Спеціальні деформівні латуні містять легуючі домішки (Al, Ni, Si, Sn, Fe, Pb та інші), які підвищують стійкість проти корозії, а також механічні і технологічні властивості, полегшують обробку різанням.

При позначенні марки спеціальної деформівної латуні після літери «Л» стоять перші букви назв легуючих елементів, після чого вказують кількість міді та відповідних легуючих елементів. При маркуванні мідних сплавів легуючі елементи мають такі позначення: С – свинець, К – кремній, Б – берилій, Мш – миш'як, А – алюміній, Ж – залізо, Н – нікель, Ц – цинк, Мц – марганець, Ф – фосфор, Х – хром. Наприклад: латунь ЛКС80-3-3 містить 80% міді, 3% кремнію та 3% свинцю.

Свинцева (α+β)-латунь ЛС59-1 за об'ємом виробництва знаходиться на другому місці після латуні Л63. Свинець практично не розчиняється в α- і β-фазах і знаходиться в латуні у вигляді дрібних включень округлої форми. На відміну від α-латуней, де свинець є шкідливою домішкою, бо викликає гарячеламкість, через що його концентрація не повинна перевищувати 0,03%, у (α+β)-латуней з великою кількістю β-фази при температурі гарячої деформації свинець, який знаходиться в рідкому стані, не викликає гарячеламкості, навіть при концентраціях до 3%.

При обробці різанням включення свинцю в латуні роблять стружку ламкою, вона легко відділяється. Тому латунь ЛС59-1 використовують в масовому виробництві для швидкої обробки різанням на верстатах-автоматах, крім того, включення свинцю поліпшують антифрикційні властивості латуні, яку застосовують у парах тертя.

Легування оловом підвищує корозійну стійкість у прісній та морській воді, тому латуні типу ЛО70-1 та ЛО60-1 одержали назву «морських».

Ливарні латуні за хімічним складом є легованими. Їх маркують літерою «Л», а потім вказують літери, що позначають всі введені елементи, починаючи з цинку, за кожною з них ставлять число, яким позначають кількість цього елемента. Концентрацію міді не вказують. Наприклад: латунь ЛЦ16К4 – це ливарна латунь, яка містить 16% цинку, 4% кремнію та 80% міді.

Латуні мають вузький інтервал кристалізації і характеризуються високою рідкотекучістю, малою схильністю до утворення усадочних пор. Латунь ЛЦ40С

використовують для виливання втулок і вкладишів підшипників. Кремніста латунь ЛЦ16К4 має підвищену рідкотекучість і застосовується для виливання гідравлічно щільної арматури. Високолеговану латунь ЛЦ23А6Ж3Мц2 з високою міцністю застосовують для виливання важконавантажених масивних черв'ячних гвинтів.

*Бронзи***.** Бронзами називають сплави міді, в яких основною добавкою є будь-який елемент за винятком цинку і нікелю. Є олов'яні і безолов'яні бронзи, причому кожна з цих груп поділяється на ливарні та деформівні (табл. 10.5).

У марках деформівних бронз після літер «Бр» стоять літерні позначення назв легуючих елементів у порядку зменшення їх концентрації, а в кінці марки в тій самій послідовності вказано середні концентрації відповідних елементів у відсотках. Наприклад: БрОЦС 4-4-2,5 – це олов'яна деформівна бронза, яка містить 4% олова, 4% цинку, 2,5% свинцю та 89,5% міді.

При маркируванні ливарних бронз після кожного позначення назви легуючого елемента вказують його кількість. Наприклад: БрО5Ц5С5 – це ливарна олов'яна бронза, яка містить 5% олова; 5% цинку; 5% свинцю та 85% міді.

Якщо хімічний склад ливарної бронзи та бронзи для обробки тиском співпадають, то в кінці марки ливарної бронзи ставлять літеру «Л», наприклад: БрА9Мц2Л.

Бронзу БрОФ6,5-0,15 виробляють у вигляді холоднокатаних стрічок, з яких виготовляють різні пружні елементи.

Бронзу БрОЦС4-4-2,5 виробляють у вигляді штаб та стрічок, з них виготовляють прокладки для підшипників та втулок у автомобільній, тракторній та інших галузях промисловості.

Ливарні олов'яні бронзи поєднують високі ливарні властивості з корозійною стійкістю в повітряній атмосфері, що разом з дуже важливим кольором сприяло використанню цього матеріала для художнього лиття. Такі бронзи містять до 10–15% олова і цинку та до 3% свинцю.

Бронза БрО10Ф1 міцна і має добрі антифрикційні властивості, але через дефіцитність олова її застосовують тільки для виливки деталей відповідального призначення, наприклад вінців черв'ячних шестерен.

Бронзу БрО5Ц5С5 унаслідок високих антифрикційних властивостей використовують для виливки арматури, антифрикційних деталей, вкладишів підшипників.

Безолов'яні бронзи мають високу міцність, добрі антифрикційні та антикорозійні властивості, і можуть замінювати олов'яні бронзи, тому що в деяких випадках перевершують їх за властивостями. Безолов'яні бронзи поділяють за основним легуючим елементом на алюмінієві, свинцеві, хромові, кремнієві та ін.

Таблиця 10.5

Хімічний склад і механічні властивості деяких марок бронз

Марка	Хімічний склад,%	σ_u, МПа	δ, %	Призначення
Олов'яні деформівні бронзи				
БрОФ6,5-0,15	6,0–7,0 Sn; 0,1–0,25 P	600	5	Стрічки, прутки, дріт для пружин, деталі
БрОЦ4-3	3,5–4,0 Sn; 2,7–3,3 Zn			підшипників
БрОЦС4-4-2,5	3,0–5,0 Sn; 1,5–3,5 Pb; 3,0–5,0 Zn	550	5	Стрічки для прокладок у втулках підшипників
Олов'яні ливарні бронзи				
БрО10Ф1	9,0–11,0 Sn; 0,4–1,1 P	220	3	Відповідальні деталі
БрО5Ц5С5	4,0–6,0 Sn; 4,0–6,0 Pb; 4,0–6,0 Zn	160	6	Антифрикційні деталі
БрО3,5Ц7С5	3,0–4,5 Sn; 2,0–4,0 Pb; 5,0–6,0 Zn	160	6	Деталі для тракторів
Безолов'яні деформівні бронзи				
БрА7		420	70	Антифрикційні деталі з
БрАМц9-2		500	55	підвищеною корозій-
БрАЖН10-4-4		650	40	ною стійкістю
БрБ2		1150	2	Пружини, пружні контакти
Безолов'яні ливарні бронзи				
БрА10Ж3Мц2	9,0–11,0 Al; 2,0–4,0 Fe; 1,0–3,0 Mn	400	10	Антифрикційні деталі з підвищеною міцністю
БрС30	27,0–31,0 Pb	60	4	Антифрикційні деталі

Алюмінієві бронзи складають найбільш багаточисельну групу. Відповідно до діаграми стану сплави з кількістю алюмінію менше 9,4% мають однофазну структуру α-твердого розчину алюмінію в міді, і тому добре деформуються в холодному й гарячому станах. Наприклад, однофазну бронзу БрА7 виробляють у вигляді холоднокатаної стрічки, з якої виготовляють пружні контакти.

Ливарні алюмінієві бронзи БрА9Ж3Л та БрА10Ж3Мц2 застосовують для виливання арматури та антифрикційних деталей з підвищеною міцністю.

Для заливання вкладишів підшипників використовують *свинцеві бронзи* (БрС30), які мають дуже високі антифрикційні властивості.

Хромові бронзи мають високу міцність та тепло- і електропровідність, їх використовують при виробництві електродів зварювальних машин.

Берилієві бронзи після термічної обробки мають найвищу границю пружності для мідних сплавів – близько 800 МПа. Із цих бронз виготовляють мембрани, пружні контакти, пружини карбюраторів і бензонасосів.

Кремнієві бронзи (БрКМц3-1 і БрКН1-3) мають високі пластичність та стійкість проти корозії. За механічними властивостями вони кращі, ніж олов'яні бронзи і менш коштовні.

10.5. Перспективи використання титанових сплавів

Титан належить до легких металів: при кімнатній температурі його густина дорівнює 4,5 г/см^3. Температура плавлення становить 1668°С. При температурах нижче 882,5°С титан має гексагональну щільноупаковану гратку. Ця поліморфна модифікація позначається як α-Ті. Титан з ОЦК граткою, який існує при температурах вище 882,5°С, позначається як β-Ті.

Титан займає четверте місце після алюмінію, заліза і магнію за розповсюдженістю в земній корі, де його міститься близько 0,6%. Промисловий спосіб добуття титану розроблено лише в 40-х роках минулого сторіччя. При високих температурах, особливо в розплавленому стані, титан хімічно дуже активний при

взаємодії із всіма компонентами повітря та з більшістю вогнетривів, що призводить до певних труднощів при плавленні та гарячій обробці.

Унаслідок утворення захисної плівки рутилу (TiO_2) титан має дуже високу стійкість проти корозії в повітряному середовищі, морській воді та багатьох агресивних середовищах.

Теплопровідність титана в чотири рази менша, ніж у заліза.

За питомою міцністю в інтервалах температур 300–600°С титан не має собі рівних, при температурах нижче 300°С сплави титана поступаються лише алюмінієвим сплавам, а при температурах вище 600°С – сплавам на основі заліза і нікелю.

Всі ці властивості разом з високим опором корозії зумовили використання титанових сплавів.

Титан широко використується в ракетно-космічній та авіаційній техніці, в суднобудуванні і транспортному машинобудуванні, де особливо важливу роль відіграють мала густина в поєднанні з високою міцністю та опором корозії.

Через пластичність і в'язкість при низьких температурах титанові сплави застосовують у холодильній та криогенній техніці.

Висока стійкість проти корозії в різних середовищах робить сплави титана перспективними для використання в харчовій промисловості. Деякі харчові продукти можуть псуватися від контакту зі сталлю, тоді як титан не надає їм сторонніх запаху, кольору й смаку.

Титан використовують в медицині через високу стійкість у тканинах організму людини. Титан не відторгається кістковою та м'язовою тканинами і легко обростає ними. За своєю біологічною інертністю титан перевершує всі відомі корозієстійкі сталі і сплави.

Титанові сплави маркують літерами «ВТ» чи «ОТ», за якими ставлять число, що позначає умовний номер сплаву (табл. 10.6).

Промислові сплави класифікують *за структурою у відпаленому стані* на: α-сплави, псевдо α-сплави (містять 2–8% β-фази), (α+β)-сплави та β-сплави.

До α-*сплавів* відносять технічно чистий титан марок ВТ1-00 і ВТ1-0 (кількість домішок становить відповідно 0,9 та 1,7%). Найбільш широко використовують титан ВТ1-0, який містить не більше ніж 0,7% алюмінію, 0,3% заліза, 0,1% вуглецю, 0,2% кисню, 0,04% азоту і 0,01% водню. Його застосовують для перекачування та зберігання агресивних рідин.

Переважна більшість титанових сплавів містить алюміній, який підвищує міцність та жароміцність, знижує густину та схильність до водневої крихкості. Родоначальником промислових титанових сплавів є подвійний сплав ВТ5 (Ti+5% Al).

Титанові сплави зі структурою α-фази (ВТ4, ВТ5-1, ОТ4, ВТ18 та інші) в основному легують алюмінієм. Вони мають значну міцність при кімнатній та підвищеній температурі, термічно стабільні, мають низьку технологічну пластичність, особливо при кількості алюмінію менше 5%. Такі сплави термічно не зміцнюють. Їх піддають рекристалізаційному відпалу при температурах 650–850°С.

Таблиця 10.6

Хімічний склад і механічні властивості титанових сплавів у відпаленому стані

Марка сплаву	Al	V	Mo	Інші елементи	σ_u, МПа	δ, %
α-сплави						
ВТ1-00	-	-	-	-	300–450	25
ВТ1-0	-	-	-	-	400–550	20
ВТ5	4,3–6,2	-	-	-	750–900	10
ВТ5-1	4,0–6,0	-	-	2,0–3,0 Sn	800–1000	10
Псевдо α-сплави						
ОТ4-1	1,0–2,5	-	-	0,7–2,0 Mn	600–750	15
ВТ20	5,5–7,0	0,8–2,5	0,5–2,0	1,5–2,0 Zr	900–1100	8
(α+β)-сплави						
ВТ6	5,3–6,8	3,5–5,3	-	-	920–1070	10
ВТ9	5,8–7,0	-	2,8–3,8	0,8–2,0 Zr; 0,2–0,35 Fe	1050–1250	6
ВТ22	4,5–5,9	4,0–5,5	4,0–5,5	0,5–2,0 Cr; 0,5–1,5 Fe	1100–1250	8

До *псевдо α-сплавів* відносять ОТ4-1 та ВТ20, які мають більш високу технологічну пластичність при холодній та гарячій обробці тиском, тому їх широко застосовують у виробництві тонких листів.

До групи титанових *сплавів із структурою (α+β)* відносять сплави ВТ6, ВТ8, ВТ9, ВТ14 та інші, що містять алюміній, ванадій і молібден. Ці сплави мають вищу міцність, яку можна додатково підвищити гартуванням зі старінням, меншою схильністю до водневої крихкості, ніж α-сплави.

Сплави зі *структурою β-фази* (ВТ3-1, ВТ15 та інші) більш пластичні, але мають меншу міцність.

10.6. Характеристика й призначення магнієвих сплавів

Магній відносять до дуже легких металів: при кімнатній температурі його густина дорівнює 1,74 г/см^3, тобто у півтора раза менша, ніж у алюмінію. Магній має гексагональну щільно упаковану гратку і плавиться при температурі 650°С. Нижче 450°С оксидна плівка на магнії має захисні властивості, а за умов більш високих температур вона стає дірчастою й легко пропускає кисень до поверхні металу. Магній – хімічно активний метал, що леко окиснюється на повітрі, а при температурі вище 623°С запалюється. Вологий магнієвий пил запалюється при температурі 360°С. Тому для запобігання займання виливків перед завантаженням у піч для термічної обробки їх треба очищати від магнієвого пилу, заусенців та стружки.

Магній використовують винятково для виробництва сплавів. Незважаючи на те, що міцність магнієвих сплавів нижча, ніж алюмінієвих, через меншу густину питома міцність може бути вищою. Тому при однаковій масі конструкція з магнієвого сплаву може бути міцнішою, ніж з алюмінієвого. Це зумовлює основну галузь використання магнієвих сплавів – аерокосмічна промисловість. У сільськогосподарсьому машинобудуванні та автомобільній промисловості ці сплави застосовують при виготовленні виливків блоків циліндрів, деяких корпусних деталей, а також для ненавантажених корпусів різних вузлів

та пристроїв (табл. 10.7). Важлива позитивна якість магнієвих сплавів – добра оброблюваність різанням. Деякі сплави мають добрі демпфуючі властивості, завдяки цьому можна значно знижувати рівень вібрації та шумів.

Таблиця 10.7

Хімічний склад і типові механічні властивості магнієвих сплавів

Марка сплаву	Al, %	Zn, %	Mn, %	Інші елементи, %	σ_u, МПа	δ, %	Призначення
Ливарні сплави							
МЛ5	7,5–9,0	0,2–0,8	0,15–0,5	-	226	5	Для навантажених деталей двигунів (картери, коробки передач),
МЛ6	9–10,2	0,6–1,2	0,1–0,15	-	216	1	гальмових барабанів і т.ін.
МЛ10	-	0,1–0,7	-	0,4–1,0Zr; 2,2–2,8 Nd	230	3	Для навантажених деталей двигунів та приладів, що потребують високої герметичності і стабільності розмірів
МЛ12	-	4–5	-	0,6–1,1 Zr	225	5	Для навантажених деталей (реборди, барабани колес тощо)
Деформівні сплави							
МА1	-	-	1,3–2,5	-	190–220	5–10	Для зварних деталей, арматури, бензосистем, що не несуть великих навантажень
МА2-1	3,8–5,0	0,8–1,5	0,3–0,7	-	270–330	8–20	Для панелей, складних заготовок, зварних конструкцій
МА14	-		-	0,2–0,9 Zr	320–340	6–14	Для високонавантажених деталей

Магнієві сплави за способом виробництва напівфабрикатів поділяють на деформівні (позначають літерами «МА») й ливарні (позначають літерами «МЛ»). При маркуванні магнієвих сплавів за відповідними літерами розміщені цифри, які вказують умовний номер сплава (табл. 10.7).

При виплавленні та литті магнієвих сплавів застосовують спеціальні засоби з метою запобігання загоряння сплавів. Плавлення проводять у залізних тиглях під шаром флюсів, а під час розливання струмінь металу посипають сіркою, яка утворює сірчастий газ, що запобігає загорянню металу.

10.7. Характеристика й призначення бабітів

Олово і свинець мають низькі температури плавлення (відповідно 232 і 327°С) й малу міцність (відповідно 20 і 18 МПа), але високу пластичність (відносне видовження становить відповідно 40 та 50%) і велику густину (відповідно 7,3 та 11,4 г/см^3).

Свинець має ГЦК гратку, а олово – це поліморфний метал, у якого при температурах вище +13°С термодінамічно стабільним є біле β-олово з тетрагональною граткою і металевим типом зв'язку. При температурах нижче +13°С стабільним стає сіре олово α з граткою алмазу й ковалентним типом зв'язку. Біле олово пластичне, а сіре – крихке.

Технічне олово використовують для лудіння металів й виготовлення фольги, а свинець – для футерування електролітних ванн і сірчанокислих камер, виготовлення фольги і кабельних оболонок. Їх не можна зміцнити холодною деформацією, тому що при кімнатній температурі ці легкоплавкі сплави рекристалізуються.

Сплави олова і свинцю з іншими елементами використовують як легкоплавкі припої та антифрикційні матеріали.

Антифрикційні сплави на основі свинцю та олова називають *бабітами.* Їх структура складається з двох основних складових частин: більш м'яка і пластична частина структури, яка становить основу сплаву, забезпечує припрацьовуваність підшипника до шійки вала, а включення більш твердої складової частини знижують коефіцієнт тертя. Під час роботи вал спрацьовує м'яку основу і починає спиратися на тверді включення, які виступають, а западини, що утворилися між включеннями, утримують мастило.

Бабіти маркують літерою «Б», за якою вказують вміст олова (табл. 10.8).

Широке використання має бабіт Б83 на олов'яній основі. Вкладиші з бабіту Б83 дуже добре припрацьовуються до вала і можуть працювати при великих швидкостях до 50 м/с, тому їх використовують у вузлах тертя двигунів внутрішнього згоряння, турбокомпресорів і потужних електродвигунів, які працюють за високих швидкостей ковзання деталей і робочій температурі до 120°С. Недолік цього бабіту – високий вміст гостродефіцитного олова. Найбільш доступними підшипниковими сплавами є малоолов'яні (свинцеві) бабіти на свинцевій основі, типовим представником яких є бабіт Б16, що використовують на менших швидкостях, ніж Б83.

Таблиця 10.8

Хімічний склад бабітів і максимальні значення питомого тиску і окружної швидкості

Марка сплаву	Pb	Sn	Sb	Cu	Інші елементи	P, МПа	v, м/с
Б83	-	Залишок	10,0–12,0	5,5–6,5	-	150	50
Б16	Залишок	15,0–17,0	15,0–17,0	1,5–2,0	-	100	30
БК2	Залишок	1,5–2,1	-	-	0,30–0,55 Ca; 0,20–0,40 Na; 0,01–0,05 Mg	150	15

Кальцієві бабіти застосовують у залізничому транспорті для заливання вкладишів підшипників. Позитивність цих бабітів у відсутності або дуже малої кількості дефіцитного олова (БК2).

ГЛАВА 11. НЕМЕТАЛЕВІ КОНСТРУКЦІЙНІ МАТЕРІАЛИ

11.1. Властивості пластмас

Пластмасами називають матеріали на основі природних або систетичних високомолекулярних сполук (полімерів).

Полімери складаються з великої кількості мономерів з однаковою будовою – 1000–10000 од.

Під дією нагрівання і тиску пластмаси переробляють у вироби, які зберігають надану їм форму.

Пластмаси мають ряд *цінних властивостей*, найголовніші з яких:

- мала густина (0,94–1,5 г/см^3, рідше до 2,3 г/см^3);
- високі діелектричні властивості;
- стійкість проти корозії;
- низька теплопровідність;
- високі адгезійні властивості;
- механічні властивості широкого діапазону;
- антифрикційні властивості в одних і фрікційні властивості в інших пластмасах;
- значна механічна міцність у шаруватих і волокнистих пластмасах;
- цінні декоративні властивості (деякі пластмаси мають хорошу прозорість, добре фарбуються в різні кольори);
- високі технологічні властивості, які дають можливість виготовляти вироби високопродуктивними методами (без знімання стружки).

Пластмаси мають і *недоліки* :

- деякі пластмаси розм'якають і деформуються при нагріванні, а при низьких температурах стають крихкими;
- більшість пластмас мають низьку теплостійкйсть, яка не перевищує температуру 100–120°С;

- деякі пластмаси інтенсивно вбирають вологу (набухають);
- багато які пластмаси змінюють свої властивості під впливом атмосферних, температурних і хімічних факторів (старіють), при цьому в них зменшується еластичність, виникають жорсткість і крихкість, знижується механічна міцність. Сутність старіння пластмас полягає в тому, що має місце значна зміна вихідної структури: відбувається розрив макромолекул на частини або їх з'єднання поперечними зв'язками, у результаті чого пластмаса стає крихкою.

Залежно від стану смол при нагріванні пластмаси, які вироблені на їх основі, поділяють на два типи: термопластичні (термооборотні) і термореактивні (термонеоборотні).

Термопластичні при нагріванні розм'якають, розтоплюються, а при охолодженні повертають свої властивості. Це дає можливість переробляти не тільки зламані вироби, а й відходи та використовувати їх багато разів.

Термореактивні можуть необоротно твердіти при нагріванні, при цьому під час охолодження до них не повертаються основні властивості, тому їх можна використовувати лише один раз.

11.2. Основні складові частини пластмас

Сировиною для виготовлення пластмас є природний газ, нафта, вугілля і повітря, відходи деревообробного і текстильного виробництв.

Пластмаси складаються з декількох компонентів: зв'язуючої речовини, наповнювача, пластифікатора та ін. Обов'язковим компонентом є зв'язуюча речовина – полімер (рис. 11.1).

Наповнювачами слугують тверді матеріали органічного і неорганічного походження. Вони надають пластмасам міцність, твердість, теплостійкість, а також деякі спеціальні властивості (фрикційні або антифрикційні та ін.). Наповнювачі знижують усадку при пресуванні, вони заповнюють простір між частинками

в'яжучої речовини, поліпшують механічні, технологічні та інші властивості, зменшують витрати основного в'яжучого матеріалу, здешевлюють пластмасу. Пластмаси можуть містити до 40–60% наповнювачів.

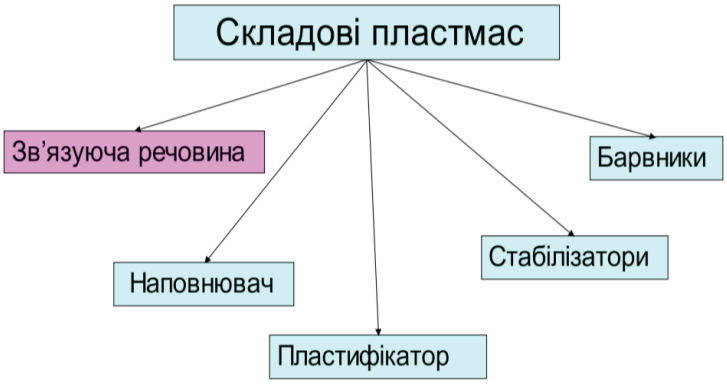


Рис. 11.1. Основні складові пластмас

Наповнювачі поділяють на групи за розміром на нульмірні (порошкоподібні), одномірні (волокнисті) і двомірні (шаруваті).

Пластичні маси без наповнюючих компонентів прозорі. Найчастіше використовують такі наповнювачі: деревне борошно, папір, азбест, відходи бавовняної тканини, скловолокно, металеві порошки, графіт та ін.

Уміст наповнювача в термопластах становить як правило 30%, а в реактопластах більше ніж 50%.

Пластифікатори – це нелетючі рідини з низькою температурою замерзання (гліцерин, парафінове масло та ін.). Їх вводять з метою розширення температурної області високоеластичного стану, крім того, вони знижують жорсткість пластмас і температуру крихкості.

Для надання пластмасам бажаних механічних, фізичних і технологічних властивостей до них додають деякі *спеціальні домішки*: стабілізатори, мастильні речовини, барвники, каталізатори та ін.

Стабілізатори гальмують старіння (руйнування) полімеру під дією світла, підвищеної температури та інших факторів (сажа, сполуки олова і свинцю та ін.).

Каталізатори прискорюють твердіння пластмас (наприклад, для фенолформальдегідної смоли каталізатором є уротропін).

Мастильні речовини полегшують пресування, не дають гарячій пластмасі прилипати до стінок форми або штампів (стеарин, віск тощо).

Затверджувачі перетворюють будову на сітчасту, наприклад, органічні перекиси сірки в гумі.

Барвники додають у невеликій кількості (1–1,5%) для забарвлення пластмаси в бажаний колір (охра, сурик та ін.).

Пластмаси можуть складатися з однієї або з декількох речовин. Залежно від цього їх поділяють на *прості* і *складні*.

Прості пластмаси складаються з однієї речовини, наприклад, зі смоли; причому й до чистих смол іноді додають хімічні речовини для поліпшення механічних і хімічних властивостей простої пластмаси. До простих пластмас належать акрилат (органічне скло), полістирол, полівінілхлорид, поліетилен та інші.

Основними складовими частинами *складної* (композиційної) пластмаси є в'яжучі речовини (полімери), наповнювачі, пластифікатори і спеціальні домішки.

Основою пластмас є високомолекулярні сполуки – *полімери*, більшість яких перебуває в аморфному стані (їх називають смолами). У виробництві платмас звичайно застосовують синтетичні і рідше – природні смоли.

Для добування синтетичних смол використовують речовини, що складаються з простих молекул-мономерів (наприклад, етилен $CH_2=CH_2$ з молекулярною вагою 28). У високомолекулярних сполуках (полімерах) з окремих мономерів утворюються складні макромолекули. Це такі полімери як поліетилен $(C_2H_4)_n$, молекулярна вага якого може досягати десятків тисяч. Збільшення молекулярної ваги сполук одного ряду пов'язане з підвищенням температури плавлення і кипіння, а також зі зменшенням розчинності і леткості.

За формою макромолекул полімери поділяють на лінійні, розгалужені і сітчасті. Прикладом лінійного полімера є каучук, а сітчастого – гума.

Полімери бувають аморфні (полістирол, вініпласт та ін.) і такі, що кристалізуються, які складаються з аморфної і кристалічної фаз (поліаміди, поліформальдегід та ін.). Наявність аморфної фази зменшує жорсткість полімеру, надає йому еластичності. Полімери з розвинутою сітчастою структурою практично не кристалізуються.

11.3. Типи пластмас та їх застосування

Використання полімерних матеріалів у сільськогосподарському машинобудуванні поширюється з кожним роком, що дозволяє підвищувати надійність техніки, поліпшувати умови праці механізаторів і агротехнічні показники машин, а також знизити трудомісткість виготовлення деталей, економити метал та знижувати собівартість виробів. Наприклад, використання однієї тони пластмас для виготовлення деталей сільськогосподарських машин дає змогу зекономити 3,5 тонни металу. Виготовлення із склопластиків крупногабаритних резервуарів до машин для хімічного захисту машин збільшує термін їх служби втричі та знижує масу виробу вдвічі. Практика використання пластмасових виробів у сільськогосподарському машинобудуванні свідчить про те, що деталі з пластиків ефективно можна використовувати у вузлах тертя (втулки, підшипники, ущільнювальні елементи, робочі органи деяких сільгоспмашин тощо), деталях передач (зубчасті колеса, зірочки, ланцюги, ролики та ін.), деталях та вузлах, які працюють в агресивних середовищах (резервуари, бункери, фільтри, деталі оприскувачів, насосів та ін .), крупногабаритних корпусних деталях сільськогосподарських машин (резервуари для мінеральних добрив й для хімічних препаратів у машинах для хімічного захисту рослин, деталі кабін, паливні баки та ін.).

Термопластичні смоли і термопластичні пластмаси при багаторазовому нагріванні та охолоджуванні зберігають здатність розм'якати, плавитись і знову твердіти. До термопластичних належать пластмаси, виготовлені на основі ефірів целюлози (целулоїд, етрол, поліетилен, поліпропілен, а також полістирол, поліуретан тощо).

Із поліамідів виготовляють підшипники, вкладиші до підшипників, втулки, муфти, шинний корд, приводні паси, електроізолятори, медичні інструменти. Підшипники і деталі, виготовлені з поліамідів, здатні працювати із самозмазуванням, що робить їх незамінними для використання у харчовій і текстильній промисловостях. Велику роль відіграють також захисні поліамідні покриття, які наносять тонким шаром на поверхню металевих матеріалів та інших виробів.

Поліетилен – один з найбільш доступних і дешевих полімерних матеріалів. Це карболанцюжний полімер (-CH2 - CH2 -)n , який за структурою відносять до кристалічних через те, що ступінь кристалічності при температурі 20°С досягає 50–90% та залежить від способу його виробництва. Поліетилен використовують:

- для ізоляції електродротів і кабелів;
- як пакувальний матеріал для харчових продуктів;
- для захисту від корозії магістральних нафто- і газопроводів;
- як замінник скла при виготовленні товарів народного вжитку;
- для захисту металів від корозії;
- поліетиленові труби можуть працювати при температурах до –60°С та не зазнають ґрунтової корозії;
- виготовляють кришки підшипників, ущільнювальні прокладки, деталі вентиляторів та насосів, гайки, шайби, тару для зберігання та транспортування кислот і луг.

Поліетилен випускають у вигляді плівок завтовшки 0,03–0,30 мм і завширшки від 1400 мм до 30 м і у вигляді листів завтовшки 1–6 мм і завширшки до 1400 мм. Його отримують шляхом полімеризації при тиску (1,0–3,5)$\cdot 10^4$ МПа і температурах 200–300 °С. Такий поліетилен називають поліетиленом високого тиску (ПЕВТ) або низької густини (ПЕНГ) – 0,92 г/см^3. Поліетилен, який отримують полімеризацією при низькому тиску (нижче 200 МПа й температурах 80°С), належить до поліетиленів низького тиску (ПЕНТ) або високої густини (ПЕВГ) – 0,95 г/см^3.

Властивості поліетиленів високого та низького тиску різні. У поліетиленах високого тиску ступінь кристалічності нижча, ніж в поліетиленах низького тиску (50–60% проти 80–90%). Через більшу густину і кристалічність ПЕНТ, в порівнянні з ПЕВТ, має більш високу теплостійкість, міцність та жорсткість. Руйнуюче напруження при розтягуванні становить 8,0–16,0 МПа для ПЕВТ і 26,5–32,5 МПа для ПЕНТ. Відносне видовження, відповідно до міцності, змінюється від 200% для ПЕНТ до 800% для ПЕВТ. Вироби з ПЕНТ експлуатуються при температурах до 100°С, а з ПЕВТ лише до 60°С, проте на морозі вони стають крихкими лише при температурах нижче –70°С. Поліетилени мають добру водостійкість, високу стійкість до деяких кислот і лугів, а також добрі діелектричні властивості, тому їх використовують як електроізоляційний матеріал у радіотехніці, телебаченні, кабельній промисловості, для просочування тканин, паперу, деревини. Поліетилен екологічно нешкідливий, тому його застосовують у медицині, житловому будівництві, у продовольчому машинобудуванні, а також для виробництва товарів народного вжитку. У сільськогосподарському машинобудуванні частіше використовують ПЕНТ. Із нього виробляють труби, ємкості для агресивних рідин, зубчасті колеса для малих навантажень, кожухи, фільтри, втулки, паливні баки тощо.

Поліпропілен використовують для виготовлення антикорозійної футеровки резервуарів, корпусів автомобілів та акумуляторів, прокладок, труб, зубчастих коліс, плівкових покриттів, підшипників ковзання, різних ущільнювачів, деталей телевізорів, магнітофонів, холодильників, пральних машин та ін.

Поліпропілен $[-CH2-CH(CH3)-]_n$ завдяки високій кристалічності (90–95%) має вищу механічну міцність і теплостійкість (до 150°С), вироби з нього відрізняються стабільністю розмірів. Але морозостійкість його низька (до –30°С). У сільськогосподарському машинобудуванні його використовують для виготовлення зубчастих та черв'ячних коліс, зірочок ланцюжних передач, підшипників, пружин, ресор, різноманітних ємкостей, фільтрів масляних та водних систем тощо.

Полістирол (твердий, жорсткий, прозорий аморфний полімер) використовують для виготовлення деталей радіо- та електроапаратури, товарів народного вжитку, дитячих іграшок, прокладок, втулок та ін.

Полівінілхлорид (-CH2-CHCl)n застосовують у виробництві двох видів пластмас – вініпласта і пластиката.

Вініпласт не містить пластифікаторів (жорсткий полівінілхлорид). Як конструкційний матеріал може бути замінювачем кольорових металів. Із нього виробляють труби, фільтри, ущільнювачи, болти, гайки, ємкості тощо.

Пластикат – це пластифікований полівінілхлорид. Введення пластифікаторів наприклад, фталатів не тільки поліпшує пластичність, а й підвищує морозостійкість полівінілхлорида (до –50°С). Пластикат широко використовують для ізоляції кабелів, виготовлення труб та інших виробів.

Поліметилакрилат або *органічне скло* [-CH2-C(CH3)-COOCH3-]n є замінником звичайного сілікатного скла; воно еластичне і легше, ніж звичайне скло, більш прозоре. Органічне скло має високі діелектричні властивості, стійке проти старіння в природніх умовах, морозостійкість досягає –60°С, масло-, бензо-, водостійке, стійке проти дії розбавлених лугів, кислот, солей, але розчиняється у вуглеводнях, набухає в спиртах, має малу термостійкість (до 80°С) і недостатньо тверде, через що легко пошкоджується від механічної дії. Органічне скло завтовшки 3 мм пропускає до 91–92% ультрафіолетових променів (силікатне лише – 0,6–3%), більшу частину інфрачервоних променів, до 75% видимої частини світла.

Органічне скло використовують для скління літаків, автомашин і вагонів, у оптичній і годинниковій промисловості, у світлотехніці та ін.

Поліаміди – це складні ланцюгові полімери, які містять амідні групи. Уперше синтетичний поліамід було одержано при взаємодії амінобензойної кислоти з хлористим воднем. За теперішніх часів синтезовано багато поліамідів, але найбільше промислове використання мають *капрон*, *нейлон* та деякі інші. Поліаміди відносять до важливіших конструкційних матеріалів. Це пояснюється

тим, що вони поєднують високу питому міцність з високою корозійною стійкістю, електроізоляційними та антифрикційними властивостями. При нагріванні вони мають добру рідкотекучість, здатність до кристалізації, а при кімнатній температурі – високу стійкість проти стирання, низький коефіцієнт тертя. Для ще більшого підвищення зносостійкості і зниження коефіцієнта тертя в поліаміди вводять антифрикційні наповнювачі – графіт, дисульфід молібдена та інші антифрикційні домішки, які знижують коефіцієнт тертя приблизно вдвічі.

З поліамідів виготовляють підшипники, вкладиші до підшипників, втулки, муфти, шинний корд, приводні паси, електроізолятори, медицинські інструменти. Підшипники і деталі тертя з поліамідів здатні працювати із самозмазуванням, завдяки цьому вони добре працюють у харчовій і текстильній промисловості. Велику роль відіграють також захисні поліамідні покриття, які наносять тонким шаром на поверхню металевих матеріалів та інших виробів.

Термореактивні смоли, а також термореактивні пластмаси при нагріванні розплавляються і за певної температури твердіють унаслідок утворення складних тривимірних молекул. При повторному нагріванні вони не плавляться і не пом'якшуються. До термореактивних належать пластмаси, виготовлені на основі фенолформальдегідних, карбомідних смол та ін. Більшість термореактивних пластмас виробляють на основі фенолформальдегідних і фенолальдегідних полімерів, тому вони мають назву *фенопластів*.

Термореактивні пластмаси відрізняються від термопластів підвищеною теплостійкістю, сталістю фізико-механічних властивостей в інтервалі температур їх експлуатації. Як правило, термореактивні пластмаси у своєму складі поряд із в'яжучим елементом (смолою) містять різні наповнювачі (порошкові, волокнисті і шаруваті).

У промисловості найбільш широко використовують пресовані матеріали на основі фенолформальдегідних полімерів. Залежно від характера наповнювача і ступеня його подрібнення всі пресовані матеріали поділяють на три групи: прес-порошки, волокніти і шаруваті пластики.

Пластмаси з порошковими наповнювачами термостійкі і мають порівняно високі механічні властивості. Вид наповнювача впливає на властивості порошкових пластмас. Так, для виготовлення виробів загальнотехнічного призначення як наповнювач застосовують деревне борошно, для виробів з вищою термостійкістю – мелений азбест, а для підвищення вдостійкості і діелектричних властивостей – кварцеве борошно. Наповнювачами можуть бути також тальк, мелений шлак, графіт тощо. Пластмаси з порошковими наповнювачами постачають у вигляді прес-порошків різного складу і призначення.

Пластмаси з волокнистими наповнювачами. У них наповнювачами є: подрібнена бавовникова целюлоза, азбестові і скляні волокна, текстильний дріб'язок або обрізки тканини.

Волокніт натуральний являє собою волокнисту пластмасу на фенолформальдегідній смолі з наповнювачем із бавовникової целюлози. Це ударостійкий, крупноволокнистий матеріал, який застосовують для виготовленя маховичків, ручок верстатів та інструментів, кришок, різьбових пробок, шківів, кулачків, шестерень, роликів транспортерів тощо.

Скловолокніт. Наповнювачами є скловолокно або скляний дріб'язок. Границя міцності скловолокніту на затверділій поліефірній смолі становить 250–270 МПа. Скловолокніт застосовують для виготовлення виробів, які повинні мати високу механічну міцність, водостійкість і високі електроізоляційні властивості.

Скловолокнистий анізотропний матеріал (СВАМ) виробляють з орієнтованих довгих скляних волокон, зв'язаних рідкими бутварофенольними та іншими смолами. З виробленого таким способом скляного шпону склеюванням під пресом виготовляють склофанеру – матеріал, що має однакові властивості в поздовжньому і поперечному напрямках. Його міцність досягає міцності сталі і становить 480–560 МПа. СВАМ застосовують для хімічно стійких труб і резервуарів, при будівництві кузовів автомобілів, залізничних цистерн, баків, деталей електро- і радіотехнічної апаратури.

Пластмаси з шаруватими наповнювачами виготовляють методом гарячого пресування попередньо просочених синтетичними смолами і вкладених шарами полотен тканин, паперу або деревного шпону. У результаті утворюються листи або товсті плити.

Текстоліт як наповнювач має бавовняну тканину (бязь, міткаль, штапельне полотно, батист, шифон та ін.), зв'язану формальдегідною смолою. Текстоліт випускають у вигляді листів і товстих плит, стержнів, труб і фасонних виробів. Теплостійкість текстоліту досягає 155°С. З нього виготовляють найважливіші деталі машин: шестерні, вкладиші підшипників, антифрикційні і електроізоляційні деталі, панелі, прокладки та ін. Границя міцності при розтягуванні текстоліту становить близько 65 МПа.

Склотекстоліт. Наповнювачами є склотканини з різним переплетенням. Зв'язуючими є смоли: фенолформальдегідні, кремнійорганічні, епоксидні та ін. Склотекстоліт випускають у вигляді листів і плит завтовшки до 30 мм. Він міцніший за текстоліт, стійкіший проти ударних навантажень, має меншу гігроскопічність і кращу хімічну стійкість і теплостійкість (до 200°С), вищі діелектричні властивості. Склотекстоліт є дуже міцним конструкційним матеріалом, границя міцності якого при розтягу досягає 300 МПа, а також високоякісним електроізоляційним матеріалом.

Азботекстоліт. Наповнювачем є азбестова тканина і азбокартон, просочені резольною фенолформальдегідною смолою. Випускають його у вигляді листів і плит завтовшки до 60 мм. З нього виготовляють деталі гальмових пристроїв, фрикційні диски, деталі механізмів зчеплення, прокладки, що працюють при температурах до 250°С та ін.

Гетинакс. Наповнювачем є аркуші спеціального паперу, просочені резольними смолами і спресовані при температурі 150–160°С і тиску 11–16 МПа. Гетинакс може працювати при температурах від –60 до +70°С. Його випускають у вигляді листів і плит завтовшки до 50 мм, стержнів і трубок. Матеріал має

стабільні діелектричні властивості. Використовують його для виготовлення деталей трансформаторів, радіодеталей, електропанелей та ін.

Деревношаруваті пластики (ДШП) виробляють з тонких листів лущеної деревини (шпону), просочених і склеєних між собою резольними фенолформальдегідними смолами при температурі 150°С і тиску 5 МПа. ДШП випускають у вигляді листів і плит завтовшки 1—60 мм і використовують для виготовлення вкладишів підшипників ковзання, зубчастих колес, в електротехнічних конструкціях та ін.

Газонаповнені полімерні матеріали – це пластмаси з малою густиною (30–300 кг/м^3), які мають багато пор, заповнених газом. Поділяють їх на дві групи: матеріали з ізольованими порами (*пінопласти*) і з порами, що сполучаються (*поропласти, губки*).

Вихідними речовинами для виготовлення легких пластмас є полівінілхлорид, полістирол, фенопласти, епоксидні смоли та ін.

Поро- і пінопласти використують для звукоізоляції, як теплоізоляційний матеріал, для сідінь і спинок, для плавучих засобів і т.ін.

У промисловості починають все ширше використовувати *армовані* газонаповнені пластмаси, що дозволяє поєднувати малу густину з високою міцністю, а також підвищувати питому міцність. Газонаповнені пластмаси армують листами металу або листами більш міцних негазонаповнених пластмас.

11.4. Гума та вироби з неї

Гумами називають еластичні багатокомпонентні матеріали на основі каучуку. Найбільш цінною властивістю гуми є її *еластичність*, тобто здатність до дуже великих зворотних деформацій (середня – 500–800%, максимальна – до 900–1000%) без руйнування за умов незначних зусиль.

Гумотехнічні вироби отримують спеціальною термічною обробкою (вулканізацією) пресованих деталей із сирої гуми, яка є сумішшю каучуку із сіркою

та іншими добавками. Сутність цієї обробки полягає в перетворенні лінійного полімера каучуку на сітчастий полімер гуми під впливом сірки.

Головним вихідним компонентом гуми, який надає їй високих еластичних властивостей, є каучук. Каучуки бувають натуральні (НК) і синтетичні (СК). Натуральний каучук отримують коагуляцією латексу (млечного соку) каучуконосних дерев, які ростуть у Бразилії, Південно-Східній Азії та на Малайському архіпелазі. Синтетичні каучуки (бутадієнові, бутадієнстирольні та інші) одержують методами полімеризації.

Уперше синтез бутадієнового каучуку з етилового спирту було здійснено в 1921 р. Зараз розроблено методи одержання синтетичних каучуків з більш дешевої сировини, наприклад з нафти та ацетилену.

Каучуки є полімерами із лінійною структурою. При вулканізації вони перетворюються на високоеластичні рідкосітчасті матеріали – гуми. Вулканізуючими добавками є сірка та інші речовини. Із збільшенням кількості вулканізатора (сірки) сітчаста структура гуми стає більш частою та менш еластичною. Таким чином, сірка фактично перетворює лінійний полімер каучука на сітчастий під час вулканізації.

При максимальному насиченні сіркою (до 30–50%) отримують тверду гуму – ебоніт, а при насиченні до 10–15% – напівтверду гуму. Зазвичай гума містить 5–8% сірки.

Крім сірки, до складу гуми входять наповнювачі, пластифікатори, протистарителі та барвники (рис. 11.2).

Введення цих компонентів дозволяє істотно змінювати спеціальні властивості гуми та підвищувати її зносо-, морозо-, масло-, бензостійкість. Гумові вироби часто армують тканиною або металевою сіткою. Для поліпшення адгезії металевої арматури до гуми на поверхню метала наносять клеєву плівку.

Гума має високі еластичні властивості (σ_u = 10–60 МПа, δ = 900–1000%), пружність та опір розриву. Крім того, вона має малу густину, високу стійкість проти стирання, високу хімічну стійкість, добрі електроізоляційні властивості.

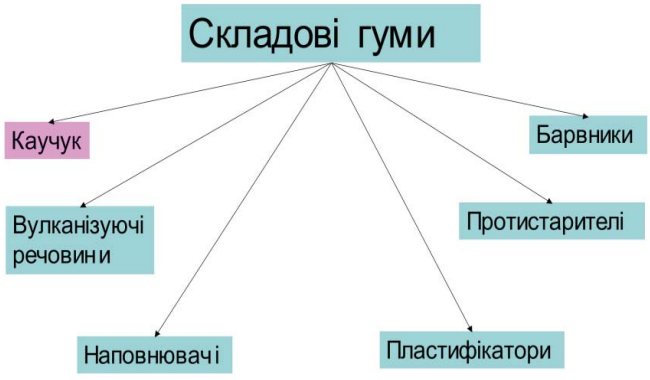


Рис. 11.2. Основні складові гуми

Вулканізуючі речовини (сірка, перекиси марганцю та свинцю) збільшують твердість, міцність і пружність гум.

Наповнювачі (оксид силіцію, оксид титану, крейда та ін.) знижують витрати каучуку та надають певних властивостей.

Пластифікатор (стеаринова кислота) підвищує морозостійкість гуми.

Протистаритель (вазелін, парафін) гальмують процеси старіння гуми під дією зовнішніх впливів.

Сукупність хімічних, фізичних та механічних властивостей дозволяє використовувати гумові матеріали для амортизації, демпфіювання, ущільнення, герметизації, хімічного захисту деталей машин, при виробництві тари для зберігання масла й пального, різних трубопроводів (шлангів), для виготовлення покришок та камер коліс автотранспорту, декоративних виробів.

Залежно від умов експлуатації існують гуми загального і спеціального призначення. Гуми загального призначення використовують для камер і шин, пасів, транспортних стрічок, рукавів, ізоляції кабелів та дротів, виробництва товарів народного споживання і т.ін.

Гуми спеціального призначення поділяють на: бензомаслостійкі, морозостійкі, теплостійкі, стійкі до дії агресивних середовищ. Нижня межа робочих температур морозостійких гум спеціального призначення є температура від –70

до –100°С, а гум загального призначення – від –35 до –50°С. Теплостійкі гуми можуть працювати при температурах 200...300°С.

Можна виділити такі напрями використання технічних гумових виробів:

1) оснащення пристроїв, що рухаються (приводні паси, стрічки транспортерів);
2) подача води, рідкого палива, кислот, мастил, пари і повітря (напірні і всмоктуючі рукави);
3) ущільнення нерухомих і рухомих контактів (сальники, манжети, клапани, мембрани, прокладні кільця, шнури, пластини);
4) амортизація (гумові підвіски, опори, підшипники, амортизатори і буфери);
5) електроізоляція (деталі слабкострумової та високочастотної апаратури, ізоляційні трубки, ізоляційна стрічка і т.ін.);
6) захист хімічної апаратури, виготовлення будівельних конструкцій тощо.

Крім того, гуму широко використують для виготовлення гумового взуття і одягу, а також багатьох побутових предметів.

ГЛАВА 12. НОВІ КОНСТРУКЦІЙНІ МАТЕРІАЛИ

12.1. Композиційні матеріали

Композиційними називають матеріали, до складу яких входять розділені межею конструктивні елементи, властивості яких значно відрізняються від властивостей основи (матриці). Конструктивні складові частини вибирають такими, щоб вони доповнювали один одного, наприклад пластична матриця та міцний, але крихкий наповнювач (зміцнювач).

Властивості композиційних матеріалів зумовлені властивостями та об'ємними частками складових частин, а також міцністю зв'язків між ними:

$$\sigma_к = \sigma_м \cdot V_м + \sigma_н \cdot V_н,$$

де $\sigma_к$, $\sigma_м$, $\sigma_н$ – границі міцності композиту, матриці і наповнювача, відповідно; $V_м$ та $V_н$ – об'ємна частка матриці і наповнювача.

Треба підкреслити, що такі матеріали за питомою міцністю, міцністю при високих температурах, опором руйнуванню від утомленості та за багатьма іншими властивостями значно перевершують всі відомі конструкційні матеріали. Комплекси властивостей, які можуть мати композиційні матеріали, неможливо отримати у традиційних матеріалів. Їх використання дає можливість створювати принципово нові конструкції, що дало можливість зробити якісно новий стрибок у збільшенні потужності і коефіцієнта корисної дії двигунів, зменшенні маси конструкцій і машин і т.ін. За теперішнього часу ця група нових конструкційних матеріалів розвивається дуже швидкими темпами, тому що високі вимоги виникають не тільки до механічних, а і до комплексу фізико-хімічних властивостей.

Розрізняють *природні* і *штучні композити.*

Принцип створення композиційних матеріалів запозичено у природи. Прикладом *природних* композитів є стовбури та стеблини рослин, а також кістки людини і тварин. Так, у стовбурі целюлозні волокна з'єднані пластичним лігніном. Серед металевих матеріалів можна виділити колоніальні бікристалітні евтектич-

ні структури, а також матеріали, що одержують шляхом спрямованої кристалізації сплавів евтектичного типу (так звані СЗЕ-сплави). Властивості таких металевих природних композитів визначаються природою евтектики і не можуть дуже широко змінюватися.

У *штучних* композитах рівень властивостей залежить від добору відповідних компонентів. Властивості штучних композитів можна прогнозувати і розраховувати. Прикладом штучних композитів є залізобетонні будівельні конструкції, вуглепластики та сучасні кордові шини.

Людина використовує композиційні матеріали з давніх давен, спочатку вони лише віддалено нагадували сучасні матеріали. Наприклад, глиняні хатини, зміцнені древесиною або соломою є попередниками сучасних залізобетонних конструкцій. Уже в 500 році до нашої ери в Китаї застосовували такий евтектичний сплав як чавун, з якого виготовляли культовий посуд. У 100 році до н.е. римляни використовували для паяння свинцевих водопровідних труб евтектичний сплав Pb-Sn. У XIV столітті в Європі почалося виробництво чавунних гармат.

Композиційні матеріали складаються з *матриці* (основи) та *наповнювача* (арматури).

Матрицю в композитах поділяють *за природою* на металеву чи неметалеву. Композиційні матеріали можуть мати *металеву* (метали або сплави) або *неметалеву* (полімери, вуглецеві і керамічні матеріали) *матрицю*, що зв'язує композицію й надає їй певної форми. Матриця захищає арматуру композиційного матеріала від механічних пошкоджень та інших впливів зовнішнього середовища. За об'ємом *матриця не* переривається.

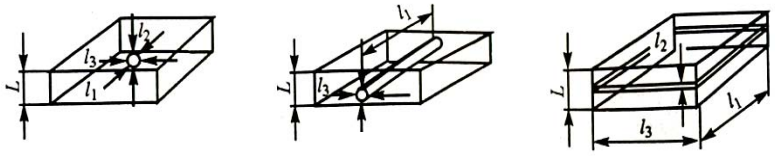
Основним критерієм вибору матеріала матриці є робоча температура експлуатації композита. У цьому плані металеві мають певні переваги:

1) через їхню пластичність вся конструкція набуває необхідної в'язкості, що сприяє швидкому вирівнюванню місцевих механічних навантажень;
2) теплопровідність металевої матриці попереджає локальні перегріви;

3) електропровідність захищає конструкцію від електромагнітного випромінювання, блискавок, знижує небезпечність статичної електрики.

Важливою перевагою металевих матриць є технологічність процесів їхнього виготовлення, термічної обробки, формування з'єднань та ін. Для матриці найчастіше використовують легкі метали: алюмній, магній, титан. Основним недоліком є висока вартість, яка перевищує вартість полімерної матриці в декілька разів.

У матриці рівномірно розподіляється *наповнювач (арматура)*, який відіграє роль *зміцнювача*. Це компонент, який є *переривчастим* за об'ємом. Наповнювачами можуть бути ниткоподібні кристали, волокна або порошки різних матеріалів. За розміром їх поділяють на (рис. 12,1): нуль-мірні (порошки), одномірні (волокна, стрічки, сітки) та двовимірні (пластини).



а *б* *в*

Рис. 12.1. Види наповнювачів (зміцнювачів): нуль-мірні (*а*), одномірні (*б*) та двовимірні (*в*)

Існують три основні схеми армування КМ (рис. 12.2): лінійна (одноосьова), площинна (двохосьова) та об'ємна (трьохосьова).

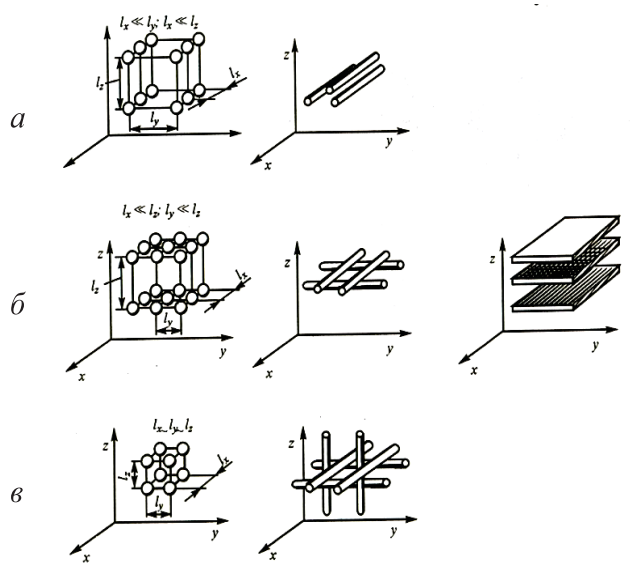


Рис. 12.2. Схеми армування композитів: *а* – лінійна (одноосьова), *б* – площинна (двохосьова), *в* – об'ємна (трьохосьова)

У лінійній схемі армування (рис. 12.2,*б*) використовують нуль-мірні (порошки) та одномірні (волокна) зміцнювачі. При цьому нуль-мірні розташовуються так, щоб відстань за однією віссю (наприклад *x*) була значно менше, ніж між іншими двома (*y*, *z*). Одномірні зміцнювачі при такій схемі армування повинні розташовуватися паралельно один одному. Вміст наповнювача (зміцнювача) становить 1–3%. При площинній схемі армування використовують нуль-мірні, одномірні та двовимірні зміцнювачі. За такої схеми нуль-мірні та одномірні розташовуються в паралельних площинах. У межах площини лінійна відстань між елементами менше, ніж між площинами. Вміст наповнювача становить 15–16%.

Об'ємна схема армування не передбачає переважаючого напрямку у розподілі зміцнювача. При цьому використовують нуль-мірні та одномірні зміцнювачі (рис. 12.2,*в*).

Як матриці, так і наповнювачі можуть комбінуватися.

12.2. Порошкові матеріали

Порошковими називають матеріали, які виготовляють шляхом пресування металевих порошків у вироби необхідної форми й розмірів і наступного спікання сформованих виробів у вакуумі чи захисній атмосфері при температурі 0,75-0,8 $T_{пл}$.

Можливість реалізації комплексу специфічних властивостей, технологічні переваги виготовлення виробів зумовили розробку багатьох груп порошкових конструкційних та інструментальних матеріалів.

Методи порошкової металургії дають можливість створювати принципово нові матеріали, які складно, а іноді і неможливо одержати іншими способами. Цими методами можна одержувати багатошарові композиції, різні комбінації металевих і неметалевих компонентів, пористі матеріали із широким діапазоном контрольованої пористості, просочувати маслом антифрикційні порошкові втулки для роботи в режимі самозмазування та ін.

Порошкова металургія дає можливість знизити до мінімуму відходи метала у стружку, знизити трудомісткість виробництва, використовувати металеві відходи, вторинну сировину (тим самим підвищуючи відсоток годного метала) та спрощувати технологію виготовлення виробів.

Основним недоліком є неможливість мати міцність порошкових матеріалів на рівні литих через наявність пористості, навіть мінімальної.

Розмір частинок порошків зазвичай становить 0,1 мкм – 0,1 мм. Більш крупні фракції називають гранулами, а дрібніші – пудрою.

Технологічний процес виготовлення виробів із порошків включає:

- отримання порошків;
- підготовку шихти (змішування порошків);
- формування виробів шляхом пресування або штамповки;
- спікання;
- додаткові обробки (просочування маслом, різними мастилами, термічна обробка, хіміко-термічна обробка, калібровка, обробка різанням).

Металічні порошки одержують фізико-механічними або хіміко-металургійними способами (рис. 12.3).

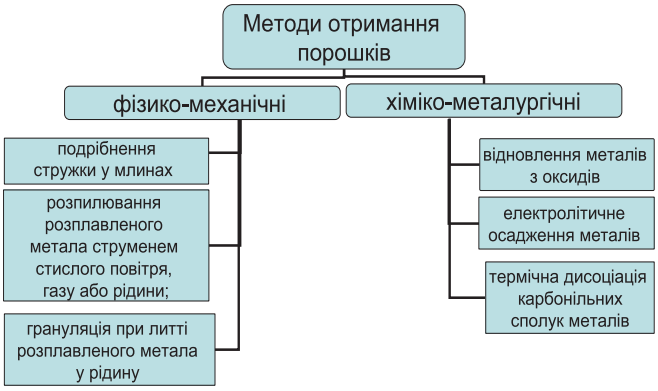


Рис. 12.3. Методи одержання порошків

В основі *фізико-механічних* способів лежать методи механічного подрібнення металів у твердому і рідкому станах:

- подрібнення та розмел стружки у млинах;
- розпилювання розплавленого метала струменем стислого повітря, газу або рідини;
- грануляція при литті розплавленого метала в рідину та ін.

До *хіміко-металургійних* способів відносять способи, засновані на хімічних реакціях різного типу:

- відновлення металів із оксидів;
- електролітичне осадження металів з водних розчинів солей;
- термічна дисоціація карбонільних сполук металів.

Під час формування виробам надають форму і розміри готових деталей. При цьому процес пресування здійснюють або за розміром виробу, або встановлюють сталу величину тиску, після чого їх спікають протягом 0,5–1,5 год у захисній атмосфері або у вакуумі за температури, яка складає *дві третини від температури*

плавлення найбільш *тугоплавкого* компонента (для запобігання крізного окиснення через пористість).

Розрізняють *пористі, напівщільні* та *щільні (компактні)* порошкові матеріали. *Пористими* називають матеріали, в яких після остаточної обробки зберігається більше 20% залишкової пористості. Ці матеріали використовують для виготовлення головним чином антифрикційних деталей (втулок, підшипників) та фільтрів, де залишкова пористість відіграє позитивну роль. Ступінь щільності впливає на механічні властивості матеріалів (табл. 12.1).

Таблиця 12.1

Вплив ступеня пористості на міцність порошкових матеріалів

Ступінь щільності виробів	Пористість, %	$\sigma_в$ (при розтягуванні), МПа
Пористі	20–36	80–160
Напівщільні	10–17	170–240
Щільні	4–10	240–300

Антифрикційні порошкові матеріали мають низький коефіцієнт тертя й високу зносостійкість, легко припрацьовуються, а, крім того, можуть працювати в режимі самозмазування.

Підшипники виготовляють із:

1) *залізографіту* марок ЖГр1, ЖГр3, ЖГр7 (цифра показує відсоток графіту в суміші), які складаються із сплавів заліза та 1–7% графіту;
2) *бронзографіту,* що містить 8–10% олова і 2–4% графіту марок БрОГр10-2, БрОГр8-4 та ін.

Додавання до залізографітових матеріалів до 1 % сірки або сульфідів, які утворюють сульфідні плівки на поверхнях тертя, покращує припрацьовуваність, зменшує знос. Ступінь пористості в таких матеріалах складає 25–30%.

Після пресування і спікання антифрикційні втулки просочують у гарячому маслі або використовують вакуум для підвищення ступеня просочуваності. При

подальшій роботі в умовах тертя втулка нагрівається, масло розширюється і виходить на поверхню тонким рівномірним шаром. Такі втулки встановлюють у важкодоступних місцях, в обладнанні процесів, де неможливо потрапляння масла (харчові технології, фармацевтичні та ін.).

Спечені матеріали на основі заліза й міді використовують також для *фрикційних* виробів (дисків, сегментів, колодок) у гальмових та передаточних вузлах. Для підвищення коефіцієнта тертя до складу фрикційних матеріалів додають карбіди кремнію, бору, тугоплавкі оксиди та ін. Компонентами твердого мастильного матеріалу є графіт, свинець, сульфіди тощо. Для роботи в умовах тертя без мастильного матеріалу (гальмові накладки тракторів, автомобілів тощо) застосовують матеріали на основі заліза, наприклад матеріал ФМК-11 (15% міді, 9% графіту, 3% азбесту, 3% піску, 6% бариту). Фрикційні матеріали виготовляють у вигляді тонких секторів, які кріплять до стальної основи.

Ступінь пористості фрикційних елементів повинен бути мінімальним.

Широко використовують порошкові матеріали для різноманітних *фільтрів.* Звичайно для їх виготовлення використовують тканини, волок, кераміку. Їх основні недоліки – низька стійкість проти корозії і низька міцність, вони не витримують перепадів тиску і важко піддаються регенерації – це залізо, нікель, титан, алюміній, корозієстійкі сталі, бронзи та інші матеріали з пористістю 45–50% для очищення рідин та газів від твердих домішок. Значні перспективи мають порошкові титанові фільтри, де припустима пористість за необхідної міцності досягає 65%. Ці матеріали легко регенеруються і при цьому майже повністю відновлюють свої вихідні властивості.

Особливістю процесу виготовлення таких фільтрів є те, що фільтри малих розмірів виготовляють спіканням вільно насипаного порошку, а великі – пресуванням і спіканням суміші.

Унаслідок високої пористості такі фільтри мають добру проникність для рідин і газів за достатньо тонкої фільтрації до 30 мкм, а титанові до 4–20 мкм.

Порошкові сплави на основі хрому (Х68Н32, Х66Н3Т4 та ін.) використовують для *зварювальних електродів*, призначених для зварювання високолегованих сталей, тому що вони забезпечують високу якість зварного шва, підвищують швидкість зварювання та знижують сумарні витрати на зварювальні роботи.

За останніх років інтенсивно розвивається використання *гранульованих матеріалів*, які виробляють шляхом високошвидкісного (10^3–10^6 К/с) охолодження розплавів. Від порошкових такі матеріали відрізняються більшим розміром часток, який може досягати кількох міліметрів. Прикладом використання таких матеріалів може бути виготовлення з гранульованого силуміну поршнів для тракторних двигунів внутрішнього згоряння та інших деталей.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. Большаков В.І., Береза О.Ю., Міронова О.Ю., Харченко В.І. (1998). Матеріалознавство: підручник для вищих технічних закладів освіти. Бразіліан Пресс. Канада. 216 с.
2. Большаков В.І., Береза О.Ю., Харченко В.І. (2000). Прикладне матеріалознавство: під-ручник. Дніпропетровськ: РВА "Дніпро-VAL". 290 с.
3. Большаков В.І., Лук'янськова А.М., Котова Л.І. (1993). Основи виробництва конструкцій-них матеріалів та матеріалознавство: навчальний посібник. Київ: Вид. УМК ВО. 237 с.
4. Булгаков В.М. (2007). Інженерна механіка. Вінниця: "Нова книга". 502 с.
5. Булгаков В.М. (2007). Теоретична механіка. Ніжин: "MILANIR". 368 с.
6. Булгаков В.М., Черниш О.М., Адамчук В.В., Березовий М.Г., Яременко В.В. (2015). Теорія механізмів і машин: підручник. Київ: Вид. ЦП Компринт. 547 с.
7. Глонь О.А. (1997). Основи теоретичної механіки. Київ: Вид. ВКЦ "Софія". 144 с.
8. Гурідова В.О., Швайко В.М. (2016). Лабораторний практикум з теорії механізмів і машин. Дніпро: Вид. ДДАЕУ. 96 с.
9. Дем'яненко А.Г., Кагадій С.В., Гурідова В.О. (2017). Лабораторний практикум з опору матеріалів та будівельної механіки. Дніпро: Вид. ДДАЕУ. 122 с.
10. Єременко О.І. (2003). Теорія механізмів і машин. Київ: Вид. НАУ. 164 с.
11. Кагадій С.В. (2005). Будівельна механіка найпростіших стержньових систем. Дніпропетровськ: РВВ ДДАУ. 165 с.
12. Кагадій С.В., Дем'яненко А.Г., Гурідова В.О. (2011). Основи механіки матеріалів і конструкцій. Дніпропетровськ: "Свідлер А. Л.". 416 с.
13. Кагадій С.В., Дем'яненко А.Г., Науменко М.М., Гурідова В.О. (2015). Основи теорії коливань в інженерній справі та втомна міцність. Дніпропетровськ: "Свідлер А.Л.". 204 с.
14. Калетник Г.М., Булгаков В.М., Черниш О.М., Кравченко І.Є., Солона О.В., Цуркан О.В. (2011). Технічна механіка. Київ: "Хай-Тек Прес". 339 с.
15. Кіницький Я.Т. (2002). Теорія механізмів і машин. Київ: "Наукова думка". 662 с.
16. Кожевников С.Н. (1973). Теория механизмов и машин. М.: "Машиностроение". 592 с.
17. Кореняко О.С. (1987). Теорія механізмів і машин. За ред. М.К. Афанасьева. Київ: "Вища школа". 206 с.
18. Корнілов О.А. (2003). Опір матеріалів. Київ: Логос. 551 с.
19. Литвинов О.І., Михайлович Я.М., Бойко А.В., Березовий М.Г. (2013). Теоретична механіка. Статика, кінематика. Ч.1. Київ: "Агроосвіта". 575 с.

20. Мошинський С.І., Примак О.П., Гуртовий О.Г. (2009). Задачі та приклади з опору матеріалів: навчальний посібник. Київ: “Освіта України”. 400 с.
21. Нахайчук В.Г., Матвійчук В.А., Чернілевський Д.В. (1992). Технічна механіка. Опір матеріалів. Кн. 2. Київ: Вид-во НМК ВО. 271 с.
22. Павловський М.А. (2004). Теоретична механіка. Київ: Техніка. 510 с.
23. Панов С.Л., Лукавенко В.П., Кіницький Я.Т., Дубинець О.І., Чернілевський Д.В. (2001). Основи курсу теорії машин і механізмів: навчальний посібник. За ред. С.Л. Панова. Київ: Вид. ВДК КІТ. 357 с.
24. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. (1993). Опір матеріалів. Київ: “Вища школа”. 658 с.
25. Піскунов В.Г. (1994). Опір матеріалів з основами теорії пружності і пластичності. Київ: “Вища школа”. 327 с.
26. Попов С.В., Бучинський М.Я., Гнітько С.М., Чернявський А.М. (2019). Теорія механізмів технологічних машин: підручник. Харків: Вид. НТМТ. 268 с.
27. Посацький С.Л. (1973). Опір матеріалів. Львів: Вид-во ЛДУ. 402 с.
28. Солона О.В., Вірник М.М. (2012). Теорія механізмів і машин. Курсове проектування: навчальний посібник. Вінниця: ПП Балюк І.Б. 224 с.
29. Таран Ю.М., Калінушкін Є.П., Куцова В.З., Погребна Н.Е., Спірідонова І.М., Хохлова Т.С., Носко О.А. (2002). Металознавство і термічна обробка металів і сплавів із застосуванням комп’ютерних технологій навчання: підручник. За ред. Ю.М. Тарана. Київ. 360 с.
30. Чернілевський Д.В., Панов С.Л. (1992). Технічна механіка. Основи теорії машин та механізмів. Кн. 3. Київ: Вид. НМК ВО. 168 с.
31. Цурпал І.А. (2005). Механіка матеріалів і конструкцій. Київ: Вища освіта. 367 с.
32. Karnovsky I.A. (2016). Theory of Vibration Protection. Springer. 674 p.

ЗМІСТ

Передмова 5

Частина І. Теоретична механіка 11

Глава 1. Статика 14

1.1. Предмет і задачі статики 14
1.2. Сили і системи сил. Аксіоми статики 15
1.3. Типи в'язей та їх реакції 17
1.4. Класифікація сил і систем сил 20
1.5. Система збіжних сил. Умови рівноваги 21
1.6. Система паралельних сил. Пара сил 24
1.7. Момент сили відносно точки та відносно осі 28
1.8. Довільна система сил 32
1.9. Рівновага при наявності сил тертя 37
1.10. Центр ваги 40

Глава 2. Кінематика 45

2.1. Предмет і задачі кінематики 45
2.2. Кінематика точки. Векторний спосіб визначення руху точки 45
2.3. Координатний спосіб визначення руху точки 47
2.4. Натуральний спосіб визначення руху точки 50
2.5. Рівнозмінний та рівномірний рух точки 56
2.6. Кінематика твердого тіла. Поступальний рух твердого тіла 57
2.7. Обертання тіла навколо нерухомої осі 58
2.8. Рівномірне і рівнозмінне обертання тіла навколо осі 60
2.9. Швидкість точок тіла, що обертається навколо осі. Формула Ейлера 61
2.10. Прискорення точок тіла, що обертається 63
2.11. Плоско-паралельний рух твердого тіла 65
2.12. Визначення швидкостей точок плоскої фігури 67
2.13. Прискорення точок плоскої фігури 72
2.14. Складний рух точки 76
2.15. Абсолютна швидкість точки у складному русі 78
2.16. Абсолютне прискорення точки у складному русі 80
2.17. Прискорення Коріоліса 82

Глава 3. Динаміка 84

3.1. Предмет і задачі динаміки 84
3.2. Прямолінійні коливання точки. Вільні коливання 87
3.3. Затухаючи коливання точки 91
3.4. Вимушені коливання точки при відсутності опору середовища 94
3.5. Вимушені коливання точки при наявності опору середовища 97
3.6. Аналогії між коливальними процесами різної фізичної природи 99
3.7. Дві міри механічного руху. Загальні теореми динамки 102

3.8. Теореми про зміну кінетичної енергії точки та системи 104
3.9. Робота сили. Потужність 107
3.10. Кінетична енергія твердого тіла 111
3.11. Моменти інерції 113
3.12. Теореми про зміну кількості руху точки та системи. Закон збереження кількості руху 120
3.13. Теорема про зміну момента кількості руху точки та системи 124
3.14. Кінетичний момент тіла, що обертається навколо осі 126
3.15. Диференціальне рівняння обертального руху тіла навколо осі 127
3.16. Теорема про рух центра мас системи 128

Глава 4. Принципи механіки 132

4.1. Принцип Даламбера 133
4.2. Класифікація в'язей 135
4.3. Можливі переміщення. Ідеальні в'язі 137
4.4. Принцип можливих переміщень. Загальне рівняння статики 138
4.5. Принцип Даламбера-Лагранжа. Загальне рівняння динаміки 139
4.6. Диференціальне рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа II роду) 140

Частина II. Механіка матеріалів і конструкцій 146

Глава 1. Основні поняття, визначення та гіпотези 146

1.1. Історія науки про міцність та її перспективи 149
1.2. Сили, деформації та їх види 151
1.3. Основні гіпотези ММК 153
1.4. Реальний об'єкт та його розрахункова схема 155
1.5. Внутрішні сили в перерізах стержня та їх визначення. Метод перерізів 158
1.6. Поняття про напруження та деформації в точці. Тензори напружень та деформацій 161

Глава 2. Осьовий розтяг і стиск. Розрахунки елементів конструкцій і деталей машин на міцність та жорсткість 164

2.1. Поздовжні сили та їх визначення. Епюри поздовжніх сил 164
2.2. Напруження в поперечних перерізах стержня за осьового розтягу–стиску та їх визначення 166
2.3. Умова міцності стержня за нормальними напруженнями. Два типи (три види) розрахунків елементів конструкцій та деталей машин на міцність 169
2.4. Напруження в нахилених (скісних) перерізах стержня 171
2.5. Деформації стержня та їх визначення. Закон Гука 173
2.6. Визначення механічних характеристик матеріалів. Діаграми розтягу і стиску 176
2.7. Статично невизначені стержньові конструкції та їх розрахунки 182
2.8. Монтажні деформації та напруження 190
2.9. Температурні деформації і напруження та їх визначення 192

2.10. Напруження і деформації з урахуванням власної ваги стержня та їх визначення ... 194
2.11. Перевірка міцності елементів та деталей машин за гранично допустимими навантаженнями ... 198
2.12. Напружено-деформований стан у точці та його види ... 203
2.13. Аналіз плоского напруженого стану. Визначення нормальних та дотичних напружень на довільних площадках. Закон парності дотичних напружень ... 205
2.14. Головні нормальні напруження та їх визначення ... 208
2.15. Екстремальні дотичні напруження та їх визначення ... 210
2.16. Графічне дослідження плоского напруженого стану в точці за допомогою круга Мора ... 211
2.17. Об'ємний напружений стан у точці та його аналіз ... 214
2.18 Деформований стан у точці та його аналіз. Узагальнений закон Гука ... 217
2.19. Чистий зсув. Закон Гука за чистого зсуву ... 222
2.20. Розрахунки на міцність деяких елементів та деталей машин, які працюють в умовах зсуву ... 225
2.21. Класичні теорії міцності ... 229

Глава 3. Кручення. Розрахунки валів сільськогосподарських машин на міцність та жорсткість ... 244

3.1. Крутні моменти та їх визначення. Епюри крутних моментів ... 244
3.2. Напруження та деформації при крученні стержня з круглим поперечним перерізом ... 246
3.3. Умова міцності вала за дотичними напруженнями. Два типи (три види) розрахунків валів на міцність ... 252
3.4. Умова жорсткості вала. Два типи (три види) розрахунків валів на жорсткість ... 254
3.5. Залежність між крутним моментом, потужністю, яку передає вал, та його кутовою швидкістю ... 256
3.6. Статично невизначені вали та їх розрахунки ... 258
3.7. Гвинтові циліндричні пружини з малим кроком витків та їх розрахунки ... 262

Глава 4. Геометричні характеристики плоских перерізів ... 271

4.1. Статичні моменти площі та моменти інерції плоских фігур ... 272
4.2. Моменти інерції простих фігур ... 277
4.3. Залежність між моментами інерції плоскої фігури відносно паралельних осей ... 279
4.4. Залежність між моментами інерції при повороті осей ... 281
4.5. Головні осі інерції, головні моменти інерції плоского перерізу та їх визначення ... 282

Глава 5. Плоский поперечний згин. Розрахунки на міцність та жорсткість балок та рам 291

5.1. Внутрішні силові фактори у поперечних перерізах балок за плоского згину та їх визначення. Правила знаків Q і M. 292
5.2. Диференціальні залежності між згинальним моментом M, поперечною силою Q та інтенсивністю розподіленого навантаження q 294
5.3. Епюри поперечних сил і згинальних моментів та їх побудова 295
5.4. Правила контролю епюр поперечних сил Q та згинальних моментів M 301
5.5. Нормальні напруження у поперечних перерізах балки за чистого згину та їх визначення 312
5.6. Умова міцності балки за нормальними напруженнями. Два типи (три види) розрахунків балок на міцність 318
5.7. Дотичні напруження у поперечних перерізах балки та їх визначення. Умова міцності балки за дотичними напруженнями 322
5.8. Перевірка міцності балки за головними напруженнями 331
5.9. Деформації балок при згині та їх визначення. Повне та наближене диференціальні рівняння зігнутої осі балки 342
5.10. Метод початкових параметрів визначення деформацій балок. Універсальні рівняння зігнутої осі балки 354
5.11. Балки змінного поперечного перерізу. Розрахунок автомобільних ресор 363
5.12. Балки ступінчастого поперечного перерізу та їх розрахунки графоаналітичним методом 368

Глава 6. Складний опір. Розрахунки на міцність та жорсткість елементів конструкцій та деталей машин сільськогосподарського призначення 372

6.1. Складний та косий згини 373
6.2. Позацентровий розтяг-стиск прямого стояка 377
6.3. Сумісна дія згину і кручення. Розрахунки валів круглого поперечного перерізу на міцність за сумісної дії згину і кручення 380
6.4. Криві стержні та їх розрахунки 389
6.5. Потенціальна енергія деформації пружної системи. Енергетичні методи визначення деформацій у пружних стержньових системах 396
6.6. Теорема Кастіліано 400
6.7. Метод введення додаткової (фіктивної) сили 404
6.8. Інтеграли Мора та спосіб Верещагіна 406
6.9. Статично невизначені стержньові системи. Розрахунок статично невизначених рам методом сил 410

Глава 7. Стійкість стиснутих елементів конструкцій та деталей машин 418

7.1. Поняття про стійкий та нестійкий стан пружної рівноваги 419
7.2. Критична сила для стиснутого стержня та її визначення. Формула Ейлера 421
7.3. Вплив умов закріплення стержня на величину критичної сили 424
7.4. Межа застосування формули Ейлера 428

7.5. Розрахунки стержнів на стійкість за межею придатності закона Гука та формули Ейлера 430
7.6. Практичні методи розрахунків стиснутих стержнів на стійкість 431
7.7. Поздовжнє згинання стиснутого стержня за наявності ексцентриситету 440

Частина III. Теорія машин і механізмів 443

Глава 1. Вступ. Предмет ТММ 443

1.1. Зміст курсу і методи теорії механізмів і машин 443
1.2. Загальні поняття теорії механізмів і машин. 445

Глава 2. Структурний аналіз механізмів 446

2.1. Кінематичні пари та їх класифікація 446
2.2. Кінематичні ланцюги і з'єднання 450
2.3. Механізм як замкнений кінематичний ланцюг 452
2.4. Структурний аналіз і класифікація плоских механізмів. 454

Глава 3. Кінематичний аналіз механізмів 459

3.1. Побудова планів положень механізмів 459
3.2. Побудова траєкторій точок механізмів 461
3.3. Кінематичні діаграми. Побудова діаграми переміщень 461
3.4. Діаграми швидкостей і прискорень 463
3.5. Визначення швидкостей і прискорень механізму I класу 464
3.6. План швидкостей групи II класу 1 типу 466
3.7. Теорема подібності для планів швидкостей 467
3.8. Побудова плану прискорень двоповодкової групи 1 типу. 468
3.9. Теорема подібності для планів прискорень 469
3.10. Плани швидкостей і прискорень груп II класу 2 типу 470

Глава 4. Тертя в механізмах і машинах 473

4.1. Сухе тертя ковзання тіл 474
4.2. Тертя поступальної кінематичної пари 476
4.3. Тертя клинчастого повзуна 478
4.4. Тертя обертальної кінематичної пари 479
4.5. Тертя ковзання змащених тіл 480
4.6. Тертя кочення 481

Глава 5. Динаміка машин 483

5.1. Сили, які діють у машинах 483
5.2. Механічні характеристики машин 484
5.3. Кінетична енергія механізму і машини. Зведення мас в механізмах 486
5.4. Зведення сил у механізмах 489
5.5. Рівняння руху машини 490
5.6. Дослідження руху машини. Стадії руху 493
5.7. Коефіцієнт корисної дії машини 496
5.8. Регулювання ходу машин 498

Частина IV. Матеріалознавство 504

Глава 1. Основні групи матеріалів та їх класифікація 504

1.1. Предмет і задачі матеріалознавства 504
1.2. Основні групи матеріалів та напрямки їх використання в агропромисловому виробництві 505
1.3. Загальна класифікація матеріалів 507
1.4. Основні фізико-хімічні, механічні і технологічні властивості матеріалів та їх значення 510
1.5. Основи раціонального вибору матеріалів 517

Глава 2. Атомно-кристалічна будова металів 519

2.1. Металевий тип міжатомного зв'язку і його вплив на властивості 519
2.2. Типи кристалічних решіток в металах 519
2.3. Анізотропія кристалів 521
2.4. Поліморфізм 522
2.5. Види дефектів кристалічної структури та їх вплив на механічні властивості 524
2.6. Кристалізація металів і способи подрібнення зерна 529

Глава 3. Основи теорії сплавів 533

3.1. Основні типи фаз в сплавах та їх властивості 533
3.2. Основні типи діаграм стану подвійних сплавів 537
3.3. Діаграма стану залізо-вуглець 539

Глава 4. Основи теорії термічної обробки 547

4.1. Перетворення в сталі при нагріванні 548
4.2. Характеристика діаграми ізотермічного перетворення аустеніту 550
4.3. Перетворення при відпусканні загартованої сталі 554

Глава 5. Основи технології термічної обробки 556

5.1. Відпал I та II роду 556
5.2. Нормалізація сталі 559
5.3. Гартування сталі 559
5.4. Обробка сталі холодом 567
5.5. Характеристика й призначення основних видів відпуску 567

Глава 6. Поверхневе зміцнення 569

6.1. Поверхневе гартування 569
6.2. Основи хіміко-термічної обробки 572
6.3. Використання наклепу для зміцнення робочих поверхонь 578

Глава 7. Конструкцйні та інструментальні сталі 580

7.1. Вплив вуглецю й домішок на властивості сталі 580
7.2. Класифікація сталей 586
7.3. Конструкційні вуглецеві сталі 589
7.4. Інструментальні вуглецеві сталі 592

7.5. Переваги і недоліки вуглецевих сталей ... 593
7.6. Класифікація легованих сталей ... 593
7.7. Конструкційні леговані сталі ... 597
7.8. Інструментальні леговані сталі ... 601

Глава 8. Спеціальні сталі і сплави ... 609

8.1. Автоматні сталі ... 609
8.2. Ливарні сталі ... 611
8.3. Кулькопідшипникові сталі ... 612
8.4. Нержавіючі сталі ... 615
8.5. Зносостійкі сталі ... 619
8.6. Жароміцні та жаростійкі сталі і сплави ... 621
8.7. Магнітні сталі і сплави ... 624

Глава 9. Чавуни ... 628

9.1. Класифікація чавунів за мікроструктурою ... 630
9.2. Вплив хімічного складу і швидкості охолодження на структуру чавуну ... 634
9.3. Модифікування чавунів ... 636
9.4. Структура і властивості сірих чавунів ... 637
9.5. Виробництво ковкого чавуну і його використання ... 639
9.6. Високоміцний модифікований чавун – перспективний конструкційний матеріал ... 643
9.7. Чавун з вермикулярним графітом ... 644
9.8. Спеціальні чавуни ... 646
9.9. Термічна обробка чавунів ... 647

Глава 10. Кольорові метали і сплави ... 650

10.1. Особливості властивостей кольорових сплавів ... 650
10.2. Класифікація кольорових сплавів ... 652
10.3. Характеристика й використання алюмінієвих сплавів ... 655
10.4. Мідь та її сплави ... 661
10.5. Перспективи використання титанових сплавів ... 666
10.6. Характеристика й призначення магнієвих сплавів ... 669
10.7. Характеристика й призначення бабітів ... 671

Глава 11. Неметалеві конструкційні матеріали ... 673

11.1. Властивості пластмас ... 673
11.2. Основні складові частини пластмас ... 674
11.3. Типи пластмас та їх застосування ... 677
11.4. Гума та вироби з неї ... 684

Глава 12. Нові конструкційні матеріали ... 688

12.1. Композиційні матеріали ... 688
12.2. Порошкові матеріали ... 692

Бібліографічні посилання ... 697

CONTENTS

Foreword 5

Part I. Theoretical mechanics 11

Chapter 1. Statics 14

1.1. Subject and problems of statics 14
1.2. Forces and systems of forces. Axioms of statics 15
1.3. Constraints and their reactions 17
1.4. Classification of forces and force systems 20
1.5. System of converging forces. Equilibrium equations 21
1.6. The system of parallel forces. A pair of forces 24
1.7. Moment of force relative to a point and relative to an axis 28
1.8. Arbitrary system of forces 32
1.9. Equilibrium in the presence of friction forces 37
1.10. Center of gravity 40

Chapter 2. Kinematics 45

2.1. Subjects and problems of kinematics 45
2.2. Kinematics of a point. Vector way to define the motion of a point 45
2.3. Coordinate method of determining the motion of a point 47
2.4. A natural way to define the motion of a point 50
2.5. Uniformly accelerated and uniform motions of a point 56
2.6. Kinematics of a solid body. Translational motion of a solid body 57
2.7. Rotation of a solid body around a fixed axis 58
2.8. Uniformly accelerated and uniform rotation of a solid body around a fixed axis 60
2.9. The velocity of points of a solid body rotating around a fixed axis. Euler's formula 61
2.10. Accelerations of points of a rotating body 63
2.11. Parallel-plane motion of a rigid body 65
2.12. Evaluation of velocity of points of a flat body 67
2.13. Acceleration of points of a flat body 72
2.14. Complex motion of a point 76
2.15. Absolute velocity of a point in its complex motion 78
2.16. Absolute acceleration of a point in its complex motion 80
2.17. Coriolis acceleration 82

Chapter 3. Dynamics 84

3.1. Subject and problems of dynamics 84
3.2. Rectilinear oscillations of a point. Natural oscillations 87
3.3. Damped oscillations of a point 91
3.4. Forced oscillations of a point in the absence of the resistance of environment 94
3.5. Forced oscillations of a point in the presence of the resistance of environment 97
3.6. Analogies between oscillations of different physical systems 99

3.7. Two measures of mechanical motion. General theorems of dynamics 102
3.8. Theorems about kinetic energy of a point and of a system 104
3.9. The work of force. Power 107
3.10. Kinetic energy of a solid body 111
3.11. Moments of inertia 113
3.12. Momentum theorem of a point and of a system. The law of conservation of impulse ... 120
3.13. Theorems about motion momentum of a point and of a system 124
3.14. Kinetic momentum of a rigid body rotating around a fixed axis 126
3.15. Differential equation of rotational motion of a rigid body around a fixed axis 127
3.16. The theorem about motion of the center of mass of a system 128

Chapter 4. Principles of mechanics 132

4.1. D'Alembert's principle 133
4.2. Classification of elms 135
4.3. Virtual displacements. Ideal constraints 137
4.4. The principle of virtual displacements. General equation of statics 138
4.5. D'Alembert-Lagrange principle. General equation of dynamics 139
4.6. Differential equation of motion of a mechanical system in generalized coordinates (Lagrange equation of the second kind) 140

Part II. Mechanics of materials and structures 146

Chapter I. Basic concepts, definitions and hypotheses 146

1.1. History of the science of strength and its prospects 149
1.2. Forces, strain and their types 151
1.3. The main hypotheses of MMK 153
1.4. The real object and its calculation scheme 155
1.5. Internal forces in the cross sections of the rod and their definition Method of sections 158
1.6. The concept of stress and strain at a point. Stress and strain tensors 161

Chapter 2. Axial tension and compression. Calculations of structural elements and machine parts for strength and rigidity 164

2.1. Longitudinal forces and their definitions. Plots longitudinal forces 164
2.2. Stress in the cross sections of the rod for axial tension-compression and their definition 166
2.3. Condition of rod strength by the normal stresses. Two types and three kinds of calculations of structural elements and machine parts for strength 169
2.4. Stress in inclined (oblique) sections of the rod 171
2.5. Rod deformations and their definition. Hook's law 173
2.6. Determination of mechanical characteristics of materials. Tension and compression diagrams 176
2.7. Statically indeterminate rod structures and their analysis 182
2.8. Mounting deformations and stresses 190

2.9. Thermal strain and stresses and their determining 192
2.10. Stresses and strains for own weight of a rod and their determining 194
2.11. Strength estimating of elements and parts of machines at the maximum allowable loads 198
2.12. Stress-strain state at a point and its types 203
2.13. Analysis of the plane stress state. Evaluation of normal and tangential stresses at arbitrary. Law of twoness of tangential stresses 205
2.14. The main normal stresses and their estimation 208
2.15. Extreme tangential stresses and their estimation 210
2.16. Graphic study of flat stress state at a point by using of Mohr's circle 211
2.17. Volume stress-state at a point and its analysis 214
2.18. Strain-state at a point and its analysis. Generalized Hooke's law 217
2.19. Pure shear. Hooke's law of shear. Dependence between the elastic characteristics E and G 222
2.20. Calculations for the strength of some elements and parts of machines that operate under shear conditions 225
2.21. Classical theories of strength 229

Chapter 3. Torsion. Estimation of strength and rigidity of shafts of agricultural machines 244

3.1. Torques and their estimation. Plot torsional moments 244
3.2. Stresses and strains during torsion of shafts with a circle cross-section 246
3.3. Shaft strength conditions by tangential stresses. Two types and three kinds of estimation approaches to strength of a shaft 252
3.4. Conditions of stiffness of shaft. Two types and three kinds of estimation approaches to stiffness of a shaft 254
3.5. Dependence between torque and power, transmitted by the shaft, and its angular velocity 256
3.6. Statically indeterminate shafts and their calculations 258
3.7. Coil springs with a small step and estimation of their strength 262

Chapter 4. Geometric characteristics of plane sections 271

4.1. Static moments of area and moments of inertia plane sections 272
4.2. Moments of inertia of simple figures 277
4.3. Dependence between the moments of inertia of plane sections in relation to parallel axes 279
4.4. Dependence between moments of inertia in relation to rotated axes 281
4.5. The general axes of inertia, the general moment of inertia of a plane section and their estimation 282

Chapter 5. Uniplanar bending. Estimation of strength and stiffness for beams and frames 291

5.1. Internal force factors in cross sections of beams with uniplanar bending and their estimation. Rules of signs for Q and M. 292

5.2. Differential dependences between bending moment M, the shear force Q and the intensity of the distributed load q 294
5.3. Plots of shear forces and bending moments and their building-up 295
5.4. Rules for controlling the plots of shear forces Q and bending moments M 301
5.5 Normal stresses in cross sections of beams for pure bending and their estimation 312
5.6. Condition of beam strength by the normal stresses.Two types and three kinds of estimation approaches to the analysis of the strength of a beam 318
5.7. Tangential stresses in the cross sections of the beam and their estimation. Conditions of strength of a beam by shear stresses 322
5.8. Estimation of the strength of a beam by its principal stresses 331
5.9. Strains of beams during bending and their estimation. Complete and approximate differential equations of the neutral axis of the beam 342
5.10. Method of initial parameters for strain estimation for beams. Universal equations of the neutral axis of a beam 354
5.11. Beams of variable cross section. Strength analysis for car springs 363
5.12. Beams of stepped cross section and their strength analysis by using of graph analytical method 368

Chapter 6. Complex resistance. Estimation of strength and stiffness of structural elements and machine parts for agricultural purpose 372

6.1. Compound and unsymmetrical bending 373
6.2. Eccentrical tension and compression of a straight riser 377
6.3. Combined action of bending and torsion. Strength analysis of a shaft with round cross section under bending and torsion 380
6.4. Curved rods and their strength analysis 389
6.5. Potential energy of deformation of an elastic system. Energy methods for estimation of strain-state in elastic rod systems 396
6.6. Castiliano's theorem 400
6.7. Method of introducing an additional dummy force 404
6.8. The integrals of Mohr and Vereshchagin's method 406
6.9. Statically indeterminate rod systems. Strength analysis of statically indeterminate frames by method of forces 410

Chapter 7. Stability of compressed structural elements and machine parts 418

7.1. The concept of stable and unstable states of elastic equilibrium 419
7.2. Critical force for compressed rod and its estimation. Euler's formula 421
7.3. Rod constraints and their influence on a critical force value 424
7.4. The limits of Euler's formula applicability 428
7.5. Stability estimation of rods in outside of applicability of Hook's law and Euler's formula 430
7.6. Practices in estimation of compressed rod stability 431
7.7. Longitudinal bending of eccentrically compressed rods 440

Part III. Theory of machines and mechanisms 443

Chapter 1. Introduction. Subject TMM 443

1.1. Course content and methods of theory of mechanisms and machines 443
1.2. General concepts of the theory of mechanisms and machines 445

Chapter 2. Structural analysis of mechanisms 446

2.1. Kinematic pairs and their classification 446
2.2. Kinematic circuits and connections 450
2.3. Mechanism as a closed kinematic chain 452
2.4. Structural analysis and classification of flat mechanisms 454

Chapter 3. Kinematic analysis of mechanisms 459

3.1. Construction of plans of provisions of mechanisms 459
3.2. Construction of trajectories of points of mechanisms 461
3.3 Kinematic diagrams. Construction of the diagram of movements 461
3.4. Diagrams of speeds and accelerations 463
3.5. Determination of speeds and accelerations of the first class mechanism 464
3.6. Speed plan of group II class 1 type 466
3.7. Similarity theorem for velocity plans 467
3.8. Construction of the plan of accelerations of two-line group of 1 type 468
3.9. Similarity theorem for acceleration plans 469
3.10. Plans of speeds and accelerations of groups of II class 2 type 470

Chapter 4. Friction in mechanisms and machines 473

4.1. Dry friction sliding bodies 474
4.2. Friction of translational kinematic pair 476
4.3. Friction of the wedge slider 478
4.4. Friction of a rotating kinematic pair 479
4.5. Sliding friction lubrication 480
4.6. Rolling friction 481

Chapter 5. Dynamics of machines 483

5.1. Forces acting in machines 483
5.2. Mechanical characteristics of machines 484
5.3. Kinetic energy of mechanism and machine. Summary masses in mechanisms 486
5.4 Reduction of forces in mechanisms 489
5.5. Equations of motion of a machine 490
5.6. Study of machine motion. Stages of movement 493
5.7. Efficiency of the machine 496
5.8. Adjusting the stroke of machines 498

Part 4. Materials science 504

Chapter 1. The main groups of materials and their classification 504

1.1. Subject and tasks of materials science 504
1.2. The main groups of materials and directions of their use in agro-industrial production 505
1.3. General classification of materials 507
1.4. Basic physical and chemical, mechanical and technological properties of materials and their values 510
1.5. Fundamentals of rational selection of materials 517

Chapter 2. Atomic-crystalline structure of metals 519

2.1. Metal type of interatomic bond and its effect on properties 519
2.2. Types of crystal lattices in metals 519
2.3. Anisotropy of crystals 521
2.4. Polymorphism 522
2.5. Types of defects of crystal structure and their influence on mechanical properties 524
2.6. Crystallization of metals and methods of grain grinding 529

Chapter 3. Fundamentals of alloy theory 533

3.1. The main types of phases in alloys and their properties 533
3.2. The main types of diagrams of the state of double alloys 537
3.3. Iron-carbon state diagram 539

Chapter 4. Fundamentals of heat treatment theory 547

4.1. Conversion to steel when heated 548
4.2. Characteristics of the isothermal diagram transformation of austenite 550
4.3. Hardening of tempered steel 554

Chapter 5. Fundamentals of heat treatment technology 556

5.1. Annealing of the I and II kind 556
5.2 Normalization of steel 559
5.3. Hardening of steel 559
5.4. Cold processing of steel 567
5.5 Characteristics and purpose of the main types of leave 567

Chapter 6. Surface hardening 569

6.1. Surface hardening 569
6.2. Basics of chemical and heat treatment 572
6.3. Using slander to strengthen work surfaces 578

Chapter 7. Structural and tool steels 580

7.1. Influence of carbon and impurities on steel properties 580
7.2. Classification of steels 586
7.3. Structural carbon steels 589
7.4. Tool carbon steels 592

7.5. Advantages and disadvantages of carbon steels 593
7.6. Classification of alloy steels 593
7.7. Structural alloy steels 597
7.8. Tool alloy steels 601

Chapter 8. Special steels and alloys 609

8.1. Automatic steels 609
8.2. Foundry steel 611
8.3. Ball bearing steel 612
8.4. Stainless steel 615
8.5. Wear-resistant steels 619
8.6. Heat-resistant and heat-resistant steels and alloys 621
8.7. Magnetic steels and alloys 624

Chapter 9. Irons 628

9.1. Classification of cast irons by microstructure 630
9.2. Influence of chemical composition and cooling rate on the structure of cast iron 634
9.3. Modification of cast iron 636
9.4. Structure and properties of gray cast iron 637
9.5. Production of malleable cast iron and its use 639
9.6. High-strength modified cast iron – promising construction material 643
9.7. Cast iron with vermicular graphite 644
9.8. Special cast irons 646
9.9. Heat treatment of cast iron 647

Chapter 10. Heat treatment of cast iron 650

10.1. Features of properties of non-ferrous alloys 650
10.2. Classification of non-ferrous alloys 652
10.3. Characteristics and use of aluminum alloys 655
10.4. Copper and its alloys 661
10.5. Prospects for the use of titanium alloys 666
10.6. Characteristics and purpose of magnesium alloys 669
10.7. Characteristics and purpose of babbits 671

Chapter 11. Non-metallic construction materials 673

11.1. Properties of plastics 673
11.2. The main components of plastics 674
11.3. Types of plastics and their applications 677
11.4. Rubber and articles thereof 684

Chapter 12. New construction materials 688

12.1. Composite materials 688
12.2 Powder materials 692

Bibliography 697

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Дніпровський державний
аграрно-економічний університет

ЗЕМЛЕРОБСЬКА МЕХАНІКА

Том 2

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОЇ МЕХАНІКИ

Відповід. за випуск канд. техн. наук, проф. А.Г. Дем'яненко

Редактор М.П. Гончаренко, С.Г. Пустовгарова

Комп'ютерна верстка В.О. Гурідова

Редакційно-видавничий відділ

Дніпровського державного аграрно - економічного університету

49600, м. Дніпропетровськ, вул. С.Єфремова, 25

Підписано до друку 25.08.2022.
Формат 70x108/16.
Обл.-вид. арк. 36,2. Ум. друк. арк. 82,77.
Наклад 100 прим. Друк офсетний. Зам. №5103/074.

Видавець «Свідлер А.Л.»
49041, м. Дніпро, а/с 2493, тел. +38 (067) 635-78-83
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи:
Серія ДК № 3876 від 10.09.2010 р.
Надруковано в типографії видавця «Свідлер А.Л.»
http://garant-sv.com.ua

ISBN 978-617-627-173-4