УДК 378.147:51

Т. С. Кагадій,
д. ф.-м. н., професор, професор кафедри прикладної математики,
НТУ Дніпровська політехніка
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-6116-4971
І. В. Щербина,
к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри вищої математики, фізикита загально-інженерних дисциплін, Дніпровський державний аграрно-економічний університет
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-3968-4326
А. Г. Шпорта,
к. ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики
НТУ "Дніпровська політехніка"
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-1260-7358

DOI: 10.32702/2306-6792.2025.7.64

ЗАСТОСУВАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ РОЗДІЛІВ МАТЕМАТИКИ У ФОРМУВАННІ ФАХОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ЕКОНОМІСТІВ

T. Kagadiy,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics,
Dnipro University of Technology
I. Shcherbyna,
PhD in Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Physics and General Engineering Disciplines, Dnipro State Agrarian and Economic University
A. Shporta,
PhD in Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Dnipro University of Technology

APPLICATION OF SPECIAL SECTIONS OF MATHEMATICS IN THE FORMATION OF PROFESSIONAL COMPETENCIES OF ECONOMISTS

Дана робота присвячена актуальній проблемі підвищення ефективності навчання математиці здобувачів економічних спеціальностей шляхом посилення її практичної спрямованості. Автори пропонують інтегрувати до навчального процесу методи математичного програмування, теорії ігор, та теорії графів, демонструючи їх застосування на конкретних прикладах економічного змісту.

Традиційний курс математики, що базується на складних техніках (інтегрування, розв'язання диференціальних рівнянь), часто є важким для сприйняття здобувачами економічних спеціальностей та не завжди відповідає фаховому спрямуванню або професійним потребам. Натомість, методи математичного програмування та теорії ігор, що оперують з лінійними та нелінійними функціями, є більш релевантними для розв'язання економічних задач, таких як оптимізація виробництва, управління ресурсами, аналіз ринкової конкуренції тощо. Для більшої наочності при демонстрації різних економічних процесів доречно використовувати сучасну математичну лексику теорії графів.

Автори наводять приклади застосування лінійного та нелінійного програмування для розв'язання задач оптимізації виробництва в умовах обмежених ресурсів та ринкової конкуренції. Зокрема, розглядається задача максимізації чистого доходу фермерського господарства шляхом оптимального розподілу посівних площ під різні культури. Для розв'язання цієї задачі використовується метод множників Лагранжа, що дозволяє звести задачу умовного екстремуму до задачі безумовного екстремуму.

Окрему увагу в статті приділено теорії ігор, що є потужним інструментом для аналізу стратегічної взаємодії між економічними агентами. Автори підкреслюють, що теорія ігор дозволяє будувати математичні моделі, які допомагають прогнозувати та аналізувати різні сценарії, що виникають в умовах конкуренції, переговорів та прийняття рішень за умов невизначеності. Наведено приклад застосування теорії ігор для вибору оптимальної потужності елеватора з урахуванням різних варіантів врожаю.

Робота містить конкретні економічні приклади, що ілюструють можливості застосування математичного програмування та теорії ігор для розв'язання практичних задач. Теорія графів демонструє можливість розв'язання одного з видів задач про вибір оптимального маршруту (задача про побудову каркасного дерева). Автори наголошують на важливості використання сучасних інформаційних технологій та програмних пакетів для ефективного розв'язання таких задач.

This work is devoted to the urgent problem of increasing the efficiency of mathematics teaching for students of economic specialties by strengthening its practical orientation. The authors propose to integrate mathematical programming and game theory methods into the educational process, demonstrating their application on specific examples of economic content.

The traditional mathematics course, which is based on complex techniques (integration, solving differential equations), is often difficult for economics students to perceive and does not always meet their professional needs. In contrast, mathematical programming and game theory methods, which operate with linear and nonlinear functions, are more relevant for solving economic problems, such as production optimization, resource management, market competition analysis, etc.

The authors provide examples of the application of linear and nonlinear programming to solve production optimization problems under conditions of limited resources and market competition. In particular, the problem of maximizing the net income of a farm is considered by optimally distributing the acreage under different crops. To solve this problem, the Lagrange multiplier method is used, which allows reducing the conditional extremum problem to the unconditional extremum problem.

The article pays special attention to game theory, which is a powerful tool for analyzing strategic interaction between economic agents. The authors emphasize that game theory allows building mathematical models that help predict and analyze various scenarios that arise in competition, negotiations, and decision-making under uncertainty. An example of the application of game theory to select the optimal elevator capacity taking into account different harvest options is given.

The work contains specific economic examples that illustrate the possibilities of applying mathematical programming and game theory to solve practical problems. Graph theory demonstrates the possibility of solving one type of problem about choosing the optimal route (the problem about constructing a spanning tree). The authors emphasize the importance of using modern information technologies and software packages for the effective solution of such problems.

Ключові слова: математична модель, цільова функція, теорія ігор, метод множників Лагранжа, теорія графів.

Key words: mathematical model, objective function, game theory, Lagrange multiplier method, graph theory.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК ІЗ ВАЖЛИВИМИ НАУКОВИМИ ЧИ ПРАКТИЧНИМИ ЗАВДАННЯМИ

Авторами запланована серія публікацій, в якій висвітлюються проблеми розвитку та осучаснення методології викладання математики для економічних спеціальностей. Вже відзначалась важливість спрямованості курсу вищої математики на отримання здобувачами фахової економічної підготовки, що забезпечується вибором певних розділів та задач [7]. Великий вплив на подальший розвиток наукових інтересів та успішність здобувачів має правильний вибір освітніх компонент для формування індивідуальної траєкторії навчання. Такі важливі, сучасні розділи математики, як "Теорія графів", "Математичне програмування", "Теорія ігор" базуються на основних відомостях, що обов'язково засвоюються вже на перших курсах (похідна, система лінійних алгебраїчних рівнянь та ін.). Цифровізація сучасного світу вимагає від економістів навичок побудування математичних моделей та володіння методами дослідження таких моделей. Описано, як теорія ігор дозволяє моделювати ситуації, де присутня стратегічна взаємодія між учасниками, що мають суперечливі інтереси. Теорія ігор є важливим інструментом для досягнення компромісу між протилежними сторонами, адже вона дає змогу виявити оптимальні стратегії для кожного учасника в умовах конкуренції та невизначеності.

Автори також проводять огляд ключових досліджень та публікацій у цій галузі, висвітлюючи основні напрями розвитку теорії ігор, її застосування в економіці та соціальних науках. Аналізуючи значення теорії ігор для сучасної економічної науки, стаття вказує на її здатність не лише допомогти в прийнятті рішень, але й надавати нові інструменти для розв'язання складних економічних проблем.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Сучасні дослідження вказують на те, що існують значні проблеми в адаптації математичної освіти до потреб економічних спеціальностей.

Публікації [5, 6] демонструють сучасні підходи до використання математичного програмування у розв'язанні різноманітних економічних задач, від оптимізації виробничих процесів до моделювання ринкових механізмів. В цих публікаціях пропонуються методи побудови математичної моделі на прикладі оптимізації виробничого плану підприємства; нелінійної динамічної математичної моделі вільного ринку товарів, у якій досягається баланс між пропозицією та попитом, а також обґрунтовують необхідність оптимізації процесу розв'язання економічних задач через залучення програмного забезпечення та мов програмування.

В роботі [3] встановлено, що багато задач з економіки розв'язуються методом побудови графів та впорядкуванням деяких факторів, що приводить до знаходження оптимального значення шуканих величин. Дослідження [4] присвячено розробці нечіткої математичної моделі пошуку оптимального плану та розрахунку основних економічних параметрів проекту створення сайту електронної комерції з нечіткою множиною планів. Також подано метод розв'язання окресленої задачі з використанням теорії графів. В роботах [1, 2] розглянуто історію розвитку теорії ігор, її сутність, вказана класифікація ігор та форми їх подання, показана можливість застосування цієї теорії в економіці.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Мета даної роботи — показати можливість викладення деяких методів математичного програмування, теорії ігор та теорії графів на прикладах економічного змісту. Вказані розділи містять сучасну математичну лексику, у якості ілюстрацій використовують різні задачі з економіки і для розуміння основних підходів не потребують застосування складних технік (інтегрування, розв'язання диференціальних рівнянь). Для багатьох методів вже розроблені стандартні пакети програм та калькулятори. Здобувачі можуть приймати участь в побудові економіко-математичних моделей, викладачі мають можливість надавати більше самостійності в питаннях, що стосуються економіки і використовувати пропозиції студентів у подальшому розв'язанні задач.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ідеї та методологія лінійного програмування, а саме, побудова цільової функції, дослідження її на екстремум, застосування графічного або симплекс методу, рішення тих чи інших проблем оптимізації часто зустрічаються при розв'язанні задач економічного змісту. Наприклад, в задачі пошуку оптимальних обсягів виробництва, коли зв'язки між різними характерними величинами (витрати ресурсів та обсяги виготовленої продукції, ціна, реклама, попит та ін.) задаються у вигляді лінійних функцій. Економіко-математичні моделі, що більш точно відображають реальні задачі, як правило, використовують нелінійні функції і зводяться до задач нелінійного програмування.

Наприклад, для деякої виробничої системи необхідно визначити план випуску продукції, за умови найкращого способу використання ресурсів системи. Відомі загальні запаси кожного ресурсу, нормативи витрат на одиницю продукції та ціна реалізації. У якості критерія оптимальності можна обрати максимізацію доходу від реалізації продукції. Якщо записати лінійну залежність загальної виручки від обсягів проданого товару та ціни одиниці продукції, то така цільова функція не врахує багато чинників, що присутні в умовах ринкової конкуренції: оптимальне значення ціни одиниці продукції при якій реалізація буде максимальною, умови невизначеності та ризики (для визначення останніх використовується дисперсія, що одразу приводить до нелінійності функції).

Загальна задача математичного програмування — це знаходження набору змінних, при яких цільова функція набуває екстремального (мінімального або максимального) значення при певних умовах. Якщо цільова функція, або хоча б одна функція, що фігурують в умовах задачі нелінійні, тоді приходимо до задачі нелінійного програмування. На жаль, не існує універсального методу розв'язання таких задач. Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, в яких система обмежень складається лише з рівнянь і базуються на застосуванні диференційного числення. Розглянемо метод множників Лагранжа, для оволодіння яким здобувачі мають володіти технікою диференціювання функцій декількох змінних. Ідея методу полягає в заміні початкової задачі простішою. Для цього цільову функцію заміню-

Таблиця 1. Техніко-економічні показники вирощування культур

Показник	*Соняшник* x_1, *сотні га*	*Кукурудза* x_2, *сотні га*
Урожайність, т/га	2	10
Ціна, грн/т	20000	10000
Собівартість, грн/т	$y_1 = 12x_1^2 - 200x_1 + 20400$	$y_2 = 12x_2^2 - 150x_2 + 10350$

ють іншою, з більшою кількістю змінних, тобто такою, що включає в себе умови, подані як обмеження. Після такого перетворення подальше розв'язування задачі полягає в знаходженні екстремуму нової функції, на змінні якої не накладено ніяких обмежень. Тобто від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі визначення безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, завдяки такому перетворенню можливе застосування методів класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

Задача 1. Фермерське (селянське) господарство виділило 800 га ріллі під основні сільськогосподарські культури — соняшник і кукурудзу на зерно. Необхідно знайти оптимальні площі посіву цих культур (Табл. 1).

Нехай: x_1 — площа ріллі під соняшником, сотні га;

x_2 — площа ріллі під кукурудзою, сотні га.

Звернемо увагу на те, що собівартість тонни будь-якої культури залежить від відповідної площі посіву.

Запишемо економіко-математичну модель цієї задачі. Критерієм оптимальності візьмемо максимізацію чистого доходу:

$$\max f = 2\left(20000 - 12x_1^2 + 200x_1 - 20400\right)x_1 \cdot 100 + \\ +10\left(10000 - 12x_2^2 + 150x_2 - 10350\right)x_2 \cdot 100 = \\ = 200\left(-12x_1^2 + 200x_1 - 400\right) + 1000\left(-12x_2^2 + 150x_2 - 350\right)$$

за умов $x_1 + x_2 = 8$.

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) = 200\left(-12x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1\right) + \\ +1000\left(-12x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2\right) + \lambda_1\left(8 - x_1 - x_2\right).$$

Візьмемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{x_1} = 200\left(-36x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{x_2} = 1000\left(-36x_2^2 + 300x_2 - 350\right) - \lambda_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\lambda_1} = 8 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь визначаємо координати сідлових точок. З першого та другого рівняння знаходимо λ_1 і, прирівнюючи вирази, маємо:

$$200\left(-36x_1^2 + 400x_1 - 400\right) = 1000\left(-36x_2^2 + 300x_2 - 350\right)$$

або, скоротивши на 200 обидві частини і розкривши дужки, отримаємо:

$$-36x_1^2 + 400x_1 - 400 = 5\left(-36x_2^2 + 300x_2 - 350\right) \quad (1).$$

Із останнього рівняння системи маємо: $x_1 = 8 - x_2$.

Підставимо вираз для x_1 у рівність (1). Отримаємо:

$$36\left(8 - x_2\right)^2 - 400\left(8 - x_2\right) + 400 = 180x_2^2 - 1500x_2 + 1750$$

$$36x_2^2 - 176x_2 - 496 = 180x_2^2 - 1500x_2 + 1750;$$

або

$$144x_2^2 - 1324x_2 + 2246 = 0.$$

Отже,

$x_{2(1)} \approx 6,95$;

$x_{2(2)} \approx 2,24$.

Відповідно дістаємо:

$x_{1(1)} \approx 1,05$;

$x_{1(2)} \approx 5,76$.

$$\begin{cases} x_{1(1)} \approx 1,05; \\ x_{2(1)} \approx 6,95. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1(1)} \approx 5,76; \\ x_{2(1)} \approx 2,24. \end{cases}$$

Тобто отримали дві сідлові точки: $X_1(1,05; 6,95)$ та $X_2(5,76; 2,24)$.

Перевіримо за допомогою достатньої умови існування екстремуму спочатку сідлову точку $X_1(1,05; 6,95)$.

Матриця Гессе має вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 64880 & 0 \\ 1 & 0 & -200400 \end{pmatrix}$$

Головні мінори утворюють знакозмінний ряд та, починаючи з головного мінору 2-го порядку, наступний мінор визначається знаком $(-1)^{m+1} = (-1)^2$, тобто $X_1(1,05; 6,95)$ є точкою максимуму.

Обчислимо значення цільової функції в цій точці: $f(X_1) = 72224$.

Аналогічні обчислення для точки $X_2(5,76;2,24)$ показують, що вона не є екстремальною.

Отже, цільова функція набуде максимального значення, якщо соняшник вирощуватиметься на площі 105 га, а кукурудза — на площі 695 га.

У палітрі інструментів економічного аналізу теорія ігор займає особливе місце, пропонуючи унікальний погляд на прийняття рішень у складних ситуаціях.

Основна ідея теорії ігор полягає в тому, що економіст може використовувати математичні моделі для прогнозування та аналізу різних сценаріїв, що виникають у процесі економічної взаємодії.

Особливо це актуально в таких сферах, як ринки з олігополіями, переговори між підприємствами, конкуренція між фірмами, державна політика, а також у випадках, коли необхідно ухвалювати рішення за умов невизначеності щодо поведінки інших учасників. Загалом, теорія ігор є потужним інструментом для аналізу і розв'язання економічних задач, пов'язаних із конкуренцією, співпрацею, переговорним процесом та іншими видами стратегічної взаємодії. Її застосування допомагає не тільки виявити оптимальні стратегії, але й передбачити результати тих чи інших економічних процесів, що дозволяє приймати більш обгрунтовані рішення на макро- та мікрорівнях економіки.

Теорія ігор — це галузь математики, що вивчає методи побудування математичних моделей для оптимальних рішень у ситуаціях, де існує конфлікт інтересів, зокрема у випадках, коли важко передбачити всі умови. Вона допомагає особам, які приймають рішення, здійснювати ретельний аналіз ситуації і, на основі цього аналізу, вибирати найбільш ефективну стратегію для вирішення складних проблем.

Задача 2. У сільськогосподарському районі з посівною площею 1430 га вирішено збудувати елеватор. Є типові проекти елеватора потужністю на 20, 30, 40, 50 та 60 тис. ц зерна. Прив'язка проєкту обійдеться в 37 тисяч грошових одиниць. Вартість матеріалів та обладнання елеватора потужністю 20 тис.ц. дорівнює 60 тис. грошових одиниць та зростає на 10% зі зростанням потужності елеватора на 10 тис.ц. Витрати на експлуатацію елеватора потужністю 20 тис.ц. становлять 10 тис. гр.од. та зменшуються на 10% зі збільшенням потужності на 10 тис. ц. За зберігання зерна на рахунок елеватора вноситься плата у розмірі 10 гр. од. за 1 ц. Урожай у цьому районі коливається від 14 до 20 ц з 1 га. Який елеватор краще побудувати ?

Для того, щоб вибрати найкращий варіант для будівництва елеватора, можна використати критерії прийняття рішень, враховуючи економічні параметри, зокрема вартість будівництва, експлуатаційні витрати та доходи від зберігання зерна.

Визначимо витрати на будівництво та експлуатацію для кожного варіанту елеватора.

Матричний вектор потужностей елеваторів: $P = (20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60)^T$ (в тисячах центнерів).

Матричний вектор витрат на будівництво та обладнання: $C = (97 \quad 103 \quad 109{,}6 \quad 116{,}86 \quad 124{,}85)^T$ (в тис. грошових одиниць);

Матричний вектор експлуатаційних витрат: $E = (10 \quad 9 \quad 8{,}1 \quad 7{,}29 \quad 6{,}651)^T$ (в тис. грошових одиниць);

Матричні вектори доходів від зберігання зерна для кожної потужності елеватора: $D_{\min} = (200200 \quad 200200 \quad 200200 \quad 200200 \quad 200200)^T$,

$D_{\max} = (286000 \quad 286000 \quad 286000 \quad 286000 \quad 286000)^T$ (в грошових одиницях) для врожаю 14 ц/га та 20 ц/га, відповідно.

Тоді чистий дохід буде

$N = D - (C+E)$.

Для мінімального урожаю чистий дохід для кожної потужності елеватора:

$N_{min} = (93200 \quad 88200 \quad 82500 \quad 76050 \quad 68793)^T$

а для максимального

$N_{max} = (179000 \quad 174000 \quad 168300 \quad 161850 \quad 154593)^T$.

Враховуючи, що місткість першого елеватора 20 тис. ц. отримаємо матрицю виграшів:

$$A = \begin{pmatrix} 93200 & 93000 \\ 88200 & 174000 \\ 82500 & 168300 \\ 76050 & 161850 \\ 68793 & 154593 \end{pmatrix}$$

Максимінний критерій Вальда. При максимінному критерії Вальда оптимальною вважається така стратегія, що забезпечує гравцю максимум мінімального виграшу:

$$W = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} \alpha_{ij}$$

$$W = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} \alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 93000 & 93000 \\ 88200 & 174000 \\ 82500 & 168300 \\ 76050 & 161850 \\ 68793 & 154593 \end{pmatrix} = \max_{1\le i\le m} \begin{pmatrix} 93000 \\ 88200 \\ 82500 \\ 76050 \\ 68793 \end{pmatrix} = 93000$$

$N_{min} = (93200 \quad 88200 \quad 82500 \quad 76050 \quad 68793)^T$

Отже найкращим є елеватор на 20 000 ц.

Для критерія Севіджа $W=\min\limits_{1\le i\le m}\max\limits_{1\le j\le n} r_{ij}$, де $r_{ij}=\max\limits_{i} a_{ij}-a_{ij}$ — елементи матриці ризиків.

$$\text{Матриця ризиків: } R=\begin{pmatrix}0 & 81000\\ 4800 & 0\\ 10500 & 5700\\ 16950 & 12150\\ 24207 & 19407\end{pmatrix}$$

$$W=\min_{1\le i\le m}\max_{1\le j\le n} r_{ij}=\min_{1\le i\le 5}\max_{1\le j\le 2}\begin{pmatrix}0 & 81000\\ 4800 & 0\\ 10500 & 5700\\ 16950 & 12150\\ 24207 & 19407\end{pmatrix}=\min_{1\le i\le 5}\begin{pmatrix}81000\\ 4800\\ 10500\\ 16950\\ 24207\end{pmatrix}=4800,$$

отже за критерієм Севіджа доцільно побудувати елеватор на 30 тис.ц.

Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца рекомендує при виборі рішення не керуватися крайнім оптимізмом, ні крайнім песимізмом. Критерій Гурвіца рекомендує стратегію, яка визначається за такою формулою:

$$W=\max_{1\le i\le m}\left[\alpha\min_{1\le j\le n} a_{ij}+(1-\alpha)\max_{1\le j\le n} a_{ij}\right],$$ де $\alpha\in[0,1]$ — ступінь песимізму.

$$W=\max_{1\le i\le m}\left[0{,}5\min_{1\le j\le 2}\begin{pmatrix}93000 & 93000\\ 88200 & 174000\\ 82500 & 168300\\ 76050 & 161850\\ 68793 & 154593\end{pmatrix}+0{,}5\max_{1\le j\le 2}\begin{pmatrix}93000 & 93000\\ 88200 & 174000\\ 82500 & 168300\\ 76050 & 161850\\ 68793 & 154593\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}93000\\ 131100\\ 125400\\ 118950\\ 111693\end{pmatrix}=131100$$

Критерій Лапласа. При невідомих ймовірностях станів "природи" можна прийняти, що вони рівноймовірні, тобто $p(\Pi_j)=\frac{1}{n}$, j = 1,..., n, та вибір рішення визначається критерієм Лапласа, при якому ми вибираємо таку стратегію Ai, що

$$W=\max_{1\le i\le m}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right]=\max_{1\le i\le m}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\begin{pmatrix}93000 & 93000\\ 88200 & 174000\\ 82500 & 168300\\ 76050 & 161850\\ 68793 & 154593\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}93000\\ 131100\\ 125400\\ 118950\\ 111693\end{pmatrix}=131100$$

За більшістю критеріїв (3 з 4) краще побудувати елеватор на 30 тис.ц.

Розв'язок багатьох важливих, актуальних та складних задач, що мають зміст економічного характеру, доцільно шукати за допомогою теорії графів. Тут слід згадати транспортну задача; задачу про мережний графік, що дозволяє побудувати та оптимізувати порядок робіт; задачу комівояжера. Загальна задача комівояжера полягає в наступному: по заданій системі доріг відвідати всі пункти або міста в такій послідовності, щоб пройдений шлях був найкоротшим. Мовою теорії графів це означає, що у навантаженому (вказані довжини ребер) зв'язному графі знайти найкоротший маршрут, що проходить через усі вершини графа. Ця звичайна задача комівояжера завжди має розв'язок. Наявність додаткових умов може значно ускладнити задачу. Наприклад, якщо вимагається, щоб комівояжер відвідував кожне місто лише один раз. Це задача комівояжера в гамільтоновій постановці, для якої досить часто розв'язок взагалі не існує.

Аналогічну задачу можна сформулювати для орієнтовних графів (вздовж всіх ліній вказані напрямки руху). Обчислювальна складність таких завдань дуже висока: порядку $(n-1)!$. Точні алгоритми, що гарантують отримання маршруту комівояжера в будь-якому випадку, складні і застосовуються до невеликих графів. Незважаючи на те, що ця задача вивчалась десятиліттями, вона не втратила своєї актуальності. Найбільші світові компанії замислюються над маршрутами доставки товарів до клієнтів, щоб скоротити шлях, зробити його більш ефективним та безпечним.

З цієї точки зору цікавими є задачі, що мають широке практичне застосування, але одночасно є найпростішими для алгоритмізації та комп'ютерної реалізації. Наприклад, задача про побудову єдиного каркасного (скелетного) дерева.

Задача 3. Нехай група досліджує ринок збуту сільськогосподарської продукції, постійно обробляє дані з різних міст регіону та оптимізує продажі за рахунок швидкої доставки товару з одного пункту до іншого. Необхідно скласти схему, що має з'єднати всі міста регіону і дасть можливість з будь-якого пункту по-

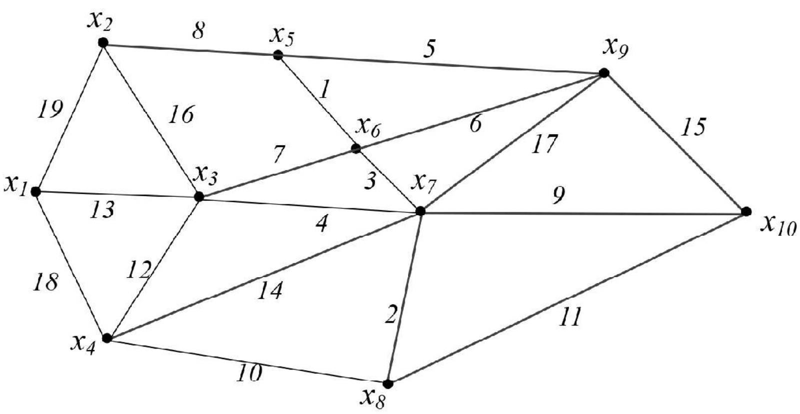

Рис. 1. Мапа шляхів, що надається, подана у вигляді графа

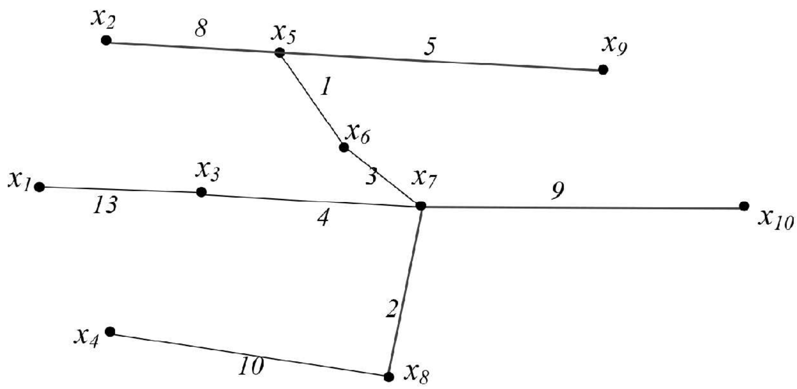

Рис. 2. Найкоротше дерево

трапити в інший (можливо, з зупинками для перевантаження продукції) таким чином, щоб загальна довжина маршрутів була найменшою.

На рисунку 1 показана карта шляхів, що надається у вигляді графа. Вершини графа — це міста, ребра — шляхи, що з'єднують міста, довжина ребер відповідає довжинам відповідних шляхів (зважений граф).

Якщо зв'язний граф близький до повного графу (містить всі можливі ребра і петлі), то кількість дерев-скелетів дорівнює n^{n-2} і пряме перерахування всіх можливих дерев та їх ваг має дуже велику кількість обчислень (для $n=22$ кількість скелетів більше ніж 10^{25}). Існує кілька ефективних класичних алгоритмів. Наприклад, алгоритм Дж. Краскала:

— обирають найкоротше ребро у графі;

— на кожному наступному кроці додають найкоротше ребро, з тих що залишились за умови, що не утворюється цикл;

— процес завершується після $n-1$ кроку, якщо n — кількість вершин у графі.

В результаті отримують дерево, що не містить циклів і має $n-1$ ребер.

Відповідно до вказаного алгоритму маємо: обираємо найкоротші ребра в наступному порядку: (x_5,x_6), (x_7,x_8), (x_6,x_7), (x_3,x_7), (x_5,x_9).

Наступними за довжиною є рабра (x_6,x_9) та (x_3,x_6), але їх не обирають, оскільки вони утворюють цикли. Далі до кістякового дерева потрапляють (x_2,x_5) (x_7,x_{10}) (x_4,x_8) (x_8,x_{10}).

Таким чином, маємо найкоротше дерево (рис. 2).

Його довжина 1+2+3+4+5+8+9+10+13=55.

Для розв'язання цієї ж задачі можна використовувати алгоритм Прима та інші алгоритми, наприклад, пошук у глибину, або пошук в ширину.

ВИСНОВКИ

Інтеграція методів математичного програмування, теорії ігор та теорії графів до навчального процесу сприятиме розширенню професійного світогляду здобувачів економічних спеціальностей, розвитку їх аналітичного мислення та здатності приймати обгрунтовані рішення в умовах складної економічної ситуації. Наведені задачі містять сучасну математичну лексику, можуть зацікавити читача та допомогти йому опанувати прикладні пакети програмування, що використовуються в економіці.

Література:

1. Олешко Т.І., Лобанов М.О. Економічні задачі в теорії ігор. Проблеми системного підходу в економіці. Збірник наукових праць. Випуск 3 (65), 2018 С. 120—123.

2. Гладкова Л., Наумова М.. Застосування теорії ігор в економіці. Наукові записки [Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка]. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. 2013. Вип. 4(2).С.16-21. http://nbuv.gov.ua/UJRN/nz_pmfm_2013_4%282%29__6

3. Возняк О.Г., Голубник О.Р. Пошук оптимальних ліній сполучення методом графів. Економіка і регіон 2023. № 1 (88) С. 166—173 https://doi.org/10.26906/EiR.2023.1(88).2886

4. Matviienko O., & Zakutnii, S. Fuzzy logic in the problems of determining the economic parameters of project implementation. Innovative technologies and scientific solutions for industries, 2024. № 1 (27), С. 96—108. https://doi.org/10.30837/ITSSI.2024.27.096

5. Задорожня, Т., & Шибко, О. Використання лінійного програмування для розв'язання задач оптимізації. Grail of Science, 2023. № 26. С. 244—248. https://doi.org/10.36074/grail-of-science.14.04.2023.043

6. Гевлич І., Використання прикладних програм та навичок програмування при вирішенні економетричних задач. Економіка і організація управління. 2024, С. 69—79. https://doi.org/10.31558/2307-2318.2024.2.6

7. Щербина І.В. Кагадій Т.С., Сушко Л.Ф., Бабець Д.В. Розвинення методологій викладання математики при формуванні фахових компетентностей економістів. Агросвіт. 2022 № 19, С. 40—47. https://doi.org/10.32702/2306-6792.2022.19.40

References:

1. Oleshko, T.I. and Lobanov, M.O. (2018) "Economic problems in game theory", Problemy systemnoho pidkhodu v ekonomitsi, vol. 3 (65), pp. 120—123.

2. Hladkova, L. and Naumova, M. (2013). "Application of game theory in economics", Naukovi zapysky Kirovohradskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni Volodymyra Vynnychenka. Seriia: Problemy metodyky fizyko-matematychnoi i tekhnolohichnoi osvity, vol. 4(2), pp. 16—21. http://nbuv.gov.ua/UJRN/nz_pmfm_2013_4%282%29__6 (Accessed 15 March 2025).

3. Vozniak, O.H. and Holubnyk, O.R. (2023) "Finding optimal connection lines using the graph method", Ekonomika i rehion, vol. 1 (88), pp. 166—173. https://doi.org/10.26906/EiR.2023.1(88).2886.

4. Matviienko, O. and Zakutnii, S. (2024). "Fuzzy logic in the problems of determining the economic parameters of project implementation", Innovative technologies and scientific solutions for industries, vol. 1 (27), pp. 96—108. https://doi.org/10.30837/ITSSI.2024.27.096.

5. Zadorozhnia, T. and Shybko, O. (2023). "Using linear programming to solve optimization problems", Grail of Science, vol 26. pp. 244—248. https://doi.org/10.36074/grail-of-science.14.04.2023.043.

6. Hevlych, I. (2024). "Using application programs and programming skills when solving econometric problems", Ekonomika i orhanizatsiia upravlinnia, pp. 69—79. https://doi.org/10.31558/2307-2318.2024.2.6.

7. Shcherbyna, I.V., Kahadii, T.S., Sushko, L.F., and Babets, D.V. (2022). "Development of mathematics teaching methodologies in the formation of professional competencies of economists", Ahrosvit, vol. 19, pp. 40—47. https://doi.org/10.32702/2306-6792.2022.19.40.

Стаття надійшла до редакції 27.03.2025 р.